

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA SALESIANA
SEDE QUITO

CARRERA: INGENIERÍA ELECTRÓNICA

Tesis previa a la obtención del título de: INGENIERO ELECTRÓNICO

TEMA:
PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES SÍSMICAS DEL CLUSTER
PISAYAMBO USANDO SAC (SEISMIC ANALYSIS CODE) Y
TOMOGRAFIA DE RAYOS EN MATLAB

AUTOR:
BYRON DARIO TARABATA TUPIZA

DIRECTOR:
FRANKLIN ERAZO SIERRA

Quito, enero de 2014

DECLARATORIA DE RESPONSABILIDAD Y AUTORIZACIÓN DE USO DEL TRABAJO DE TITULACIÓN

Yo Byron Darío Tarabata Tupiza; autorizo a la Universidad Politécnica Salesiana la publicación total o parcial de este trabajo de grado y su reproducción sin fines de lucro.

Además declaro que los conceptos y análisis desarrollados y las conclusiones del presente trabajo son de exclusiva responsabilidad del autor.

Byron Dario Tarabata Tupiza

CC: 172259062-5

DEDICATORIA

Marzo del 2007 con el canto de los mirlos al romper el alba mi madre preparaba el desayuno, horas después daba inicio una nueva etapa de mi vida. Lleno de expectativas, sueños, dudas mi carrera universitaria había empezado.

Hoy casi cinco años después dedico este trabajo a mi madre.

AGRADECIMIENTO

Un agradecimiento especial a los investigadores del Centro de Investigación Modelamiento Ambiental, por vincular a los estudiantes en el maravilloso mundo de la ciencia.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO 1.....	2
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	2
1.1 Introducción.....	2
1.2 Problema a resolver.....	2
1.3 Hipótesis	2
1.4 Objetivos.....	3
1.4.1 Objetivo general	3
1.4.2 Objetivos específicos	3
1.5 Justificación	3
1.6 Alcances	4
1.7 Metodología de la investigación	4
1.8 Investigación bibliográfica.....	4
1.9 Desarrollo de software	4
1.10 Documentación	5
CAPÍTULO 2.....	6
ESTADO DEL ARTE.....	6
2.1 Introducción.....	6
2.2 El clúster sísmico de Pisayambo.....	6
2.3 Estudios Previos.....	7
2.4 Origen de los sismos en el clúster sísmico Pisayambo.....	7
2.5 Fallas normales	8
2.6 Fallas inversas.....	9
2.7 Falla de transformación (de desgarre).	9
2.8 Falla mixta.....	10
2.9 Tomografía.....	10
2.10 Tomografía sísmica	10
2.11 Principio de Fermat.....	11
2.12 Aplicación a los rayos sísmicos	13
2.13 Teoría del problema inverso.....	19
2.14 Mediciones e Información A Priori.....	21
2.15 Tomografía de rayos usando bloques	22

CAPÍTULO 3.....	33
DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN.....	33
3.1 Aplicación a los rayos sísmicos del Pisayambo	33
3.2 Trazado de los rayos sísmicos en el clúster de Pisayambo	33
3.3 Aplicación de FERMAT a los datos de Pisayambo	34
3.4 Matriz G	51
3.5 Matriz <i>dobs</i>. Y <i>Cobs</i>	54
3.6 Mprior y C prior.....	55
3.7 Prueba del modelo a los datos del Pisayambo	55
3.8 Tomografía a la zona del Pisayambo	57
3.9 Pseudocódigo del programa de Tomografía	64
CAPÍTULO 4.....	65
ANÁLISIS DE RESULTADOS	65
4.1 Validación de modelos aplicados.....	65
CONCLUSIONES.....	75
RECOMENDACIONES.....	77
LISTA DE REFERENCIAS	78

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Laguna de Pisayambo que se encuentra el sitio geográfico donde se localiza el clúster sísmico del mismo nombre.....	6
Figura 2 Falla Normal	8
Figura 3 Falla Inversa	9
Figura 4 Falla de desgarre.....	9
Figura 5 Falla Mixta.....	10
Figura 6 Un sismo que se genera en el hipocentro genera una onda sísmica que si se detecta a suficiente distancia puede ser considerada como una onda plana.....	14
Figura 7 Rayos sísmicos rectilíneos trazados desde el hipocentro hasta las estaciones receptoras en la superficie.....	18
Figura 8 . Geometría de “experimento de rayos X”.....	23
Figura 9 Mprior.....	27
Figura 10 El “modelo verdadero” inventado para la generación artificial de algunos “datos”, para usarse después en el ejercicio de inversión	28
Figura 11 Resultado de la resolución del problema inverso mediante mínimos cuadrados ..	31
Figura 12 Mprior, Mpost, Mtrue.....	31
Figura 13 Cprior y Cpost	32
Figura 14 Aplicación de FERMAT a un ejemplo sintético. Dos hipocentros, generan sendos sismos cuyos rayos se propagan hacia tres estaciones, situadas en la superficie.	34
Figura 15 Evento a 0,994 km de profundidad.....	35
Figura 16 Evento a 2,047 km de profundidad.....	35
Figura 17 Evento a 4,796 km de profundidad.....	36
Figura 18 Evento a 6,517 km de profundidad.....	36
Figura 19 Evento a 7,470 km de profundidad.....	37
Figura 20 Evento a 10,323 km de profundidad.....	37
Figura 21 Evento a 11,419 km de profundidad.....	38
Figura 22 Evento a 14,723 km de profundidad.....	38
Figura 23 Evento a 15,220 km de profundidad.....	39
Figura 24 Evento a 18,307 km de profundidad.....	39
Figura 25 Evento a 20,962 km de profundidad.....	40
Figura 26 Rayos sísmicos de la región del Pisayambo	48
Figura 27 Rayos sísmicos de la región del Pisayambo plano XZ.....	49
Figura 28 Rayos sísmicos de la región del Pisayambo plano YZ.....	49
Figura 29 Zona del Pisayambo discretizada en bloques de 1x2 km	51
Figura 30 Ejemplo simple de tomografía sísmica.....	52
Figura 31 Coordenadas del rayo 1	53
Figura 32 Matriz G, longitudes de los rayos del Pisayambo.	53
Figura 33 Modelo de prueba Mprior.....	56
Figura 34 Modelo Mpost resultado de la ecuación 51	57
Figura 35 Velocidades de ondas P.....	58
Figura 36 Velocidades de ondas P para diferentes profundidades	59
Figura 37 Matriz Mprior para la región del Pisayambo.....	60
Figura 38 Modelo de lentitudes para la región del Pisayambo	61
Figura 39 Tomografía de la región del Pisayambo	63
Figura 40 Mprior y Mpost.....	63
Figura 41 Modelo de pruebas Mprior “check-board”	65

Figura 42 Modelo Mpost	66
.Figura 43 Error a posteriori para cada bloque	66
Figura 44 Desviación estándar para Mpost.....	67
Figura 45 Histograma de frecuencia para los valores de la desviación estándar de Mpost...	68
Figura 46 Figura 43 Error a prior para cada bloque.....	68
Figura 47 Mpost con $sd=1$ y $sm=0.1$	69
Figura 48 Desviación estándar de Mpost.....	69
Figura 49 Histograma de frecuencia para Mpost.....	70
Figura 50 Mpost con $sm=1$ y $sd=0.1$	71
Figura 51 Desviación estándar de Mpost.....	71
Figura 52 Histograma de Cpost	72
Figura 53 Mpost 2.....	73
Figura 54 Desviación estándar para Mpost 2.....	73
Figura 55 Histograma Cpost 2	74

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1 Estudios previos realizados en la zona de Pisayambo	7
Tabla 2 Modelo de velocidades de ondas P utilizando estaciones terrestres	58
Tabla 3 Velocidades de ondas P para diferentes profundidades	59
Tabla 4 modelo de lentitudes (Slowness) de ondas p	62

ÍNDICE DE ANEXOS

Anexo 1. Instalación y utilización de SAC	80
La generación de funciones en SAC	82
Crear gráficos en SAC	83
Encabezados en SAC	84
La combinación de archivos	85
Anexo 2 Cálculo de Mpost.....	89
Anexo 3. Teoría del Problema Inverso	92

RESUMEN

El objetivo de esta tesis es desarrollar un software de tomografía sísmica en dos dimensiones, con la finalidad de aplicarlo a los eventos generados en el clúster de Pisayambo. Empezando con una introducción sobre el principio de tiempo mínimo de Fermat, el cual permite resolver el problema directo, el trazado de rayos, así como el problema inverso de la tomografía.

