

**Análisis Comparativo de Métodos Tradicionales  
con el Método de los Elementos Finitos en Placas  
Rectangulares.**



# **Análisis Comparativo de Métodos Tradicionales con el Método de los Elementos Finitos en Placas Rectangulares.**

**JUAN CARLOS VANEGAS UGALDE**  
Ingeniero Civil  
Egresado de la Maestría en Métodos Numéricos  
para Diseño en Ingeniería  
Universidad Politécnica Salesiana

*Dirigido por:*

**ANGEL JULVER PINO VELAZQUEZ**  
Ingeniero Civil  
Máster en Estructuras  
Docente de la Universidad de Cuenca  
Facultad de Ingeniería  
Carrera de Ingeniería Civil



Cuenca - Ecuador

**JUAN CARLOS VANEGAS UGALDE**

*Análisis Comparativo de Métodos Tradicionales con el Método de los Elementos Finitos en Placas Rectangulares.*

Universidad Politécnica Salesiana, Cuenca – Ecuador, 2014

MAESTRÍA EN MÉTODOS NUMÉRICOS PARA DISEÑO EN INGENIERÍA

Formato 170 x 240

Páginas: 109

Breve reseña de los autores e información de contacto:



***Juan Carlos Vanegas Ugalde.***

Ingeniero Civil

Egresado de la Maestría en Métodos Numéricos para Diseño en Ingeniería

Universidad Politécnica Salesiana

[jcvanegas@hotmail.es](mailto:jcvanegas@hotmail.es)

*Dirigido por:*



***Angel Julver Pino Velázquez.***

Ingeniero Civil.

Master en Estructuras.

Docente de la Universidad de Cuenca.

Facultad de Ingeniería.

[Ajulver02@yahoo.com](mailto:Ajulver02@yahoo.com)

**Todos los derechos reservados.**

Queda prohibida, salvo excepción prevista en la Ley, cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública y transformación de esta obra para fines comerciales, sin contar con autorización de los titulares de propiedad intelectual. La infracción de los derechos mencionados puede ser constitutiva de delito contra la propiedad intelectual. Se permite la libre difusión de este texto con fines académicos o investigativos por cualquier medio, con la debida notificación a los autores.

DERECHOS RESERVADOS

©2014 Universidad Politécnica Salesiana.

CUENCA - ECUADOR – SUDAMÉRICA

***Análisis Comparativo de Métodos Tradicionales con el Método de los Elementos Finitos en Placas Rectangulares.***

Edición y Producción:

*Juan Carlos Vanegas Ugalde.*

Diseño de la portada:

*Juan Carlos Vanegas Ugalde.*

IMPRESO EN ECUADOR - PRINTED IN ECUADOR

# INDICE GENERAL

	<u>pag.</u>
<b>CAPITULO 1</b>	<b>1</b>
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	1
1.1 Introducción	1
1.2 Justificación	3
<b>CAPITULO 2</b>	<b>5</b>
FUNDAMENTACION TEORICA	5
2.1 Antecedentes	5
2.2 Marco Teórico	6
2.2.1 Hipótesis Básicas	6
2.2.2 El Método de los Elementos Finitos (MEF)	8
2.2.2.1 Teoría de la Elasticidad	11
2.2.2.1.1 Planteamiento de las Ecuaciones Diferenciales de equilibrio.	12
2.2.2.1.2 Campo de deformaciones	18
2.2.2.1.3 Relación entre Desplazamientos y Deformaciones Unitarias.	18
2.2.2.1.4 Relaciones Esfuerzo Unitario y deformación Unitaria	19
2.2.2.2 Método de Ensamblaje directo	23
2.2.2.2.1 Elásticas de deformación	24
2.2.2.3 Teoría de Funcionales para Análisis de Estructuras	27
2.2.2.3.1 Introducción	27
2.2.2.3.2 Teoría de Funcionales	27
2.2.2.3.3 El Funcional de Energía Potencial	33
2.2.2.4 Elemento Finito de Placa Rectangular	39
2.2.2.4.1 Elemento rectangular de cuatro nodos no conforme	42
2.2.2.4.1.1 Deformaciones unitarias	45
2.2.2.4.1.2 Matriz de rigidez	46
2.2.2.4.1.3 Vector de fuerzas nodales equivalentes	46
2.2.2.4.1.4 Requerimientos de convergencia	46
2.2.2.4.2 Elemento rectangular de 12 grados de libertad de Melosh	49

	<b><u>pag</u></b>
2.2.3	Métodos tradicionales de análisis 50
2.2.3.1	Placas delgadas rectangulares 50
2.2.3.2	Ecuación Diferencial de Gobierno 52
2.2.3.3	Método de Navier. 52
2.2.3.3.1	Carga Uniforme 53
2.2.3.3.2	Carga Puntual. Función de Green 54
2.2.3.3.3	Carga Distribuida en una línea $y = \eta_0$ 55
2.2.3.3.4	Carga Distribuida en una línea $y = f(x)$ 57
2.2.3.3.5	Momento puntual $M_y$ 58
2.2.3.3.6	Momento distribuido $M_y(x)$ en una línea $y = \eta_0$ 59
2.2.3.3.7	Superficie de carga lineal 60
2.2.3.4	Método de Levy 61
2.2.3.4.1	Función de carga con coeficientes constantes 63
2.2.3.4.2	Placa rectangular sometida a carga uniforme. Placa tetra- apoyada 63
2.2.3.4.3	Placa rectangular tetraapoyada sometida a dos distribu- ciones de momento $M_y$ en dos bordes paralelos (caso simétrico) 64
2.2.3.4.4	Placa rectangular tetraapoyada sometida a dos distribu- ciones de momento en dos bordes paralelos (caso anti- simétrico) 66
2.2.3.4.5	Placa rectangular tetraapoyada sometida a una ley de carga lineal 67

## **CAPITULO 3** 69

### **EJEMPLOS DE ANALISIS** 69

3.1	El Método de los Elementos Finitos 69
3.1.1	Losas cuadradas 69
3.1.1.1	Deflexión centro de vano. Losa cuadrada simplemente apoyada. 70
3.1.1.2	Deflexión centro de vano. Placa cuadrada empotrada. 71

3.1.1.3	Momento flector centro de vano. Placa cuadrada simplemente apoyada	71
3.1.1.4	Momento flector centro de vano. Placa cuadrada empotrada	72
3.2	Métodos Tradicionales	73
3.2.1	Flecha, esfuerzos y reacciones en una placa cuadrada de lado $a$ , simplemente apoyada en los cuatro lados sometida a una carga uniforme $q_0$ .	73
3.2.1.1	Flecha	77
3.2.1.2	Esfuerzos	78
3.2.1.2.1	Momentos $M_x$ y $M_y$	78
3.2.1.2.2	Momento Torsor $M_{xy}$	79
3.2.1.2.3	Esfuerzos cortantes	81
3.2.2	Flecha, esfuerzos y reacciones en una placa rectangular de lados $a$ y $2a$ simplemente apoyada en los cuatro bordes sometida a una carga uniforme $q_0$ usando la solución de Levy.	84
3.2.2.1	Flecha	85
3.2.2.2	Esfuerzos	88
3.2.2.2.1	Momentos $M_x$ y $M_y$	88
3.2.2.2.2	Momento Torsor $M_{xy}$	90
3.2.2.2.3	Esfuerzos Cortantes	91

**CAPITULO 4** 95

**ANALISIS DE RESULTADOS** 95

4.1	Análisis comparativo y validación de Resultados	95
4.1.1	El Método de los Elementos Finitos	95
4.1.2	Métodos Alternativos de Diseño	98

**CAPITULO 5** 106

**CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES** 106

	<i><u>pag</u></i>
BIBLIOGRAFIA	108
LINKOGRAFIA	109



## INDICE DE FIGURAS

<i>fig.</i>		<i>pag.</i>
1.1	Estado esquemático de una placa rectangular	1
1.2	Losa de entrepiso	4
1.3	Losa de cimentación	4
2.1	Estado esquemático de una placa rectangular antes de flectar	7
2.2	Estado esquemático de una placa rectangular después de flectar	7
2.3	Definición geométrica de una placa y convenio de signos para desplazamientos y giros	8
2.4	Estructuras discreta y continua	9
2.5	Sistema continuo tipo placa.	10
2.6	Sistema continuo tipo placa discretizado	10
2.7	Ejemplo de discontinuidad a lo largo de un lado común a dos elementos	11
2.8	Variación de esfuerzos normales y tangenciales	13
2.9	(a) Momento con respecto al eje X, (b) Momento con respecto al eje Y	16
2.10	Barra sometida a una fuerza variable en su longitud	29
2.11	Ejemplo de aplicación del procedimiento de Rayleigh - Ritz	30
2.12	Ejemplo de aplicación del procedimiento de Elementos Finitos	32
2.13	Discretización de una viga en elementos finitos rectangulares de cuatro nodos	40
2.14	Elemento de placa rectangular de cuatro nodos no conforme (MZO)	43
2.15	Deformación de la frontera entre dos elementos placa	47
2.16	Incompatibilidad del giro normal a la frontera entre 2 elementos placa	48
2.17	Continuidad de giros en la frontera entre dos elementos placa	48

<u>fig.</u>		<u>pag</u>
2.18	Placa simplemente apoyada en sus cuatro bordes	54
2.19	Placa simplemente apoyada en sus cuatro bordes	55
2.20	Placa simplemente apoyada en sus cuatro bordes	56
2.21	Placa simplemente apoyada en sus cuatro bordes	57
2.22	Placa simplemente apoyada en sus cuatro bordes	58
2.23	Placa simplemente apoyada en sus cuatro bordes	59
2.24	Placa simplemente apoyada en sus cuatro bordes	60
2.25	Placa rectangular con condición de apoyos simples en dos bordes paralelos	61
2.26	Placa simplemente apoyada en sus cuatro bordes	64
2.27	Placa simplemente apoyada en sus cuatro bordes	65
2.28	Placa simplemente apoyada en sus cuatro bordes	66
2.29	Placa simplemente apoyada en sus cuatro bordes	67
3.1	Losa cuadrada y subdivisión en elementos finitos correspondiente a $N=4$	70
3.2	$q(x,y)$ considerando 1 término del desarrollo	75
3.3	$q(x,y)$ considerando 3 términos	75
3.4	$q(x,y)$ considerando 5 términos	76
3.5	$q(x,y)$ considerando 7 términos	76
3.6	$q(x,y)$ considerando 9 términos	76
3.7	Convergencia de la flecha en el centro de la placa con el número de armónicos	78
3.8	Convergencia del $M_x$ en el centro de la placa con el número de armónicos	79
3.9	Convergencia del $M_{xy}$ en las esquinas de la placa con el número de armónicos	80
3.10	Convergencia del $Q_x$ en el centro de lado de la placa con el número de armónicos	82
3.11	Convergencia del $dM_{xy}/dy$ en el centro de lado de la placa con el número de armónicos	84
3.12	Convergencia de la flecha en el centro	87
3.13	Flecha en la sección $y=0, x=0, y=0, x=a/2$	87
3.14	Flecha en la sección $x=a/2, y=0, x=a/2, y=a$ .	87

<u>fig.</u>		<u>pag</u>
3.15	Convergencia de $M_x$ en el centro con el número de armónicos	89
3.16	Convergencia de $M_y$ en el centro con el número de armónicos	90
3.17	Convergencia de $M_{xy}$ en las esquinas con el número de armónicos	91
3.18	Convergencia de $Q_y$ en centro de lado con el número de armónicos	92
3.19	Convergencia de $Q_Y$ en centro de lado con el número de armónicos	92
3.20	Convergencia de $dM_{xy}/dx$ con el número de armónicos	93
3.21	Convergencia de la $dM_{xy}/dy$ en centro de lado con el número de armónicos.	94
4.1	% de error en la deflexión en el centro de vano de una losa simplemente apoyada con elementos tipo Melosh (Carga Uniformemente Distribuida)	95
4.2	% de error en la deflexión en el centro de vano de una placa cuadrada empotrada con elementos tipo Melosh (Carga Uniformemente Distribuida)	96
4.3	% de error en el Momento Flector el centro de vano de una placa cuadrada simplemente apoyada con elementos tipo Melosh (Carga Uniformemente Distribuida)	96
4.4	% de error en el Momento Flector el centro de vano de una placa cuadrada empotrada con elementos tipo Melosh (Carga Uniformemente Distribuida)	97
4.5	% de valor de la solución exacta utilizando métodos tradicionales para el cálculo de la Flecha	98
4.6	% de valor de la solución exacta utilizando métodos tradicionales para el cálculo del Momento	99
4.7	% de valor de la solución exacta utilizando métodos tradicionales para el cálculo del Momento Torsor	99
4.8	% de valor de la solución exacta utilizando métodos tradicionales para el cálculo del Cortante	100

<u>fig.</u>		<u>pag</u>
4.9	% de valor de la solución exacta utilizando métodos tradicionales para el cálculo del Cortante Equivalente	100
4.10	% de valor de la solución exacta utilizando métodos tradicionales para el cálculo de la Flecha	101
4.11	% de valor de la solución exacta utilizando métodos tradicionales para el cálculo del Momento $M_x$	101
4.12	% de valor de la solución exacta utilizando métodos tradicionales para el cálculo del Momento $M_y$	102
4.13	% de valor de la solución exacta utilizando métodos tradicionales para el cálculo del Momento Torsor	102
4.14	% de valor de la solución exacta utilizando métodos tradicionales para el cálculo del Esfuerzo Cortante $Q_x$	103
4.15	% de valor de la solución exacta utilizando métodos tradicionales para el cálculo del Esfuerzo Cortante $Q_y$	103
4.16	% de valor de la solución exacta utilizando métodos tradicionales para el cálculo del Cortante Equivalente $V_y$	104
4.17	% de valor de la solución exacta utilizando métodos tradicionales para el cálculo del Cortante Equivalente $V_x$	104

## INDICE DE TABLAS

<u>Tabla</u>		<u>pag.</u>
3.1	Deflexión centro de vano. Losa cuadrada simplemente apoyada	70
3.2	Deflexión centro de vano. Placa cuadrada empotrada	71
3.3	Momento flector centro de vano. Placa cuadrada simplemente apoyada	71
3.4	Momento flector centro de vano. Placa cuadrada empotrada	72
3.5	Flecha en el centro de la placa para 1, 3 y 5 términos del desarrollo	77
3.6	$M_x$ en el centro de la placa para 1, 3 y 5 términos del desarrollo	79
3.7	$M_{xy}$ en las esquinas de la placa para 1, 3 y 5 términos del desarrollo	80
3.8	$Q_x$ en las esquinas de la placa para 1 3 y 5 términos del desarrollo	82
3.9	$\delta M_{xy}/\delta y$ en los puntos medios de los lados para 1 3 y 5 términos del desarrollo	83
3.10	Evolución de la flecha en el centro con el número de armónicos	86
3.11	Evolución del $M_x$ en el centro con el número de armónicos	89
3.12	Evolución del $M_y$ en el centro con el número de armónicos	89
3.13	Evolución del $M_{xy}$ en las esquinas con el número de armónicos	90
3.14	Evolución del $Q_x$ en centro de lado con el número de armónicos	91
3.15	Evolución del $Q_y$ en centro de lado con el número de armónicos	92
3.16	Evolución de la variación de $M_{xy}$ con $x$ en centro de lado con el número de armónicos	93
3.17	Evolución de variación de $M_{xy}$ respecto a $y$ en centro de lado con número de armónicos	94



# DEDICATORIA

A toda mi familia especialmente a mi esposa  
e hijos por su apoyo incondicional y sincero.

**Juan Carlos**





# PREFACIO

El Método de los Elementos Finitos (MEF) es una herramienta que actualmente se ha convertido, en varios casos, en la base para el análisis de estructuras. En los inicios del desarrollo del método, en cuanto la capacidad computacional era limitada, la aplicación del método incidía en una laboriosa tarea y excesivos “gastos” computacionales. En la actualidad con el auge y desarrollo informático aquellas complicaciones quedaron en el pasado; sin embargo, y el motivo que impulsa al tratamiento del presente tema, es que queda en el aire la pregunta, de que si para resolver problemas de estructuras comunes en ingeniería y de geometría sencilla es necesario usar un método tan sofisticado y finalmente aproximado.

Si bien es cierto, la problemática en la que derivada el MEF, como se mencionó anteriormente, de no contar con la tecnología necesaria, está ampliamente superada, existen numerosos métodos tradicionales que sin necesitarla han demostrado fiabilidad e incluso exactitud. Estos métodos conocidos como tradicionales han sido larga y exitosamente utilizados por diferentes calculistas y además tratados y estudiados en diversas publicaciones a lo largo del tiempo.

Finalmente lo que se pretende con el estudio siguiente, es analizar, en base a la información contenida y desarrollada por diversos autores que han tratado sobre uno y otro método, cuyos resultados son tabulados y expuestos en el presente trabajo, si los casos más comunes de placas que son normalmente motivo de análisis en ingeniería justifica o aplica más un método que otro.



# PROLOGO

Para el desarrollo del presente tema iniciaremos en el Capítulo 1, con los conceptos básicos sobre placas y una reseña sobre los métodos tradicionales y el MEF en el estudio de placas.

En el Capítulo 2 se pone de manifiesto toda la base o fundamentación teórica de los métodos analizados. Partiendo de las hipótesis utilizadas se desarrolla la formulación matemática necesaria para comprender los alcances de los métodos propuestos. Para el caso del MEF, se consideró necesario introducir con la Teoría de la Elasticidad, por su significativa importancia en la comprensión del método. Al tratar los métodos tradicionales, se exponen los casos más frecuentes de placas rectangulares en diferentes condiciones de apoyo y de carga.

Diferentes ejemplos de casos comunes en el desarrollo de la práctica de la ingeniería, como el de la flecha, esfuerzos y reacciones en una placa cuadrada simplemente apoyada en los cuatro lados sometida a una carga uniforme son analizados en el Capítulo 3, la convergencia de los métodos es puesta de manifiesto en este capítulo.

Finalmente en el Capítulo 4 se realiza el análisis comparativo y validación de resultados de cada uno de los métodos analizados y en base de los mismos emitir consideraciones y conclusiones en el Capítulo 5.



# AGRADECIMIENTO

El Autor reconoce un franco agradecimiento al Ing. Ángel Pino, Director de Tesis, por su valiosa colaboración en el desarrollo del presente trabajo.

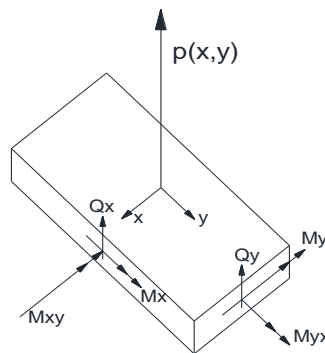


# CAPITULO 1

## PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

### 1.1 Introducción

Una placa se define como un sólido paralelepípedo, en la que una de sus dimensiones (espesor), es mucho menor que las otras dos, hecho que, geoméricamente hace que se pueden aproximar a una superficie bidimensional que predominantemente trabaja a flexión<sup>1</sup>.



**Figura 1.1** Estado esquemático de una placa rectangular.

En el análisis de placas los métodos más comunes se pueden clasificar en: métodos exactos, métodos aproximados y el MEF (Método de los Elementos Finitos) para el cálculo de placas.

**Métodos exactos<sup>2</sup>:** Los métodos exactos son solo posibles en un número muy limitado de casos. La solución de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de la teoría de placas es exacta cuando degeneran a ecuaciones diferenciales ordinarias.

<sup>1</sup>Vease [1k] [http://es.wikipedia.org/wiki/Placas\\_y\\_laminas](http://es.wikipedia.org/wiki/Placas_y_laminas)

<sup>2</sup>Vease [2k] <http://ebookbrowse.net> "Análisis De Placas Y lamina.doc free ebook download"

Se presentan en geometrías específicas, como placas delgadas con simetría axial.

**Métodos aproximados**<sup>1</sup>: Los métodos aproximados se caracterizan por ser métodos rápidos y fiables aunque no constituyan una solución exacta de un determinado problema físico pero permiten determinar soluciones aproximadas suficientes para los objetivos de un proyecto estructural.

Los métodos Levy y Navier son de frecuente aplicación en la práctica del Análisis de placas debido a la confiabilidad en los resultados numéricos y por la aplicación de un esquema sistemático al utilizar series trigonométricas que juegan un papel importante modelando problemas de la práctica ingenieril.

La solución por desarrollos en series ha sido un procedimiento muy utilizado en muchos problemas de placas delgadas. Se considera la solución del problema formada por series dobles o simples infinitas que satisfacen las condiciones de equilibrio interno y las condiciones de contorno.

Las series se escogen según las condiciones de contorno que se presenta. Tal cosa nos determina que las funciones en serie van a cambiar según el problema a resolver. Timoshenko analiza un gran número de placas por este método en su tratado de placas. Dicho método puede ser considerado como “exacto” al satisfacer exactamente, las series infinitas, las ecuaciones del problema.

Otro método que se debe citar, es, la solución por diferencias finitas. En este caso las derivadas parciales de la placa se transforman a cocientes entre incrementos finitos.

Formando una malla de la misma forma que la placa, se toma como incógnita la flecha o las funciones de tensión en los nodos. De esta forma las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de la placa pasan a ser un sistema de ecuaciones algebraicas con numerosas incógnitas.

La función algebraica resultante para todos los nodos se obtiene con la ayuda de un polinomio de interpolación. Esto hace necesario la colocación de nodos ficticios fuera de la geometría de la placa y la aplicación de las condiciones de contorno para valorar las incógnitas en dichos puntos. La solución por diferencias finitas ha sido utilizada básicamente para problemas de placas delgadas.

**Métodos de los elementos finitos (MEF)**<sup>1</sup>: El MEF es la herramienta más versátil para la solución de los problemas de flexión de placas.

<sup>1</sup>Vease [2k] <http://ebookbrowse.net> “Análisis De Placas Y lamina.doc free ebook download”



Los problemas de placas constituyeron una de las primeras aplicaciones del método.

Los problemas de placas o de lo que se podrían llamar “elementos laminares delgados” planos, se diferencia en esencia, en las hipótesis sobre el giro de las normales al plano medio.

Es también conocido que en muchos problemas, con formas geométricas regulares y condiciones de contorno simples, un análisis completo con elementos finitos, resulta, frecuentemente, extravagante e innecesario.

En consecuencia, métodos alternativos de análisis que reduzcan el coste computacional y los requerimientos de base, y que, al mismo tiempo, tengan una amplia versatilidad, son evidentemente deseables.

Con todo lo mencionado se pretende establecer las diferencias y las potenciales ventajas y/o desventajas en la elección entre un método tradicional de Análisis de placas como los que se desarrollan por series de Fourier contra el Método de los Elementos Finitos (M.E.F.).

## 1.2 Justificación

Esta tipología es tan frecuente en la práctica de la construcción que un estudio comparativo está plenamente justificado.

Se pueden encontrar ejemplos de aplicación en los forjados de edificación, algunos tipos de cimentación, puentes losa, depósitos rectangulares, pavimentos, etc. Es decir en estructuras tan simples, comunes y frecuentes con las que cualquier ingeniero sea cual sea su especialidad va a encontrarse muchas veces en el desarrollo de su vida profesional y por tanto debe ser capaz de conocer su respuesta estructural con el método más adecuado.

En la Figura 1.2, se puede observar una losa de entrepiso que es una *Placa* de hormigón, en este caso alivianada, apoyada en sus cuatro bordes sobre vigas.



**Figura 1.2** *Losa de entrepiso*

En la Figura 1.3, se muestra una losa de cimentación que es otro ejemplo de *Placa* de hormigón apoyada sobre el terreno la misma que distribuye el peso propio y las cargas actuantes sobre toda la superficie de apoyo.



**Figura 1.3** *Losa de cimentación*

Como se mencionó, en inicio, son tan comunes los casos de estructuras de tipo *placas* en el desarrollo de las actividades de ingeniería que resulta conveniente un estudio comparativo entre métodos de análisis que den una idea global entre la conveniencia o no, de la utilización de un método particular de Análisis.

## CAPITULO 2

# FUNDAMENTACION TEORICA

### 2.1 Antecedentes

El cálculo de placas tiene su origen con los trabajos que realizó Euler en el siglo XIII y por otros matemáticos y físicos, tales como Lagrange, Navier, Poisson, etc. Sin embargo, y debido al trabajo contenido en su libro Clases de Física Matemática (1876), Kirchhoff (1824-1887) es considerado como el padre de la denominada teoría clásica de placas. Posteriormente Love recogió y amplió aquellos trabajos hasta el punto que hoy día, la teoría clásica de placas se conoce también como de Kirchhoff - Love.

A finales del siglo XIX los constructores de barcos cambiaron sus métodos constructivos reemplazando la madera por el acero. Este cambio de material estructural provocó fructíferos desarrollos en las teorías de análisis de elementos superficiales, placas y láminas. Los científicos rusos de la época (Krylov, Boobnov) hicieron importantes contribuciones en este campo, reemplazando los antiguos métodos de cálculo por teorías matemáticas sólidas. De entre todos ellos cabe destacar a Timoshenko que tuvo el mérito de provocar en Occidente una gran credibilidad, hasta el punto que los científicos occidentales fueron recogiendo e incorporando gradualmente la investigación rusa en el campo de la Elasticidad.

En los últimos años el desarrollo de los ordenadores ha tenido una considerable influencia en el análisis estático y dinámico de placas. Los métodos de Diferencias Finitas (1941) y de los Elementos Finitos (1956) proporcionan la técnica necesaria para, discretizando el continuo, tratar con la ayuda del ordenador, con problemas complejos de placas encontrando soluciones numéricas e introducir las más avanzadas teorías de comportamiento estructural<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Vease [3k] <http://www-gmap.mecanica.ufrgs.br>

## 2.2 Marco Teórico

La respuesta tenso deformacional de una placa puede obtenerse por degeneración de la teoría de la elasticidad tridimensional suponiendo que la variación, de las distintas magnitudes que intervienen en el proceso a lo largo del espesor, es una función conocida de los valores que toman en el plano medio de la misma<sup>1</sup>.

### 2.2.1 Hipótesis Básicas

Para una placa sometida a esfuerzos de flexión puros se consideran las siguientes hipótesis simplificativas:

1. Se limita al caso de que el material que las compone sea homogéneo, isotrópico y completamente elástico.

2. En los puntos del plano medio

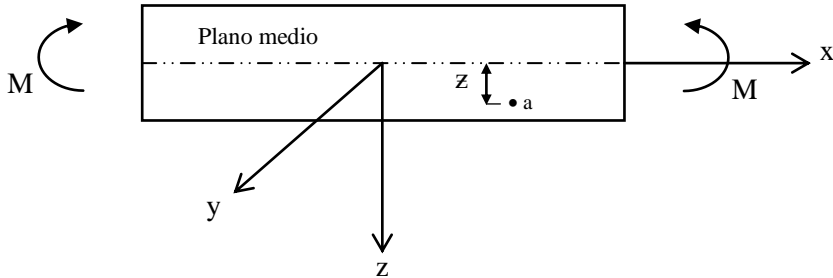
$$\mu = \nu = 0$$

Los puntos del plano medio sólo se mueven en la dirección perpendicular al mismo. Es decir sólo se considera la deformación provocada por la flexión.

3. Todos los puntos situados sobre una normal al plano medio tienen la misma flecha. Es decir:  $\omega(x, y, z) = \omega(x, y)$
4. La placa no experimenta variaciones de espesor debido a la deformación  $\sigma_z = 0$ .
5. Se considera válida la hipótesis de deformaciones planas de Bernoulli (los puntos sobre rectas normales al plano medio antes de la deformación, permanecen sobre rectas también ortogonales a la deformada del plano medio después de la deformación).
6. La flecha para cualquier punto de la placa es muy pequeña con respecto a su espesor ( $w \ll t$ ), se limita la teoría a pequeñas deformaciones, lo cual permite suponer que la superficie media de la placa no experimenta variaciones en sus dimensiones.

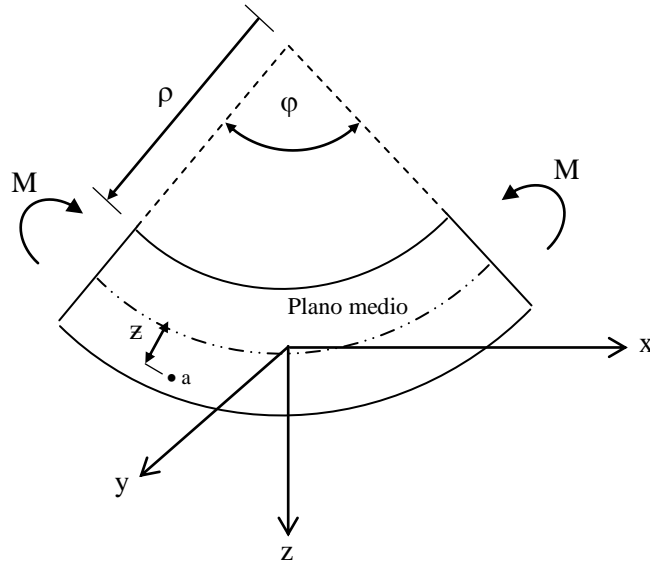
<sup>1</sup>Vease [3k] <http://www-gmap.mecanica.ufrgs.br>

Las hipótesis 2<sup>da</sup>, 3<sup>era</sup> y 5<sup>ta</sup> permiten definir el campo de desplazamientos a través del espesor de la placa. La 4<sup>ta</sup> hipótesis afecta a la relación tensión – deformación, que puede modificarse adecuadamente.



**Figura 2.1** Estado esquemático de una placa rectangular antes de flectar.

**Fuente:** [16] NAVARRO, Carlos. "Placas y Láminas". Universidad Carlos III de Madrid. Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras.(pag.6)



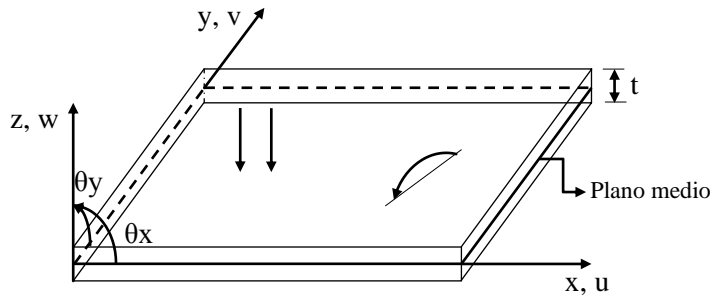
**Figura 2.2** Estado esquemático de una placa rectangular después de flectar.

**Fuente:** [16] NAVARRO, Carlos. "Placas y Láminas". Universidad Carlos III de Madrid. Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras.(pag.7)

De las hipótesis anteriores se deduce que:

$$\begin{aligned} \mu(x, y, z) &= -z\theta x(x, y) \Rightarrow 2^{\text{da}} \text{ hipótesis} \\ v(x, y, z) &= -z\theta y(x, y) \Rightarrow 5^{\text{ta}} \text{ hipótesis} \\ \omega(x, y, z) &= \omega(x, y) \Rightarrow 3^{\text{era}} \text{ hipótesis} \end{aligned}$$

Estas hipótesis permiten expresar los desplazamientos, deformaciones, tensiones y esfuerzos en el plano medio, sólo en función de la flecha  $\omega(x, y)$  que caracteriza cada punto de la placa; transformando así un problema inicialmente tridimensional en bidimensional. Posteriormente estableciendo las ecuaciones de equilibrio, se determina la ecuación diferencial en derivadas parciales que debe satisfacer esta función  $\omega(x, y)$ .