Para resolver el problema inverso se utilizó la solución probabilista de Tarantola-Valette el que se implementó en Matlab. Se realizaron pruebas del software con modelos sintéticos para controlar su fiabilidad. Finalmente se aplica el software a eventos sísmicos producidos en el clúster de Pisayambo. Para este estudio se escogió esta región por ser una de las más activas sísmicamente del Ecuador.

Finalmente se obtuvo un primer modelo de velocidades que representa la estructura interna de la litosfera de la región de Pisayambo.

Palabras clave: tomografía sísmica, Pisayambo, problema Inverso

ABSTRACT

The goal of this thesis is to develop a seismic tomography software on two dimensions, with the purpose to apply it to the events generated into Pisayambo's cluster.

Starting with introduction about Fermat's minimum time principle, that permits resolve forward problem, tracing ray, all well as tomography inverse problem.

To solve inverse problem was used the probabilistic solution of Tarantola-Valette that was developed using Matlab. It was performed testing software with synthetic models for the purpose of controlling its reliability. Finally the software was applied to seismic events generated into Pisayambo's cluster. This was chosen for being one of the most active regions in of Ecuador.

Finally a first velocity model representing the internal structure of the lithosphere of the region Pisayambo was obtained.

Key words: seismic tomography, Pisayambo, Inverse Problem.

INTRODUCCIÓN

La tomografía sísmica se compone de dos partes el problema directo y el problema inverso. Aquí el principio de tiempo mínimo de Fermat permite resolver el problema directo y el problema inverso.

Para la resolución del problema inverso se utilizó la solución probabilista de Tarantola-Valette, con la que se obtuvo un modelo de lentitudes en dos dimensiones, correspondientes a la tomografía de la región del Pisayambo.

Finalmente se implementara un algoritmo en Matlab con el he se obtiene la imagen tomográfica de la región del Pisayambo.

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Introducción

En el capítulo presente se analiza el problema a resolver, con lo cual se planteara la tesis e hipótesis del problema.

En base a lo anterior mencionado, se plantearan los objetivos, alcances, y metodología para la investigación.

1.2 Problema a resolver

El centro de Investigación en Modelamiento Ambiental de la Universidad Politécnica Salesiana lleva a cabo varias líneas de investigación dentro de las cuales figuran el análisis de señales sísmicas, enfocando su investigación en el clúster sísmico del Pisayambo debido a que el según informes del Instituto Geofísico de la Escuela Politécnica Nacional sigue siendo hasta el momento uno de los mayores generadores de actividad sísmica dentro de la región del Ecuador(Instituto Geofísico, 2010) lo que implicaría un potencial peligro sísmico para la región central ecuatoriana.

Es por ello que es necesario utilizar nuevas técnicas dentro de las cuales se halla tomografía sísmica.

1.3 Hipótesis

El Centro de Investigación en Modelamiento Ambiental de la Universidad Politécnica Salesiana (CIMA), es una institución científica dedicada al modelamiento matemático para el estudio del ambiente, ha venido desarrollando en los últimos años estudios en la región del Pisayambo, para ello se vale del análisis de las señales sísmicas provenientes de esta región, con el objetivo de fortalecer esta línea de investigación este trabajo busca obtener una modelo de velocidades para la corteza terrestre de esta región, lo que se conoce como tomografía sísmica.

Para realizar este estudio es necesario tratar matemáticamente la información recolectada por las estaciones sísmicas del Instituto Geofísico de la Escuela Politécnica Nacional (IG-EPN), para esta investigación se trabajara con los datos el

Pisayambo. Así mediante la aplicación una nueva técnica de inversión de datos basada en la teoría del problema inverso se pretende obtener una imagen tomográfica para la región del Pisayambo.

Si bien para este trabajo el problema inverso tiene aplicaciones a la geofísica, también podrían desarrollarse aplicaciones en el campo de la ingeniería, ajuste de modelos, imagen médica (Barzola, Vargas, & Pastorino, 2007), Análisis numérico, que están dentro de los conocimientos físicos y matemáticos adquiridas por un estudiante de ingeniería electrónica.

En lo referente al desarrollo de esta investigación queda abierta a cambios y modificaciones en respuesta a las complejidades que se presenten durante su desarrolló.

1.4 Objetivos

A continuación, se describen el objetivo general y los objetivos específicos del proyecto.

1.4.1 Objetivo general

Realizar la visualización de señales mediante SAC (Seismic Analysis Code) y conocer las bases de la tomografía sísmica.

1.4.2 Objetivos específicos

Instalar en Linux el programa SAC (Seismic Analysis Code) en un terminal del laboratorio del Centro de Investigación en Modelamiento Ambiental CIMA.

Obtener gráficos de las señales sísmicas (sismograma) del Clúster sísmico del Pisayambo utilizando SAC.

Implementar un software de tomografía sísmica en Matlab y aplicarlos a los datos de la región del Pisayambo.

1.5 Justificación

La región del Pisayambo es uno de los mayores generadores de actividad sísmica alrededor del 20% (Instituto Geofísico, 2010)según reportes de Instituto Geofísico de la Escuela Politécnica Nacional (IG-EPN),por lo que representa un potencial riesgo sísmico para las regiones de la sierra central es por ello que el CIMA se considera pertinente realizar un estudio sobre esta región, utilizando una novedosa técnica de estudio como es la tomografía sísmica, con la finalidad de obtener un

modelo de velocidades correspondientes a la región de clúster sísmico del Pisayambo.

1.6 Alcances

El proyecto tomografía sísmica de rayos usando bloques en Matlab para el centro de investigación en Modelamiento Ambiental realizara lo siguiente:

Aplicación de la tomografía de rayos sísmicos utilizando los rayos provenientes del clúster Pisayambo.

Instalación de SAC (Seismic Analysis Code) en un equipo del Centro de Investigación en Modelamiento Ambiental.

Resolución del Problema Inverso de la tomografía sísmica del Clúster Pisayambo.

Este proyecto no realiza lo siguiente:

Resolución del Problema Directo, el trazado de rayos sísmicos a las señales del Pisayambo.

1.7 Metodología de la investigación

A continuación se detallarán los pasos planteados para la realización del presente proyecto comenzando por la investigación bibliográfica, seguida del desarrollo software, finalmente la aplicación a los rayos sísmicos provenientes del Pisayambo y documentación del proyecto.

1.8 Investigación bibliográfica

Se investigaran lo referente a teoría del problema inverso aplicando mínimos cuadrados para su posterior aplicación a la tomografía sísmica.

Se realizara una investigación sobre cómo aplicar el modelo matemático de Tomografía de rayos X usando bloques a los rayos sísmicos procedentes del Pisayambo.

Se investigara el modelo actual de velocidades de ondas P para la región ecuatoriana, para utilizarlo en la información a priori en la resolución del Problema inverso.

1.9 Desarrollo de software

Se implantará un matemático que permita resolver el problema inverso de la tomografía, utilizando algoritmo de Tarantola-Valette.

Se diseñará un software utilizando Matlab para la obtención de un modelo de lentitudes correspondiente a la tomografía de la región del Pisayambo.

Se instalará SAC (Seismic Analysis Code) en una computadora del Centro de Investigación en Modelamiento Ambiental.

1.10 Documentación

Se escribirá el texto de la monografía correspondiente al presente proyecto de investigación.

CAPÍTULO 2

ESTADO DEL ARTE

2.1 Introducción

En el presente capítulo se aborda el estado del arte sobre la región del Pisayambo, los fundamentos matemáticos, las bases de la tomografía sísmica y conceptos básicos sobre la teoría del problema inverso.

2.2 El clúster sísmico de Pisayambo

La región de estudio se encuentra ubicada entre los $-0,9^{\circ}$ y $-1,3^{\circ}$ de latitud sur y entre los 78° y $78,5^{\circ}$ de longitud occidental. Se denomina clúster ya que existe un conjunto numeroso de sismos que se registran de manera constante en la zona. Se tomó en consideración la región de Pisayambo ya que según datos del Instituto Geofísico de la Escuela Politécnica Nacional aporta con el 40% de la actividad total registrada en la red del Instituto Geofísico de la Escuela Politécnica Nacional (Araujo, et al, 2009).

Figura 1. Laguna de Pisayambo que se encuentra el sitio geográfico donde se localiza el clúster sísmico del mismo nombre



Fuente: <http://lagranja.ups.edu.ec/>, 2010

2.3 Estudios Previos

A continuación se muestran los estudios realizados sobre el clúster sísmico de Pisayambo.

Tabla 1 Estudios previos realizados en la zona de Pisayambo

AUTORES	TÍTULO DE LA INVESTIGACIÓN	INSTITUCIÓN	AÑO
Liliana Troncoso	Sismicidad del enjambre sísmico de Pisayambo	I.G.	2009
Sebastián Araujo, Liliana Troncoso, Mario Ruiz	Relocalización por dobles diferencias del clúster sísmico de Pisayambo	I.G. C.I.M.A.	2009
Chatelain Aguilar	The Pisayambo, Ecuador, seismicity nest: Towards the birth of a volcano?	Orstom.	1996
Alexandra Alvarado	Origen de las fallas geológicas	I.G.	2009
Esteban Arrieta	Tratamiento de las señales y construcción de un catálogo sísmico con eventos del clúster Pisayambo	Universidad Politécnica Salesiana. C.I.M.A	2011
Sebastián Araujo	Resolución del problema directo de tomografía sísmica: Trazado de rayos sísmicos en el clúster de Pisayambo	C.I.M.A	2012

Elaborado por: Byron Tarabata

2.4 Origen de los sismos en el clúster sísmico Pisayambo

El Instituto Geofísico de la Escuela Politécnica Nacional ha llegado a determinar el origen de un sismo está relacionado principalmente con tres tipos de actividades físicas.

- Sismos originados por placas tectónicas.
- Sismos de origen volcánico.
- Sismos originados por fallas geológicas

Según Alvarado la principal fuente de producción de sismos para la región del Pisayambo es la presencia de fallas geológicas (Arrieta, 2011, pág. 19)

Sarria afirma que una falla es una grieta dentro de la corteza terrestre con longitud variable, que normalmente se relaciona con desplazamientos horizontales, verticales o ambos. En una falla activa, las piezas de la corteza terrestre a lo largo de la falla, se mueven con el devenir del tiempo.

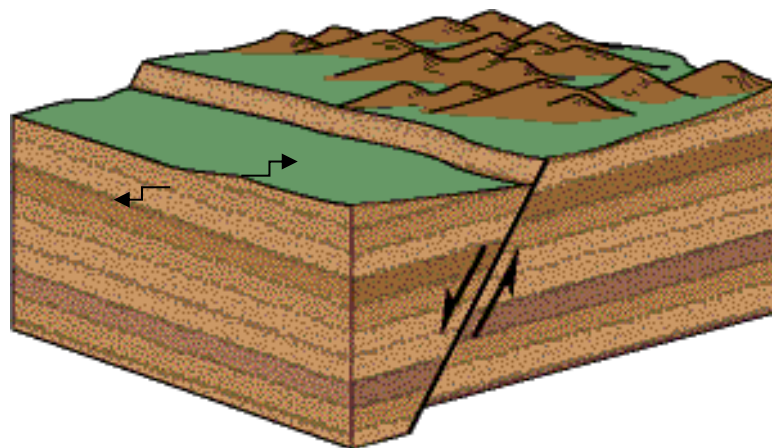
Las fallas inactivas son aquellas en las que ya se detuvo el movimiento a través de ellas y ya no se desplazan. El tipo de movimiento a lo largo de una falla depende del tipo de falla, las que se describen a continuación (Arrieta, 2011, pág. 19)

2.5 Fallas normales

Las fallas normales se generan en áreas donde las rocas se están separando por lo que la corteza rocosa de un área específica puede ocupar más espacio.

Las rocas de un lado en una falla normal se hunden con respecto a las rocas del otro lado de la falla (fig. 2). Las fallas normales no crean salientes rocosos (Keller & Blodgett, 2006).

Figura 2 Falla Normal



Fuente: Google Images, Tipos de fallas geológicas, 2011.

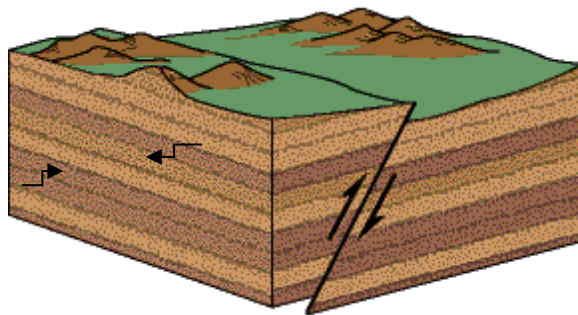
2.6 Fallas inversas

Keller y Blodgett sostienen que las fallas inversas ocurren cuando las rocas se comprimen unas contra otras, de manera que la corteza rocosa de un área ocupara menos espacio.

Las rocas de un lado de la falla ascienden con respecto a las rocas del otro lado (fig. 3). En una falla inversa, el área expuesta de la falla es frecuentemente un saliente.

Existen también fallas de empuje que son un tipo especial de falla inversa y ocurren cuando el ángulo de la falla es muy pequeño (Arrieta, 2011, pág. 20)

Figura 3 Falla Inversa



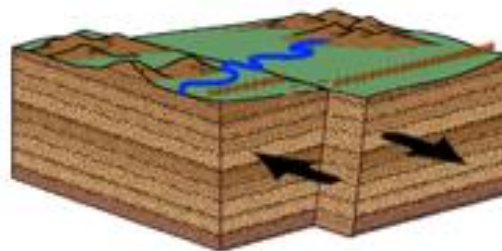
Fuente: Google Images, Tipos de fallas geológicas, 2011.

2.7 Falla de transformación (de desgarre).

Se generan cuando el movimiento a lo largo de la grieta de la falla es horizontal, el bloque de roca a un lado de la falla se mueve en una dirección opuesta, al movimiento del bloque de roca del otro lado de la falla (fig. 4).

Este tipo de fallas no producen precipicios o fallas escarpadas, porque los bloques de roca no se mueven hacia arriba o abajo en relación al otro (Keller & Blodgett, 2006).