**Figura 2.3** Definición geométrica de una placa y convenio de signos para desplazamientos y giros.

**Fuente:** [1] OÑATE, Eugenio, "Cálculo de Estructuras por el Método de los Elementos Finitos", Editorial CIMNE, Barcelona, España, 1995. (pag.323)

## 2.2.2 El Método de los Elementos Finitos (MEF)

El método de los Elementos Finitos es hoy en día el procedimiento más potente para el Análisis de sistemas continuos de carácter uni, bi y tridimensional. Es importante destacar la analogía existente entre los conceptos del análisis matricial de sistemas discretos y los del método de los Elementos Finitos, que facilitan en gran medida el estudio de éste último.

El MEF puede ser considerado como un método aproximado para obtener soluciones numéricas, con precisión aceptable, a diversos problemas de análisis estructural, transferencia de calor, campos eléctricos, entre otros.

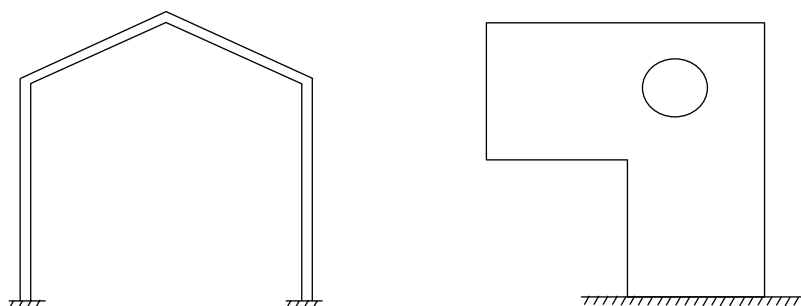
### - *Sistemas Discretos y Sistemas Continuos*

Una manera natural de abordar el estudio del comportamiento de un sistema, es simplificar el modelo matemático en lo posible. La opción más sencilla es subdividir el sistema en partes o elementos de estudio sencillo, para luego volverlo a reconstruir ensamblando la contribución de cada elemento y predecir así su comportamiento.

Al efectuar una clasificación de las estructuras, suelen dividirse en discretas o reticulares y continuas. Las primeras son aquellas que están formadas por un ensamblaje de elementos claramente diferenciados unos de otros y unidos en una serie

de puntos concretos (*nudos*), de tal manera que el sistema total tiene forma de malla o retícula.

La característica fundamental de las estructuras discretas es que su deformación puede definirse de manera exacta mediante un número finito de parámetros, como por ejemplo las deformaciones de los puntos de unión de unos elementos y otros. De esta manera el equilibrio de toda la estructura puede representarse mediante las ecuaciones de equilibrio en las direcciones de dichas deformaciones.



**Figura 2.4** Estructuras discreta y continua.

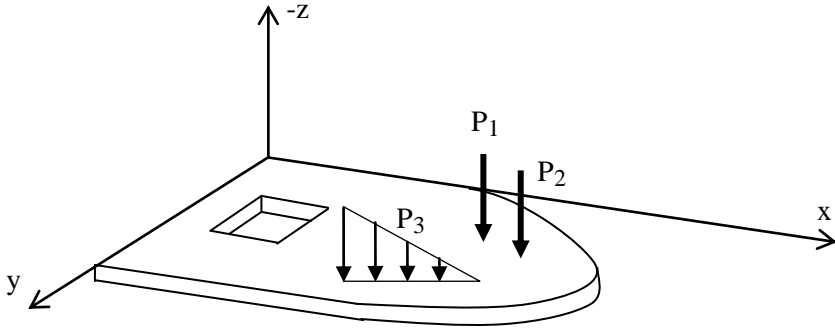
Como contrapartida, en los sistemas continuos no es posible separar, a priori, el sistema en un número finito de elementos discretos. Si se toma una parte cualquiera del sistema, el número de puntos de unión entre dicha parte y el resto de la estructura es infinito, y es por lo tanto imposible utilizar el mismo método que en los sistemas discretos, pues los puntos de unión entre los distintos elementos, que allí aparecían de manera natural, no existen aquí<sup>1</sup>.

Con algunas excepciones, la mayor parte de los sistemas en ingeniería son de naturaleza *continua* y, por tanto, su comportamiento no puede expresarse en forma precisa en función de un número pequeño de variables discretas. Un análisis riguroso de dichos sistemas precisa la integración de las ecuaciones diferenciales que expresan el equilibrio de un elemento diferencial genérico del sistema.

Aunque la mayor parte de los sistemas continuos son inherentemente tridimensionales en algunos casos su comportamiento puede describirse por modelos matemáticos uni y bidimensionales. Así ocurre, con los problemas de flexión de placas, en los que el análisis se limita al estudio de la deformación del plano medio de la placa, y con todos los sistemas en las que puede hacerse uso de las hipótesis simplificadoras que reducen el estudio al de un problema bidimensional o de revolución.

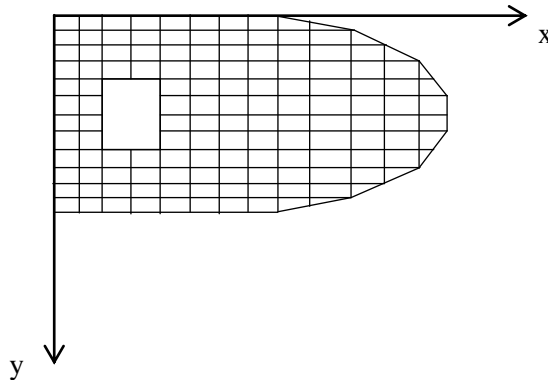
<sup>1</sup> Véase [15] CELIGÜETA LIZARZA, Juan Tomás. “Método de los Elementos Finitos para Análisis Estructural”. Campus Tecnológico de la Universidad de Navarra, Septiembre 2008. (pag. 1)

En el caso de determinar los desplazamientos en la placa de la figura 2.5, los métodos clásicos nos conducirían al planteamiento de ecuaciones diferenciales parciales sin solución numérica específica, debido a la complejidad del estado de cargas y geometría.



**Figura 2.5** Sistema continuo tipo placa.

En el MEF una vez seleccionado un *modelo matemático* apropiado para describir el comportamiento de la estructura se procede a *discretizar* la estructura en porciones no intersectantes entre sí, denominadas “elementos finitos”. Los elementos se conectan entre sí por una serie de puntos discretos del elemento denominados “nudos” situados en sus contornos. La geometría de los elementos finitos resultado de la discretización del elemento es más simple y de dimensiones finitas.

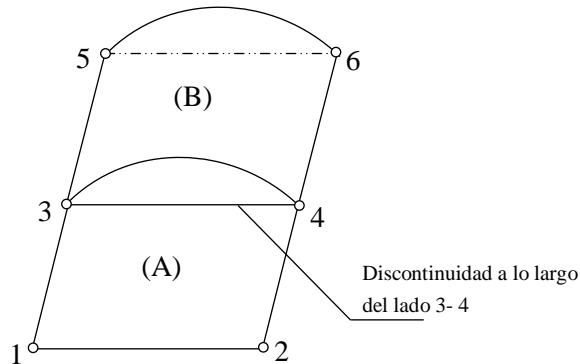


**Figura 2.6** Sistema continuo tipo placa discretizado.

El idealizar la interconexión entre los elementos finitos exclusivamente a través de sus nudos, podría conducir a que solamente en tales nudos se cumplan obligatoriamente



las condiciones de compatibilidad de deformación. Esto puede inducir a una excesiva flexibilización de la estructura pues se permitirían movimientos, tales como desplazamientos, giros o separaciones entre caras de los elementos contiguos.<sup>1</sup>



**Figura 2.7** Ejemplo de discontinuidad a lo largo de un lado común a dos elementos.

**Fuente:** [1] OÑATE, Eugenio, “Cálculo de Estructuras por el Método de los Elementos Finitos”, Editorial CIMNE, Barcelona, España, 1995. (pag.338)

No siendo este el comportamiento real de la estructura, para un modelamiento más apropiado, los elementos finitos aparentemente deberían deformarse siguiendo elásticas que mantengan la continuidad entre elementos, consiguiéndose de este modo compatibilidad de deformaciones entre las caras adyacentes de los elementos.<sup>1</sup>

### 2.2.2.1 Teoría de la Elasticidad

Los problemas de elasticidad bidimensional son muy frecuentes en Ingeniería, y son así mismo los primeros en los que se aplicó el MEF. En este caso el medio continuo que se analiza es plano, y se considera situado en el plano XY. Se denomina  $t$  al espesor del dominio en su dirección transversal, el cual se considera despreciable frente a las dimensiones del dominio en el plano XY.

La posición de un punto está definida por dos coordenadas  $(x,y)$ , y su deformación tiene dos componentes  $u(x,y)$ ,  $v(x,y)$  en las direcciones X,Y respectivamente. El campo de deformaciones es por lo tanto un vector:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} \quad (\text{Espacio bidimensional})$$

<sup>1</sup>Vease [11] ROMO PROAÑO, Marcelo, “El Método de los Elementos Finitos en el análisis estructural de placas” Centro de Investigación Científica Escuela Politécnica del Ejército – Ecuador (pag.2-3)

$$\mathbf{u} = [u, v, w]^T \text{ (Espacio tridimensional)}$$

Dentro de la elasticidad en dos dimensiones existen dos problemas diferentes:

**Tensión plana:** cuando la tensión  $\sigma_z$  en sentido perpendicular al plano  $xy$  es cero, ya que el sólido puede dilatarse libremente en el sentido de su espesor. Por lo tanto existe una deformación unitaria  $\varepsilon_z$  no nula en dicha dirección.

**Deformación plana:** cuando en el sentido del espesor del sólido no hay posibilidad de deformación, es decir  $\varepsilon_z = 0$  por lo que se genera una tensión en dicha dirección  $\sigma_z$  no nula.

En ambos casos la tensión y la deformación en la dirección  $z$  no contribuyen a la energía elástica del sistema.

### 2.2.2.1.1 Planteamiento de las Ecuaciones Diferenciales de equilibrio

Las ecuaciones diferenciales que se detallan corresponden a las losas elásticas (con respuesta lineal o no) sujetas a cargas perpendiculares en su plano. Se asumen desplazamientos pequeños con relación al espesor de la losa, no incluyendo la no linealidad geométrica, así como la no linealidad en las cargas.

Por ello el equilibrio siempre se plantea en la configuración inicial y la dirección de las cargas se considera independientemente de la configuración deformada.

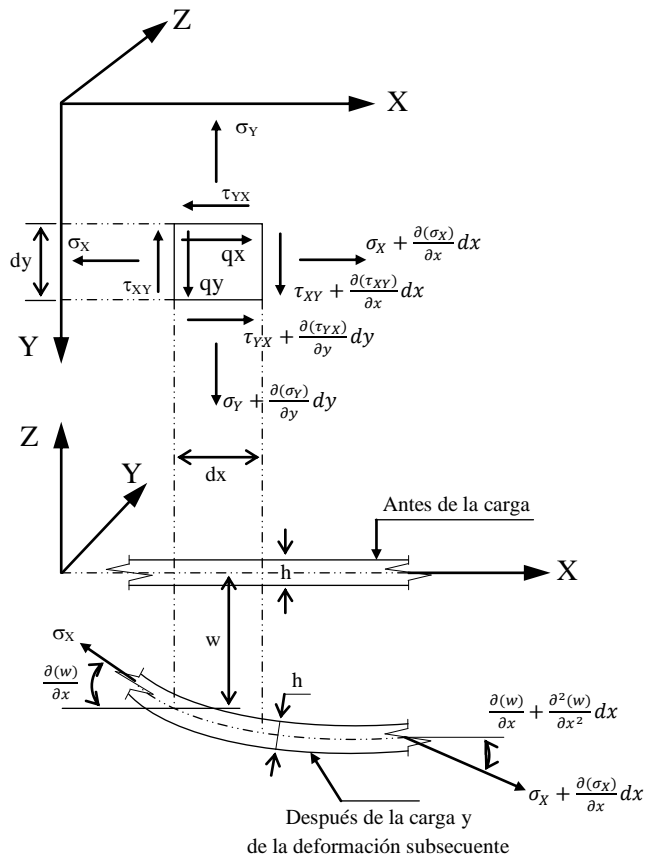
Esta última no linealidad es la que se da en estructuras sometidas a la acción del viento o en estructuras sumergidas en líquidos donde la presión hidrostática es perpendicular a la deformada estructural.

Las características del material, sin embargo, pueden corresponder a materiales con módulo de elasticidad variable.

El análisis de placas difiere del de un sólido tridimensional en que aquellas tienen una dirección considerablemente menor a las otras dos, lo que permite hacer uso de las hipótesis anotadas en la sección 2.2.1, con las consecuentes simplificaciones<sup>1</sup>.

Si se plantea el equilibrio de fuerzas, del elemento diferencial de espesor constante “ $t$ ” mostrado en la figura 2.8, en donde las fuerzas por unidad de volumen  $q_x$  y  $q_y$ , que actúan sobre el cuerpo, pueden provenir de acciones externas, se tiene:

<sup>1</sup>Vease [12] BOZZO, Luis, “Análisis de losas planas mediante Elementos Finitos”. (pag.2)



**Figura 2.8** Variación de esfuerzos normales y tangenciales.

**Fuente:** [12] BOZZO, Luis, "Análisis de losas planas mediante Elementos Finitos". (pag.5)

$$\frac{\partial(\sigma_x)}{\sigma_x} dx \cdot dy \cdot t + \frac{\partial(\tau_{yx})}{\partial y} dy \cdot dx \cdot t + q_x \cdot dx \cdot dy \cdot t = 0$$

$$\frac{\partial(\sigma_y)}{\sigma_y} dy \cdot dx \cdot t + \frac{\partial(\tau_{xy})}{\partial x} dx \cdot dy \cdot t + q_y \cdot dy \cdot dx \cdot t = 0$$

Efectuando las simplificaciones tenemos:

$$\frac{\partial(\sigma_x)}{\sigma_x} + \frac{\partial(\tau_{yx})}{\partial y} + q_x = 0$$

$$\frac{\partial(\sigma_y)}{\sigma_y} + \frac{\partial(\tau_{xy})}{\partial x} + q_y = 0$$

En donde;  $\tau_{YX} = \tau_{XY}$ , con lo que:

$$\frac{\partial(\sigma_X)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{XY})}{\partial y} + q_x = 0$$

$$\frac{\partial(\sigma_Y)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{XY})}{\partial x} + q_y = 0$$

Extrapolando estos resultados a un elemento diferencial tridimensional las ecuaciones diferenciales serán:

$$\frac{\partial(\sigma_X)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{XY})}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{ZX})}{\partial z} + q_x = 0$$

$$\frac{\partial(\sigma_Y)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{XY})}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{ZY})}{\partial z} + q_y = 0$$

$$\frac{\partial(\sigma_Z)}{\partial z} + \frac{\partial(\tau_{XZ})}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{YZ})}{\partial y} + q_z = 0$$

Considerando que:  $\tau_{ZX} = \tau_{XZ}$ ,  $\tau_{ZY} = \tau_{YZ}$  transforma las ecuaciones anteriores en:

$$\frac{\partial(\sigma_X)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{XY})}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{ZX})}{\partial z} + q_x = 0$$

$$\frac{\partial(\sigma_Y)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{XY})}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{ZY})}{\partial z} + q_y = 0$$

$$\frac{\partial(\sigma_Z)}{\partial z} + \frac{\partial(\tau_{XZ})}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{ZY})}{\partial y} + q_z = 0$$

En el análisis de losas se emplean como medida de esfuerzo las fuerzas y los momentos; resultantes de integrar en el espesor las tensiones normales y tangenciales según se indica a continuación<sup>1</sup>:

**Fuerzas en el plano:**

$$N_{XX} = \int_z \sigma_X dz$$

<sup>1</sup>Vease [12] BOZZO, Luis, "Análisis de losas planas mediante Elementos Finitos". (pag.4)

$$N_{YY} = \int_z \sigma_Y dz$$

$$N_{XY} = \int_z \tau_{XY} dz$$

**Cortantes transversales:**

$$Q_X = \int_z \tau_{XZ} dz$$

$$Q_Y = \int_z \tau_{YZ} dz$$

**Momentos flectores y torsor:**

$$M_X = \int_z \sigma_X z dz$$

$$M_Y = \int_z \sigma_Y z dz$$

$$M_{XY} = \int_z \tau_{XY} z dz$$

Estas nuevas variables son funciones de las coordenadas X,Y e independientes de la coordenada Z. Por ello su representación se puede realizar en el plano de la losa por medio de curvas de nivel. El signo positivo para un momento  $M_{XX}$  se obtiene de una tensión positiva  $\sigma_x$  multiplicada por una distancia  $z$  también positiva.

Si se representan los esfuerzos internos de flexión y cortadura y la carga exterior en dirección  $z$  para obtener las ecuaciones de equilibrio de una placa se considera el equilibrio estático de un trozo diferencial de placa; figura 2.9, entonces se tiene<sup>1</sup>:

**Equilibrio de fuerzas en el plano:**

$$\frac{\partial N_{XX}}{\partial x} + \frac{\partial N_{XY}}{\partial y} = qx$$

$$\frac{\partial N_{XY}}{\partial x} + \frac{\partial N_{YY}}{\partial y} = qy$$

<sup>1</sup>Vease [12] BOZZO, Luis, "Análisis de losas planas mediante Elementos Finitos". (pag.5)

**Equilibrio de momentos y cortantes:**

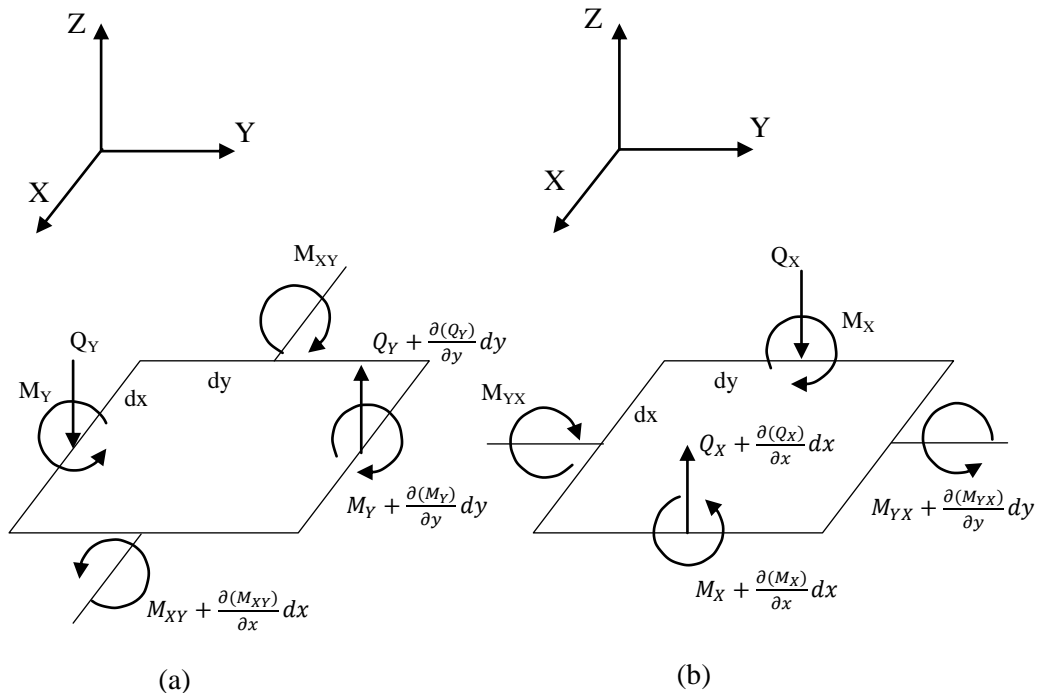
$$\frac{\partial M_X}{\partial x} + \frac{\partial M_{XY}}{\partial y} = Q_x$$

$$\frac{\partial M_{XY}}{\partial x} + \frac{\partial M_Y}{\partial y} = Q_y$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -q$$

Donde  $q$  es la fuerza distribuida por unidad de superficie de la placa.

Las ecuaciones de equilibrio en el plano son independientes de las ecuaciones de la flexión por lo que pueden tratarse por separado. Según la convención de signos adoptada, y dado que  $\tau_{XY} = \tau_{YX}$ ,  $M_{XY}$  es igual en magnitud y signo a  $M_{YX}$ .



**Figura 2.9** (a) Momento con respecto al eje X, (b) Momento con respecto al eje Y.  
**Fuente:** [12] BOZZO, Luis, "Análisis de losas planas mediante Elementos Finitos". (pag.6)

Sustituyendo los valores de los esfuerzos cortantes dados por las ecuaciones encontradas en el *Equilibrio de momentos y cortantes* en la de la Fuerza distribuida, se obtiene una ecuación que relaciona sólo a los tres momentos:

$$\frac{\partial^2 M_X}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{XY}}{\partial xy} + \frac{\partial^2 M_Y}{\partial y^2} + q = 0$$

Para representar esta ecuación en términos de la deflexión  $w$  de la placa, se considera que la ecuación desarrollada para el caso de la placa sometida a una sollicitación de flexión pura, es similar a la que correspondería al caso de placas cargadas lateralmente, es decir<sup>1</sup>:

$$M_X = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]$$

$$M_Y = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]$$

Esta consideración trae como consecuencia despreciar los efectos sobre la flexión de las fuerzas de corte y de la tensión de compresión  $\sigma_z$ . Reemplazando se tiene:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}$$

*Ecuación de Germain - Lagrange*

Que puede ponerse en la forma compacta empleando el operador laplaciano  $\nabla^2$ :

$$\nabla^2(\nabla^2 w) = \frac{q}{D}$$

Esta es la ecuación diferencial que controla el problema de la flexión de placas en la teoría clásica; en donde, la rigidez flexional de la placa  $D$  es:

$$D = \frac{Et^3}{12(1 - \mu^2)}$$

Donde:  $E$ =Módulo de Elasticidad

$\mu$ =Módulo de Poisson.

La ecuación diferencial en derivadas parciales que gobierna el comportamiento de la placa se clasifica entre las de cuarto orden con coeficientes constantes. Si el término independiente es nulo, la ecuación diferencial homogénea, se denomina Ecuación Biarmónica. El método de trabajo consistirá, entonces, en hallar soluciones aproximadas para la ecuación diferencial de cuarto orden que satisfaga las condiciones

<sup>1</sup>Vease [13] PATANELLA, Alejandro. ACTIS, Marcos, "Placas Planas Rectangulares de Espesor Delgado". Facultad de Ingeniería Universidad Nacional de La Plata, 2008. (pag.6-7)

de borde y las condiciones de cargas, dentro de errores apropiadamente acotados.

### 2.2.2.1.2 Campo de deformaciones

El vector de deformación en un punto está definido por seis componentes que reciben el nombre de *componentes de la deformación*.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}]^T$$

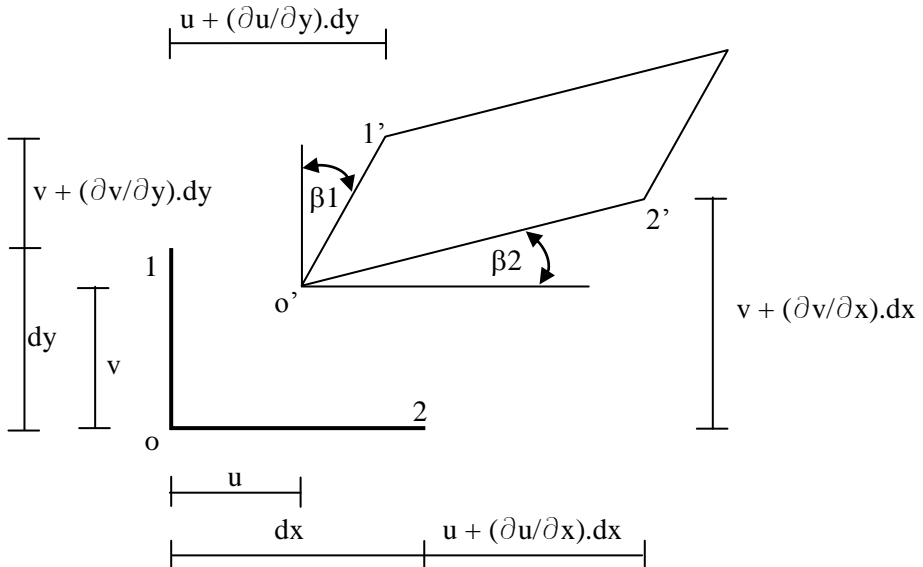
$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

Donde  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  son las deformaciones normales y  $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$  las deformaciones tangenciales.

### 2.2.2.1.3 Relación entre Desplazamientos y Deformaciones Unitarias<sup>1</sup>

La relación existente entre los desplazamientos y las deformaciones unitarias reviste gran importancia en la deducción de la matriz de rigideces de los elementos finitos.



<sup>1</sup>Vease [11] ROMO PROAÑO, Marcelo, "El Método de los Elementos Finitos en el análisis estructural de placas" Centro de Investigación Científica Escuela Politécnica del Ejército – Ecuador (pag.7-8)



Expresando matricialmente la relación entre desplazamientos y deformaciones unitarias para el elemento diferencial bidimensional, se tiene:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \gamma_{XY} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

Extrapolando, la relación entre desplazamientos y deformaciones unitarias para el caso del elemento tridimensional, tenemos:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \varepsilon_Z \\ \gamma_{XY} \\ \gamma_{YZ} \\ \gamma_{ZX} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$$

### 2.2.2.1.4 Relaciones Esfuerzo Unitario y deformación Unitaria <sup>1</sup>

La relación entre tensiones y deformaciones se deduce de la ecuación constitutiva de la elasticidad tridimensional y con las hipótesis simplificativas  $\sigma_z = 0$  para tensión plana,  $\varepsilon_z = 0$  para deformación plana y  $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$  en ambos casos.

Siendo de esta manera para el caso de materiales ortotrópicos (materiales con características elásticas diferentes en cada una de las tres direcciones ortogonales principales), en continuos tridimensionales, se tienen las siguientes relaciones:

<sup>1</sup>Vease [11] ROMO PROAÑO, Marcelo, "El Método de los Elementos Finitos en el análisis estructural de placas" Centro de Investigación Científica Escuela Politécnica del Ejército – Ecuador (pag.8-10)

$$\varepsilon_x = +\frac{1}{E_x} \cdot \sigma_x - \frac{\nu_{xy}}{E_y} \cdot \sigma_y - \frac{\nu_{xz}}{E_z} \cdot \sigma_z$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu_{xy}}{E_x} \cdot \sigma_x + \frac{1}{E_y} \cdot \sigma_y - \frac{\nu_{yz}}{E_z} \cdot \sigma_z$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu_{xz}}{E_x} \cdot \sigma_x - \frac{\nu_{yz}}{E_y} \cdot \sigma_y + \frac{1}{E_z} \cdot \sigma_z$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G_{yz}}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G_{xz}}$$

Al analizar el caso de materiales isotrópicos (materiales con características elásticas idénticas en cada una de las direcciones ortogonales principales), se tienen las siguientes relaciones:

$$\varepsilon_x = +\frac{1}{E} \cdot \sigma_x - \frac{\nu}{E} \cdot \sigma_y - \frac{\nu}{E} \cdot \sigma_z$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu}{E} \cdot \sigma_x + \frac{1}{E} \cdot \sigma_y - \frac{\nu}{E} \cdot \sigma_z$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} \cdot \sigma_x - \frac{\nu}{E} \cdot \sigma_y + \frac{1}{E} \cdot \sigma_z$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

Denominando con E el módulo de elasticidad, G el módulo de rigidez y  $\nu$  el coeficiente de Poisson.

Siendo:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Expresando matricialmente las relaciones correspondientes a elementos bidimensionales isotrópicos, bajo la condición de esfuerzos planos, tenemos:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} +1 & -\nu & 0 \\ -\nu & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1 + \nu) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [C] \cdot \{\sigma\}$$

La relación matricial inversa para esfuerzos planos es:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1 + \nu^2} \begin{bmatrix} +1 & +\nu & 0 \\ +\nu & +1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [E] \cdot \{\varepsilon\}$$

A la matriz [ C ] se la conoce como *matriz de deformabilidad del material*, y la matriz [ E ] se denomina *matriz de elasticidad del material*, y  $[E] = [C]^{-1}$

La relación matricial entre deformaciones unitarias y esfuerzos unitarios, para continuos tridimensionales, con materiales isotrópicos es:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}$$

La relación matricial inversa es:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \sigma_Z \\ \tau_{XY} \\ \tau_{YZ} \\ \tau_{XZ} \end{Bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \varepsilon_Z \\ \gamma_{XY} \\ \gamma_{YZ} \\ \gamma_{XZ} \end{Bmatrix}$$

Si se analiza el caso de continuos tridimensionales, con materiales isotrópicos, bajo condiciones de deformaciones planas, se eliminan las filas 3, 5 y 6, de la matriz [E] de 6 x 6 y se define  $\varepsilon_Z = 0$ ,  $\gamma_{YZ} = 0$  y  $\gamma_{XZ} = 0$ , con lo que:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \tau_{XY} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \gamma_{XY} \end{Bmatrix} = [E]\{\varepsilon\}$$

En el caso de placas planas delgadas, cuyo comportamiento es gobernado por el efecto de flexión, las deformaciones de interés son las curvaturas de la superficie neutra de la estructura y los esfuerzos requeridos son los momentos flectores por unidad de longitud.

$$\begin{Bmatrix} M_{XX} \\ M_{YY} \\ M_{XY} \end{Bmatrix} = \frac{E \cdot t^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a\varepsilon_{XX} \\ a\varepsilon_{YY} \\ a\varepsilon_{XY} \end{Bmatrix} = [E]\{\varepsilon\}$$

En donde:

$M_{xx}$ : Momento flector por unidad de longitud alrededor del eje x.

$M_{yy}$ : Momento flector por unidad de longitud alrededor del eje y.

$M_{xy}$ : Momento torsor por unidad de longitud sobre el plano xy (alrededor del eje z).

$$ae_{xx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \text{ Curvatura de flexión alrededor del eje x.}$$

$$ae_{yy} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \text{ Curvatura de flexión alrededor del eje y.}$$

$$ae_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \text{ Curvatura de torsión.}$$

### 2.2.2.2 Método de Ensamblaje directo

Al hablar del método de ensamblaje directo, utilizado en general en el análisis matricial de estructuras tipo pórticos y celosías, es la aplicación del fundamento de que, la suma de las fuerzas en un nudo, debidas a las diferentes barras que concurren en el mismo, es igual a la fuerza exterior que actúa en dicho nudo. En forma matemática<sup>1</sup>:

$$\sum_{e=1}^{n_e} R_i^{(e)} = R_j^{exterior}$$

Donde el sumatorio se extiende a todas las barras  $n_e$  que concurren en el nudo de numeración global j. Sustituyendo en esta expresión los valores de las fuerzas de extremo de cada barra  $R_i^{(e)}$ , en función de los desplazamientos de los nudos a través de:

$$q^{(e)} = \begin{Bmatrix} R_1^{(e)} \\ R_2^{(e)} \end{Bmatrix} = k^{(e)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \end{Bmatrix} - \frac{(bl)^{(e)}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = K^{(e)} a^{(e)} - f^{(e)}$$

Esta es la expresión matricial de equilibrio de una barra aislada actuando sobre ella una fuerza uniformemente distribuida por unidad de longitud de intensidad  $b^{(e)}$ , repartiendo el efecto total de dicha fuerza en partes iguales en cada nudo.