Figura 4 Falla de desgarre

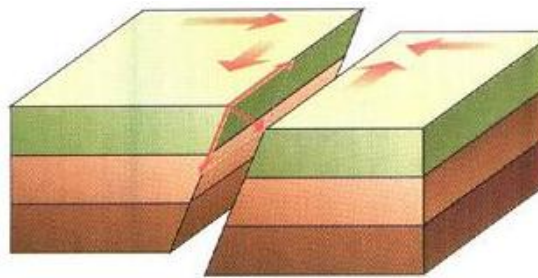


Fuente: Google Images, Tipos de fallas geológicas, 2011.

2.8 Falla mixta.

Sarria plantea que el movimiento a lo largo de una falla no ocurre de una sola manera. Una falla puede ser la combinación de diferentes tipos falla como una de transformación y una normal o inversa, etc. (fig. 5). Además con frecuencia las fallas no son sólo una grieta en la roca, sino una variedad de fracturas originados por movimientos similares de la corteza terrestre. A estas agrupaciones de fallas se les conoce como zonas de fallas (Arrieta, 2011, pág. 21).

Figura 5 Falla Mixta



Fuente: Google Images, Tipos de fallas geológicas, 2011.

En base a los estudios realizados sobre Pisayambo, anteriormente mencionados, se ha logrado determinar que el origen de los sismos en Pisayambo está relacionado con la presencia de fallas geológicas, sin embargo no se ha podido determinar a qué tipo de falla (normales, inversas, de desgarre, mixtas) pertenecen los sismos en el sector (Arrieta, 2011, pág. 21).

2.9 Tomografía

El término Tomografía está compuesto de dos partes, ambas con raíz griega: la primera “tomos” significa corte, y la segunda “graphé” representación gráfica. Juntando estas dos etimologías “Tomografía” quiere decir “técnica para la obtención de la imagen de una sección plana de un objeto tridimensional” (Blanco, 1995).

2.10 Tomografía sísmica

La tomografía sísmica permite determinar la estructura interna de la tierra valiéndose de la información que las ondas sísmicas llevan, cuando se genera en un terremoto o una explosión, como en toda onda su velocidad varían dependiendo de la propiedades del medio por cual transita, estas ondas se propagan como rayos en todas las direcciones, atravesando la corteza terrestre hasta ser registrados en una

estación sísmica. Así mediante el estudio de la trayectoria de sus integrales de línea se puede obtener la distribución de una magnitud física que caracterice el medio por el cual atraviesa.

La tomografía sísmica se compone de dos partes el primero que consiste en el trazado de los rayos sísmicos (problema directo) y el problema inverso que es la obtención de un modelo de lentitudes (slowness) ambos basados en la minimización de los residuos de tiempo entre los modelos teóricos y datos experimentales (Araujo, 2010).

A continuación se explica el desarrollo matemático para la obtención de los rayos sísmicos para la región del Pisayambo así como los aspectos fundamentales de la teoría del problema inverso.

2.11 Principio de Fermat

Las leyes de reflexión, refracción, inclusive la manera en que se propaga la luz pueden estudiarse mediante el principio de Fermat, este principio tiene aplicaciones más allá de la óptica, como es el caso también se aplica para el estudio de la propagación de los rayos sísmicos. El principio de tiempo mínimo de Fermat establece que de todas las trayectorias posibles que puede tomar la luz para ir desde un punto a otro, siempre será la trayectoria que requiera el tiempo más cortó, es decir que de todos los caminos que puede tomar la luz solo tendrá alguna realidad física aquella en la que el tiempo sea el mínimo (Hecht, 2000).

El principio del tiempo mínimo es un principio variacional, una adaptación del principio de mínima acción aplicado a las ondas. Un principio variacional expresa que un fenómeno en la naturaleza ocurre de la forma más óptima posible.

Una onda independiente de su naturaleza, electromagnética o sísmica, es considerada plana onda plana si en un instante dado su amplitud y su dirección de propagación permanecen constantes. Esto no es necesariamente cierto para todas las ondas, pero se puede aproximar pequeñas regiones del espacio donde esto se cumpla, como para este caso en este caso.

Así, se puede delimitar una superficie de la onda donde todos los puntos estén en fase para un instante dado, donde forman un conjunto de planos cada uno perpendicular a la dirección de propagación.

Finalmente, se puede unir todos estos puntos de dirección y obtener lo que se conoce como un rayo (trayectoria de propagación de la onda). El ulterior análisis no es exclusivo para los rayos de naturaleza electromagnética sino, que también se aplica a los rayos sísmicos (Araujo, 2010).

El principio de mínima acción en la mecánica se escribe:

Ecuación 1.
$$\delta \int L dt = 0$$

L es el lagrangiano de la partícula, el lagrangiano puede definirse como la energía cinética del sistema menos la energía potencial del sistema.

El diferencial de dicha integral δ implica que cualquier perturbación infinitesimal en este proceso de transformación energética dentro del sistema es nula.

La ecuación 1 no es directamente aplicable para los rayos de naturaleza sísmica. Ya que según (Araujo, 2010).

Ecuación 2.
$$L = p \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} - \mathcal{H}$$

Donde \mathcal{H} es el hamiltoniano y se define la suma de la energía cinética más la energía potencial. Para un rayo el hamiltoniano se reemplaza por la frecuencia ω y la cantidad de movimiento p por el vector de onda k , ($p = \hbar k$) con lo que se obtiene la siguiente expresión (Araujo, 2010).

Ecuación 3.
$$L = \hbar k \cdot \frac{d\omega}{dk} - \omega$$

Si se toma en cuenta que la velocidad angular está el producto de la velocidad de onda por el vector de onda, $\omega = ck$ se tiene:

Donde ω es la velocidad angular, y c es la velocidad de la onda.

Ecuación 4.
$$L = \hbar k \cdot c - \omega$$
$$L = \omega - \omega = 0$$

Con lo que se llegaría a la errónea conclusión de que el lagrangiano para un rayo sísmico es igual a cero.

Para solucionar este problema se puede escribir el principio de mínima acción en forma del principio de Maupertius para la acción S de un sistema con energía constante.

Ecuación 5.
$$\delta S = \delta \int p \cdot dl = 0$$

La integral se realiza a través de toda la trayectoria dl de la partícula.

Para un rayo, la acción S se corresponde con una función de onda ψ .

Ecuación 6.
$$\delta \psi = \delta \int k \cdot dl = 0$$

Con lo que se llega a la ecuación 6 conocida como el principio de Fermat (Araujo,2010).

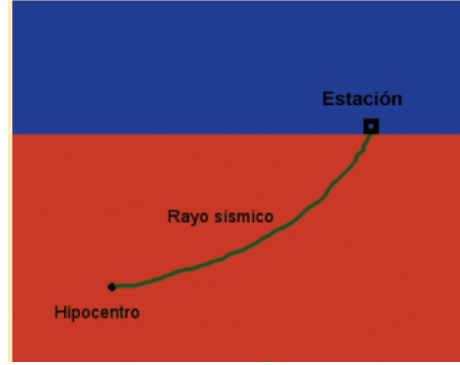
2.12 Aplicación a los rayos sísmicos

Para saber si se puede aplicar el principio de Fermat a las ondas sísmicas, primero se debe saber si pueden considerarse ondas planas, es decir si existe un instante en que la onda tiene fase constante y forma un conjunto de planos perpendiculares a la dirección de propagación (Hecht,2000), esto no es necesariamente verdadero para todas las ondas, pero siempre se pueden definir pequeñas regiones del espacio donde esto se cumple (Araujo, 2010).

Un rayo sísmico entonces puede propagarse entonces desde el hipocentro¹ siendo registrado en la superficie terrestre por una estación sísmica como se esquematiza en la Figura 6:

¹hipocentro¹: punto interior de la litosfera donde se originó el sismo

Figura 6 Un sismo que se genera en el hipocentro genera una onda sísmica que si se detecta a suficiente distancia puede ser considerada como una onda plana.



Fuente: <http://lagranja.ups.edu.ec>, 2010

Se puede así pasar a utilizar la ecuación 6 y considerar un rayo de frecuencia ω constante que sigue la trayectoria:

Ecuación 7.

$$\delta \int_s \frac{\omega}{c r} ds = 0$$

$$\omega \delta \int_s \frac{1}{c r} ds = 0$$

Entonces se tiene:

$$\delta \int_s \frac{1}{c r} ds = 0 \quad (8)$$

La ecuación 8 se conoce como el principio de Fermat para los rayos sísmicos. Con la finalidad de obtener las desviaciones de tiempo observado respecto al calculado se perturbará de manera infinitesimalmente la velocidad de propagación del rayo y se aproximará la variación de la ecuación 8 por:

Ecuación 9.

$$\int_s \frac{1}{c r + \delta c r} ds - \int_{s_0} \frac{1}{c r} ds = 0$$

Si se acepta el principio de Fermat, los rayos s y s_0 son iguales:

Ecuación 10.

$$\int_s \left(\frac{1}{c + \delta c} - \frac{1}{c} \right) ds = 0$$

Ecuación 11

$$\int_s \frac{c - (c + \delta c)}{(c + \delta c)c} ds = 0$$

Si se considera la aproximación dada por:

$$\text{Ecuación 12} \quad c + \delta c \approx c$$

Se obtiene la expresión.

Ecuación 13

$$\int_s -\frac{\delta c}{c^2} ds = 0$$

Esta ecuación expresa que si se perturba infinitesimalmente la velocidad de propagación del rayo c , la trayectoria del rayo será la misma, o de manera recíproca, si se consideran dos rayos que están infinitamente próximos sus velocidades de propagación seguirán siendo las mismas.

Ahora lo que se requiere es el tiempo de propagación de un rayo sísmico. Este dato es la magnitud que miden los sismómetros, esto se puede entender como una integral de línea del espacio recorrido dividido para la velocidad del rayo sísmico:

Ecuación 14.

$$t = \int_s \frac{ds}{c}$$

Por otro lado, se puede haber calculado el tiempo de propagación del sismo utilizando un modelo:

Ecuación 15

$$t_0 = \int_{s_0} \frac{ds}{c_0}$$

De la forma de las ecuaciones 14 y 15 se puede observar que el principio de Fermat, ecuación 8, es un variacional sobre los tiempos de propagación de los rayos.

A la diferencia entre el tiempo medido y el tiempo calculado se denominara residuo:

Ecuación 16.
$$r = t - t_0$$

Ahora viene la aproximación clave que permite llegar a la tomografía sísmica (Nolet, 1978). Se supondrá que el error que se comete al calcular el tiempo de propagación es un infinitésimo respecto al tiempo medido. Esto quiere decir que r tiende en límite al diferencial de tiempo. Con ello se puede igualar el principio variacional de la ecuación 8 al residuo.

Ecuación 17.

$$\delta t = \delta \int_s \frac{1}{c \ r} ds$$

Si se reemplaza la variación obtenida en la ecuación 13 se llega a:

Ecuación 18.

$$\delta t = - \int_s \frac{\delta c}{c^2} ds$$

La ecuación 18 es el fundamento de la tomografía sísmica. También se puede obtener fácilmente 18 si se observa que:

Ecuación 19.

$$t - t_0 = \int_s \frac{1}{c \ r} ds - \int_{s_0} \frac{1}{c_0 \ r} ds$$

Las velocidades de aproximación difieren en un infinitésimo $c = c_0 + \delta c$.

De ahí se puede retomar la ecuación 13 y arribar nuevamente a la ecuación 18.

Para terminar, se escribirá la ecuación fundamental de la tomografía sísmica en forma diferencial. Para ello simplemente se toma la derivada parcial del tiempo de propagación del rayo respecto a la velocidad (Araujo, 2010).

Ecuación 20.

$$\frac{\partial t}{\partial c} = \frac{\partial}{\partial c} \frac{ds}{c}$$

Con esto lo que se pretende determinar es como varia el tiempo de propagación del rayo sísmico en función de la velocidad del medio por el cual transita.

Se pueden intercambiar los operadores derivada en la integral:

Ecuación 21

$$\frac{\partial t}{\partial c} = \frac{\partial}{\partial c} \frac{1}{c} ds$$

Si se efectúa la derivada se llega al valor de la integral:

Ecuación 22

$$\frac{ds}{c^2} = - \frac{\partial t}{\partial c}$$

Si se reemplaza en la ecuación 18 finalmente se obtiene la ecuación para cualquier proceso de tomografía.

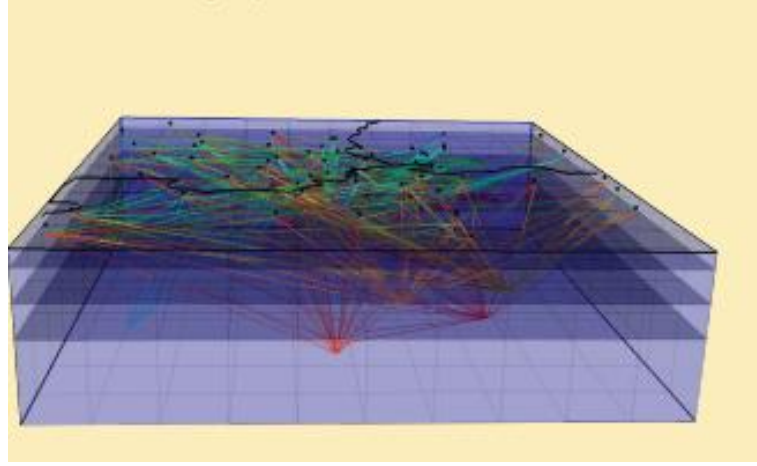
Ecuación 23

$$\delta t = \frac{\partial t}{\partial c} \delta c$$

La ecuación 23 resuelve los dos problemas en la tomografía, el problema directo que consiste en calcular el tiempo de propagación conocida la velocidad del medio, lo que implica trazar el rayo sísmico desde el hipocentro hasta la estación sísmica.

Se puede calcular el tiempo de propagación de rayo aun sin conocer la verdadera trayectoria del mismo, mediante el principio de Fermat. En primera aproximación, el tiempo de propagación es insensible a las perturbaciones en el camino del rayo (Shearer, 2009). Es por el principio de Fermat que se puede aproximar los rayos por líneas rectas como se observa en la figura 7 (Araujo, 2010).

Figura 7 Rayos sísmicos rectilíneos trazados desde el hipocentro hasta las estaciones receptoras en la superficie.



Fuente: <http://renass.u-strasbg.fr>

El segundo problema, el problema inverso es más complicado pues, se trata de calcular la velocidad del medio conocido los tiempos de propagación, es el problema inverso.

La forma aceptada de atacar el problema inverso consiste en tener no sólo un rayo sino i eventos registrados en k estaciones. Entonces:

$$\text{Ecuación 24} \quad t_{obs\ i}^k - t_i^k = \frac{\partial t_i^k}{\partial m} \delta m_i$$

Donde $t_{obs\ i}^k - t_i^k$ es la diferencia entre el tiempo observado y el calculado, para el i -ésima evento, en la k -ésima estación, $\frac{\partial t_i^k}{\partial m}$ es la variación del tiempo calculado respecto al modelo de velocidades, δm_i es la perturbación del modelo de velocidades.