Donde  $K^{(e)}$  se denomina matriz de rigidez de la barra y es función únicamente de la geometría de la misma ( $I^{(e)}$ ,  $A^{(e)}$ ) y de sus propiedades mecánicas  $E^{(e)}$ ; y  $a^{(e)}$  y  $q^{(e)}$ , son los vectores de desplazamientos y de fuerzas de los nudos de la barra y  $f^{(e)} = \frac{(bl)^{(e)}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ . Tenemos:

<sup>1</sup>Vease [17] ALVAREZ, Paul, "Lecturas Complementarias de la Asignatura Elementos Finitos" Curso de Magister en Métodos Numéricos para diseño en Ingeniería (pag.6)

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix}$$

denominada como la ecuación matricial de equilibrio global de la estructura; y en forma simplificada:

$$Ka = f$$

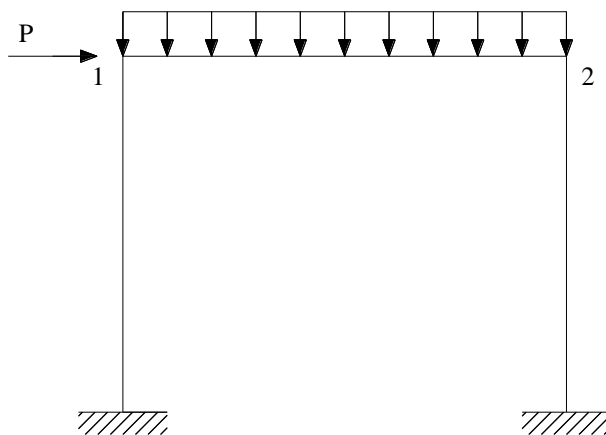
Donde K es la matriz de rigidez de la estructura y a y f son, respectivamente, los vectores de desplazamientos y de fuerzas exteriores de todos los nudos de la estructura. El proceso de obtención de las ecuaciones de la matriz anterior recibe el nombre de *ensamblaje*. La resolución de las mismas proporciona los valores de los desplazamientos en todos los nudos de la estructura a partir de los cuales se pueden conocer los esfuerzos internos de las barras.

Los mismos criterios empleados para la utilización del Método de Ensamblaje Directo en el análisis de pórticos y celosías, pueden ser empleados para analizar continuos discretizados mediante Elementos Finitos.

### 2.2.2.2.1 Elásticas de deformación <sup>1</sup>

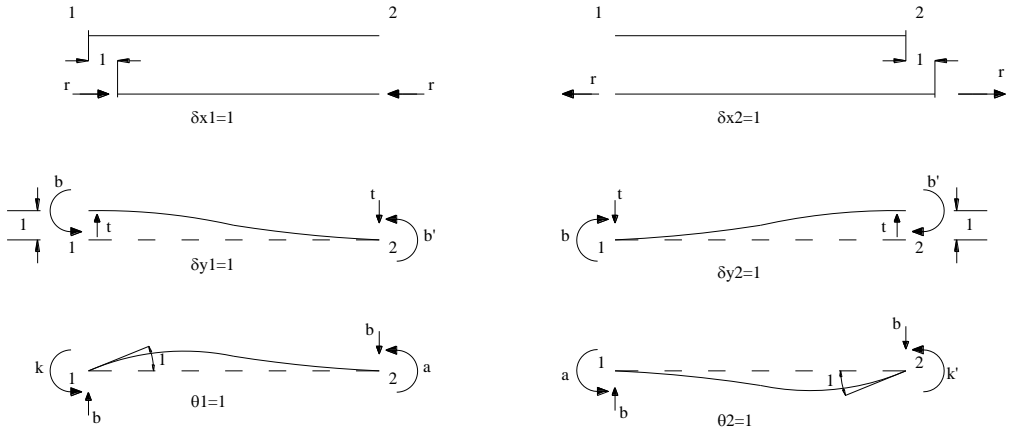
#### *Elásticas de deformación fundamentales de las barras planas:*

Consideremos el sistema esquemático aporticado sujeto a las cargas externas mostradas.

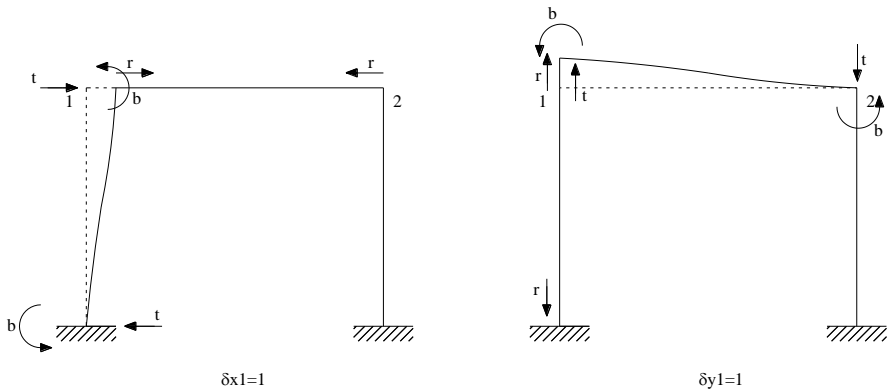


<sup>1</sup>Vease [11] ROMO PROAÑO, Marcelo, “El Método de los Elementos Finitos en el análisis estructural de placas” Centro de Investigación Científica Escuela Politécnica del Ejército – Ecuador (pag.11-12)

Tenemos las elásticas de deformación siguientes:

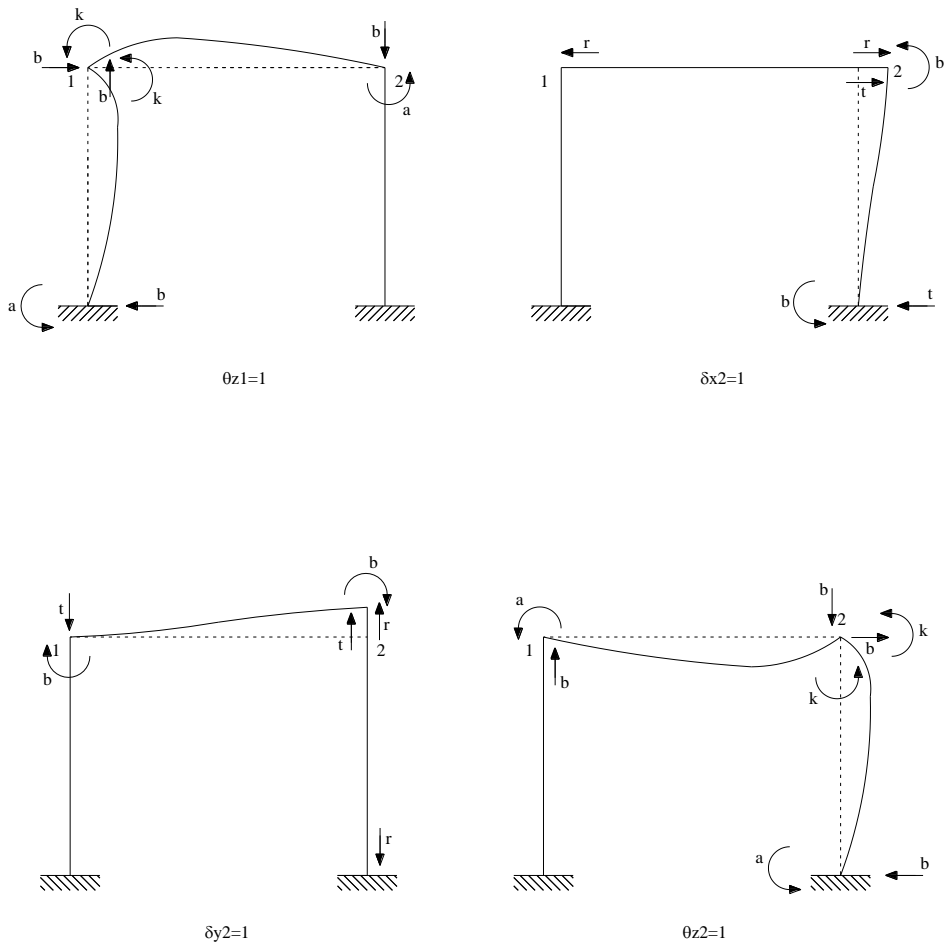


***Elásticas de deformación correspondientes a los corrimientos unitarios de los grados de libertad de la estructura:***



Por cada desplazamiento nodal desconocido de la estructura se plantea una ecuación de equilibrio de fuerzas, y por cada rotación nodal desconocida se plantea una ecuación de equilibrio de momentos.

Cada componente de la matriz de rigideces de la estructura (matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones de equilibrio), se puede obtener directamente de las elásticas de deformación para corrimientos unitarios, sumando las sollicitaciones de todas las barras que concurren al nudo donde se está especificando la condición de equilibrio.



En análisis matricial de estructuras, en lugar de emplear las elásticas de deformación para corrimientos unitarios de los grados de libertad, se calculan matrices de rigideces, en coordenadas globales, para cada barra (cada componente de la matriz de rigideces se calcula en base a corrimientos unitarios en los extremos de barra) y, durante el ensamblaje de la matriz de rigideces de la estructura global se realiza la suma de componentes consistentes de las matrices de rigideces de diferentes elementos. Este proceso es numéricamente equivalente a utilizar las elásticas de deformación, y recibe el nombre de Ensamblaje Directo<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Vease [11] ROMO PROAÑO, Marcelo, "El Método de los Elementos Finitos en el análisis estructural de placas" Centro de Investigación Científica Escuela Politécnica del Ejército – Ecuador (pag.12-13)



En cuanto existe un proceso para determinar las rigideces de los elementos finitos que conforman un continuo (por ejemplo un cuadrilátero plano en placas delgadas), no existiría ningún obstáculo para que se construyan elásticas de deformación correspondientes a corrimientos unitarios de nudo, que permitan visualizar físicamente los componentes de las diferentes ecuaciones de equilibrio que deberían plantearse. También podrían utilizarse las matrices de rigideces de los elementos finitos, en conjunto con el método de ensamblaje directo, para conseguir el mismo objetivo.

### 2.2.2.3 Teoría de Funcionales para Análisis de Estructuras<sup>1</sup>

#### 2.2.2.3.1 Introducción

Existen diversos métodos de solución de ecuaciones diferenciales que permiten, entre otros, resolver los problemas de losas. Estos métodos son: el denominado analítico, el de diferencias finitas y el de los elementos finitos.

El método analítico (Timoshenko 1940) es una solución exacta difícil de plantear en losas de geometría complicada por lo que para fines prácticos no es recomendable.

El método de diferencias finitas es una solución aproximada que tiene como principio representar las derivadas de la ecuación en “diferencias finitas” del tipo  $(w_{i+1} - w_i) / \delta x$ . Si se considera las condiciones iniciales o de borde será un proceso de solución convergente y aproximado a la solución exacta en función del número de diferencias considerado. Este procedimiento es anterior al de los elementos finitos y tiene la limitación de una mayor complejidad en el cumplimiento de las condiciones de contorno por lo que en la práctica se emplea de forma poco habitual en comparación al de los elementos finitos.

El método de elementos finitos es una solución aproximada mediante interpolación de funciones cuyo modelo matemático es la discretización o subdivisión de campos, y a cada campo se le denomina subcampo o elemento finito. Para la solución de la ecuación diferencial se identifica una expresión matemática equivalente y funciones de interpolación que la hacen estacionaria. La expresión matemática equivalente a las ecuaciones diferenciales se le conoce como principio variacional, o funcional. La discretización en elementos finitos será un proceso convergente a la solución exacta si se cumplen requisitos de consistencia y de continuidad.

#### 2.2.2.3.2 Teoría de Funcionales<sup>1</sup>

Las ecuaciones que satisfacen un grupo de ecuaciones diferenciales pueden, en muchos casos, identificarse con aquellas que hacen estacionaria una cierta expresión matemática conocida como *funcional* o *principio variacional*. Así, por ejemplo, la

<sup>1</sup>Vease [12] BOZZO, Luis, “Análisis de losas planas mediante Elementos Finitos”. (pag.15)

función  $u(x)$  que satisface la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ EA \frac{\partial u}{\partial x} \right] + p = 0, \quad u(0) = u(L) = 0$$

(2.1)

es aquella que hace mínima la integral:

$$I(u) = \int_0^L \left[ \frac{1}{2} EA \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \right]^2 + pu \right] dx, \quad u(0) = u(L) = 0$$

(2.2)

donde  $I(u)$  es el denominado funcional asociado a la ecuación (2.1). La ecuación (2.1) se puede obtener considerando el equilibrio en un elemento diferencial tal como el mostrado en la figura 2.10. Considerando el equilibrio de fuerzas en el sentido longitudinal se tiene:

$$\sigma_x A = p dx + \left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) \left( A + \frac{\partial A}{\partial x} dx \right)$$

(2.3)

Simplificando términos de segundo orden, esta ecuación se transforma en

$$p + \sigma_x \frac{\partial A}{\partial x} + A \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = p + \frac{\partial A \sigma_x}{\partial x} = 0$$

(2.4)

La relación tensión-deformación o del material permite escribir

$$p + \frac{\partial EA \varepsilon_x}{\partial x} = 0$$

(2.5)

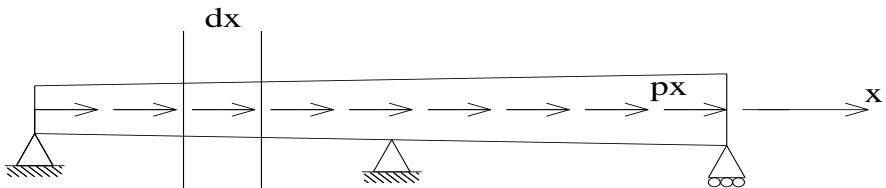
y, finalmente, considerando la ecuación de la compatibilidad ( $\varepsilon_x = \partial u / \partial x$ ) se obtendría la ecuación diferencial (2.1) que gobierna el análisis estructural de barras sometidas a cargas en su eje longitudinal.

La integral en el funcional representado en (2.2) es de la forma:

$$I(u) = \int_{\Omega} F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) d\Omega$$

(2.6)

Donde  $F$  es una función real conocida de argumentos vectoriales  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\partial\mathbf{u}/\partial\mathbf{x}$ . El funcional  $I$  está definido por una integral cuyo valor depende, claramente, de las funciones  $u$  consideradas.



**Figura 2.10.** Barra sometida a una fuerza variable en su longitud

En general, es relativamente simple determinar las ecuaciones diferenciales a las que es equivalente un principio variacional pues basta con emplear las condiciones de Euler-Lagrange. Sin embargo, lo inverso no siempre es posible, y en general es un proceso más laborioso.

En el caso de que un principio variacional apropiado sea conocido, el problema de resolver un grupo de ecuaciones diferenciales puede formularse alternativamente como el de determinar las funciones que hacen estacionario (frecuentemente mínimo) el funcional. Dicha minimización puede plantearse empleando un procedimiento tipo Rayleigh-Ritz. Para ello las funciones incógnitas son representadas por funciones de interpolación conocidas, multiplicadas por parámetros indeterminados. Con ello el problema original de determinar una o más funciones que hacen estacionario al funcional se reduce al de determinar los parámetros que hacen estacionaria la integral.

Nótese, sin embargo, que la solución así obtenida no es la solución exacta de las ecuaciones diferenciales, aunque estas se cumplirán en un sentido global. También se debe observar que los errores numéricos pueden darse en todas las ecuaciones, incluyendo las de equilibrio. Esta es una diferencia importante en comparación a

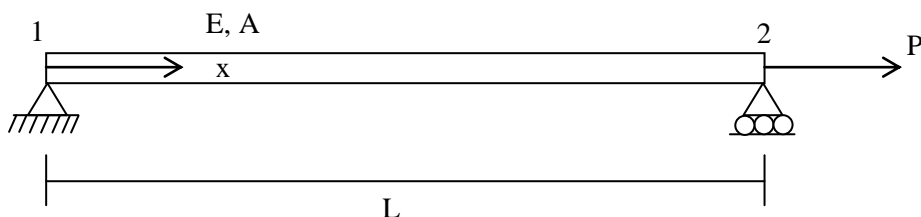
métodos clásicos menos precisos, pero basados en el equilibrio y que aproximan el resto de ecuaciones.

Precisamente al inicio del uso de los elementos finitos para el diseño de estructuras se planteaba este inconveniente en comparación a métodos establecidos como el de pórticos virtuales en losas. Este método clásico, aun recogidos en distintas normativas se basa en soluciones de equilibrio que aproximan las restantes condiciones. Así considerando una retícula de pilares perfecta si hacemos cortes al medio de cada vano y consideramos franjas de pórticos (o “pórticos virtuales”) en cada eje tendríamos un sistema equivalente que aproximaría exactamente el equilibrio (asumiendo que los momentos torsores a lo largo de dichos planos de corte son cero o pequeños, lo cual por simetría es correcto y de allí que se condicione el método a que la retícula sea regular).

Una vez planteado el pórtico virtual y calculado el momento flector en el pórtico este se reparte en la “franja central” y la “franja de soportes” en porcentajes aproximados al 25% y 75%.

De esta forma la solución es exacta en cuanto al momento total en cada dirección, aunque la distribución de momentos de hecho no lo sea, no siendo esto último importante para un estado límite último de resistencia. Los elementos finitos modernos consideran directamente integrales de los momentos en el contorno de cada elemento, lo cual aproxima con precisión las leyes del equilibrio y por lo que esta limitación está en gran parte superada.

Como ejemplo del procedimiento de Rayleigh-Ritz considérese una barra tal como la mostrada en la figura 2.11. Por simplicidad la barra es de sección constante y está sometida a una carga puntual en su extremo 2. Tal como se ha presentado, este problema de análisis estructural se puede plantear como el de minimizar el funcional en (2.2) a partir de *asumir* una función  $u(x)$  que cumpla las condiciones de contorno.



**Figura 2.11.** Ejemplo de aplicación del procedimiento de Rayleigh-Ritz

Una función que cumple estas condiciones podría ser simplemente:

$$u(x) = a \frac{x}{L}$$

(2.7)

donde  $a$  es un parámetro indeterminado. Reemplazando (2.7) en (2.2) se obtiene:

$$I(u) = \int_0^L \left[ \frac{1}{2} EA \left[ \frac{a}{L} \right]^2 - pa \frac{x}{L} \right] dx$$

(2.8)

Considerando que  $p$  es sólo una carga puntual en el extremo de la barra, esta integral se transforma en:

$$I(u) = \frac{1}{2} EA \frac{a^2}{L} - pa$$

(2.9)

Minimizando esta expresión con respecto al parámetro incógnita  $a$ , se obtiene:

$$EA \frac{a}{L} - p = 0$$

(2.10)

ó

$$a = \frac{pL}{EA}$$

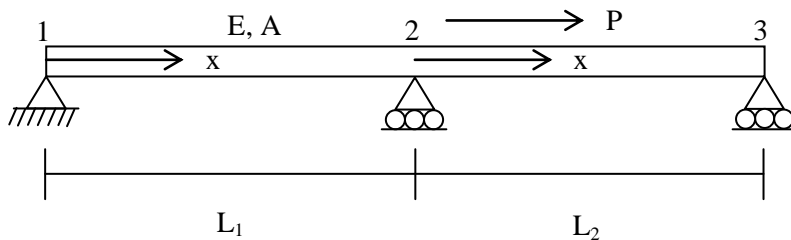
(2.11)

Nótese que la solución aproximada en (2.11) coincide, en este caso, con la solución exacta ( $\delta = pL / EA$ ).

Este es el caso dado que la función de aproximación planteada en (2.7), es la exacta.

El procedimiento de Rayleigh-Ritz es simple pero difícil de emplear en situaciones con condiciones de contorno distintas, como tener tres o más apoyos. Un procedimiento más eficiente para dicho objetivo es dividir la barra en “elementos finitos” (E.F.) y plantear las aproximaciones a nivel local.

De esta forma las condiciones de contorno se cumplen de manera natural. Considérese, por ejemplo, la barra mostrada en la figura 2.12 de sección constante y sometida a una carga en un punto a una distancia  $L_1$  de su nudo 1.



**Figura 2.12.** Ejemplo de aplicación del procedimiento de Elementos Finitos

En general, para un procedimiento tipo elementos finitos y para barras, las funciones de aproximación o de interpolación para un elemento de dos nudos y longitud  $L_1$  son:

$$N_1 = 1 - \frac{x}{L_1}$$

$$N_2 = \frac{x}{L_1}$$

(2.12)

donde  $x$  es una coordenada local con origen en el nudo 1. En general una función incógnita se representa en E.F. como:

$$f(x) = N_1 f_1 + N_2 f_2$$

(2.13)

donde  $f_1, f_2$  son los valores de la función  $f$  en los nudos 1 y 2, tal como se puede observar al reemplazar  $x = 0$  y  $x = L_1$ , respectivamente. De esta forma para el elemento finito 1, se tendría:

$$u(x) = N_1 u_1 + N_2 u_2 \quad (2.14)$$

La condición de contorno  $u_1 = 0$  se cumple de forma natural simplificando la ecuación (2.14).

Reemplazando esta ecuación en (2.2) y considerando la contribución del elemento finito 2, se procedería de forma similar a las ecuaciones (2.8)-(2.11). Finalmente, se obtendría una solución, en este caso exacta, para el desplazamiento en el nudo intermedio. La determinación de las tensiones o deformaciones sería a partir de la solución en desplazamientos y empleando las ecuaciones de compatibilidad y de tensión-deformación. Obsérvese, por tanto, que las funciones lineales empleadas para aproximar los desplazamientos (2.14) deberán derivarse para representar

deformaciones ( $\epsilon_x = \partial u / \partial x$ ) y por ello la variación de las tensiones a lo largo del elemento finito será de un orden inferior. Esta observación no tiene mayor repercusión en este ejemplo dado que la carga externa es puntual y la sección es constante, por lo que las tensiones son constantes a lo largo de cada elemento. Sin embargo, en problemas de mayor complejidad nos permite apreciar que las tensiones variables, de mayor interés práctico en comparación a los desplazamientos, tienen un orden de aproximación inferior a los mismos.

También se puede observar que, en general, si se emplean “n” parámetros indeterminados la solución se obtendrá al resolver un sistema lineal de  $(n \times n)$  ecuaciones.

De manera similar a todo problema de Elasticidad, las ecuaciones se dividen en:

- Ecuaciones del equilibrio
- Ecuaciones de la compatibilidad
- Leyes esfuerzo-deformación o de los materiales.

La solución de estas ecuaciones diferenciales puede obtenerse planteando aproximaciones para las funciones incógnitas de tal manera que cumplan alguna de estas ecuaciones y utilizar un principio variacional para las restantes. Por ejemplo, el funcional de energía potencial, que es equivalente a las ecuaciones del equilibrio, puede utilizarse planteando aproximaciones para los desplazamientos que cumplan directamente las ecuaciones de la compatibilidad y las leyes esfuerzo-deformación.

Si siguiendo este procedimiento se cumplirían de manera exacta las ecuaciones de la compatibilidad y las leyes esfuerzo-deformación pero de manera aproximada o global las leyes del equilibrio.

### 2.2.2.3.3 El Funcional de Energía Potencial<sup>1</sup>

En principio todo funcional puede emplearse para formular elementos finitos, aunque el funcional de energía potencial es el que se emplea más habitualmente. Sin embargo, el elemento mixto desarrollado en el año de 1985 y formulado a partir del funcional de Reissner es también utilizado como comparación con otros elementos más recientes.

El funcional de energía potencial es equivalente a las ecuaciones diferenciales del equilibrio y puede escribirse, para el análisis de sólidos, como:

$$\Pi_p(u) = \int_V \left( \frac{1}{2} \varepsilon^T D \varepsilon - u \bar{b} \right) dV - \int_{S_\sigma} u \bar{T} dS \quad (2.15)$$

Donde:

$$u = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}$$

representando  $\bar{b}$  y  $\bar{T}$  fuerzas prescritas en el volumen y en la superficie, respectivamente. Obsérvese que el resultado de las operaciones matriciales indicadas es un escalar que representa dicha energía en todo el dominio.

Las ecuaciones de compatibilidad se cumplen de manera externa al funcional al plantear funciones de aproximación que cumplan, en el volumen, las condiciones:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

<sup>1</sup>Vease [12] BOZZO, Luis, "Análisis de losas planas mediante Elementos Finitos". (pag.21)



o en notación matricial de la forma:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = Tu$$

En los bordes  $S_u$  donde se especifiquen condiciones de apoyo, las condiciones a satisfacer son:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u} \quad (2.16)$$

Las leyes tensión deformación se cumplen directamente al satisfacer las condiciones

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.17)$$

Donde:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \frac{E}{1-\nu^2} & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{pmatrix}$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

G y  $\nu$  representan el módulo de corte y el coeficiente de poisson, respectivamente.

Para verificar la equivalencia del funcional de energía potencial con las ecuaciones diferenciales del equilibrio se aplicarán las condiciones de Euler-Lagrange. Para ello considerando la notación de las ecuaciones (2.6) se presentan a continuación estas condiciones:

En el interior:

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial u}{\partial x}} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial u}{\partial y}} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial u}{\partial z}} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial v}{\partial x}} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial v}{\partial y}} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial v}{\partial z}} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial w}{\partial x}} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial w}{\partial y}} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial w}{\partial z}} = 0$$

En el contorno:

$$\eta_x \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial u}{\partial x}} + \eta_y \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial u}{\partial y}} + \eta_z \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial u}{\partial z}} + \frac{\partial G}{\partial u} = 0$$

$$\eta_x \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial v}{\partial x}} + \eta_y \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial v}{\partial y}} + \eta_z \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial v}{\partial z}} + \frac{\partial G}{\partial v} = 0$$

$$\eta_x \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial w}{\partial x}} + \eta_y \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial w}{\partial y}} + \eta_z \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial w}{\partial z}} + \frac{\partial G}{\partial w} = 0$$

Donde  $F$  es la función que define al funcional en el dominio ( $V$ ) y  $G$  la función que lo define en el contorno ( $S\sigma$ ) y  $\eta$  es el vector normal al borde con componentes ( $\eta_x \eta_y \eta_z$ ). Al emplear estas expresiones en (2.15) y teniendo en cuenta las condiciones de compatibilidad y las leyes del material se obtienen las ecuaciones del equilibrio en el interior y en el contorno donde los esfuerzos están prescritos:

En el volumen:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + b_z = 0$$

En el contorno:

$$\eta\sigma + T = 0$$

Quedando, por tanto, reflejada la equivalencia entre la expresión (2.15) y las ecuaciones diferenciales del equilibrio de sólidos.

Para minimizar esta expresión empleando el procedimiento de Rayleigh-Ritz los desplazamientos ( $u \ v \ w$ ), en todo el dominio, se representan por un sumatorio de funciones conocidas  $N_i(x)$ , multiplicadas por parámetros indeterminados ( $c_i \ d_i \ e_i$ ) tales como:

$$u = \sum N_i(x)c_i$$

$$v = \sum N_i(x)d_i$$

$$w = \sum N_i(x)e_i$$

$$(2.18)$$

O en notación matricial:

$$u = Na \quad (2.19)$$

Las deformaciones se obtienen derivando este campo de desplazamientos de tal manera que satisfagan las ecuaciones de la compatibilidad:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = B a \quad (2.20)$$

de forma similar los esfuerzos se obtienen según:

$$\sigma = D \varepsilon = D B a \quad (2.21)$$

Con lo que al reemplazar en el funcional de energía potencial se obtiene:

$$\Pi_p(u) = \frac{1}{2} a^T \left( \int_V B^T D B dV \right) a - a^T \int_V N^T b dV - a^T \int_{S_\sigma} N^T T dS \quad (2.22)$$

Finalmente al minimizar este funcional con respecto a los parámetros indeterminados (a), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (2.23)$$

Donde:

$$K = \int_V B^T D B dV$$

$$f = \int_V N^T b dV + \int_{S_\sigma} N^T T dS$$

(2.24)

Es importante resaltar que la ventaja del procedimiento de Rayleigh-Ritz consiste en haber transformado el problema complejo de hallar funciones que hagan mínimo a un funcional, al de resolver un sistema de ecuaciones lineales que es simple de realizar mediante el cálculo con ordenadores. Sin embargo, también se debe resaltar la dificultad de buscar funciones que cumplan directamente las condiciones de compatibilidad en  $S_u$  y por eso su relativa utilidad práctica. Mediante los elementos finitos las condiciones de contorno se pueden satisfacer de una manera casi natural, pudiéndose entender los E.F. como una continuación de los planteamientos de Rayleigh-Ritz, sin la mencionada limitación. De hecho las expresiones 2.18 a 2.24 son muy similares a las que se obtendrán para el desarrollo de E.F., siendo la diferencia más significativa que las integrales en todo el dominio se transforman en el sumatorio de integrales en cada elemento finito.

#### 2.2.2.4 Elemento Finito de Placa Rectangular

El elemento finito cuadrilátero plano puede tener una geometría real arbitraria. Para efectos de simplificar las operaciones se utiliza como referencia al elemento finito cuadrilátero plano en coordenadas normalizadas.

En la figura 2.13 se muestra una viga de gran peralte, misma que ha sido discretizada en elementos rectangulares de cuatro nodos. Separando y analizando un elemento cualquiera de la figura con el sistema de coordenadas locales  $r, s$ . Por tener cuatro desplazamientos nodales en cada dirección hay que definir el campo de cada desplazamiento en el interior del elemento por un polinomio de cuatro coeficientes en  $r$  y  $s$ .

La interpolación que cumple las condiciones de compatibilidad interelemental y de invarianza geométrica es la siguiente<sup>1</sup>:

$$u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 s + \alpha_4 rs$$

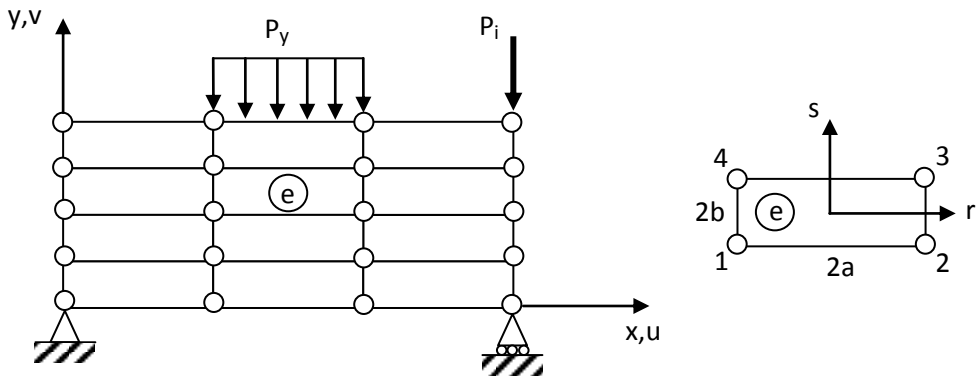
$$v(x, y) = \alpha_5 + \alpha_6 r + \alpha_7 s + \alpha_8 rs$$

(2.25)

<sup>1</sup>Véase [1] OÑATE, Eugenio, "Cálculo de Estructuras por el Método de los Elementos Finitos", Editorial CIMNE, Barcelona, España, 1995. (pag.182)

Se desprende de (2.25) que la distribución de  $u$  y  $v$  a lo largo de cada lado es lineal y depende sólo de los valores de los desplazamientos en los dos nodos que conectan cada lado con el elemento contiguo. Por lo tanto la interpolación escogida garantiza la compatibilidad del campo de desplazamientos. Las cuatro constantes para cada desplazamiento se determinan utilizando las ocho condiciones siguientes en el sistema de coordenadas  $r, s$ .

$$\begin{aligned}
 u &= u_1 & y & \quad v = v_1 & \quad \text{para} & \quad r = -a, \quad s = -b \\
 u &= u_2 & y & \quad v = v_2 & \quad \text{para} & \quad r = -a, \quad s = b \\
 u &= u_3 & y & \quad v = v_3 & \quad \text{para} & \quad r = a, \quad s = b \\
 u &= u_4 & y & \quad v = v_4 & \quad \text{para} & \quad r = a, \quad s = b
 \end{aligned}
 \tag{2.26}$$



**Figura 2.13.** Discretización de una viga en elementos finitos rectangulares de cuatro nodos  
**Fuente:** [1] OÑATE, Eugenio, "Cálculo de Estructuras por el Método de los Elementos Finitos", Editorial CIMNE, Barcelona, España, 1995. (pag.183)

Sustituyendo las condiciones (2.26) en (2.25) y resolviendo el sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas para calcular  $\alpha_i$ , para cada desplazamiento, se puede reescribir la ecuación (2.25) como:

$$u = \sum_{i=1}^4 N_i u_i \quad ; \quad v = \sum_{i=1}^4 N_i v_i
 \tag{2.27}$$

Siendo las funciones de forma  $N_i$ :

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{r}{a}\right) \left(1 - \frac{s}{b}\right) \quad ; \quad N_2 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{r}{a}\right) \left(1 - \frac{s}{b}\right) \\
 N_3 &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{r}{a}\right) \left(1 + \frac{s}{b}\right) \quad ; \quad N_4 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{r}{a}\right) \left(1 + \frac{s}{b}\right)
 \end{aligned}
 \tag{2.28}$$

Las ecuaciones (2.27) se pueden escribir en forma matricial así:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 : N_2 & 0 : N_3 & 0 : N_4 & 0 \\ 0 & N_2 : 0 & N_2 : 0 & N_3 : 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{a}^{(e)}$$

Con:

$$\mathbf{a}^{(e)} = \begin{Bmatrix} a_1^{(e)} \\ a_2^{(e)} \\ a_3^{(e)} \\ a_4^{(e)} \end{Bmatrix} \quad ; \quad a_i^{(e)} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix}$$

$a^{(e)}$ : Vector de desplazamientos del elemento y del nodo  $i$ .

$$\mathbf{N} = [N_1, N_2, N_3, N_4] \quad ; \quad N_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix}$$

$\mathbf{N}$ : Matriz de funciones de forma.

Para obtener la matriz de deformación del elemento se parte del campo de deformaciones haciendo uso de la teoría general de la Elasticidad y con (2.27)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i=1}^4 B_i \mathbf{a}_i^{(e)} = [B_1, B_2, B_3, B_4] \begin{Bmatrix} a_1^{(e)} \\ a_2^{(e)} \\ a_3^{(e)} \\ a_4^{(e)} \end{Bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{a}^{(e)}$$

En donde la submatriz  $B_i$  viene dada por la ecuación:

$$B_i = \frac{1}{2A^{(e)}} \begin{bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix}$$

y para el cálculo de  $B_i$  es necesario considerar que:

$$\frac{\partial Ni}{\partial x} = \frac{\partial Ni}{\partial r} \quad y \quad \frac{\partial Ni}{\partial y} = \frac{\partial Ni}{\partial s}$$

Con estos reparos el cálculo explícito de la matriz  $B$  es inmediato y se muestra a continuación:

$$B = \begin{bmatrix} -b_2 & 0 & : & b_2 & 0 & : & b_1 & 0 & : & -b_1 & 0 \\ 0 & -a_2 & : & 0 & -a_1 & : & 0 & a_1 & : & 0 & a_2 \\ -a_2 & b_2 & : & -a_1 & b_2 & : & a_1 & b_1 & : & a_2 & b_1 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = \frac{1}{4b} \left(1 + \frac{r}{a}\right) \quad ; \quad a_2 = \frac{1}{4b} \left(1 - \frac{r}{a}\right)$$

$$b_1 = \frac{1}{4a} \left(1 + \frac{1}{b}\right) \quad ; \quad b_2 = \frac{1}{4a} \left(1 - \frac{1}{b}\right)$$

La matriz de deformación contiene términos de primer grado en  $r$  y  $s$ ; esto implica que el integrando de (2.29) contiene términos lineales y cuadráticos en dichas variables.

$$K^{(e)} = \int \int_{A^{(e)}} B^T D B t \, dr \, ds = \int \int_{A^{(e)}} \begin{bmatrix} B_1^T D B_1 & B_1^T D B_2 & B_1^T D B_3 & B_1^T D B_4 \\ & B_2^T D B_2 & B_2^T D B_3 & B_2^T D B_4 \\ & & B_3^T D B_3 & B_3^T D B_4 \\ Sim. & & & B_4^T D B_4 \end{bmatrix}$$

(2.29)

#### 2.2.2.4.1 Elemento rectangular de cuatro nodos no conforme

La forma más sencilla de satisfacer los requisitos de continuidad  $C_1$  para la flecha es tomar, similarmente a los elementos de viga de Euler - Bernoulli, la flecha y sus dos derivadas cartesianas (giros) como variables nodales.

En general tendremos tres variables por nodo  $w_i, \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i$  y  $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i$  y el número total de variables de un elemento de  $n$  nodos será  $3n$ .



En la figura 2.14 se muestra un elemento que al tener 4 nodos, el número de términos del polinomio debe ser 12, por lo que hay que omitir los términos  $x^4$ ,  $y^4$ ,  $x^2y^2$ , de un polinomio completo que tiene hasta 15 términos en el caso de uno de cuarto grado. Por lo tanto, el polinomio interpolante es:

$$w = \alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3y + \alpha_4x^2 + \alpha_5xy + \alpha_6y^2 + \alpha_7x^3 + \alpha_8x^2y + \alpha_9xy^2 + \alpha_{10}y^3 + \alpha_{11}x^3y + \alpha_{12}xy^3$$

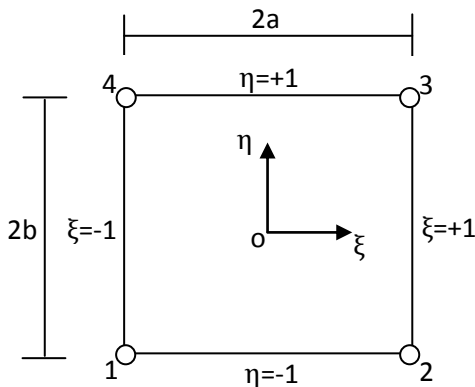
Que se puede escribir de la forma:

$$\mathbf{w} = \mathbf{P}^T \boldsymbol{\alpha}$$

En donde:

$\boldsymbol{\alpha}$ : Es un vector con todos los coeficientes del polinomio  $\alpha_i$

$\mathbf{P}$ : un vector que contiene todas las potencias de x e y del polinomio.



$$N_i = (1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(2 + \xi_i \xi + \eta_i \eta - \xi^2 - \eta^2) / 8$$

$$\bar{N}_i = a(\xi^2 - 1)(\xi + \xi_i)(1 + \eta_i \eta) / 8$$

$$\bar{\bar{N}}_i = b(\eta^2 - 1)(\eta + \eta_i)(1 + \xi_i \xi) / 8$$

$$w = \sum_{i=1}^4 \left[ N_i w_i + \bar{N}_i \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_i + \bar{\bar{N}}_i \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_i \right]$$

**Figura 2.14.** Elemento de placa rectangular de cuatro nodos no conforme (MZO)

**Fuente:** [1] OÑATE, Eugenio, "Cálculo de Estructuras por el Método de los Elementos Finitos", Editorial CIMNE, Barcelona, España, 1995. (pag.332)

El cálculo de las  $w_i$  se efectúa imponiendo las condiciones en los nodos, lo que proporciona  $3n$  ecuaciones.

$$w_i = (w)_i \quad ; \quad \theta_{xi} = \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_i \quad ; \quad \theta_{yi} = \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_i \quad \Rightarrow \quad \text{Para } i = 1, 2, \dots, n$$

Particularizando la expresión de  $w$ , y sus dos derivadas parciales respecto a  $x$ , y para los cuatro nudos se obtienen doce expresiones del tipo:

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i + \alpha_4 x_i^2 + \alpha_5 x_i y_i + \alpha_6 y_i^2 + \alpha_7 x_i^3 + \alpha_8 x_i^2 y_i + \alpha_9 x_i y_i^2 + \alpha_{10} y_i^3 + \alpha_{11} x_i^3 y + \alpha_{12} x_i y_i^3$$

$$\theta_{x_i} = \alpha_3 + \alpha_5 x_i + 2\alpha_6 y_i + \alpha_8 x_i^2 + 2\alpha_9 x_i y_i + 3\alpha_{10} y_i^2 + \alpha_{11} x_i^3 + 3\alpha_{12} x_i y_i^2$$

$$\theta_{y_i} = -\alpha_2 + 2\alpha_4 x_i - \alpha_5 y_i - 3\alpha_7 x_i^2 + 2\alpha_8 x_i y_i - \alpha_9 y_i^2 - 3\alpha_{11} x_i^2 - \alpha_{12} y_i^3$$

donde  $i = 1, 4$ . Estas doce ecuaciones se pueden agrupar en la forma:

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{a}^{(e)}$$

siendo  $A$  una matriz constante de dimensión  $12 \times 12$ , cuyos términos son función únicamente de las coordenadas de los nudos. Se puede demostrar que la matriz  $A$  tiene inversa siempre que las coordenadas de los nudos definan un rectángulo correctamente.

Sustituyendo  $\alpha$  en la expresión de  $w$  se obtiene:

$$\mathbf{w} = \mathbf{P}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{a}^{(e)} = \mathbf{N} \mathbf{a}^{(e)}$$

donde

$$\mathbf{N} = \mathbf{P}^T \mathbf{A}^{-1}$$

con lo que se define la matriz de funciones de interpolación  $N$  para la flecha  $w$ . La forma explícita de  $N$  se puede calcular analíticamente, resultando un conjunto de 12 funciones, que pueden agruparse para los cuatro nudos en la forma:

$$N = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4]$$

Donde  $N_i$  son matrices  $1 \times 3$  que contienen las tres funciones de interpolación del nudo  $i$ . Para simplificar el cálculo de las funciones de interpolación se emplea un sistema de ejes  $\xi, \eta$ , local al elemento y situado en su centro (cuyas coordenadas son  $x_c, y_c$ ) de tal manera que las coordenadas locales varían entre  $-1$  y  $+1$ . Por lo tanto:

$$\xi = \frac{x - x_c}{a} \quad \eta = \frac{y - y_c}{b}$$

El valor de las funciones de interpolación del nudo  $i$  es:

$$N_i = \frac{1}{2} [(\xi\xi_i + 1)(\eta\eta_i + 1)(2 + \xi\xi_i + \eta\eta_i - \xi^2 - \eta^2) \dots \dots \dots]$$

$$\dots \dots \alpha\xi_i(\xi\xi_i + 1)^2(\xi\xi_i - 1)(\eta\eta_i + 1) \quad \alpha\eta_i(\xi\xi_i + 1)(\eta\eta_i + 1)^2(\eta\eta_i - 1)]$$

### 2.2.2.4.1.1 Deformaciones unitarias<sup>1</sup>

Sustituyendo el valor de  $w$  en la expresión de las deformaciones unitarias se obtiene la matriz  $B$ :

$$\varepsilon = z \partial w = z \partial N a^{(e)} = z B a^{(e)} = B a^{(e)}$$

que está compuesta por 4 submatrices y cuyo valor es:

$$B = -z \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2} & \vdots & \frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2} & \vdots & \frac{\partial^2 N_3}{\partial x^2} & \vdots & \frac{\partial^2 N_4}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 N_1}{\partial y^2} & \vdots & \frac{\partial^2 N_2}{\partial y^2} & \vdots & \frac{\partial^2 N_3}{\partial y^2} & \vdots & \frac{\partial^2 N_4}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 N_1}{\partial x \partial y} & \vdots & 2 \frac{\partial^2 N_2}{\partial x \partial y} & \vdots & 2 \frac{\partial^2 N_3}{\partial x \partial y} & \vdots & 2 \frac{\partial^2 N_4}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}$$

También se puede poner como:

$$B = z \partial N = z \partial P^T A^{-1} = z Q A^{-1}$$

$$(2.30)$$

donde la matriz  $Q$  puede calcularse explícitamente, y vale

$$Q = \partial P^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -6x & -2y & 0 & 0 & -6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2x & -6y & 0 & -6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -4x & -4y & 0 & -6x^2 & -6y^2 \end{bmatrix}$$

En ella se observa que se puede alcanzar un estado de  $\varepsilon$  constante si  $\alpha_7$  a  $\alpha_{12}$  son cero con lo que desaparecen todos los términos en  $x, y$ .

<sup>1</sup>Véase [15] CELIGÜETA LIZARZA, Juan Tomás. “Método de los Elementos Finitos para Análisis Estructural”. Campus Tecnológico de la Universidad de Navarra, Septiembre 2008. (pag.140)

### 2.2.2.4.1.2 Matriz de rigidez<sup>1</sup>

La expresión general para la matriz de rigidez de un elemento finito es:

$$K = \int_v B^T D B dx dy dz$$

Sustituyendo B mediante (2.30) y sacando fuera de la integral los términos que no dependen de x, y se obtiene:

$$K = \int_v z^2 \bar{B}^T D \bar{B} dx dy dz = \frac{h^3}{12} \int \bar{B}^T D \bar{B} dx dy$$

$$K = \frac{h^3}{12} A^{-T} \left[ \int Q^T D Q dx dy \right] A^{-1}$$

### 2.2.2.4.1.3 Vector de fuerzas nodales equivalentes

El vector de fuerzas nodales equivalentes para una carga distribuida por unidad de superficie q normal a la placa es<sup>1</sup>:

$$f_s = \int_s N^T q dx dy$$

cuyo valor puede ser así mismo evaluado analíticamente y en el que se observa la existencia de componentes tanto según w como según los giros.

### 2.2.2.4.1.4 Requerimientos de convergencia<sup>1</sup>

En el elemento rectangular de placa delgada desarrollado no existe continuidad de desplazamientos en la unión entre elementos, es decir que es incompatible. Sin embargo este elemento se comporta bastante bien y fue muy utilizado en la práctica.

Para poner de manifiesto la incompatibilidad de deformaciones, considérese la situación mostrada en la figura 2.15, en la que dos elementos A y B comparten un lado 2-3. Para mayor sencillez, se supone que este lado es la recta x=0. La flecha y los giros en este lado son:

<sup>1</sup>Véase [15] CELIGÜETA LIZARZA, Juan Tomás. “Método de los Elementos Finitos para Análisis Estructural”. Campus Tecnológico de la Universidad de Navarra, Septiembre 2008. (pag.141)

$$w_{x=0} = \alpha 1 + \alpha 3y + \alpha 6y^2 + \alpha 10y^3$$

$$\theta_{x(x=0)} = \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{x=0} = \alpha 3 + 2\alpha 6y + 3\alpha 10y^2 \quad (2.31)$$

$$\theta_{y(x=0)} = - \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=0} = -\alpha 2 - \alpha 5y - \alpha 9y^2 - \alpha 12y^3$$

Particularizando en el nudo 2 ( $y = 0$ ):

$$w_2 = \alpha 1 \quad (2.32)$$

$$\theta_{x2} = \alpha 3 \quad (2.33)$$

$$\theta_{y2} = -\alpha 2 \quad (2.34)$$

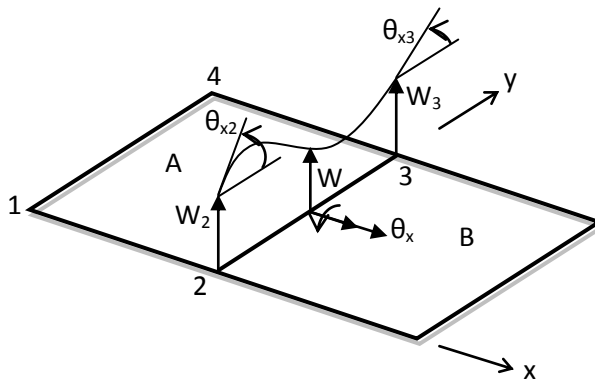
Particularizando en el nudo 3 ( $y = b$ ):

$$w_3 = \alpha 1 + \alpha 3b + \alpha 6b^2 + \alpha 10b^3 \quad (2.35)$$

$$\theta_{x3} = \alpha 3 + 2\alpha 6b + 3\alpha 10b^2 \quad (2.36)$$

$$\theta_{y3} = -\alpha 2 - \alpha 5b - \alpha 9b^2 - \alpha 12b^3 \quad (2.37)$$

Las 4 ecuaciones (2.32), (2.33), (2.35) y (2.36) permiten hallar los 4 parámetros  $\alpha 1$ ,  $\alpha 3$ ,  $\alpha 6$  y  $\alpha 10$  en función de las 4 deformaciones nodales  $w_2$ ,  $w_3$ ,  $\theta_{x2}$ ,  $\theta_{x3}$ . Por lo tanto la deformación  $w$  y el giro  $\theta_x$  quedan unívocamente definidos en el lado  $x = 0$  mediante las deformaciones nodales existentes sólo en dicho lado (figura 2.15).

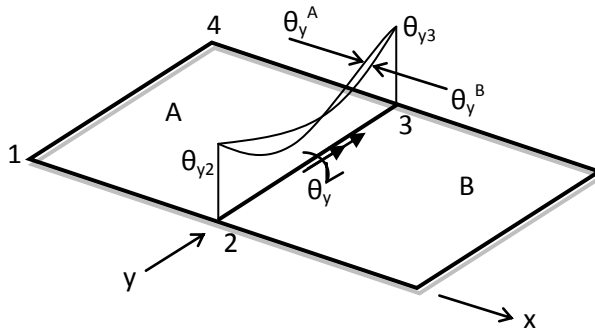


**Figura 2.15** Deformación de la frontera entre dos elementos placa

**Fuente:** [15] CELIGÜETA LIZARZA, Juan Tomás. "Método de los Elementos Finitos para Análisis Estructural". Campus Tecnológico de la Universidad de Navarra, Septiembre 2008. (pag.142)

Para definir el giro  $\theta_y$  en el lado 2-3 se necesitan los cuatro parámetros  $\alpha_2$ ,  $\alpha_5$ ,  $\alpha_9$  y  $\alpha_{12}$  (ver la tercera ecuación de (2.31)). Sin embargo para ello sólo se dispone de las dos ecuaciones (2.34) y (2.37), por lo que dicho giro no queda unívocamente definido empleando únicamente los grados de libertad del lado 2-3. En consecuencia, cada uno de los dos elementos A o B definirá un valor diferente del giro  $\theta_y$ , con lo que no queda garantizada la continuidad del giro  $\theta_y$  en el lado. De esta manera se incumple el criterio de convergencia que exige la continuidad hasta la derivada de orden 1 en los lados entre los elementos.

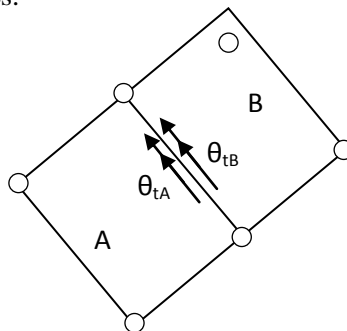
La figura 2.16 ilustra la situación de incompatibilidad en el giro  $\theta_y$ .



**Figura 2.16** Incompatibilidad del giro normal a la frontera entre 2 elementos placa

**Fuente:** [15] CELIGÜETA LIZARZA, Juan Tomás. "Método de los Elementos Finitos para Análisis Estructural". Campus Tecnológico de la Universidad de Navarra, Septiembre 2008. (pag.143)

Esta conclusión ha sido deducida para una situación particular, pero el fenómeno puesto de manifiesto es general en elementos placa que empleen la formulación aquí descrita: existen discontinuidades entre elementos en el giro normal al lado, sea cual sea su orientación (figura 2.17). A los elementos que muestran este comportamiento se les denomina no conformes.



**Figura 2.17** Continuidad de giros en la frontera entre dos elementos placa

**Fuente:** [15] CELIGÜETA LIZARZA, Juan Tomás. "Método de los Elementos Finitos para Análisis Estructural". Campus Tecnológico de la Universidad de Navarra, Septiembre 2008. (pag.143)

### 2.2.2.4.2 Elemento rectangular de 12 grados de libertad de Melosh

Una primera solución al problema de que la existencia de discontinuidades entre elementos en el giro normal al lado es adoptar otro polinomio interpolante diferente, que garantice la compatibilidad del giro normal. En esta línea, Melosh presentó otro elemento en el que, utilizando como grados de libertad la flecha y los dos giros, el polinomio interpolante garantiza la compatibilidad del giro normal al lado.

Las funciones de forma se obtienen por combinación de las del elemento viga de dos nodos de Euler – Bernoulli; así, la aproximación para los desplazamientos  $w$  se expresan como<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned}
 w = & N_1(x)N_1(y)w_1 + N_2(x)N_1(y)w_2 + N_2(x)N_2(y)w_3 + N_1(x)N_2(y)w_4 + \\
 & + \bar{N}_1(x)N_1(y) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_1 + \bar{N}_2(x)N_1(y) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_2 + \bar{N}_2(x)N_2(y) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_3 + \\
 & + \bar{N}_1(x)N_2(y) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_4 + N_1(x)\bar{N}_1(y) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_1 + N_2(x)\bar{N}_1(y) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_2 + \\
 & + N_2(x)\bar{N}_2(y) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_3 + N_1(x)\bar{N}_2(y) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_4
 \end{aligned}$$

Donde  $\bar{N}_1$  y  $\bar{N}_2$  son las funciones de forma de dos nodos, en coordenadas cartesianas, referidas a cada uno de los dos lados del elemento.

Sin embargo, dicho polinomio no tiene el término  $(xy)$ , por lo que no es capaz de representar estados de curvatura de torsión constante (que es proporcional a la derivada segunda cruzada), y por lo tanto no satisface criterios de convergencia como el de que las funciones de interpolación deben ser capaces de representar los desplazamientos como sólido rígido, sin producir tensiones en el elemento y además que las funciones de interpolación deben ser tales que cuando los desplazamientos de los nudos correspondan a un estado de tensión constante, este estado tensional se alcance en realidad en el elemento.

En realidad se puede demostrar que es imposible definir, mediante polinomios sencillos, unas funciones de interpolación que aseguren la compatibilidad completa, cuando sólo se usan como parámetros nodales, la flecha  $w$  y sus derivadas primeras. O bien se incumple la compatibilidad del giro normal, o bien el elemento es incapaz de representar algún estado de tensión constante.

<sup>1</sup>Véase [1] OÑATE, Eugenio, “Cálculo de Estructuras por el Método de los Elementos Finitos”, Editorial CIMNE, Barcelona, España, 1995. (pag.344)

Una solución más adecuada al problema consiste en adoptar otros parámetros, además de la flecha y el giro, como grados de libertad en los nudos. De esta manera se pueden generar elementos compatibles.

### 2.2.3 Métodos tradicionales de análisis

El material de la Placa se supone elástico, homogéneo e isótropo; Se supone válida la teoría de las pequeñas deformaciones; Una flecha del 10% del espesor puede ser considerada como un límite máximo para satisfacer la hipótesis de flechas pequeñas.

Por otra parte se define como estado de placa al sistema de cargas en el que sólo actúan fuerzas exteriores normales al plano medio de la placa y momentos contenidos en planos perpendiculares al mismo (o lo que es lo mismo momentos cuyos ejes están contenidos en el plano medio).

Todos los puntos situados sobre una recta normal al plano medio de la placa sin deformar, permanecen después de la deformación sobre una recta (Hipótesis de Navier) normal al plano medio deformado. Hipótesis de Normalidad; Los puntos del plano medio sólo se mueven en la dirección perpendicular al mismo. Es decir sólo se considera la deformación provocada por la flexión; todos los puntos situados sobre una normal al plano medio tienen la misma flecha. Es decir  $w(x, y, z) = w(x, y)$ ; La tensión normal al plano medio de la placa se considera despreciable.

La tipología Placa es en principio una estructura tridimensional y como tal debería estudiarse. Sin embargo su comportamiento podría representarse con un modelo bidimensional si se pudiera considerar que la variación de las variables significativas a lo largo del espesor es una función conocida de los valores que las mismas toman en el plano medio de la placa. En estas condiciones sería suficiente analizar el plano medio para encontrar una solución tensodeformacional compatible y equilibrada.

#### 2.2.3.1 Placas delgadas rectangulares<sup>1</sup>

La ecuación diferencial general para la flexión dada al final del punto “2.2.2.1.1 Planteamiento de las Ecuaciones Diferenciales de equilibrio” se resolverá utilizando métodos exactos que utilizan Series de Fourier y el método alternativo de Levi.

Para cada uno de los métodos se hará el tratamiento para placas rectangulares con distintas condiciones de contorno, es decir, de vinculación de la placa al medio circundante. Las condiciones de contorno se pueden clasificar de la siguiente forma:

<sup>1</sup>Véase [13] PATANELLA, Alejandro. ACTIS, Marcos, “Placas Planas Rectangulares de Espesor Delgado”. Facultad de Ingeniería Universidad Nacional de La Plata, 2008. (pag.8)



*Borde empotrado:*

La deflexión a lo largo del borde empotrado es cero y la tangente al plano de la superficie media deflectada es horizontal. Entonces si el eje  $x$  coincide con el borde empotrado tendremos:

$$(w)_{y=0} = 0$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$$

*Borde simplemente apoyado:*

La deflexión a lo largo del borde simplemente apoyado es cero y el momento flexor paralelo a este lado también será nulo. Entonces si el eje  $x$  coincide con el borde simplemente apoyado tendremos:

$$(w)_{y=0} = 0$$

$$(M_y)_{y=0} = \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{y=0} = 0$$

*Borde libre:*

El momento flexor, el momento torsor y la fuerza de corte a lo largo de este lado es nula. Si el lado libre coincide con la línea recta correspondiente a un  $x=aL$  se tiene:

$$(M_{xy})_{x=a} = 0 \quad (M_{xy})_{x=a} = 0 \quad (Q_x)_{x=a} = 0$$

Como ha sido probado por Kirchoff, dos condiciones de borde son solo necesarias para encontrar una única solución al problema de flexión. Aunque el también demostró que las dos últimas condiciones de  $M_{xy}$  y  $Q_x$  pueden ser reemplazadas por una sola, es decir:

$$\left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]_{x=a} = 0$$

Y finalmente expresando la condición de  $M_x$  en términos de  $w$  las condiciones finales para un borde libre queda como:

$$\left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{x=a} = 0 \quad \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]_{x=a} = 0$$

### 2.2.3.2 Ecuación Diferencial de Gobierno

La obtención de la ecuación diferencial general para la flexión se desarrolla en el punto “2.2.2.1.1 Planteamiento de las Ecuaciones Diferenciales de equilibrio” concluyendo con:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}$$

#### *Ecuación de Germain - Lagrange*

Esta es la ecuación diferencial que controla el problema de la flexión de placas en la teoría clásica.

A diferencia de estructuras de barras en general, y problemas de estado plano de esfuerzos donde la relación de poisson no influye en la distribución de fuerzas en losas dicha relación afecta tanto a la distribución de fuerzas como a los desplazamientos.

Sin embargo, en muchos casos prácticos y para losas de hormigón, se suele considerar como cero o 0.1 debido a la fisuración. Las losas de hormigón son estructuras que, por lo general, requieren poca cantidad de refuerzo por unidad de área en comparación a las vigas, por lo que aparece fisuración significativa y el coeficiente de poisson es bajo.

Las leyes esfuerzo deformación también pueden particularizarse para los casos de losas huecas y estratificada. En estos casos, sin embargo, el módulo de elasticidad y el de poisson son funciones del espesor. Por otro lado la ubicación del eje neutro es en estos casos una función de las características de los materiales y de la sección.

### 2.2.3.3 Método de Navier<sup>1</sup>

El método de Navier es aplicable en las siguientes condiciones:

1. Placa rectangular, de dimensiones  $a \times b$ .
2. Condición de apoyos simples en los cuatro bordes (placa tetraapoyada en bordes rectos).

<sup>1</sup>Véase [14] GALLEGO SEVILLA, R. RUS CARLBORG, G y MARTÍNEZ CASTRO, A. E. “Placas Delgadas mediante Métodos Clásicos”. Departamento de Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica, Universidad de Granada, Octubre 2007. (pag.1)

$$w = 0; w_{,nn} = 0$$

Considérese la referencia  $R(O; x, y, z)$ , situada en una esquina de la placa, con  $x \in [0, a]$  e  $y \in [0, b]$ . La ecuación de gobierno de flexión de placas delgadas es la siguiente:

$$\Delta^2 w(x, y) = \frac{p(x, y)}{D}$$

Siendo:

$$\Delta^2 = w_{,xxxx} + 2 w_{,xxyy} + w_{,yyyy}$$

$w(x, y)$  = Campo de desplazamiento vertical, positivo en sentido  $z$  positivo.

$p(x, y)$  = Carga superficial, positiva en sentido  $z$  positivo.

$D$  = Rigidez de la placa de espesor  $h$ , y constantes elásticas  $E$ ,  $\nu$ , con  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$

La solución general es:

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} w_{nm} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi y}{b} \right)$$

donde  $n, m \in \mathbb{N}$ , y

$$w_{nm} = \frac{1}{\pi^4 D} \cdot \frac{p_{nm}}{F_{nm}}; \quad F_{nm} = \left[ \left( \frac{n}{a} \right)^2 + \left( \frac{m}{b} \right)^2 \right]^2$$

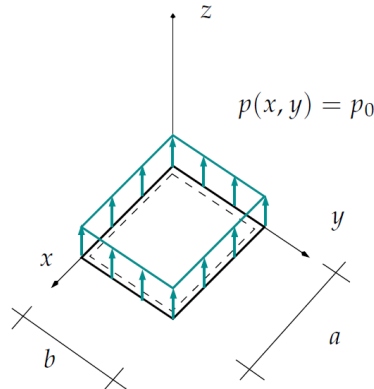
Los coeficientes  $p_{nm}$  corresponden con el desarrollo en serie de Fourier doble con extensión impar para la carga:

$$p_{nm} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x, y) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi y}{b} \right) dx dy$$

$$p(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} p_{nm} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi y}{b} \right)$$

### 2.2.3.3.1 Carga Uniforme

Se considera una placa rectangular, de dimensiones  $a \times b$ . La placa está simplemente apoyada en sus cuatro bordes. El espesor de la misma es  $h$ . Los parámetros del material son  $E$  y  $\nu$ . La carga es constante, de valor  $p_0$ .



**Figura 2.18.** Placa simplemente apoyada en sus cuatro bordes.

**Fuente:** [14] GALLEGO SEVILLA, R. RUS CARLBORG, G y MARTÍNEZ CASTRO, A. E. "Placas Delgadas mediante Métodos Clásicos". Departamento de Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica, Universidad de Granada, Octubre 2007. (pag.2)

Desplazamiento:

$$w(x, y) = \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} \sum_{m=1,3,5\dots}^{\infty} \frac{16p_0}{nm\pi^6 D F_{nm}} S_n(x) S_m(y)$$

Con:

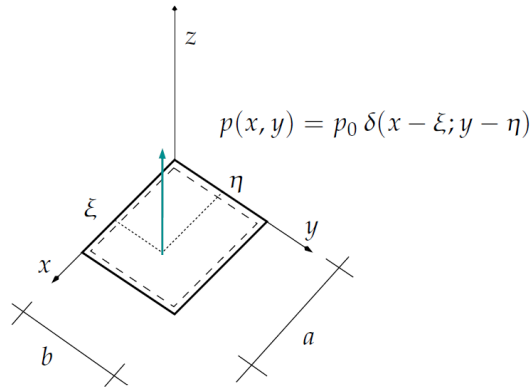
$$F_{nm} = \left[ \left( \frac{n}{a} \right)^2 + \left( \frac{m}{b} \right)^2 \right]^2$$

$$S_n(x) = \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{a} \right)$$

$$S_m(y) = \text{sen} \left( \frac{m\pi y}{b} \right)$$

### 2.2.3.3.2 Carga Puntual. Función de Green

Se considera una placa rectangular, de dimensiones  $a \times b$ . La placa está simplemente apoyada en sus cuatro bordes. El espesor de la misma es  $h$ . Los parámetros del material son  $E$  y  $\nu$ . La carga es una fuerza puntual, de valor  $p_0$ .