Las diferencias, entre los tiempos observados y los tiempos calculados se relacionan con la perturbación modelo de velocidades δm_i

$$\text{Ecuación 25} \quad r_i^k = \frac{\partial t_i^k}{\partial m} \delta m_i$$

De manera matricial la ecuación 25 se escribe:

$$\text{Ecuación 26} \quad r = G \delta m$$

Donde r es la diferencia entre el tiempo medido y el tiempo calculado (Araujo, 2010).

2.13 Teoría del problema inverso

En ciencias e ingeniería con frecuencia se desea relacionar parámetros físicos que caracterizan un modelo, m , con un conjunto de datos d obtenidos en un experimento. Normalmente se asume que se conoce muy bien la física del experimento, por lo que un funcional G puede especificar la relación entre los parámetros del modelo m y los datos d de manera que (Aster, Borchers , & Thurber , 2012, pág. 1).

$$\text{Ecuación 27} \quad d = G \ m$$

El procedimiento para estudiar un sistema físico como en este caso la estructura de la tierra por medio del problema inverso se puede definir en los siguientes tres pasos.

Parametrización del sistema: descubrir un grupo mínimo de parámetros del modelo cuyos valores caractericen completamente el sistema.

Problema directo: descubrir las leyes físicas que permitan, para un modelo dado, realizar predicciones sobre los resultados de las mediciones de los parámetros observables.

Problema inverso: usar los resultados actuales de algunas mediciones en los parámetros observables para inferir los valores actuales de los parámetros del modelo.

Por ejemplo para un movimiento rectilíneo uniformemente variado (MRUV) los datos d son las mediciones de la posición a un tiempo dado, lo que se desea es hallar el modelo, m , con los siguientes parámetros, posición inicial (m_1), velocidad inicial (m_2), y la aceleración de la gravedad (m_3). Para este experimento el funcional G que relaciona los parámetros con los datos, está dado por la función cuadrática.

$$y \ t = m_1 + m_2 t \pm \frac{1}{2} m_3 t^2 \quad (28)$$

Que describe la posición de una partícula con MRUV.

Entonces hallar la posición para y para cualquier tiempo t sería el problema directo, para este ejemplo, el problema inverso consistiría en hallar m en función de los datos del experimento d .

Según Araujo es pertinente una aclaración en lo concerniente a la nomenclatura del problema inverso. Por ejemplo en la localización de los hipocentros de un sismo, para este caso las mediciones de los tiempos de arribo de los sismos para cada estación serían datos y deberían ir en el lado izquierdo de la ecuación 27. La ubicación de las estaciones sísmicas son parámetros de la teoría y por ende irían en el lado derecho de la ecuación. Empero las coordenadas de las estaciones son producto de una medición hecha sobre el lugar y por ende no difiere del proceso de medición para obtener un dato. Solo si se tuviese una absoluta certeza sobre las posiciones de las estaciones se consideraría como un parámetro que no está sujeto al proceso de medida. Pero lo que en realidad se tiene siempre es un conjunto de medidas de la posición con errores.

Otro problema que se debe tener en cuenta es que no se conoce perfectamente las leyes teóricas que relacionan los parámetros y que están representados por la funcional G . Esto se debe a que se dispone de teorías incompletas, o el hecho de que la teoría contiene parámetros aleatorios, o inclusive que se haya realizado una parametrización inadecuada de la teoría (Araujo, 2008).

Una manera más sencilla de definir el “problema directo” es: predecir los valores de los parámetros observables \mathbf{d} que corresponderían a un modelo dado \mathbf{m} .

Donde $\mathbf{d} = G \cdot \mathbf{m}$ es una notación simplificada que representa el conjunto de ecuaciones $d^i = g^i m^1, m^2, \dots$ ($i = 1, 2, \dots$).

Volviendo a la notación clásica, se dirá como los conjuntos de datos y parámetros se pueden expresar como vectores o de manera más genérica como matrices $[\mathbf{d}]$ y $[\mathbf{m}]$, se puede encontrar una respuesta a la relación funcional de la ecuación 27 al escribirla como un producto entre matrices (Aster, Borchers, & Thurber, 2012).

$$\text{Ecuación 29} \quad \mathbf{d} = G \mathbf{m}$$

Regresando al ejemplo anterior en el caso del MRUV aplicando la ecuación 28 el problema directo quedaría expresado de la siguiente manera:

$$\text{Ecuación 30} \quad \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & t_1 & -\frac{1}{2}t_1^2 \\ 1 & t_2 & -\frac{1}{2}t_2^2 \\ 1 & t_3 & -\frac{1}{2}t_3^2 \\ & & \\ 1 & t_n & -\frac{1}{2}t_n^2 \end{matrix} \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \\ m_n \end{matrix}$$

Ahora si lo que busca resolver es el problema inverso, obtener los parámetros en función de los datos, se debería encontrar:

$$\text{Ecuación 31} \quad [m] = G^{-1}[d]$$

Lo que significa que el problema se reduciría a invertir la matriz G de ahí el nombre de teoría del problema inverso. Empero la matriz G es raramente invertible y de hecho por lo general ni siquiera de una matriz cuadrada, por lo que la ecuación 31 se produce sólo en un caso muy especial de inversión.

La inversión a través del algebra lineal tiene ciertas limitaciones si se considerar que la teoría que puede expresarse como una relación determinista entre datos y parámetros ya que toda teoría está sujeta a errores. De lo contrario se podría tomarse como un conocimiento absoluto de la realidad, y eso no es lo que pretende la ciencia.

Por esta razón se vuelve necesario utilizar nuevas técnicas de inversión que permitan introducir errores de observación, errores en los aparatos de medición, errores de la teorización y otros tipos de incertidumbres, entre datos y parámetros lo que llevarán a tener una teoría probabilística (Araujo, 2008).

2.14 Mediciones e Información A Priori

De acuerdo con Tarantola todas las mediciones físicas están sujetas a incertidumbres. Por lo tanto el resultado de una medición no es simplemente un “valor observado” (o un conjunto de valores observados) ya que depende de la incertidumbre del instrumento de, sino un “estado de información” adquirido en algunos parámetros observables. Si $d = d^1, d^2, \dots, d^n$ representa un grupo de parámetros observables, el resultado de la medición

puede ser representado por una densidad de probabilidad $\rho_D(\mathbf{d})$ definida sobre un espacio de datos D (Tarantola, Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation, 2005).

Según la filosofía kantiana a priori es un saber obtenido antes e independiente de la experiencia, es decir no tienen su fundamento en la experiencia sino en el ejercicio de la razón pura, a diferencia de a posteriori, o saber obtenido de la experiencia y como resultado de la misma (Rosental & Iudin, 1973).

Para esta investigación la información a priori son los parámetros del modelo que independiente de las observaciones (mediciones $\mathbf{d}_{obs}, \mathbf{C}_{obs}$), y corresponde a la información que se tiene de antemano ($\mathbf{m}_{prior}, \mathbf{C}_{prior}$), antes de realizar la inversión de datos, mientras que la información a posteriori para esta tesis ($\mathbf{m}_{post}, \mathbf{C}_{post}$) corresponde a la información que se obtiene con la utilización de la información a priori.

2.15 Tomografía de rayos usando bloques

Una técnica ampliamente usada para obtener imágenes del interior del cuerpo humano es la tomografía de rayos X. Normalmente los rayos x son enviados desde una fuente puntual hasta un receptor que cuantifica el número de fotones no absorbidos por el medio, lo que da proporción a un indicador del coeficiente de atenuación a lo largo de la trayectoria del rayo. Repitiendo las mediciones para diferentes trayectorias de los rayos, con un correcto muestreo del medio, la estructura bidimensional del coeficiente de atenuación del medio puede ser inferido, obteniendo una imagen del medio, la trayectoria de los rayos X a través de un cuerpo puede asimilarse a una línea recta con excelente aproximación.