**Figura 2.19.** Placa simplemente apoyada en sus cuatro bordes.

**Fuente:** [14] GALLEGO SEVILLA, R. RUS CARLBORG, G y MARTÍNEZ CASTRO, A. E. "Placas Delgadas mediante Métodos Clásicos". Departamento de Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica, Universidad de Granada, Octubre 2007. (pag.3)

Desplazamiento:

$$w(x, y) = p_0 \cdot K(x, y; \xi, \eta)$$

$$K(x, y; \xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{ab\pi^4 DF_{nm}} S_n(\xi) S_m(\mu) S_m(y)$$

Donde  $S_n$ ,  $S_m$  vienen dadas en las ecuaciones anteriores.

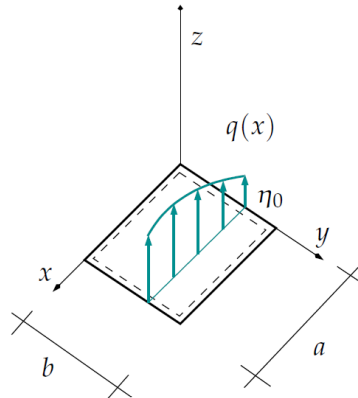
La función  $K(x, y; \xi, \eta)$  es la función de Green (o solución fundamental) al problema de placas delgadas rectangulares con condiciones de contorno en apoyos simples.

La solución para una carga  $p(x, y)$  puede construirse a partir de la función de Green.

$$w(x, y) = \int_0^a \int_0^b p(\xi, \eta) K(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta$$

### 2.2.3.3.3 Carga Distribuida en una línea $y = \eta_0$

Se considera una placa rectangular, de dimensiones  $a \times b$ . La placa está simplemente apoyada en sus cuatro bordes. El espesor de la misma es  $h$ . Los parámetros del material son  $E$  y  $\nu$ . La carga es lineal, distribuida según la función  $q(x)$  en una línea de  $y$  constante, de valor  $\eta_0$ .



**Figura 2.20.** Placa simplemente apoyada en sus cuatro bordes.

**Fuente:** [14] GALLEGO SEVILLA, R. RUS CARLBORG, G y MARTÍNEZ CASTRO, A. E. "Placas Delgadas mediante Métodos Clásicos". Departamento de Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica, Universidad de Granada, Octubre 2007. (pag.4)

Carga:

$$p(x,y) = q(x) \delta(y - \eta_0)$$

Desplazamiento:

$$w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{ab\pi^4 DF_{nm}} \cdot S_m(\eta_0) S_n(x) S_m(y) \gamma_n$$

Con:

$$\gamma_n = \int_0^a S_n(\xi) q(\xi) d\xi$$

Si la función  $q(x)$  se expresa mediante su desarrollo en serie (en seno), se tiene:

$$q(x) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k s_k(x)$$

$$q_k = \frac{2}{a} \int_0^a p(x) s_k(x) dx$$

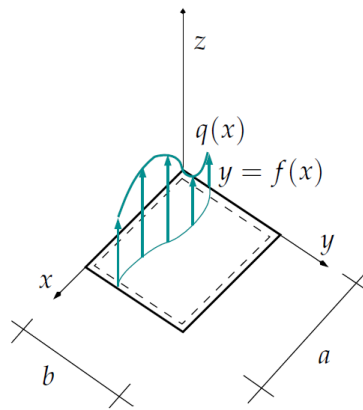
donde  $k \in \mathbb{N}$ .

La expresión del desplazamiento queda:

$$w(x,y) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{8q_0}{n\pi^5 b D F_{nm}} \cdot S_m(\eta_0) S_n(x) S_m(y)$$

#### 2.2.3.3.4 Carga Distribuida en una línea $y = f(x)$

Se considera una placa rectangular, de dimensiones  $a \times b$ . La placa está simplemente apoyada en sus cuatro bordes. El espesor de la misma es  $h$ . Los parámetros del material son  $E$  y  $\nu$ . La carga es lineal, distribuida según la función  $q(x)$  en una línea definida en el plano  $xy$  según la función  $y = f(x)$ .



**Figura 2.21.** Placa simplemente apoyada en sus cuatro bordes.

**Fuente:** [14] GALLEGO SEVILLA, R. RUS CARLBORG, G y MARTÍNEZ CASTRO, A. E. "Placas Delgadas mediante Métodos Clásicos". Departamento de Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica, Universidad de Granada, Octubre 2007. (pag.5)

Carga:

$$p(x,y) = q(x) \delta(y - f(x))$$

Coefficientes de la carga:

$$p_{nm} = \frac{4}{ab} \int_0^a q(x) S_n(x) S_m(f(x)) dx$$

$$w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_{nm}}{\pi^4 D F_{nm}} \cdot S_n(x) S_m(y)$$

Caso particular  $y = cx$

$$p_{nm} = \frac{4}{ab} \int_0^a q(x) S_n(x) \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi cx}{b} \right) dx$$

Caso particular. Carga constante en una diagonal:  $q(x) = q_0$ ;  $y = (b/a)x$

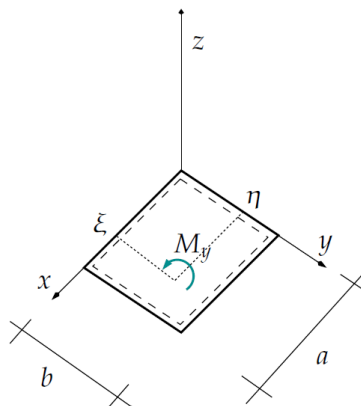
$$p_{nm} = \frac{4q_0}{ab} \int_0^a \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{a} \right) dx = \frac{2q_0}{b} \delta_{nm}$$

donde  $\delta_{nm}$  es la delta de Kronecker, definida como sigue:

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

### 2.2.3.3.5 Momento puntual $M_y$

Se considera una placa rectangular, de dimensiones  $a \times b$ . La placa está simplemente apoyada en sus cuatro bordes. El espesor de la misma es  $h$ . Los parámetros del material son  $E$  y  $\nu$ . En el punto de coordenadas  $(\xi, \eta)$  actúa un momento  $M_y$ .



**Figura 2.22.** Placa simplemente apoyada en sus cuatro bordes.

**Fuente:** [14] GALLEGO SEVILLA, R. RUS CARLBORG, G y MARTÍNEZ CASTRO, A. E. "Placas Delgadas mediante Métodos Clásicos". Departamento de Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica, Universidad de Granada, Octubre 2007. (pag.6)



La expresión del desplazamiento queda:

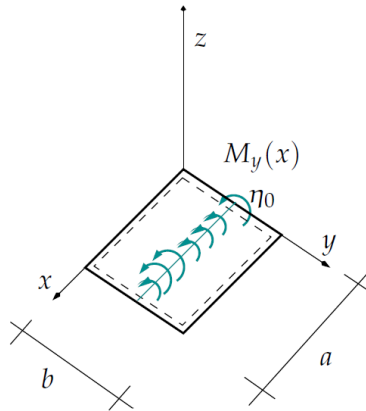
$$w(x,y) = \frac{4My}{\pi^3 ab^2 D} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{S_n(\xi) c_m(\eta) m}{F_{nm}} S_n(x) S_m(y)$$

Con:

$$c_m(\eta) = \cos\left(\frac{m\pi\eta}{b}\right)$$

### 2.2.3.3.6 Momento distribuido $M_y(x)$ en una línea $y = \eta_0$

Se considera una placa rectangular, de dimensiones  $a \times b$ . La placa está simplemente apoyada en sus cuatro bordes. El espesor de la misma es  $h$ . Los parámetros del material son  $E$  y  $\nu$ . En la línea  $y = \eta_0$  se aplica un momento  $M_y$ , distribuido  $M_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} M_n S_n(x)$ .



**Figura 2.23.** Placa simplemente apoyada en sus cuatro bordes.

**Fuente:** [14] GALLEGO SEVILLA, R. RUS CARLBORG, G y MARTÍNEZ CASTRO, A. E. "Placas Delgadas mediante Métodos Clásicos". Departamento de Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica, Universidad de Granada, Octubre 2007. (pag.7)

Desplazamiento:

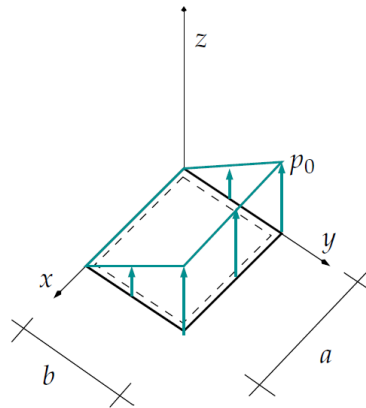
$$w_{nm} = \frac{2mM_n}{b^2\pi^3 DF_{nm}} \cos\left(\frac{m\pi\eta_0}{b}\right)$$

Llamando  $c_m(\eta_0) = \cos\left(\frac{m\pi\eta_0}{b}\right)$  se tiene:

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2mM_n C_m(\eta_0)}{b^2 \pi^3 D F_{nm}} S_n(x) S_m(y)$$

### 2.2.3.3.7 Superficie de carga lineal

Se considera una placa rectangular, de dimensiones  $a \times b$ . La placa está simplemente apoyada en sus cuatro bordes. El espesor de la misma es  $h$ . Los parámetros del material son  $E$  y  $\nu$ . La carga es de la forma  $p(x, y) = p_0 / b \cdot y$  (triangular en  $y$ ).



**Figura 2.24.** Placa simplemente apoyada en sus cuatro bordes.

**Fuente:** [14] GALLEGO SEVILLA, R. RUS CARLBORG, G y MARTÍNEZ CASTRO, A. E. "Placas Delgadas mediante Métodos Clásicos". Departamento de Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica, Universidad de Granada, Octubre 2007. (pag.8)

Carga:

$$p(x, y) = p_0 \frac{y}{b}$$

Término  $w_{nm}$ :

$$w_{nm} = \frac{-8p_0}{nm\pi^6 D F_{nm}} \cdot (-1)^m$$

Con  $n$  impar.

$$w(x, y) = -\frac{8p_0}{\pi^6 D} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{nm F_{nm}} \cdot S_n(x) S_m(y)$$

### 2.2.3.4 Método de Levy<sup>1</sup>

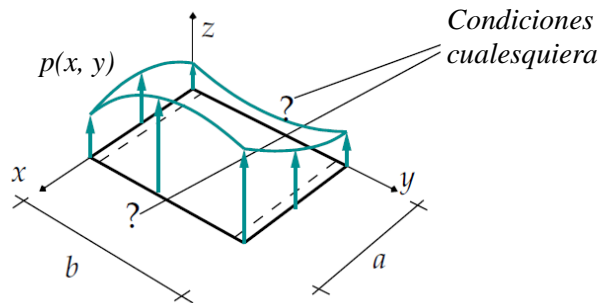
El método de Levy es aplicable en las siguientes condiciones:

1. Placa rectangular, de dimensiones  $a \times b$ .
2. Condición de apoyos simples en dos bordes paralelos.  $w = 0, w_{,nn} = 0$ .

El método de Levy presenta ventajas sobre el método de Navier, en general:

- Se elimina en parte el fenómeno de Gibbs para la representación de cargas con valores no nulos en los bordes perpendiculares a los simplemente apoyados.
- Las series convergen más rápido.
- Sólo hay 1 sumatorio.

Considérese la siguiente figura:



**Figura 2.25.** Placa rectangular con condición de apoyos simples en dos bordes paralelos.

**Fuente:** [14] GALLEGO SEVILLA, R. RUS CARLBORG, G y MARTÍNEZ CASTRO, A. E. "Placas Delgadas mediante Métodos Clásicos". Departamento de Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica, Universidad de Granada, Octubre 2007. (pag.10)

La función de carga,  $p(x, y)$ , se expresa en serie, como sigue:

$$p(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \text{sen}(\lambda_n y)$$

Con:

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{b}$$

<sup>1</sup>Véase [14] GALLEGO SEVILLA, R. RUS CARLBORG, G y MARTÍNEZ CASTRO, A. E. "Placas Delgadas mediante Métodos Clásicos". Departamento de Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica, Universidad de Granada, Octubre 2007. (pag.10)

La función  $g_n(x)$  se obtiene mediante integración:

$$g_n(x) = \frac{2}{b} \int_0^b p(x, y) \operatorname{sen}(\lambda_n y) dy$$

La función de desplazamientos tiene forma de serie en seno:

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x) \operatorname{sen}(\lambda_n y)$$

Sobre esta serie, se observa que:

- El coeficiente  $w_n$  no es una constante. Es una función de  $x$ .
- Por construcción, la serie cumple las condiciones de contorno en  $y = 0$  e  $y = b$ .

Las funciones  $w_n(x)$  se determinan sustituyendo las derivadas de la ecuación última en la ecuación de gobierno:

$$\Delta^2 w(x, y) = \frac{p(x, y)}{D}$$

La ecuación diferencial para  $w_n(x)$  es:

$$\frac{d^4 w_n(x)}{dx^4} - 2\lambda_n^2 \frac{d^2 w_n(x)}{dx^2} + \lambda_n^4 w_n(x) = \frac{g_n(x)}{D}$$

Esta ecuación se puede reescribir con una notación más compacta,

$$w_n^{IV}(x) - 2\lambda_n^2 w_n^{II}(x) + \lambda_n^4 w_n(x) = \frac{g_n(x)}{D}$$

Esta ecuación es una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO), lineal con coeficientes constantes. Su solución se obtiene sumando dos soluciones: la del problema homogéneo,  $w_n^h(x)$ , que es siempre la misma, y depende de cuatro constantes ( $A_n, B_n, C_n, D_n$ ) más una solución particular,  $w_n^p(x)$ , que depende de la función  $g_n(x)$ .

$$w_n(x) = w_n^h(x) + w_n^p(x)$$

*Solución del problema homogéneo:*

La E.D. a resolver es:

$$(w_n^h)^{IV}(x) - 2\lambda_n^2 (w_n^h)^{II}(x) + \lambda_n^4 w_n^h(x) = 0$$

Su solución general es:

$$w_n^h(x) = (A_n + B_n \lambda_n x) \sinh(\lambda_n x) + (C_n + D_n \lambda_n x) \cosh(\lambda_n x)$$

*Solución del problema particular:*

Se resuelve sustituyendo  $w_n$  por  $w_n^p$  en la ecuación:

$$w_n^{IV}(x) - 2\lambda_n^2 w_n^{II}(x) + \lambda_n^4 w_n(x) = \frac{g_n(x)}{D}$$

Finalmente, imponiendo las condiciones de contorno en  $x = 0$ ,  $x = a$  se resuelven las constantes  $(A_n, B_n, C_n, D_n)$ . Una buena elección de la referencia, en problemas con simetría o antisimetría, facilita la expresión de la solución. Para eso se introducen las funciones hiperbólicas.

#### 2.2.3.4.1 Función de carga con coeficientes constantes

En este caso  $g_n(x) = b_n$  (constante). Así:

$$p(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(\lambda_n y)$$

La solución particular es fácil de obtener. La ED para determinarla es la siguiente:

$$(w_n^p)^{IV}(x) - 2\lambda_n^2 (w_n^p)^{II}(x) + \lambda_n^4 w_n^p(x) = \frac{b_n}{D}$$

Probando una solución de la forma  $w_n^p(x) = w_n^p$ , (una constante), se tiene:

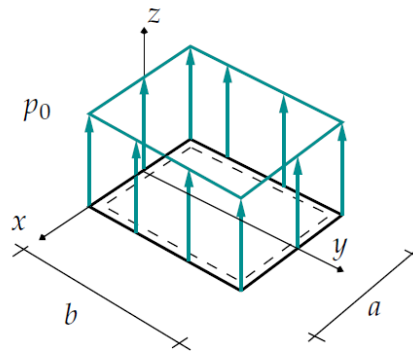
$$w_n^p = \frac{b_n}{D\lambda_n^4}$$

Y la solución general será:

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (A_n + B_n \lambda_n x) \sinh(\lambda_n x) + (C_n + D_n \lambda_n x) \cosh(\lambda_n x) + \frac{b_n}{D\lambda_n^4} \right] \operatorname{sen}(\lambda_n y)$$

#### 2.2.3.4.2 Placa rectangular sometida a carga uniforme. Placa tetraapoyada

Se considera una placa rectangular, de dimensiones  $a \times b$ . La placa está simplemente apoyada en sus cuatro bordes. El espesor de la misma es  $h$ . Los parámetros del material son  $E$  y  $\nu$ . La carga es constante, de valor  $p_0$ .



**Figura 2.26.** Placa simplemente apoyada en sus cuatro bordes.

**Fuente:** [14] GALLEGO SEVILLA, R. RUS CARLBORG, G y MARTÍNEZ CASTRO, A. E. "Placas Delgadas mediante Métodos Clásicos". Departamento de Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica, Universidad de Granada, Octubre 2007. (pag.13)

Se considera la referencia  $R(O; x, y, z)$  mostrada en la figura.

Desplazamiento:

$$w(x, y) = \frac{2p_0 b^4}{D} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{(n\pi)^5 \cosh(\alpha_n)} x$$

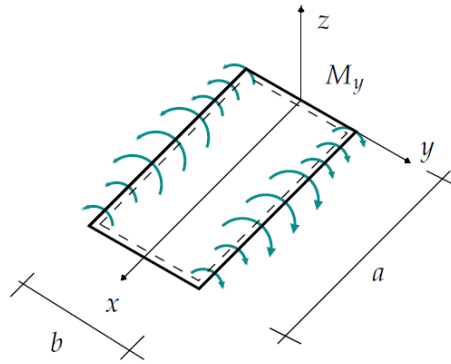
$$[2\cosh(\alpha_n) + \lambda_n x \sinh(\lambda_n x) - (2 + \alpha_n \tanh(\alpha_n)) \cosh(\lambda_n x)] \sin(\lambda_n y)$$

Con:

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{b} \quad \alpha_n = \frac{n\pi a}{2b}$$

### 2.2.3.4.3 Placa rectangular tetraapoyada sometida a dos distribuciones de momento $M_y$ en dos bordes paralelos (caso simétrico)

Se considera una placa rectangular, de dimensiones  $a \times b$ . La placa está simplemente apoyada en sus cuatro bordes. El espesor de la misma es  $h$ . Los parámetros del material son  $E$  y  $\nu$ . En dos bordes paralelos actúa una distribución de momentos simétrica,  $M_y(x)$ .



**Figura 2.27.** Placa simplemente apoyada en sus cuatro bordes.

**Fuente:** [14] GALLEGO SEVILLA, R. RUS CARLBORG, G y MARTÍNEZ CASTRO, A. E. "Placas Delgadas mediante Métodos Clásicos". Departamento de Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica, Universidad de Granada, Octubre 2007. (pag.14)

Se considera la referencia  $R(O; x, y, z)$  mostrada en la figura. Se consideran las distribuciones de momentos aplicados tales que  $M_y(x, b/2) = M_y(x, -b/2)$ . El problema es simétrico en esta referencia.

Obsérvese que los momentos son positivos considerando su signo como momentos internos. El momento se desarrolla en serie como:

$$M_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} M_n \text{sen}(\lambda_n x)$$

Los coeficientes  $M_n$  se obtienen integrando:

$$M_n = \frac{2}{a} \int_0^a M(x) \text{sen}(\lambda_n x)$$

Desplazamiento:

$$w(x, y) = \frac{a}{2\pi D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n}{n \cosh(\alpha_n)} \cdot \left[ \frac{b}{2} \tanh(\alpha_n) \cosh(\lambda_n y) - y \text{senh}(\lambda_n y) \right] \text{sen}(\lambda_n x)$$

O bien:

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n}{2\lambda_n D \cosh(\alpha_n)} \cdot \left[ \frac{b}{2} \tanh(\alpha_n) \cosh(\lambda_n y) - y \sinh(\lambda_n y) \right] \sin(\lambda_n x)$$

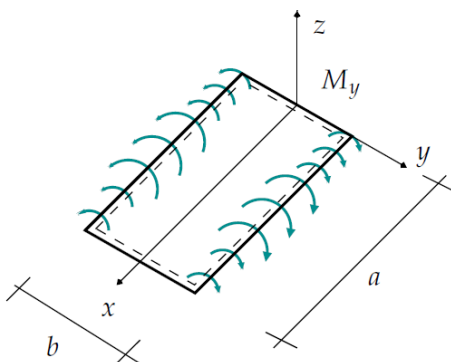
Con:

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{a}$$

$$\alpha_n = \frac{n\pi b}{2a}$$

#### 2.2.3.4.4 Placa rectangular tetraapoyada sometida a dos distribuciones de momento en dos bordes paralelos (caso antisimétrico)

Se considera una placa rectangular, de dimensiones  $a \times b$ . La placa está simplemente apoyada en sus cuatro bordes. El espesor de la misma es  $h$ . Los parámetros del material son  $E$  y  $\nu$ . En dos bordes paralelos actúa una distribución de momentos antisimétrica,  $M_y(x)$ .



**Figura 2.28.** Placa simplemente apoyada en sus cuatro bordes.

**Fuente:** [14] GALLEGO SEVILLA, R. RUS CARLBORG, G y MARTÍNEZ CASTRO, A. E. "Placas Delgadas mediante Métodos Clásicos". Departamento de Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica, Universidad de Granada, Octubre 2007. (pag.15)

Se considera la referencia  $R(O; x, y, z)$  mostrada en la figura. Se consideran las distribuciones de momentos aplicados tales que  $M_y(x, b/2) = -M_y(x, -b/2)$ . El problema es antisimétrico (o antimétrico) en esta referencia.

Obsérvese que los momentos son positivos considerando su signo como momentos internos. El momento se desarrolla en serie como:



$$M_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} M_n \text{sen}(\lambda_n x)$$

Los coeficientes  $M_n$  se obtienen integrando:

$$M_n = \frac{2}{a} \int_0^a M(x) \text{sen}(\lambda_n x)$$

Desplazamiento:

$$w(x, y) = \frac{a}{2\pi D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n}{n \text{senh}(\alpha_n)} \cdot \left[ \frac{b}{2} \coth(\alpha_n) \text{senh}(\lambda_n y) - y \cosh(\lambda_n y) \right] \text{sen}(\lambda_n x)$$

O bien:

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n}{2\lambda_n D \text{senh}(\alpha_n)} \cdot \left[ \frac{b}{2} \coth(\alpha_n) \text{senh}(\lambda_n y) - y \cosh(\lambda_n y) \right] \text{sen}(\lambda_n x)$$

Con:

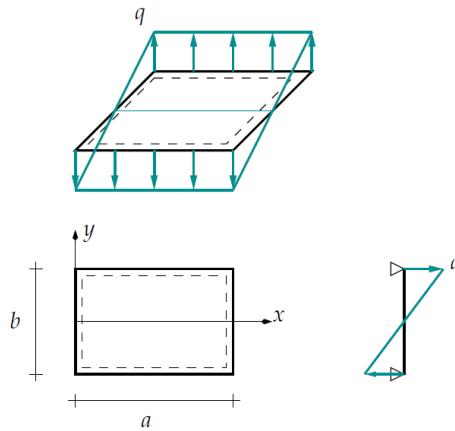
$$\lambda_n = \frac{n\pi}{a}$$

$$\alpha_n = \frac{n\pi b}{2a}$$

### 2.2.3.4.5 Placa rectangular tetrapoyada sometida a una ley de carga lineal<sup>1</sup>

Se considera una placa rectangular, de dimensiones  $a \times b$ . La placa está simplemente apoyada en sus cuatro bordes. El espesor de la misma es  $h$ . Los parámetros del material son  $E$  y  $\nu$ . Se aplica una carga distribuida, de valor máximo  $q$ .

<sup>1</sup>Véase [14] GALLEGO SEVILLA, R. RUS CARLBORG, G y MARTÍNEZ CASTRO, A. E. "Placas Delgadas mediante Métodos Clásicos". Departamento de Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica, Universidad de Granada, Octubre 2007. (pag.16)



**Figura 2.29.** Placa simplemente apoyada en sus cuatro bordes.

**Fuente:** [14] GALLEGO SEVILLA, R. RUS CARLBORG, G y MARTÍNEZ CASTRO, A. E. "Placas Delgadas mediante Métodos Clásicos". Departamento de Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica, Universidad de Granada, Octubre 2007. (pag.16)

Superficie de carga:

$$p(x, y) = \frac{2qy}{b}$$

Desplazamiento:

$$w(x, y) = \frac{2qa^4}{D} \sum_{n=1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{(n\pi)^5 \sinh(\alpha_n)} x \left\{ \frac{4y}{b} \sinh(\alpha_n) - [2 + \alpha_n \coth(\alpha_n)] \sinh(\lambda_n y) + \lambda_n y \cosh(\lambda_n y) \right\} \sin(\lambda_n y)$$

Con:

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{a}$$

$$\alpha_n = \frac{n\pi b}{2a}$$

## CAPITULO 3

### EJEMPLOS DE ANALISIS

#### 3.1 El Método de los Elementos Finitos<sup>1</sup>

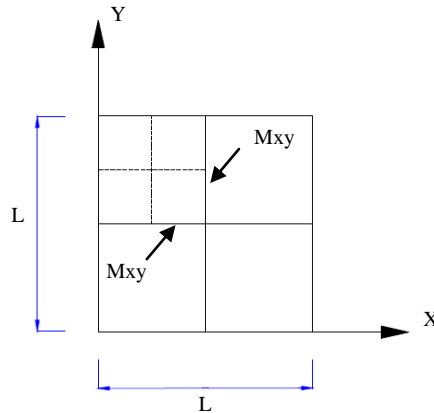
Ante a la gran diversidad de aplicaciones posibles, es muy difícil poder escoger a un elemento finito como “el mejor” para el análisis de losas. Sin embargo, siempre es ventajoso poder representar con la mayor exactitud posible pero con el menor número de incógnitas, un determinado estado tensional. En este estudio comparativo la eficiencia de varias alternativas presentadas para el análisis de losas es investigada para losas con diversas condiciones de vinculación. El número de incógnitas en el modelo y la habilidad para representar diversos estados tensionales indicará la calidad de un elemento. Su mayor adaptabilidad para generar geometrías complejas de forma automática no se considera dado que un elemento cuadrilátero siempre se puede convertir en uno triangular de forma automática no existiendo diferencias reales entre elementos de tres hasta ocho nudos. Es claro que desde el punto de vista práctico los elementos modernos son todos en general de una aceptable precisión pero la selección será de utilidad para determinar el nivel de error que se puede obtener en distintas situaciones simples motivo de una pobre discretización.

##### 3.1.1 Losas cuadradas

Se presentan comparaciones para losas cuadradas simplemente apoyadas y empotradas, ambas uniformemente cargadas o sujetas a una carga concentrada en su centro. También se presenta el caso de una losa cuadrada simplemente apoyada en sus cuatro esquinas y con una carga uniforme. Al presentar este caso la simetría se usa para analizar sólo un cuarto de la losa, tal como se muestra en la figura 3.1.

Las condiciones de contorno para los bordes según los ejes de simetría corresponden a un momento torsor nulo.

<sup>1</sup>Vease [12] BOZZO, Luis, “Análisis de losas planas mediante Elementos Finitos”. (pag.44)



**Figura 3.1** Losa cuadrada y subdivisión en elementos finitos correspondiente a  $N=4$ .

En las tablas 3.1 a 3.4 se representan resultados para losas cuadradas simplemente apoyadas y empotradas bajo cargas uniformemente distribuidas y concentradas. Los elementos finitos considerados son el de Melosh. Los resultados son comparados con valores analíticos obtenidos por Timoshenko, pero incluyendo términos adicionales en los desarrollos en series para mejorar la aproximación.

### 3.1.1.1 Deflexión centro de vano. Losa cuadrada simplemente apoyada<sup>1</sup>.

TABLA 3.1					
Malla	Incógnitas	Carga Uniforme (q)		Carga Concentrada (q)	
		$\alpha$	% error	$\beta$	% error
Melosh 2 x 2	3	0.003446	15.16	0.013784	18.83
Melosh 4 x 4	12	0.003939	3.03	0.012327	6.27
Melosh 8 x 8	48	0.004033	0.71	0.011829	1.97
Melosh 12 x 12	108	0.004050	0.30	0.011715	0.99
Melosh 16 x 16	192	0.004056	0.15	0.011671	0.61
Exacta		0.004062		0.011600	

$\delta = \alpha \frac{qL^4}{D}$  : Flecha máxima en placa con carga uniforme q.

$\delta = \beta \frac{PL^3}{D}$  : Flecha máxima en placa con carga concentrada P.

<sup>1</sup>Vease [12] BOZZO, Luis, "Análisis de losas planas mediante Elementos Finitos". (pag.45)

### 3.1.1.2 Deflexión centro de vano. Placa cuadrada empotrada<sup>1</sup>.

TABLA 3.2					
Malla	Incognitas	Carga Uniforme (q)		Carga Concentrada (q)	
		$\alpha$	% error	$\beta$	% error
Melosh 2 x 2	3	0.001430	13.13	0.005919	5.70
Melosh 4 x 4	12	0.001403	11.00	0.006134	9.54
Melosh 8 x 8	48	0.001304	3.16	0.005803	3.63
Melosh 12 x 12	108	0.001283	1.50	0.005710	1.96
Melosh 16 x 16	192	0.001275	0.87	0.005672	1.29
Exacta		0.001264		0.005600	

$\delta = \alpha \frac{qL^4}{D}$  : Flecha máxima en placa con carga uniforme q.

$\delta = \beta \frac{PL^3}{D}$  : Flecha máxima en placa con carga concentrada P.

### 3.1.1.3 Momento flector centro de vano. Placa cuadrada simplemente apoyada<sup>1</sup>

TABLA 3.3					
Malla	Incognitas	Carga Uniforme (q)		Carga Concentrada (q)	
		$\alpha$	% error	$\beta$	% error
Melosh 2 x 2	3	0.06600	37.82		
Melosh 4 x 4	12	0.05210	8.79		
Melosh 8 x 8	48	0.04970	3.78		
Melosh 12 x 12	108	0.04890	2.11		
Melosh 16 x 16	192	0.04850	1.27		
Exacta		0.04789		Solución singular	

$M = \alpha qL^2$  : Momento positivo máximo en placa con carga uniforme q.

$M = \beta P$  : Momento positivo máximo en placa con carga concentrada P.

<sup>1</sup>Vease [12] BOZZO, Luis, "Análisis de losas planas mediante Elementos Finitos". (pag.46-47)

### 3.1.1.4 Momento flector centro de vano. Placa cuadrada empotrada<sup>1</sup>

TABLA 3.4					
Malla	Incognitas	Carga Uniforme (q)		Carga Concentrada (q)	
		$\alpha$	% error	$\beta$	% error
Melosh 2 x 2	3	0.04610	99.57		
Melosh 4 x 4	12	0.02700	16.88		
Melosh 8 x 8	48	0.02490	7.79		
Melosh 12 x 12	108	0.02400	3.90		
Melosh 16 x 16	192	0.02360	2.16		
Exacta		0.02310		Solución singular	

$M = \alpha q L^2$  : Momento positivo máximo en placa con carga uniforme q.