Para el desarrollo de esta tesis se utilizó un modelo simplificado de tomografía de rayos X donde se caracteriza un medio de 2 dimensiones 2D por un parámetro $m(x, y)$ cuya dimensión física es el inverso de la longitud cm^{-1} .

El rayo R^i se materializa en el medio mediante la utilización de una fuente y un receptor con los cuales se puede realizar mediciones del parámetro observable (Tarantola, 2007).

Ecuación 32

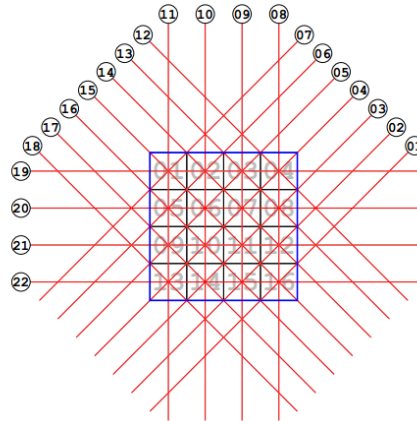
$$d^i = \int_a^b \frac{d\ell^i}{m(x,y)} = \int_a^b g(x,\varepsilon) m(\varepsilon) d\varepsilon$$

Donde $d\ell^i = g(x,\varepsilon)$ representa la longitud a lo largo de la i -ésima trayectoria

Donde $m(x,y) = m(\varepsilon)$ son los parámetros del modelo que caracterizan el medio para este caso es el inverso de la longitud, R^i Denota el i -ésima trayectoria del rayo desde a hasta b , d^i Corresponde a la i -ésima medición.

Esto esquematiza en la siguiente figura.

Figura 8 . Geometría de “experimento de rayos X”.



Fuente: <http://www.ipgp.fr>

La ecuación 32 corresponde a un tipo especial de ecuaciones llamada ecuación de Fredholm este tipo de ecuaciones tiene la forma.

Ecuación 33

$$d(x) = \int_a^b g(x,t) m(t) dt$$

Donde $g(x,t)$ es una función conocida, llamada kernel de la ecuación y corresponde a la física que relaciona un modelo desconocido con los datos observados, $d(x)$ es una función conocida, típicamente representa a los datos observados, $m(t)$ es el modelo y corresponde a una función desconocida

Cuando los límites de integración son constantes y definidos corresponde a una ecuación Fredholm de primera clase.

En la práctica se desea resolver es $m \varepsilon$, para el caso de la tomografía corresponde a $m x, y$ que es el modelo que caracteriza un parámetro físico de la región donde se realiza la tomografía. Para facilitar la resolución de este tipo de ecuaciones es necesario discretizar la ecuación 33, para ello primero se asume que $d x$ es conocida y tiene un finito número de puntos

$x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_m$, entonces la ecuación se puede escribir de la siguiente manera.

Ecuación 34

$$d_i = d x_i = \int_a^b g(x_i, \varepsilon) m(\varepsilon) d\varepsilon \quad i = 1, 2, \dots, m$$

O de manera simplificada como:

Ecuación 35

$$d_i = \int_a^b g_i(x) m(x) dx \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Donde $g_i(x) = g(x_i, \varepsilon)$. Las funciones $g_i(x)$ se les denominan kernel de datos.

La ecuación 33 es aproximada por la regla del punto medio se tiene que.

Ecuación 36

$$d_i = \int_a^b g_i(x) m(x) dx \approx \sum_{j=1}^n g_i(x_j) m(x_j) \Delta x \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Si se deja

Ecuación 37

$$G_i^j = g_i(x_j) \Delta x \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, m \\ j = 1, 2, \dots, n \end{matrix}$$

Donde el subíndice i expresa el i -ésimo rayo, y el superíndice j representa el bloque por el cual atraviesa el rayo.

$$\text{Ecuación 37} \quad m_j = m(x_j) \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Entonces se divide la zona de tomografía en bloques numerados del 1 al 16 como se observa en la figura 8, así que en lugar de evaluar toda la función $m(x, y)$, con lo que ya es necesario solo evaluar en valores discretos

m^1, m^2, \dots, m^{16} con esta discretización la ecuación 34 queda expresada de la siguiente manera:

Ecuación 38

$$d_i = \sum_{j=1}^{i=16} G^j_i m^i$$

Donde G^j_i es la longitud del rayo j en el bloque i , para este ejemplo se utilizaran 22 rayos por lo que j va desde 1 hasta 22. La ecuación se expresa de manera más simplificada de la siguiente manera:

Ecuación 39 $d = G [m]$

Con la geometría de 16 bloques y 22 rayos la matriz representados en la figura 8. Es fácil ver la matriz G donde solo se indican los elementos que no son cero (Tarantola, 2007).

Ecuación 40

$$G = \begin{pmatrix} - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & \overline{a} & - & - & \overline{a} & \overline{a} \\ - & - & - & a & - & a & - & a & - & a & - & - & a & - & - & - \\ - & - & a & - & a & - & - & a & - & - & - & - & - & - & - & - \\ a & - & - & b & - & - & - & b & - & - & - & b & - & - & - & b \\ - & b & - & - & b & - & - & - & b & - & - & b & - & - & b & - \\ b & - & - & a & b & - & - & b & - & - & - & b & - & b & - & - \\ - & - & a & - & - & - & a & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ a & - & - & - & a & - & - & - & a & - & - & a & - & - & - & a \\ - & - & - & - & - & - & - & a & - & a & - & - & - & a & a & - \\ - & b & b & b & b & b & b & - & - & - & - & a & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & b & b & b & b & b & b & b & b & b \end{pmatrix}$$

Donde $a = \overline{2} \text{ cm}$ y $b = 1 \text{ cm}$.

A esta matriz le corresponde los valores de la distancia de cada rayo para cada uno de los bloques de la figura 8, por esa razón la matriz G tiene 16 filas y 22 columnas que representa a los 16 bloques del modelo y a los 22 rayos que los atraviesa, respectivamente los valores de la matriz G equivalen a la longitud de i -ésimo rayo en el i -ésimo bloque por ejemplo en la entrada $G_{1,16}$ equivale a $\overline{2}$ ya que como se observa en la figura 8 es la longitud del rayo 1 que atraviesa el bloque 16, y así para las demás entradas de la matriz G .

A continuación se implementa el código en Matlab.

Matriz G corresponde a la distancia de cada uno de los 22 rayos en cada uno de los 16 bloques:

```

%(*la matriz G en la relacion d= G m*)
%G = Table[0, {i, 1, 22}, {j, 1, 16}] crea una matriz de ceros de 22
16>
a=sqrt(2);% cm
b=1;%cm
% 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6
G=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 a;
    0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 a 0 0 a 0;
    0 0 0 0 0 0 0 a 0 0 a 0 0 a 0 0;
    0 0 0 a 0 0 a 0 0 a 0 0 a 0 0 0;
    0 0 a 0 0 a 0 0 a 0 0 0 0 0 0 0;
    0 a 0 0 a 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
    a 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 b 0 0 0 b 0 0 0 b 0 0 0 b;
    0 0 b 0 0 0 b 0 0 0 b 0 0 0 b 0;
    0 b 0 0 0 b 0 0 0 b 0 0 0 b 0 0;
    b 0 0 0 b 0 0 0 b 0 0 0 b 0 0 0;
    0 0 0 a 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
    0 0 a 0 0 0 0 a 0 0 0 0 0 0 0 0;
    0 a 0 0 0 0 a 0 0 0 0 a 0 0 0 0;
    a 0 0 0 0 a 0 0 0 0 a 0 0 0 0 a;
    0 0 0 0 a 0 0 0 0 a 0 0 0 0 a 0;
    0 0 0 0 0 0 0 0 a 0 0 0 0 a 0 0;
    0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 a 0 0 0;
    b b b b 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 b b b b 0 0 0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 0 0 b b b b 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 b b b b]