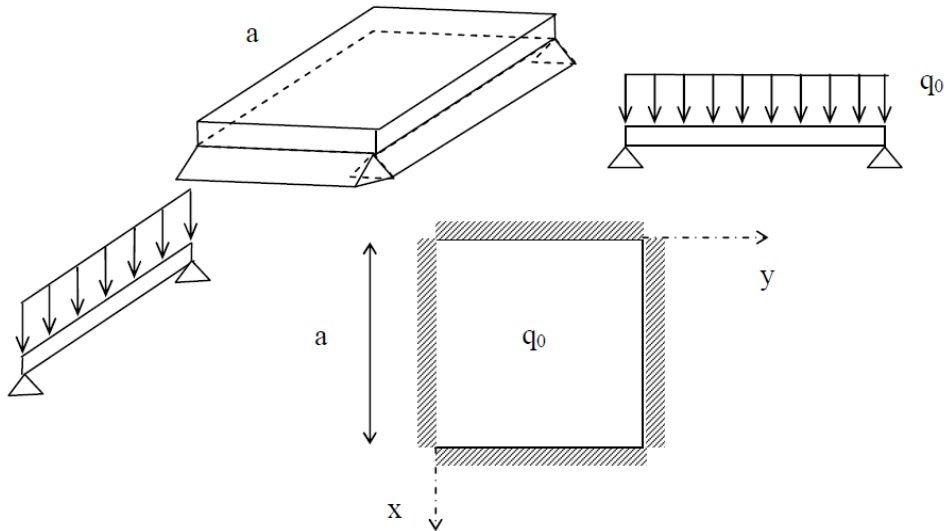
$M = \beta P$  : Momento positivo máximo en placa con carga concentrada P.

Nota: El elemento finito considerado es el de Melosh implementado en un programa elaborado por los Drs. H. Scaletti y L. Bozzo.

<sup>1</sup>Vease [12] BOZZO, Luis, “Análisis de losas planas mediante Elementos Finitos”. (pag.47)

## 3.2 Métodos Tradicionales

### 3.2.1 Flecha, esfuerzos y reacciones en una placa cuadrada de lado $a$ simplemente apoyada en los cuatro lados sometida a una carga uniforme $q_0$ <sup>1</sup>.



Si la flecha  $w(x, y)$  se desarrolla en serie doble de senos:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

Los desarrollos satisfacen de forma automática unas condiciones de contorno:

$$w(x, y)|_{x=0} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \operatorname{sen}(0) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{a}\right) = 0$$

$$w(x, y)|_{x=a} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \operatorname{sen}(m\pi) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{a}\right) = 0$$

<sup>1</sup>Véase [3k] <http://www-gmap.mecanica.ufrgs.br>

$$w(x, y)|_{y=0} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}(0) = 0$$

$$w(x, y)|_{y=a} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}(n\pi) = 0$$

$$M_x |_{x=0} = -\frac{D\pi^2}{a^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} (m^2 + vn^2) \operatorname{sen}(0) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{a}\right) = 0$$

$$M_x |_{x=a} = -\frac{D\pi^2}{a^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} (m^2 + vn^2) \operatorname{sen}(m\pi) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{a}\right) = 0$$

$$M_y |_{y=0} = -\frac{D\pi^2}{a^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} (vm^2 + n^2) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}(0) = 0$$

$$M_y |_{y=a} = -\frac{D\pi^2}{a^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} (vm^2 + n^2) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}(n\pi) = 0$$

La selección de un determinado desarrollo armónico para representar la flecha  $w(x, y)$  implica que se satisfacen automáticamente unas condiciones de contorno específicas.

Por ello en esta situación las condiciones se denominan forzadas ya que vienen incluidas en la solución y por tanto no se pueden alterar. En este caso las condiciones de flecha y momentos nulos en los cuatro bordes corresponden a la situación de lados simplemente apoyados.

En la técnica de desarrollos en serie la carga exterior se desarrolla en la misma forma que la flecha:

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

pero ahora como la función  $q(x, y) = q_0$  es conocida las amplitudes del desarrollo se pueden determinar sin más que:



$$q_{mn} = \frac{2}{a} \frac{2}{a} \int_{x=0}^a \int_{y=0}^a q_0 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{a}\right) dx$$

$$q_{mn} = \frac{4q_0}{a^2} \frac{a}{m\pi} \frac{a}{n\pi} \left[-\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\right]_0^a \left[-\cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\right]_0^a =$$

$$= \frac{4q_0}{\pi^2} \frac{1}{mn} [1 - \cos(m\pi)][1 - \cos(n\pi)]$$

cuando  $m$  y/o  $n$  sean pares el  $\cos(\text{par} \times \pi) = 1$  de forma que:

$$[1 - \cos(m\pi)] = 0 \text{ y/o } [1 - \cos(n\pi)] = 0$$

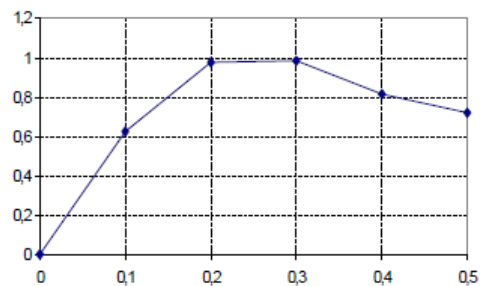
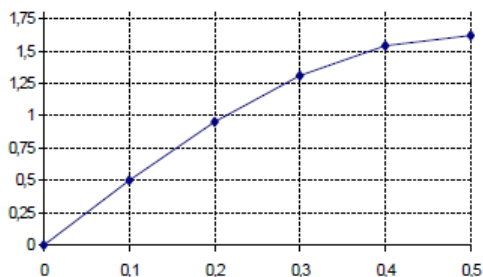
sin embargo cuando  $m$  y  $n$  sean impares el  $\cos(\text{impar} \times \pi) = -1$  de forma que:

$$[1 - \cos(m\pi)] = 2 \text{ y/o } [1 - \cos(n\pi)] = 2$$

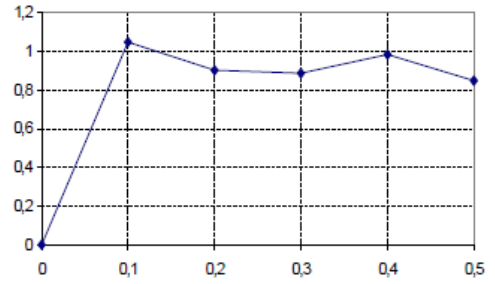
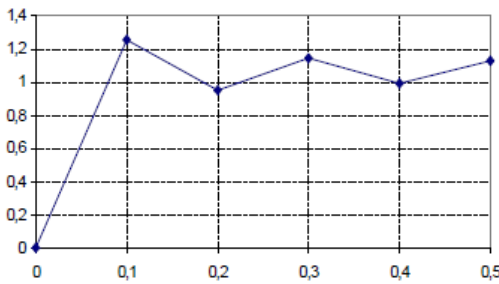
Por lo tanto:

$$q_{mn} \begin{cases} 0 & \text{para } m \text{ o } n = 2,4,6,8 \dots \dots \\ \frac{16q_0}{\pi^2} \frac{1}{mn} & \text{para } m \text{ y } n = 1,3,5,7 \dots \dots \end{cases}$$

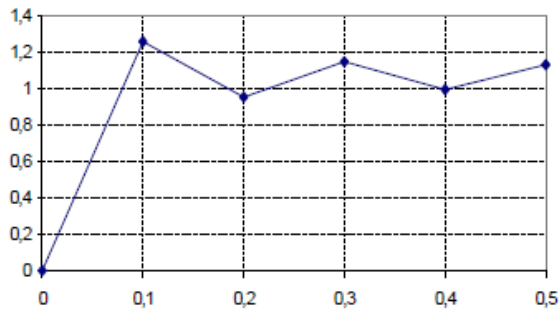
La variación de la carga a lo largo del eje  $x$  con  $y = 0,5a$  viene dada en las siguientes figuras.



**Figura 3.2**  $q(x,y)$  considerando 1 término del desarrollo. **Figura 3.3**  $q(x,y)$  considerando 3 términos.



**Figura 3.4**  $q(x,y)$  considerando 5 términos. **Figura 3.5**  $q(x,y)$  considerando 7 términos.



**Figura 3.6**  $q(x,y)$  considerando 9 términos.

La flecha  $w(x, y)$  tiene que satisfacer la ecuación diferencial de equilibrio de la placa:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \left[ \frac{m^4 \pi^4}{a^4} + 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \frac{n^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^4 \pi^4}{a^4} \right] \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{a} =$$

$$= \frac{1}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{a}$$

Que proporciona para cada término del desarrollo:

$$w_{mn} \left[ \frac{m^4 \pi^4}{a^4} + 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \frac{n^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^4 \pi^4}{a^4} \right] = \frac{q_{mn}}{D}$$

$$w_{mn} = \frac{q_{mn}}{D \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{a^2} \right)^2} = \frac{q_{mna^4}}{D \pi^4 (m^2 + n^2)^2}$$

### 3.2.1.1 Flecha

En consecuencia de lo anterior la flecha viene dada por:

$$w(x, y) = \frac{a^4}{D \pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{mn}}{(m^2 + n^2)^2} \operatorname{sen} \left( \frac{m \pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n \pi y}{a} \right)$$

Y para carga uniforme:

$$w(x, y) = \frac{16 q_0 a^4}{D \pi^6} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{mn(m^2 + n^2)^2} \operatorname{sen} \left( \frac{m \pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n \pi y}{a} \right)$$

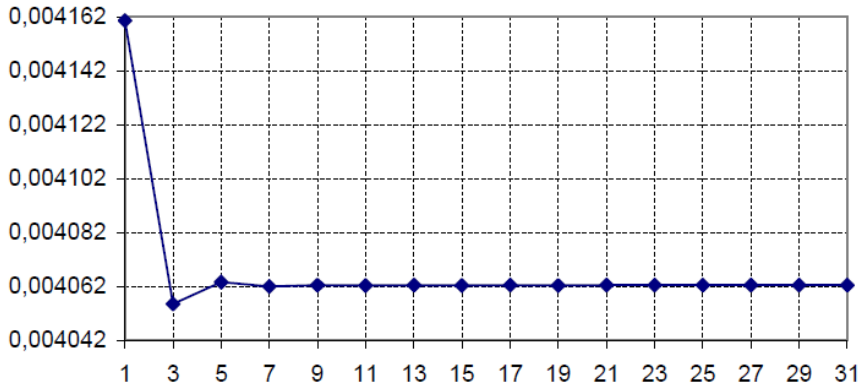
w(0.5a, 0.5a) x (q <sub>0</sub> a <sup>4</sup> / D)	n=1	SUMA	n=3	SUMA	n=5
m=1	0.0041606		-5.548E-05		4.920E-06
		<b>0.0041606</b>			
m=3	-5.548E-05		-5.707E-06		-9.598E-07
				<b>0.0040554</b>	
m=5	4.920E-06		-9.598E-07		2.660E-07
				<b>SUMA</b>	<b>0.004052</b>

**Tabla 3.5** Flecha en el centro de la placa para 1, 3 y 5 términos del desarrollo.

La solución converge rápidamente ya que en el denominador de la flecha aparecen las quintas potencias de m y n. (Figura 3.7).

La solución exacta vale  $w(0.5a, 0.5a) = 0,0040624 q_0 a^4 / D$

Para tener un orden de magnitud si se considera una placa de 5 m. sometida a 2 T/m<sup>2</sup> y con un D= 1.500 T.m la flecha máxima vale 3,4 mm.



**Figura 3.7** Convergencia de la flecha en el centro de la placa con el número de armónicos.

### 3.2.1.2 Esfuerzos

#### 3.2.1.2.1 Momentos $M_x$ y $M_y$

Conocida la flecha, se pueden calcular los esfuerzos que dependen de ella:

$$\begin{aligned}
 M_x &= D \left( \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right) = \\
 &= \frac{16q_0 a^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^2 + \nu n^2}{mn(m^2 + n^2)^2} \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{a} \right) \\
 M_y &= D \left( \nu \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right) = \\
 &= \frac{16q_0 a^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu m^2 + n^2}{mn(m^2 + n^2)^2} \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi y}{a} \right)
 \end{aligned}$$

Los momentos  $M_x$  y  $M_y$  son nulos en los bordes y toman su valor máximo en el centro, senos máximos, de la placa y son por simetría iguales.

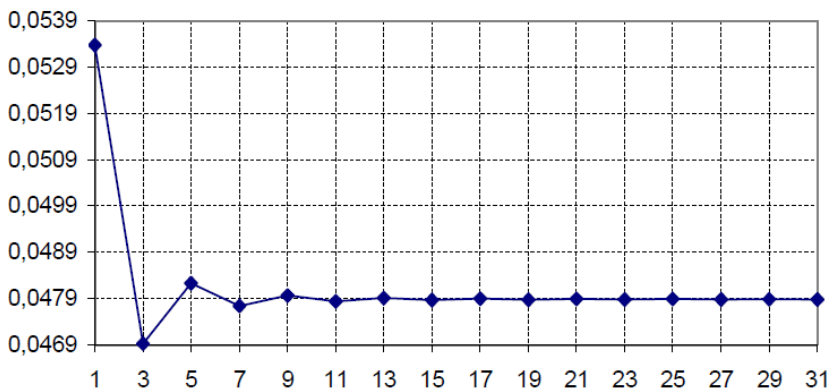
$M_x(0.5a, 0.5a)$ $x (q_0 a^2)$	n=1	SUMA	n=3	SUMA	n=5
m=1	0.0533831		-0.0020258		0.0004131
		<b>0.053383</b>			
m=3	-0.0050919		0.0006591		-0.0001563
				<b>0.0469244</b>	
m=5	0.0012295		-0.0002624		8.541E-05
				<b>SUMA</b>	<b>0.0482337</b>

**Tabla 3.6**  $M_x$  en el centro de la placa para 1, 3 y 5 términos del desarrollo.

La solución ya no converge tan rápidamente como la flecha ya que las potencias de m y n son ahora de orden 4 (Figura 3.8).

La solución exacta vale  $M_x=0,0479 q_0 a^2$

Para tener un orden de magnitud si se considera una placa de 5 m. sometida a 2 T/m<sup>2</sup> el momento máximo vale 2,4 m T/ m. A las mismas conclusiones se llega para  $M_y$  que es simétrico con  $M_x$ .



**Figura 3.8** Convergencia del  $M_x$  en el centro de la placa con el número de armónicos.

### 3.2.1.2.2 Momento Torsor $M_{xy}$

El momento torsor  $M_{xy}$  viene dado por:

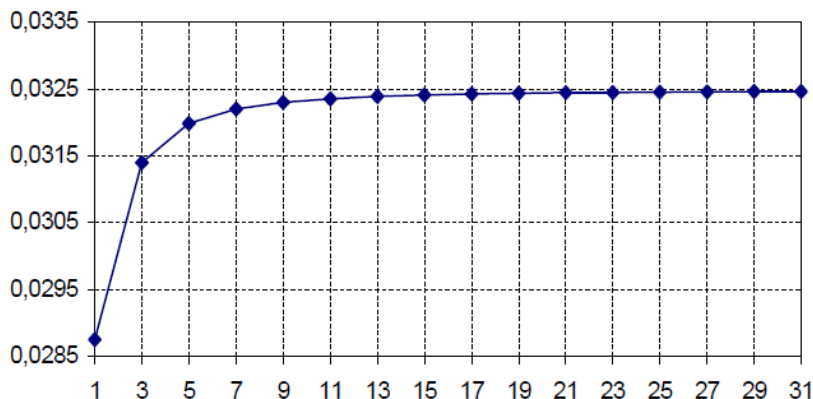
$$M_{xy} = D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{16q_0a^4(1-\nu)}{\pi^6} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{m\pi}{a} \frac{n\pi}{a}}{mn(m^2+n^2)^2} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) = \\
 &= \frac{16q_0a^2(1-\nu)}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2+n^2)^2} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) =
 \end{aligned}$$

$M_{xy}(0, 0)$ $x (q_0 a^2)$	n=1	SUMA	n=3	SUMA	n=5
m=1	0.0287448		0.0011498		0.0001701
		<b>0.0287448</b>			
m=3	0.0011498		0.0003549		9.946E-05
				<b>0.0313992</b>	
m=5	0.0001701		9.946E-05		4.599E-05
				<b>SUMA</b>	<b>0.0319843</b>

**Tabla 3.7**  $M_{xy}$  en las esquinas de la placa para 1, 3 y 5 términos del desarrollo.

El momento torsor es nulo en el centro de la placa y máximo en las esquinas, cosenos máximos. La solución ya no converge tan rápidamente como la flecha ya que las potencias de m y n son ahora de orden 4.



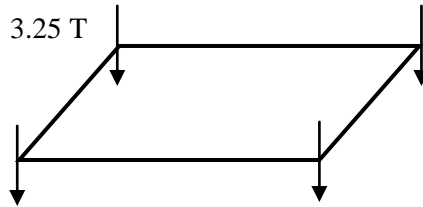
**Figura 3.9** Convergencia del  $M_{xy}$  en las esquinas de la placa con el número de armónicos.

La solución exacta vale  $M_{xy}=0,0325 q_0 a^2$

Este momento torsor activa una reacción vertical puntual en cada esquina.

$$\mathbf{R} = 2 \mathbf{M}_{xy} = 0,065 q_0 a^2$$

Para tener un orden de magnitud del momento y de la reacción, en una placa cuadrada de 5 m de lado sometida a una carga uniforme de 2 T/m<sup>2</sup>  $M_{xy} = 1,625 \text{ m T/m}$  y  $\mathbf{R} = 3,25 \text{ T}$ . Si no se toman precauciones pueden aparecer problemas de anclaje de la placa al apoyo.



### 3.2.1.2.3 Esfuerzos cortantes

Los cortantes  $Q_x$  y  $Q_y$  vienen dados por:

$$\begin{aligned} Q_x &= D \left( \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial x \partial y^2} \right) = \\ &= \frac{16q_0 a^4}{\pi^6} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{m^3 \pi^3}{a^3} + \frac{m\pi n^2 \pi^2}{a a^2}}{mn(m^2 + n^2)^2} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{a}\right) = \\ &= \frac{16q_0 a}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(m^2 + n^2)^2} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \\ Q_y &= D \left( \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial y^3} \right) = \\ &= \frac{16q_0 a^4}{\pi^6} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{m\pi m^2 \pi^2}{a a^2} + \frac{n^3 \pi^3}{a^3}}{mn(m^2 + n^2)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{a}\right) = \\ &= \frac{16q_0 a}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m(m^2 + n^2)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \end{aligned}$$

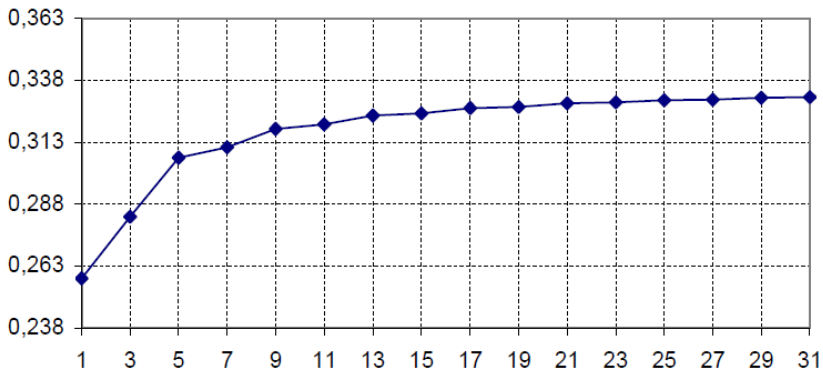
El cortante  $Q_x$  es nulo cuando  $x = 0,5a$  e  $y=0$  o  $y=a$ . El cortante  $Q_y$  es nulo cuando  $x = 0$  y  $x= a$  e  $y=0,5a$ . El cortante  $Q_x$  es máximo cuando  $x=0$  o  $x=a$  e  $y=0,5a$ . El cortante  $Q_y$  es máximo cuando  $x=0,5a$  e  $y=0$  o  $y=a$ . Por simetría los cortantes máximos son iguales.

La solución ya no converge tan rápidamente como la flecha y los momentos ya que las potencias de  $m$  y  $n$  son ahora de orden 3.

La solución exacta vale  $Q_x = 0,338 q_0 a$

$Q_x(0, 0.5a)$ $x (q_0 a)$	n=1	SUMA	n=3	SUMA	n=5
m=1	0.2580123		-0.0172008		0.0039694
		<b>0.2580123</b>			
m=3	0.0516025		-0.0095560		0.0030354
				<b>0.2828579</b>	
m=5	0.0198471		-0.0050591		0.0020641
				<b>SUMA</b>	<b>0.3067149</b>

**Tabla 3.8**  $Q_x$  en las esquinas de la placa para 1 3 y 5 términos del desarrollo.



**Figura 3.10** Convergencia del  $Q_x$  en el centro de lado de la placa con el número de armónicos.

Debe hacerse notar que con 31 términos del desarrollo todavía no ha convergido el  $Q_x$ .

El cortante equivalente viene dado por:



$$V_x = \mp Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad V_y = \mp Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}$$

Como de las expresiones anteriores se conoce el cortante, sólo es necesario calcular las derivadas del momento torsor respecto a x e y.

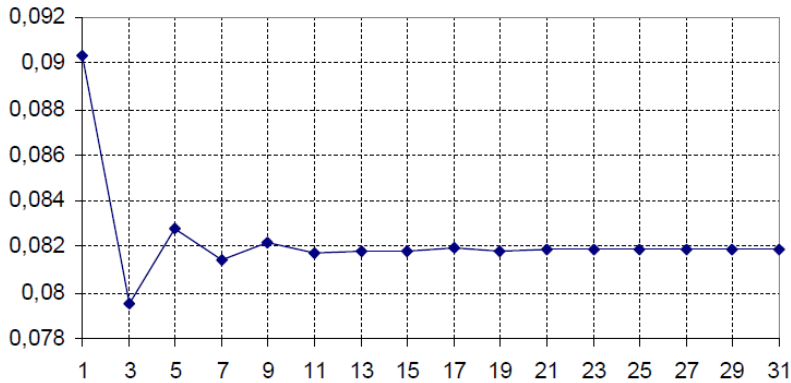
$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} &= -\frac{16q_0 a^2 (1-\nu)}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{m\pi}{a}}{(m^2+n^2)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{cos}\left(\frac{n\pi y}{a}\right) = \\ &= -\frac{16q_0 a (1-\nu)}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{(m^2+n^2)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{cos}\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} &= -\frac{16q_0 a^2 (1-\nu)}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{n\pi}{a}}{(m^2+n^2)^2} \operatorname{cos}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{a}\right) = \\ &= -\frac{16q_0 a (1-\nu)}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(m^2+n^2)^2} \operatorname{cos}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \end{aligned}$$

Estas derivadas se anulan para  $y=0,5 a$  y  $x=0,5 a$  respectivamente y son máximas en los puntos medios de los lados  $x=0,5 a$  y  $y=0$  e  $y=a$  y  $y=0,5 a$ ,  $x=0$  y  $x=a$  respectivamente. Por la simetría los valores máximos son los mismos para las dos derivadas. La solución ya no converge tan rápidamente como la flecha y los momentos ya que las potencias de m y n son ahora de orden 3.

$\delta M_{xy}/\delta y$ (0, 0.5a)x (q <sub>0</sub> a)	n=1	SUMA	n=3	SUMA	n=5
m=1	0.0903043		-0.0108365		0.0026717
		<b>0.0903043</b>			
m=3	0.0012041		-0.0011149		0.0005208
				<b>0.0795570</b>	
m=5	0.0001069		-0.0001875		0.0001445
				<b>SUMA</b>	<b>0.0828134</b>

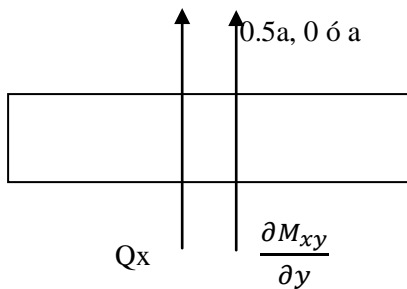
**Tabla 3.9**  $\delta M_{xy}/\delta y$  en los puntos medios de los lados para 1 3 y 5 términos del desarrollo.

La solución exacta vale  $dM_{xy}/dy=0,082 q_0 a$



**Figura 3.11** Convergencia del  $\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$  en el centro de lado de la placa con el número de armónicos.

Para tener un orden de magnitud si se considera una placa de 5 m. sometida a 2 T/m<sup>2</sup> el momento máximo vale 0,82 T/m.



El cortante equivalente en el centro de lado vale:

$$V_{x\text{máxima}} = (0,338 + 0,082) q_0 a = 0,42 q_0 a$$

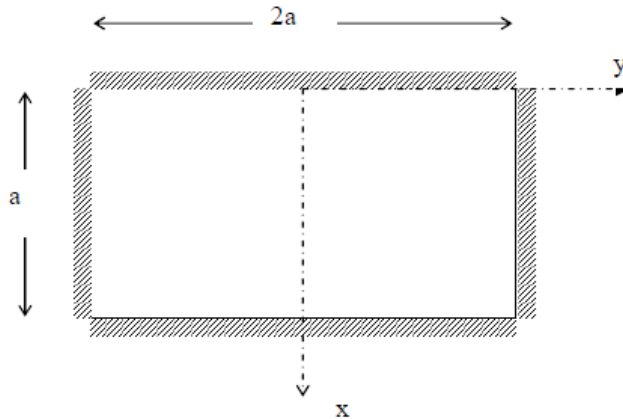
### 3.2.2 Flecha, esfuerzos y reacciones en una placa rectangular de lados $a$ y $2a$ simplemente apoyada en los cuatro bordes sometida a una carga uniforme $q_0$ usando la solución de Levy<sup>1</sup>.

La solución de Levy usa, cuando los bordes  $x=0$  e  $x=a$  están simplemente apoyados, los desarrollos:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(y) \text{sen} \left( \frac{m\pi x}{a} \right)$$

que satisface de forma forzada las condiciones de borde en  $x=0$  y  $x=a$ .

<sup>1</sup>Véase [3k] <http://www-gmap.mecanica.ufrgs.br>



La solución de la ecuación diferencial homogénea,  $q(x, y)=0$ , implica que  $Y_m(y)$  debe satisfacer:

$$\left[ \frac{m^4 \pi^4}{a^4} Y_m(y) - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \frac{d^2 Y_m(y)}{dy^2} + \frac{d^4 Y_m(y)}{dy^4} \right] = 0$$

cuya solución general, teniendo en cuenta la simetría, es de la forma:

$$Y_m(y) = \frac{q_0 a^4}{D} \left[ A_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} A_m \sinh \frac{m\pi y}{a} \right]$$

### 3.2.2.1 Flecha

Como solución particular se toma la flecha de una franja de placa en la dirección  $x$  de forma que para una carga uniforme  $q_0$ :

$$w_P(x, y) = \frac{q_0}{24D} (x^4 - 2ax^3 + a^3x) = \frac{4q_0 a^4}{D\pi^5} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{sen} \frac{m\pi x}{a}}{m^5}$$

$$w(x, y) = \frac{q_0 a^4}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{4}{m^5 \pi^5} + A_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} \right] \text{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

$A_m$  y  $B_m$  se determinan en base a las condiciones de contorno en  $y$ . Como los bordes  $y = \pm a$  están también simplemente apoyados:

$$w(x, y)_{y=a} = 0; M_y = \left[ \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} \right]_{x=a} = 0 \rightarrow \left[ \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right]_{x=a} = 0$$

Como  $w(x, y)$  debe satisfacer estas dos condiciones:

$$\frac{4}{\pi^5 m^5} + A_m \cosh(m\pi) + m\pi \operatorname{senh}(m\pi) = 0$$

$$(A_m + 2B_m) \cosh(m\pi) + B_m m\pi \operatorname{senh}(m\pi) = 0$$

Dos ecuaciones que determinan:

$$A_m = -\frac{2(m\pi \tanh(m\pi) + 2)}{\pi^5 m^5 \cosh(m\pi)} \quad B_m = -\frac{2}{\pi^5 m^5 \cosh(m\pi)}$$

$$w(x, y) = \frac{4q_0 a^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^5} \left[ 1 - \frac{m\pi \tanh(m\pi) + 2}{2 \cosh(m\pi)} \cosh \frac{m\pi y}{a} + \frac{1}{2 \cosh(m\pi)} \frac{m\pi y}{a} \operatorname{senh} \frac{m\pi y}{a} \right] \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

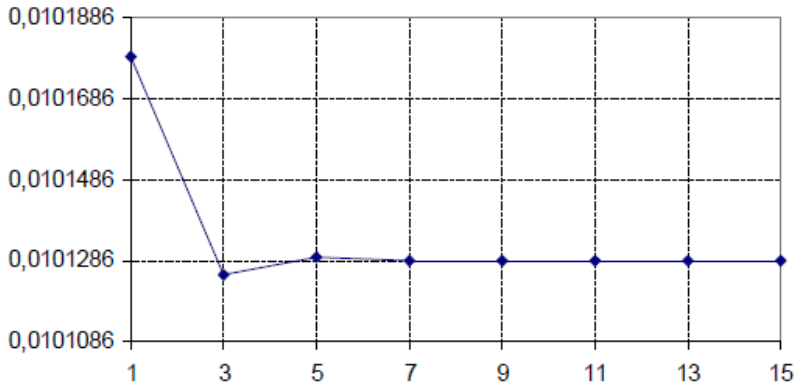
La flecha máxima se produce en el centro de la placa  $y=0$ ,  $x=a/2$

$$w(x, y) = \frac{4q_0 a^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^5} \left[ 1 - \frac{m\pi \tanh(m\pi) + 2}{2 \cosh(m\pi)} \right] \operatorname{sen} \frac{m\pi}{2}$$

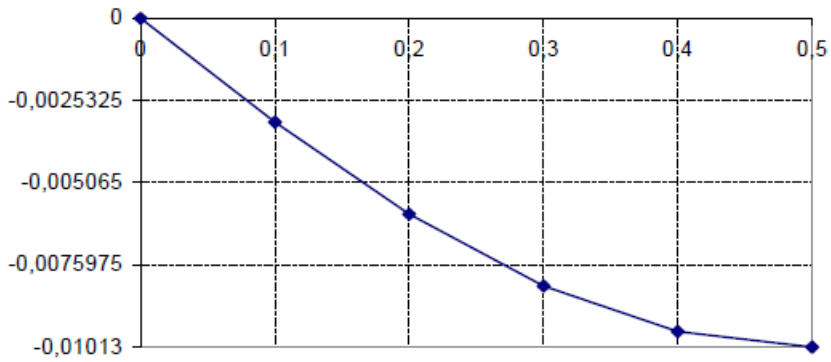
		<b>w(0.5 a 0)x 4q<sub>0</sub>/D</b>
m=1	0.0101788	0.0101788
m=3	-5.3741E-05	0.0101251
m=5	4.1827E-06	0.0101293
m=7	-7.7771E-07	0.0101285

**Tabla 3.10** Evolución de la flecha en el centro con el número de armónicos.

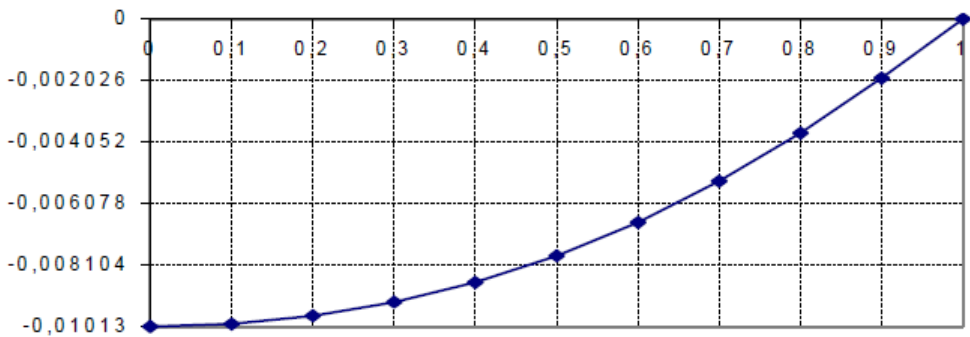
La flecha converge rápidamente a la solución exacta  $w_{\text{exacta}} = 0,0101286 q_0 a^4/D$



**Figura 3.12** Convergencia de la flecha en el centro.



**Figura 3.13** Flecha en la sección  $y=0$ ,  $x=0$ ,  $y=0$   $x=a/2$ .



**Figura 3.14** Flecha en la sección  $x=a/2$ ,  $y=0$ ,  $x=a/2$   $y=a$ .

### 3.2.2.2 Esfuerzos

#### 3.2.2.2.1 Momentos $M_x$ y $M_y$

Los momentos  $M_x$  y  $M_y$  vienen dados por:

$$M_x = D \left( \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right) =$$

$$M_y = D \left( \nu \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right) =$$

Si la flecha se representa como:

$$w(x, y) = \frac{4q_0 a^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^5} [1 - A_m \cosh(\alpha_m y) + B_m \alpha_m y \operatorname{senh}(\alpha_m y)] \operatorname{sen}(\alpha_m x)$$

Con:

$$A_m = -\frac{m\pi \tanh(m\pi) + 2}{2 \cosh(m\pi)} \quad B_m = \frac{1}{2 \cosh(m\pi)} \quad \alpha_m = \frac{m\pi}{a}$$

$$\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} = -\frac{4q_0 a^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m^2}{m^5} [1 - A_m \cosh(\alpha_m y) + B_m \alpha_m y \operatorname{senh}(\alpha_m y)] \operatorname{sen}(\alpha_m x)$$

$$\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} = -\frac{4q_0 a^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m^2}{m^5} [(-A_m + 2B_m) \cosh(\alpha_m y) + B_m \alpha_m y \operatorname{senh}(\alpha_m y)] \operatorname{sen}(\alpha_m x)$$

$$M_x = \frac{4q_0 a^2}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} \left[ \frac{1 - (1 - \nu)A_m \cosh(\alpha_m y) - 2\nu B_m \alpha_m y \operatorname{senh}(\alpha_m y)}{\cosh(\alpha_m y) + (1 - \nu)B_m \alpha_m y \operatorname{senh}(\alpha_m y)} \right] \operatorname{sen}(\alpha_m x)$$

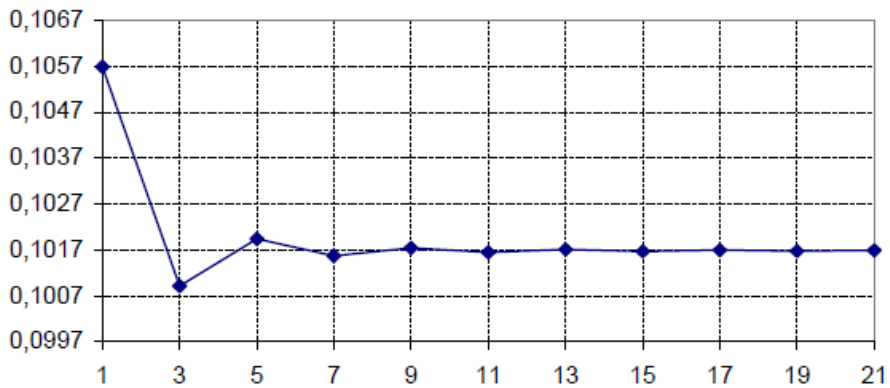
$$M_y = \frac{4q_0 a^2}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} \left[ \frac{\nu + (1 - \nu)A_m \cosh(\alpha_m y) - 2\nu B_m \alpha_m y \operatorname{senh}(\alpha_m y)}{\cosh(\alpha_m y) - (1 - \nu)B_m \alpha_m y \operatorname{senh}(\alpha_m y)} \right] \operatorname{sen}(\alpha_m x)$$

Ahora el  $M_x$  y el  $M_y$  ya no son iguales en el centro:

$v = 0.3$		$M_x(0.5 a 0)x$ $(q_0 a^2)$
$m=1$	0.105685910	0.105685910
$m=3$	-0.004774690	0.100911220
$m=5$	0.001032047	0.101943270
$m=7$	-0.000376111	0.101567160

**Tabla 3.11** Evolución del  $M_x$  en el centro con el número de armónicos.

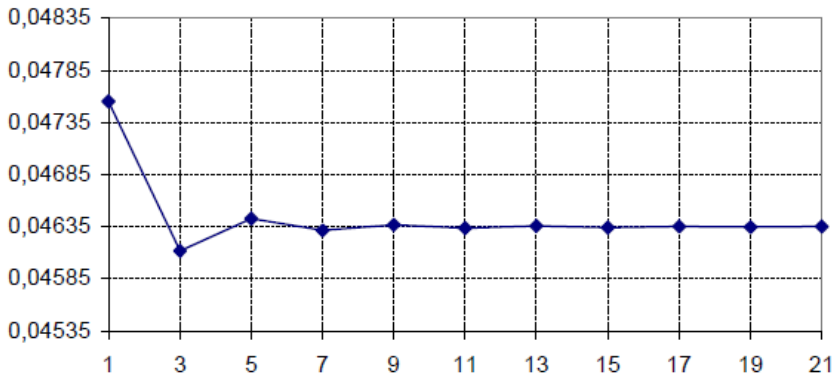
La solución converge al valor exacto  $M_x = 0,1017 q_0 a^2$



**Figura 3.15** Convergencia de  $M_x$  en el centro con el número de armónicos.

$v = 0.3$		$M_y(0.5 a 0)x$ $(q_0 a^2)$
$m=1$	0.0475544500	0.047554450
$m=3$	-0,001435714	0.046118730
$m=5$	0.0003096160	0.046428350
$m=7$	-0.0001128330	0.046315520

**Tabla 3.12** Evolución del  $M_y$  en el centro con el número de armónicos.



**Figura 3.16** Convergencia de  $M_y$  en el centro con el número de armónicos.

La solución converge al valor exacto  $M_y = 0,04635 q_0 a^2$

### 3.2.2.2 Momento Torsor $M_{xy}$

El momento torsor  $M_{xy}$  viene dado por:

$$M_{xy} = D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} =$$

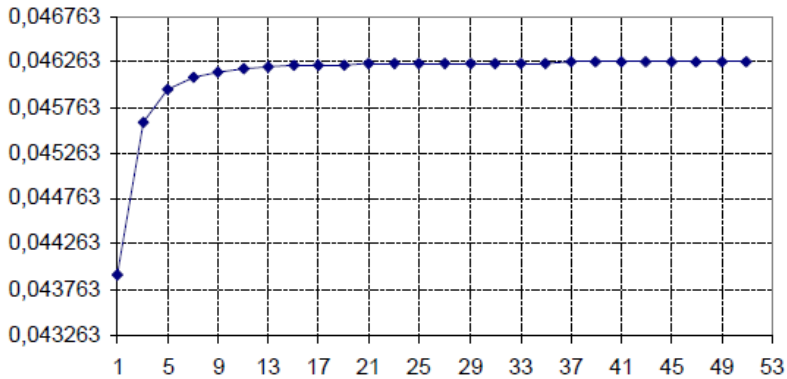
$$= \frac{4q_0 a^2 (1 - \nu)}{\pi^3} [(-A_m + B_m) \sinh(\alpha_m y) + B_m \alpha_m y \cosh(\alpha_m y)] \cos(\alpha_m x)$$

$\nu = 0.3$		$M_{xy}(0 \text{ á } a)x$ ( $q_0 a^2$ )
m=1	0.0439281860	0.043928186
m=3	0.0016723010	0.045600490
m=5	0.0003612170	0.045961700
m=7	0.0000131639	0.046093340

**Tabla 3.13** Evolución del  $M_{xy}$  en las esquinas con el número de armónicos.

El valor máximo se alcanza en las esquinas de la placa y vale  $M_{xy} = 0,04626 q_0 a^2$





**Figura 3.17** Convergencia de  $M_{xy}$  en las esquinas con el número de armónicos.

La reacción en las esquinas vale  $R = 2 M_{xy} = 0,0925 q_0 a^2$

### 3.2.2.2.3 Esfuerzos Cortantes

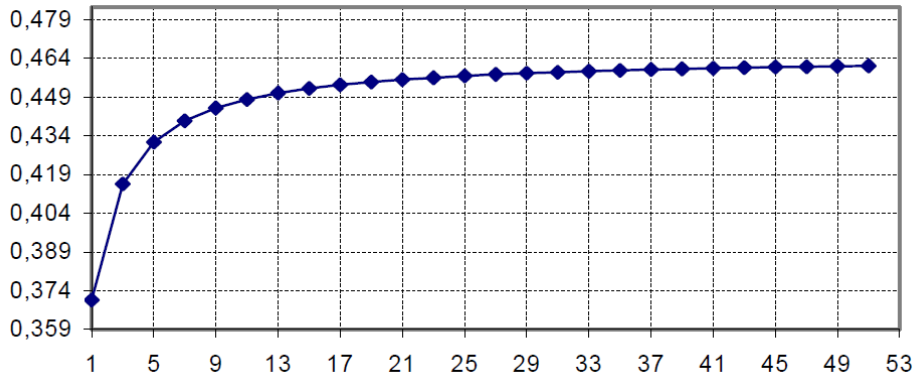
Los cortantes vienen dados por:

$$\begin{aligned}
 Q_x &= D \left( \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial x \partial y^2} \right) = \\
 &= \frac{4q_0 a}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} [1 - 2B_m \cosh(\alpha_m y)] \cos(\alpha_m x) \\
 Q_y &= D \left( \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial y^3} \right) = \\
 &= \frac{4q_0 a}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} [1 - 2B_m \cosh(\alpha_m y)] \operatorname{sen}(\alpha_m x)
 \end{aligned}$$

$v = 0.3$		$Q_x(0, 0)_x$ ( $q_0 a$ )
$m=1$	0.3703221400	0.370322140
$m=3$	0.0450243690	0.415346510
$m=5$	0.0162113840	0.431557900
$m=7$	0.0082711170	0.439829010

**Tabla 3.14** Evolución del  $Q_x$  en centro de lado con el número de armónicos.

$Q_x$  converge con mayor dificultad y su valor máximo vale:  $Q_x=0,464 q_0 a$

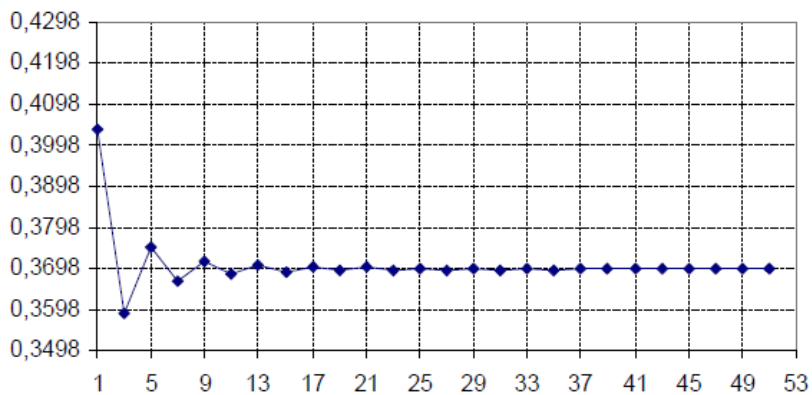


**Figura 3.18** Convergencia de  $Q_y$  en centro de lado con el número de armónicos.

$v = 0.3$		$Q_y(0.5a, a)_x$ ( $q_0 a$ )
$m=1$	0.4037738640	0.403773864
$m=3$	-0.0450316370	0.358742230
$m=5$	0.0162113890	0.374953620
$m=7$	-0.0082711170	0.366682500

**Tabla 3.14** Evolución del  $Q_y$  en centro de lado con el número de armónicos.

$Q_Y$  converge con dificultad y su valor máximo vale:  $Q_Y=0,3698 q_0 a$



**Figura 3.19** Convergencia de  $Q_Y$  en centro de lado con el número de armónicos.

Para determinar  $V_x$  y  $V_y$  calculamos las derivadas del momento torsor  $M_{xy}$ .

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = \frac{4q_0 a}{\pi^2} (1 - \nu) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \left[ \begin{matrix} (-A_m + B_m) \operatorname{senh}(\alpha_m y) + \\ + B_m \alpha_m y \operatorname{cosh}(\alpha_m y) \end{matrix} \right] \operatorname{sen}(\alpha_m y)$$

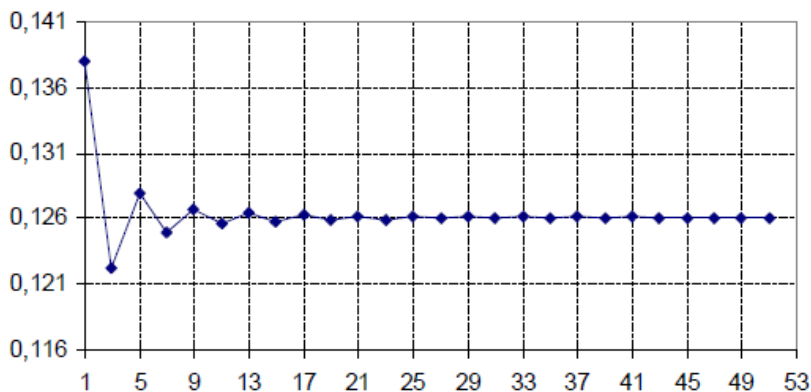
$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = \frac{4q_0 a}{\pi^2} (1 - \nu) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \left[ \begin{matrix} (-A_m + 2B_m) \operatorname{cosh}(\alpha_m y) + \\ + B_m \alpha_m y \operatorname{senh}(\alpha_m y) \end{matrix} \right] \operatorname{cos}(\alpha_m y)$$

$\nu = 0.3$		<b>dMxy/dx (0.5a, a)x (q<sub>0</sub> a)</b>
m=1	0.1380044680	0.138004468
m=3	-0.0157610690	0.122243400
m=5	0.0056739860	0.127917380
m=7	-0.0028948910	0.125022490

**Tabla 3.15** Evolución de la variación de  $M_{xy}$  con  $x$  en centro de lado con el número de armónicos.

El valor máximo de la derivada de  $M_{xy}$  respecto a  $x$  es: **0,126 q<sub>0</sub> a**

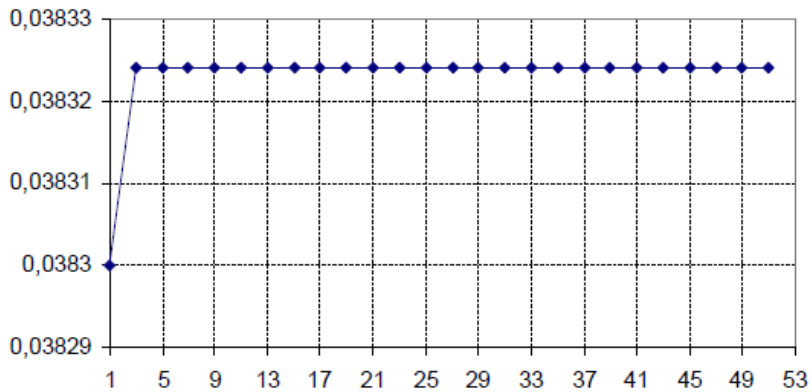
Por tanto el valor máximo de  $V_y = Q_y + dM_{xy}/dx$  **(0,370 + 0,126) q<sub>0</sub> a = 0,496 q<sub>0</sub> a**



**Figura 3.20** Convergencia de  $dM_{xy}/dx$  con el número de armónicos.

$\nu = 0.3$		$dM_{xy}/dy$ $(0, 0)_x (q_0 a)$
$m=1$	0.0383000640	0.038300064
$m=3$	2.39750E-05	0.038324040
$m=5$	2.68631E-08	0.038324070
$m=7$	3.58324E-11	0.038324070

**Tabla 3.16** Evolución de variación de  $M_{xy}$  respecto a  $y$  en centro de lado con número de armónicos.



**Figura 3.21** Convergencia de la  $dM_{xy}/dy$  en centro de lado con el número de armónicos.

Por tanto el valor máximo de  $V_x = Q_x + dM_{xy}/dy (0,465 + 0,038) q_0 a = 0,503 q_0 a$

## CAPITULO 4

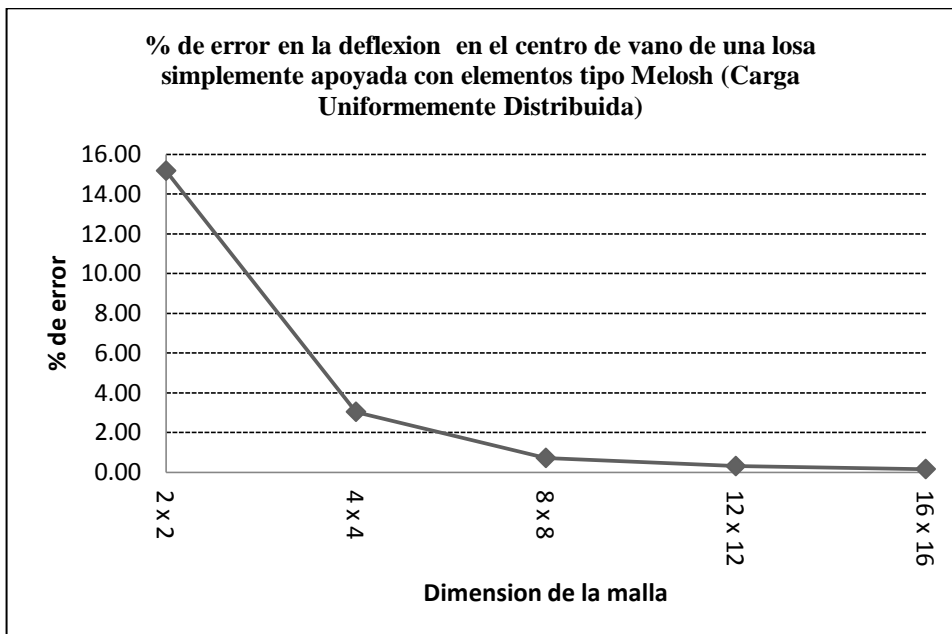
### ANALISIS DE RESULTADOS

#### 4.1 Análisis comparativo y validación de Resultados

##### 4.1.1 El Método de los Elementos Finitos

Del análisis de los resultados de los ejemplos desarrollados en el capítulo anterior es posible observar la diferencia de los resultados obtenidos con la aplicación del M.E.F. y la solución exacta. Así tenemos que:

GRAFICO 4.1



Como era de esperarse la utilización de una malla con más elementos redonda en una mejor respuesta numérica. Se aprecia que para el caso estudiado el analizar la malla de 2x2 a 4x4 mejora el porcentaje de error en 5 veces.

GRAFICO 4.2

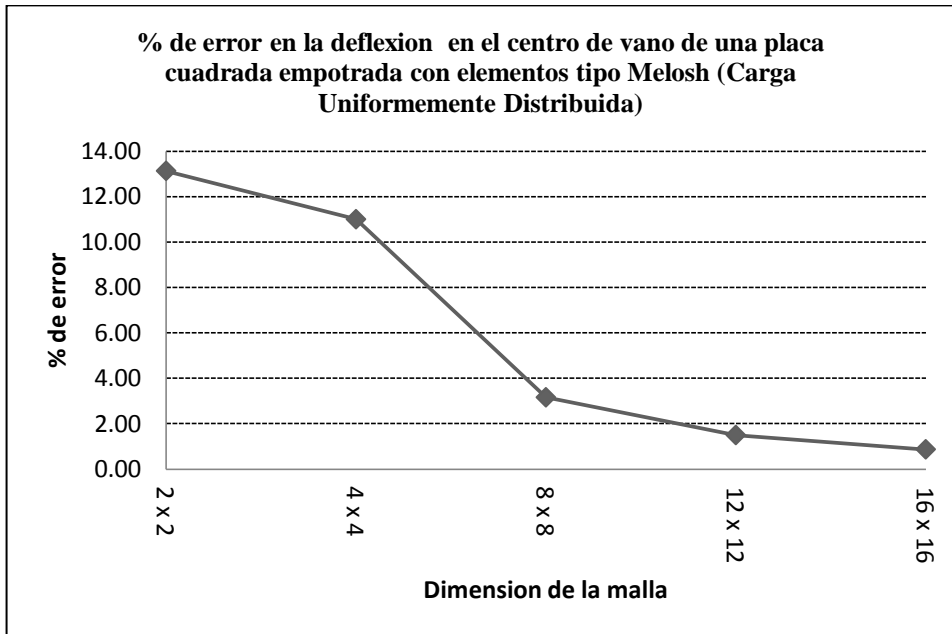


GRAFICO 4.3

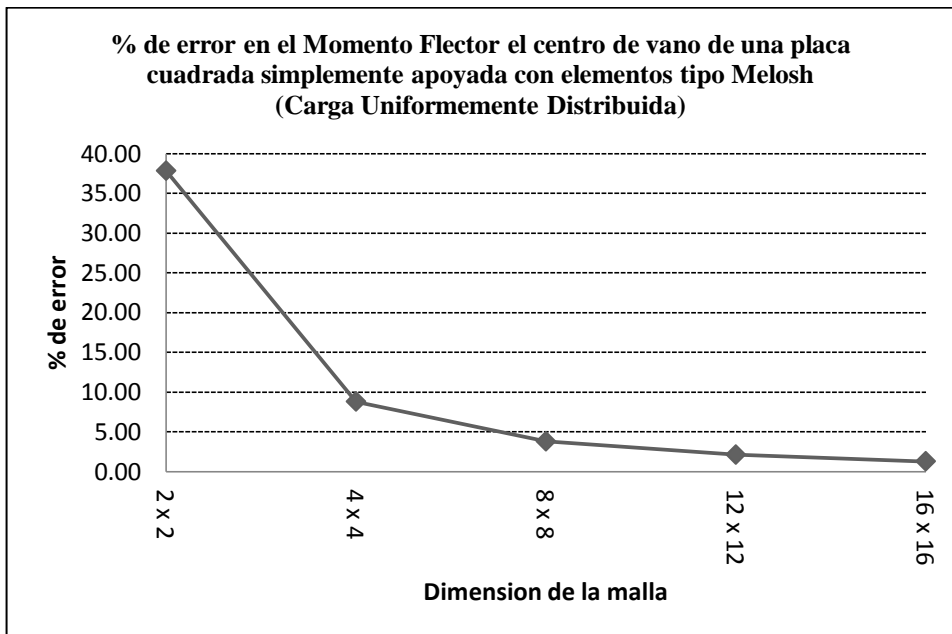
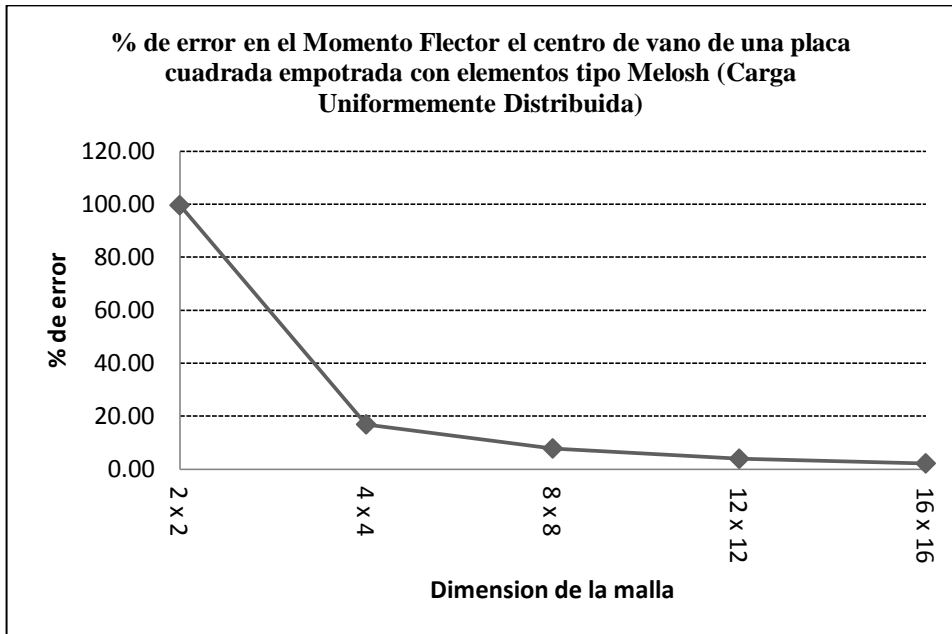


GRAFICO 4.4

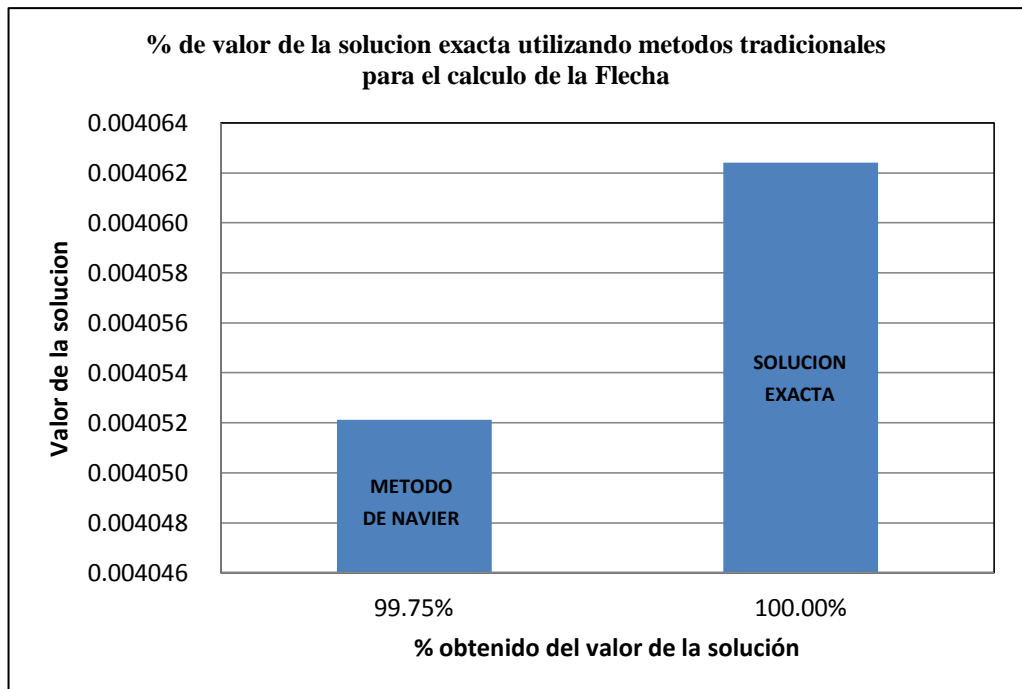


De la observación de las tablas 3.1 al 3.4 y los gráficos 4.1 al 4.4, se hace evidente que una mayor discretización de la malla influye considerablemente en el error de los resultados (en comparación con los valores analíticos obtenidos por Timoshenko); es así, que al examinar la Tabla 3.1 el error empleando una malla de 2 x 2 es 100 veces mayor que con el elemento de 16 x 16. La diferencia en el error es más notoria aún al verificar el momento flector de la Tabla 3.4 en donde la utilización de un elemento de 2 x 2 incurre en un error del 99.57% a diferencia del elemento de 16 x 16 que alcanza el 2,16%. Estas observaciones son válidas para la gran mayoría de los casos que se presentan.

## 4.1.2 Métodos Alternativos de Diseño

Del análisis de los resultados de los ejemplos desarrollados en el capítulo anterior es posible observar la diferencia de los resultados obtenidos con la aplicación de los Métodos Alternativos de Diseño y la solución exacta. Así tenemos que:

**GRAFICO 4.5**



De la observación de este gráfico es notorio que la solución obtenida mediante la aplicación del método de Navier, se aproxima considerablemente bien a la solución exacta; esta generosa aproximación numérica se repite en los casos subsiguientes y de igual manera en la aplicación del método de Levi.

Se debe hacer un paréntesis cuando analizamos el gráfico 4.8 del método de Navier en donde se presenta el mayor error de la solución (alrededor del 10%) la solución, como se explicó anteriormente, ya no converge tan rápidamente como la flecha y los momentos ya que las potencias de  $m$  y  $n$  son ahora de orden 3, sin embargo de lo cual no deja de ser un valor aceptable.



GRAFICO 4.6

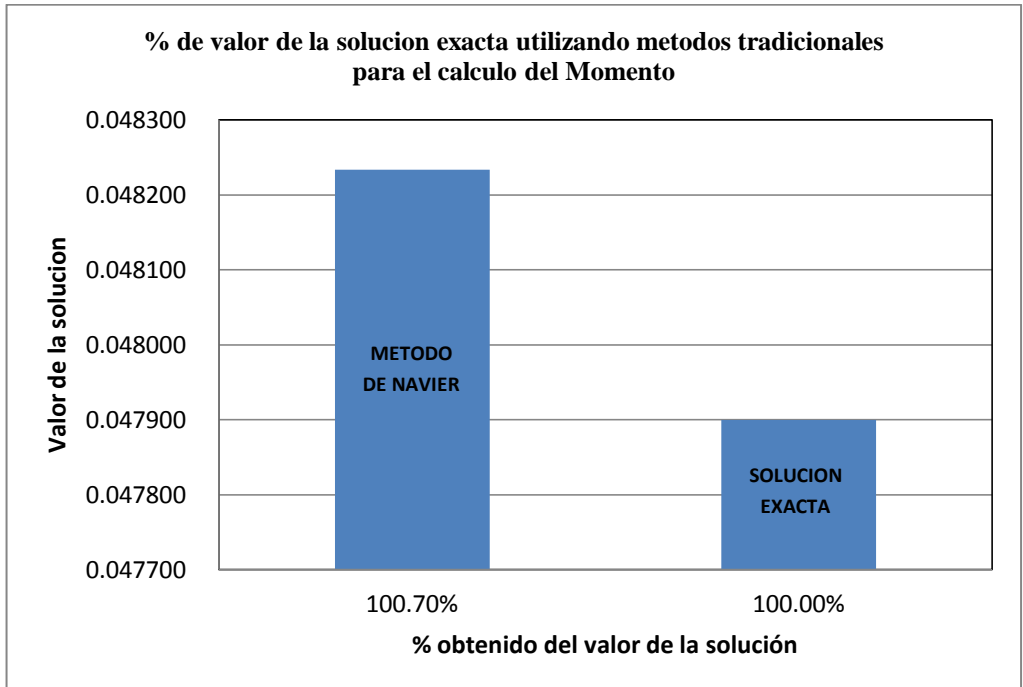
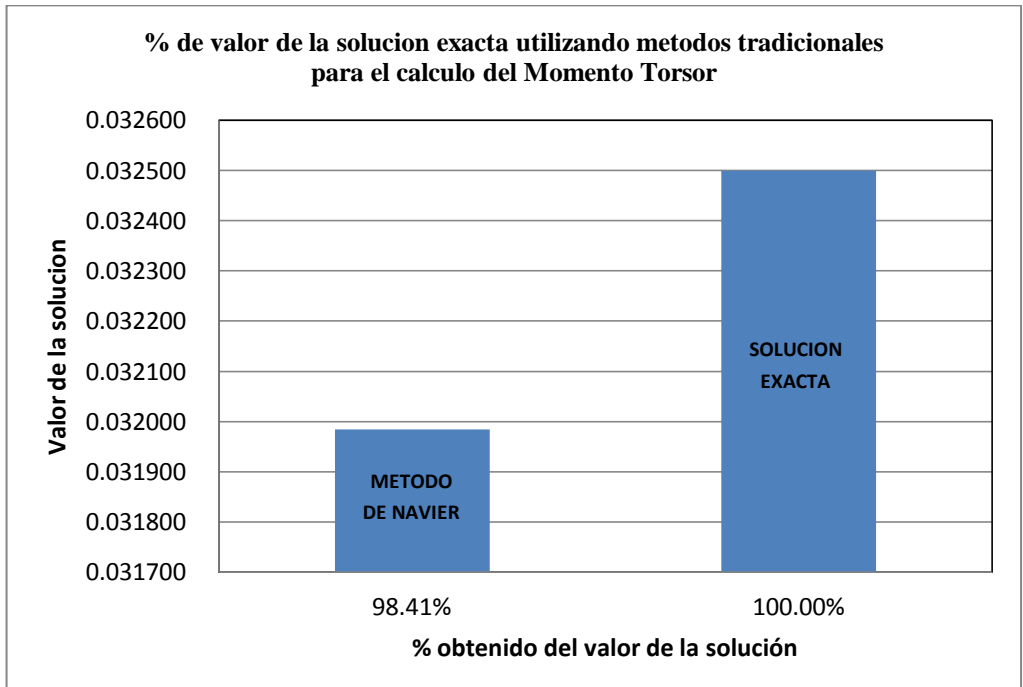
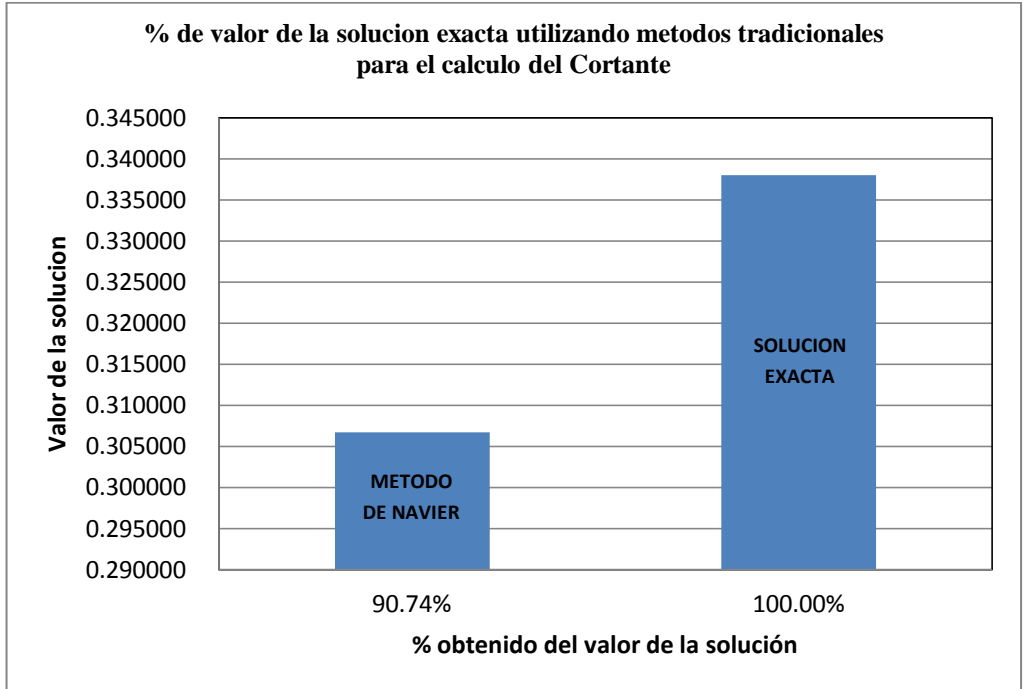


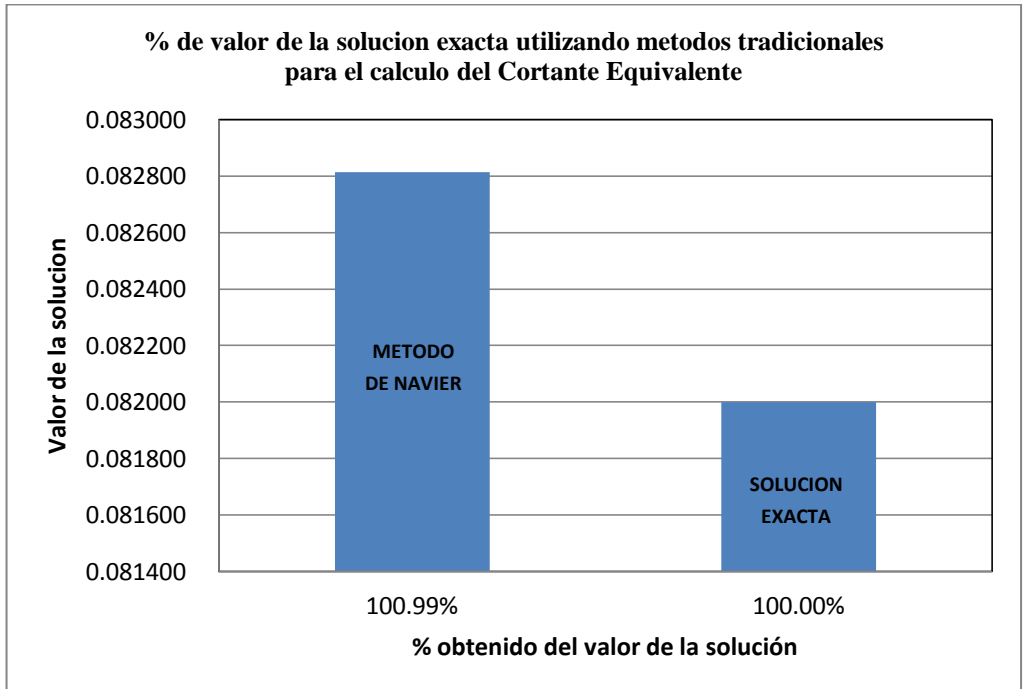
GRAFICO 4.7



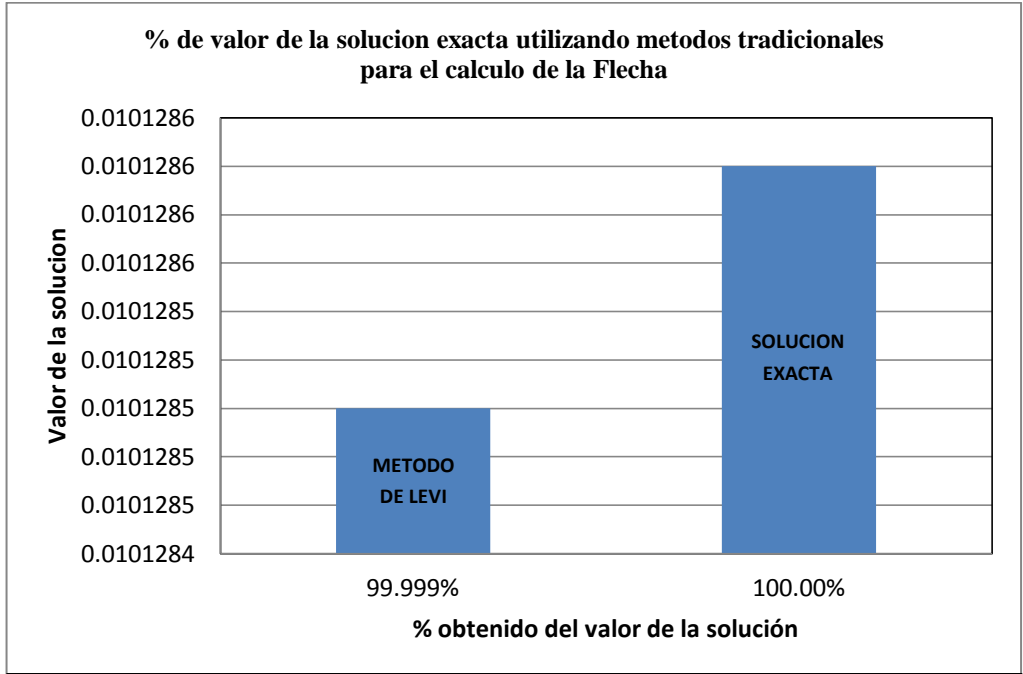
**GRAFICO 4.8**



**GRAFICO 4.9**



**GRAFICO 4.10**



**GRAFICO 4.11**

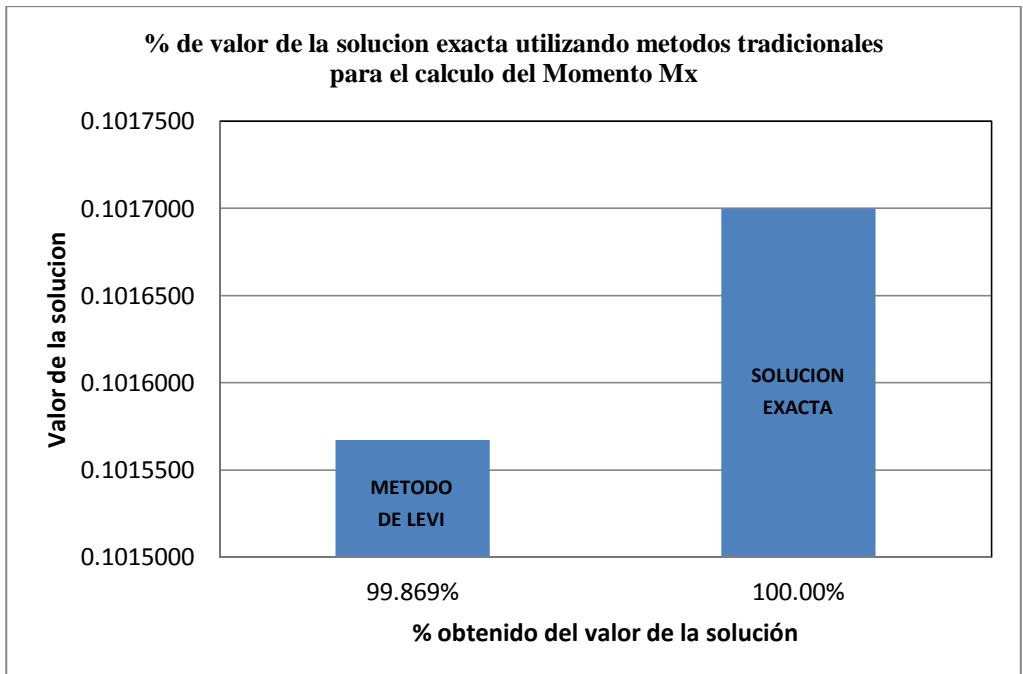


GRAFICO 4.12

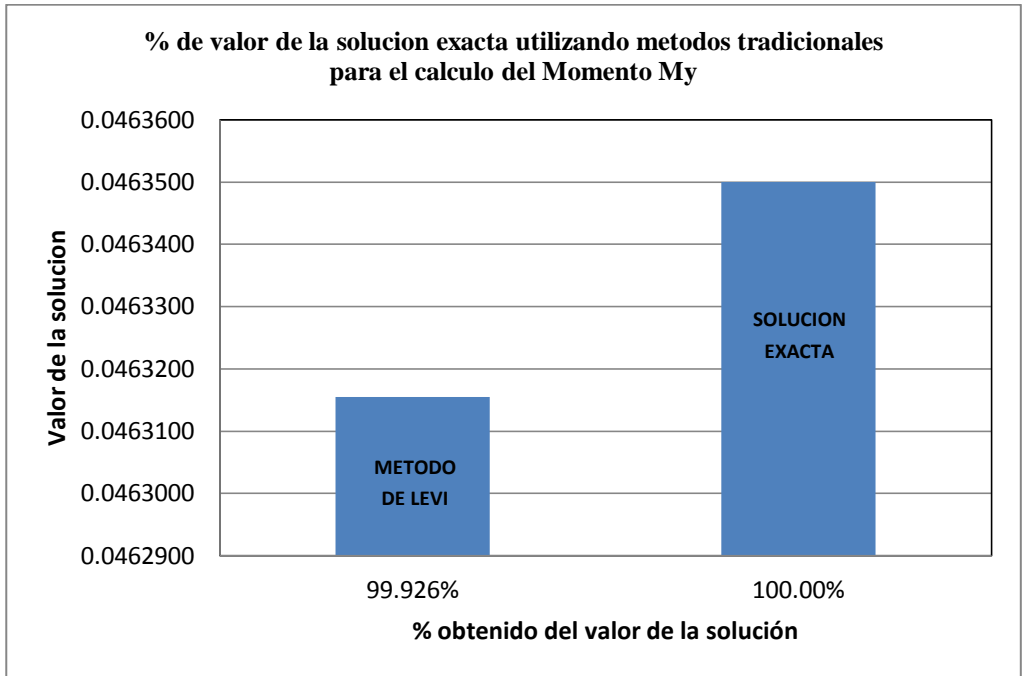
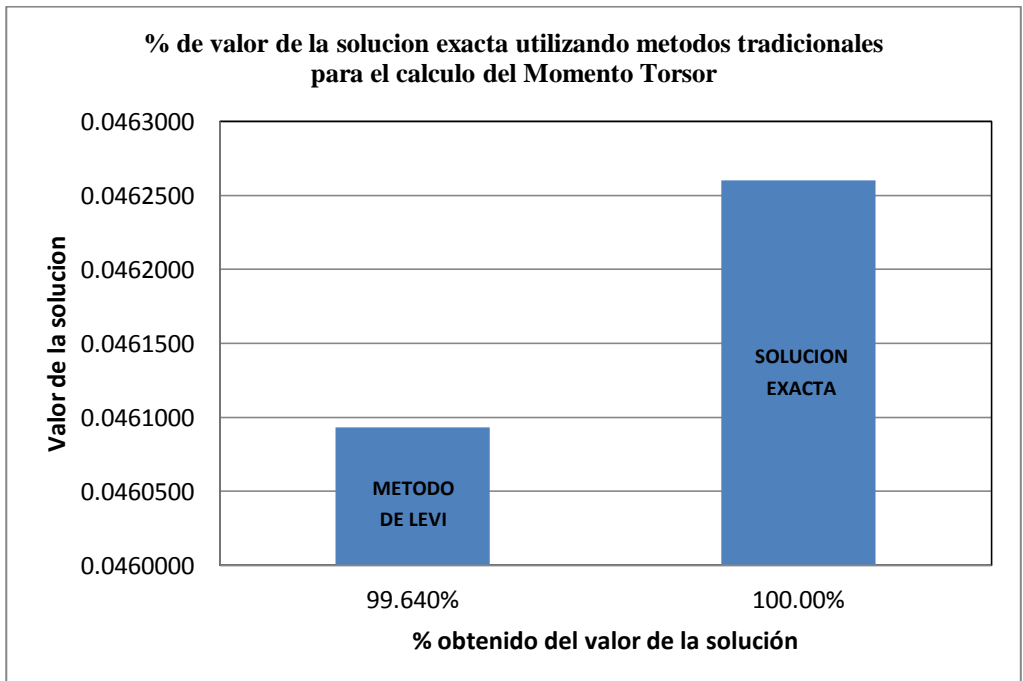
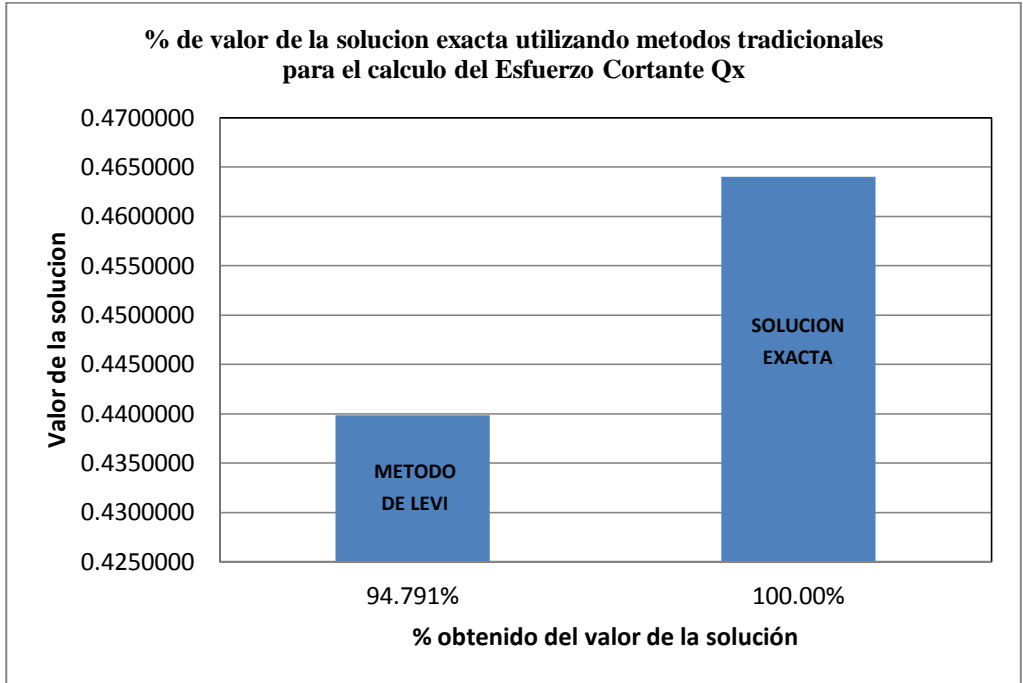


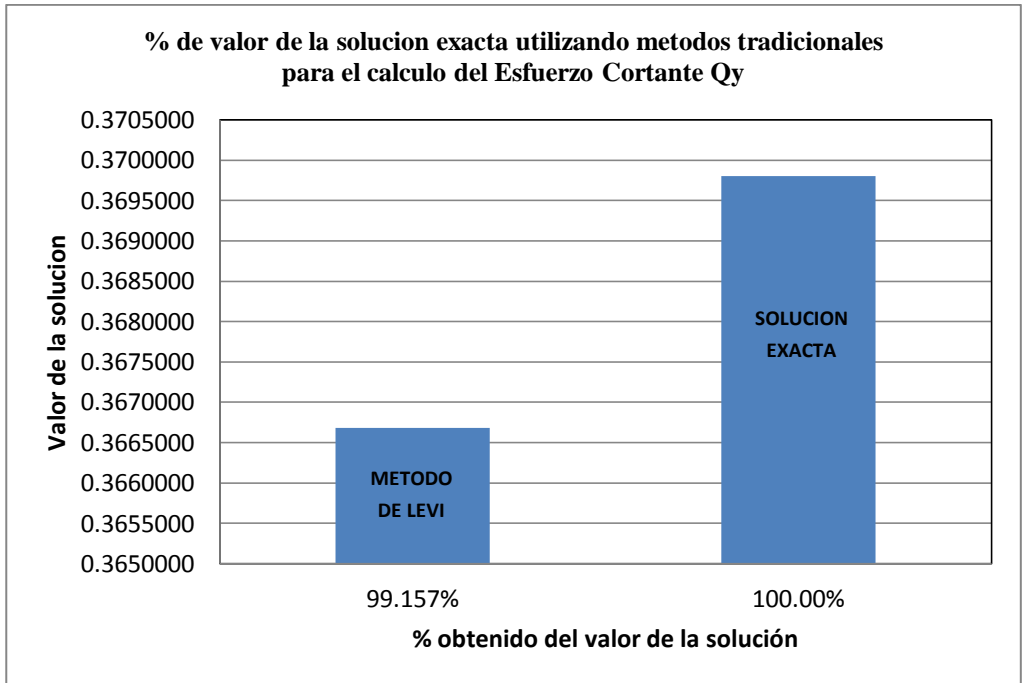
GRAFICO 4.13



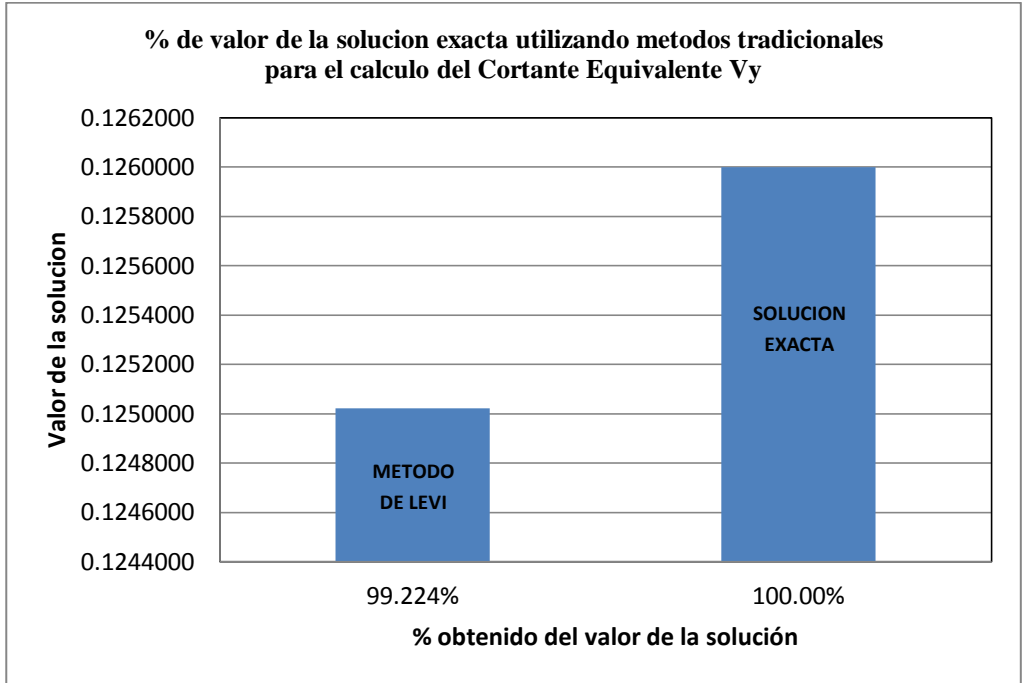
**GRAFICO 4.14**



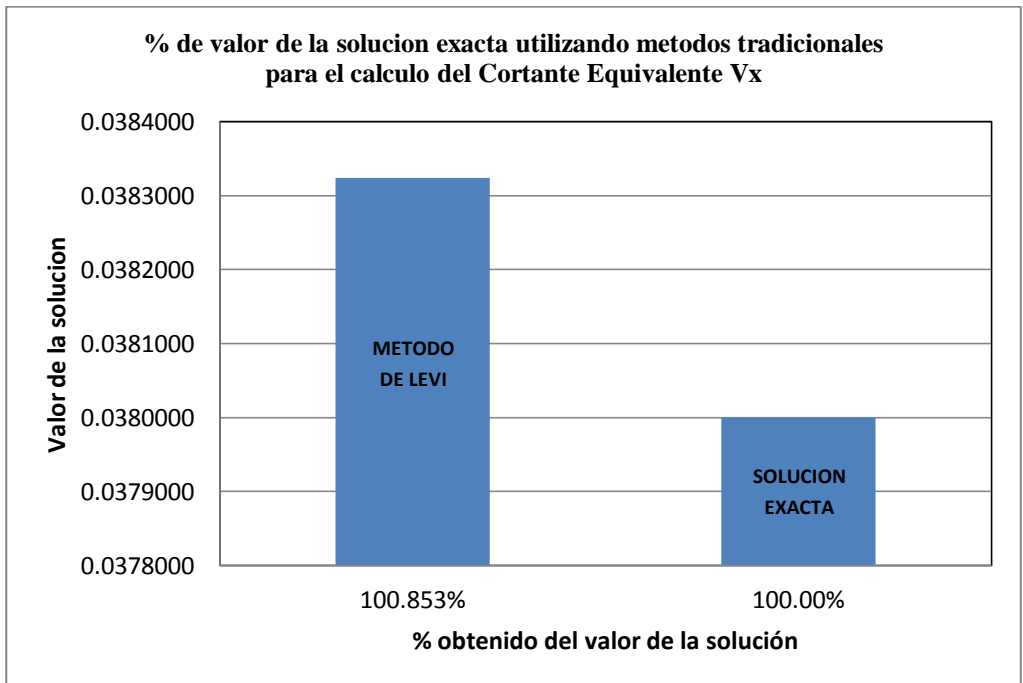
**GRAFICO 4.15**



**GRAFICO 4.16**



**GRAFICO 4.17**



De la observación de los gráficos de los métodos tradicionales de diseño, se observa en todos los casos un error por demás aceptable en comparación con la exacta cabe resaltar también que la cuando se trata de evaluar la flecha la solución converge rápidamente esto debido a que en el denominador aparecen las quintas potencias de  $m$  y  $n$ .

En los dos métodos tradicionales estudiados la solución aplicada a la flecha es prácticamente igual a la exacta observando un 0.25 % y 0.001% de diferencia respectivamente.

Los demás esfuerzos analizados en promedio arrojan un error del 1.051% para el método de Navier y del 1.18% para el caso de Levi.





## CAPITULO 5

### CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Tras haber llevado a cabo este estudio comparativo entre Métodos Tradicionales versus el Método de los Elementos Finitos para el Análisis de Placas Rectangulares, se pueden observar y concluir los siguientes aspectos:

Rápidos avances de varias técnicas numéricas en el análisis ingeniería han ocurrido los últimos años, de igual forma computadoras cada vez más veloces y potentes han hecho posible esta rápida sucesión.

Es ampliamente conocido que el Método los Elementos Finitos ha dominado este campo pero, otros métodos, como los estudiados, continúan teniendo sus propios roles y no han sido descartados en sus áreas más especializadas.

El método de los elementos finitos, siendo la herramienta más versátil, requiere una discretización en cada dimensión de los problemas, y, por tanto, generalmente necesita más incógnitas para la discretización que otros métodos.

El avance de las súper-computadoras ha proveído a los ingenieros la capacidad de hacer frente a problemas que manejan millones de incógnitas. Problemas que con anterioridad se habían considerado intratables debido a su naturaleza compleja y a su tamaño, han sido resueltos con éxito con el método de los elementos finitos.

No obstante, aunque el coste de las soluciones ha disminuido considerablemente, está aún lejos de ser considerado barato.

El método de los elementos finitos ha adquirido una gran importancia en la solución de problemas en el campo de la ingeniería, de la física, etc., ya que permite resolver casos que hasta hace poco tiempo eran prácticamente imposibles de resolver por métodos matemáticos tradicionales.

Es también conocido que en muchos problemas, con formas geométricas regulares y condiciones de contorno simples, un análisis completo con elementos finitos, resulta, frecuentemente, extravagante e innecesario. En consecuencia, métodos alternativos de análisis que reduzcan el coste computacional y los requerimientos de base, y que, al

mismo tiempo, tengan una amplia versatilidad en el análisis de elementos finitos, son evidentemente deseables.

Las diferencias de error entre el Método de los Elementos finitos y la solución exacta son aceptables por lo que el método resulta siendo siempre fiable.

Es necesario mencionar que las conclusiones del presente estudio resultan de los casos de geometría regular estudiados.

No se puede dejar de mencionar sin embargo que el método de los elementos finitos tiene una amplia aplicación en casos de geometría irregular en donde los métodos tradicionales de diseño resultarían inaplicables.

La versatilidad del método de los Elementos finitos siempre será indiscutible cuando se trata de resolver problemas de geometría compleja.

Los casos que se han desarrollado en el presente estudio se limitan a estructuras regulares sujetas a situaciones de cargas uniformes, es evidente que estos casos se presentan en situaciones usuales, pero no en todos los escenarios.

Hay que mencionar, sin embargo, que en la práctica general del diseño en ingeniería se trata de realizar simplificaciones de una estructura compleja con la finalidad de modelar estructuras regulares que faciliten los cálculos; lo mismo ocurre con los diversos e irregulares estados de cargas. Si bien es cierto, como se dijo, las simplificaciones que se realizan para el cálculo de una estructura facilita el desarrollo matemático pero conllevan a estructuras inclinadas fuertemente al lado de la seguridad.

La práctica mencionada en el párrafo anterior se ha venido desvaneciendo en el tiempo por la gran adaptabilidad del método de los elementos finitos a diversas y complejas geometrías y estados de carga. Esto sin duda optimiza el diseño con la consecuente economía de la construcción.

Finalmente lo que se pretendía estudiar y verificar en el desarrollo monográfico presente es que si en situaciones de geometrías regulares y estados comunes de carga es conveniente la aplicación de un método tan sofisticado como el de los Elementos Finitos y la respuesta siempre será positiva, en cuanto se cuenta con el desarrollo informático necesario y el coste computacional ha pasado a segundo plano.

No se puede sin embargo dejar a un lado los métodos clásicos de diseño que como vemos en las conclusiones de este estudio nos conducen a resultados de igual manera fiables para los casos estudiados.

# BIBLIOGRAFIA

- [1] OÑATE, Eugenio, “Cálculo de Estructuras por el Método de los Elementos Finitos”, Editorial CIMNE, Barcelona, España, 1995.
- [2] ZIENKIEWICZ, O. C y TAYLOR, R. L., “El Método de los Elementos Finitos”, Primera Edición, Vol. I y II, Editorial Mc Graw – Hill, 1995.
- [3] FORNONS, José María, “El Método de los Elementos Finitos”, Primera Edición, Editorial de la Universidad Politécnica de Catalunya, Barcelona, 1994.
- [4] BRAJA M. Das, “Principios de ingeniería de cimentaciones”, Cuarta Edición, International Thomson Editores
- [5] RODRIGUEZ, SERRA Y OTEO, “Curso aplicado de cimentaciones” Cuarta Edición, Servicio de Publicaciones del Colegio oficial de Arquitectos de Madrid.
- [6] WASHIZU, k. Variational methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon Press, 1974. ISBN 978-0-08-026723-4.
- [7] LANGHAAR, H. L. Energy Methods in Applied Mechanics, Wiley, 1962. ISBN 978-0-89464-364-4.
- [8] TIMOSHENKO, WOINOWSKY-KRIEGER, “Teoría de láminas y placas”, Urmo, S.A. De Ediciones
- [9] PINO, Ángel, “Un elemento finito rectangular para balsa plana” Revista Ingeniería Civil, mayo 2005.
- [10] OLIVER OLIVELLA, Xavier, “Mecánica de medios continuos para ingenieros” Segunda Edición, Edicions UPC.
- [11] ROMO PROAÑO, Marcelo, “El Método de los Elementos Finitos en el análisis estructural de placas” Centro de Investigación Científica Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador.
- [12] BOZZO, L, “Análisis de losas planas mediante Elementos Finitos”.

[13] PATANELLA, Alejandro. ACTIS, Marcos, “Placas Planas Rectangulares de Espesor Delgado”. Facultad de Ingeniería Universidad Nacional de La Plata, 2008.

[14] GALLEGO SEVILLA, R. RUS CARLBORG, G y MARTÍNEZ CASTRO, A. E. “Placas Delgadas mediante Métodos Clásicos”. Departamento de Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica, Universidad de Granada, Octubre 2007.

[15] CELIGÜETA LIZARZA, Juan Tomás. “Método de los Elementos Finitos para Análisis Estructural”. Campus Tecnológico de la Universidad de Navarra, Septiembre 2008.

[16] NAVARRO, Carlos. “Placas y Láminas”. Universidad Carlos III de Madrid. Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras.

[17] ALVAREZ, Paul, “Lecturas Complementarias de la Asignatura Elementos Finitos” Curso de Magister en Métodos Numéricos para diseño en Ingeniería.

## **LINKOGRAFIA**

[1k] [http://es.wikipedia.org/wiki/Placas\\_y\\_laminas](http://es.wikipedia.org/wiki/Placas_y_laminas)

[2k] <http://ebookbrowse.net> “Análisis De Placas Y lamina.doc free ebook download”

[3k] <http://www-gmap.mecanica.ufrgs.br>