```

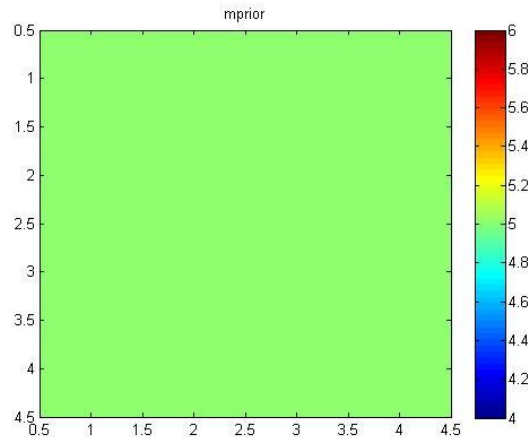
Dónde:

$a = \sqrt{2}$ corresponde a la longitud que de los rayos diagonales que atraviesan los bloques y $b=1$ es la longitud de los rayos que atraviesan rectos por los bloques.

Al ser un ejemplo explicativo se asume que la información a priori de modelo es para todos los bloques es:

$$\text{Ecuación 41 } m = 5\text{cm}^{-1} \mp 3\text{cm}^{-1}$$

Figura 9 Mprior



Elaborado por: Byron Tarabata

Como se desea usar resolución del problema inverso por mínimos cuadrados se pondrá esta información en un modelo a priori.

Ecuación 42 $\mathbf{m}_{prior} = 5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5 \text{ en } cm^{-1}$

Con una matriz de covarianza a priori.

Ecuación 43
$$C_{prior} = S_m^2 \mathbf{I}$$

Donde se interpreta el signo \pm de la ecuación 41 como el doble de la desviación derivación estándar de una distribución gaussiana (Tarantola, 2007).

La principal característica de esta distribución consiste en que modela numerosos fenómenos naturales en los que existen leyes de escala, un ejemplo concreto para la tomografía sísmica, la probabilidad de que ocurra un sismo pequeño es mucho mayor a la probabilidad de que ocurra un sismo grande, es decir que existe una escala, otra razón por la que se utiliza una distribución normal (gaussiana) por que supone sistemas que tienen poco rango de interacción. El uso de una distribución normal puede justificarse asumiendo que cada “observación” se obtiene como la suma de unas pocas causas independientes.

Ecuación 44
$$s_m = 1.5 \text{ cm}^{-1}$$

Con lo que se obtiene una matriz de covarianza diagonal, al ser este un ejemplo sintético, no se tiene información sobre otros modelos probabilísticos que representarían de mejor manera la información a priori.

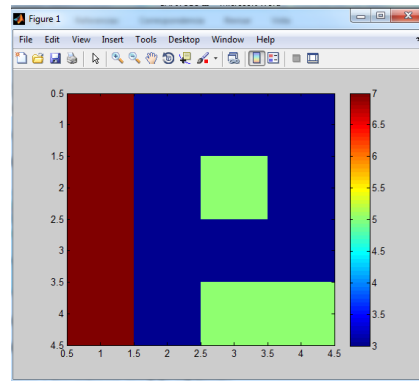
```
%a priori información
mprior=[5;5;5;5;5;5;5;5;5;5;5;5;5;5;5;5];16vertical
sm=1.5;
Cprior=sm^2*eye(16);
```

En este ejemplo se asume que se tiene una densidad de probabilidad a priori en el modelo espacial del tipo gaussiana, \mathbf{m}_{prior} y covarianza \mathbf{C}_{prior} .

Para establecer el ejercicio, se va a generar “datos artificiales”, para ser utilizados más tarde como “observaciones”. Para esto se crea un modelo arbitrario, con el cual se obtendrá los valores observados (Tarantola, 2007).

Ecuación 45 $\mathbf{m}_{true} = (7,3,3,3,7,3,5,3,7,3,3,7,3,5,5)^t$ en cm^{-1}

Figura 10 El “modelo verdadero” inventado para la generación artificial de algunos “datos”, para usarse después en el ejercicio de inversión



Elaborado por: Byron Tarabata

Se puede observar dos letras “IP” en este modelo. Esto es una contradicción a la presunción de que el modelo a priori verdadero es un modelo aleatorio de distribución gaussiana, esta contradicción es parte del ejercicio con el objetivo de poder tener un patrón fácilmente reconocible una vez que se haya realizado la inversión de datos.

Al ser un ejemplo artificial no los correspondientes a las mediciones de este experimento, para obtener estos datos de manera artificial relacionados con el modelo \mathbf{m}_{true} se implementan en el cálculo $\mathbf{d}_{true} = \mathbf{G}\mathbf{m}_{true}$. Estos valores verdaderos entonces se pueden convertir en valores pseudo-observados (casi observados) mediante la adición de errores (ruido), para ello se genera un valores aleatorios con desviación estándar de 0,15 (Tarantola ,2007).

Ecuación 46 $s_d = 0.15 \text{ cm}^{-1}$

Implementando en Matlab:

```
% para calcular el valor verdadero añadimos errores
%aleatorios gaussianos
%%%%un error aleatorio gaussiano
dtrue=G*mtrue;%%%%%%el vector mtrue lo mult por G
dobs=dtrue;
%%%GENERACION DE MODELOS ALEATORIOS
rand('seed',123);%
l1 = -1; l2 = 1;%l1 y l2 límites del generador aleatorio
rnd= erfinv(l1 + (l2-l1) * rand(1,1));%%%crea un %vector
%de 16 numero
%entre 1 y -1
sd=0.15;
dobs=dobs+sd*rnd
```

Con lo que se obtiene 22 valores.

Ecuación 47

$\mathbf{d}_{obs} = (6.93; 11.29; 12.88; 25.65; 18.28; 14.09; 10.05; 14.06; 15.90; 12.07;$
 $28.13; 4.20; 8.33; 15.51; 25.51; 21.09; 14.11; 9.99; 15.94; 17.89; 16.16; 20.08.$

Este vector de “valores observados” está acompañado por su respectivo error, representado en una matriz de covarianza diagonal de 22x22.

Ecuación 48 $C_{obs} = S_d^2 I$

Donde C_{obs} equivale a la matriz de errores de las observaciones, S_d es la de desviación estándar que describe las incertidumbres “experimentales”. El valor de S_d está expresado en la ecuación 46.

La solución del problema inverso por mínimos cuadrados está dada por una de las tres ecuaciones equivalentes.

Ecuación 49 $\mathbf{m}_{post} = (\mathbf{G}^t \mathbf{C}_{obs}^{-1} \mathbf{G} + \mathbf{C}_{prior}^{-1})^{-1} \mathbf{G}^t \mathbf{C}_{obs}^{-1} \mathbf{d}_{obs} + \mathbf{C}_{prior}^{-1} \mathbf{m}_{prior}$

$\mathbf{m}_{post} = \mathbf{m}_{prior} + (\mathbf{G}^t \mathbf{C}_{obs}^{-1} \mathbf{G} + \mathbf{C}_{prior}^{-1})^{-1} \mathbf{G}^t \mathbf{C}_{obs}^{-1} \mathbf{d}_{obs} - \mathbf{G} \mathbf{m}_{prior}$

$\mathbf{m}_{post} = \mathbf{m}_{prior} + \mathbf{C}_{prior} \mathbf{G}^t (\mathbf{G} \mathbf{C}_{prior} \mathbf{G}^t + \mathbf{C}_{obs})^{-1} \mathbf{d}_{obs} - \mathbf{G} \mathbf{m}_{prior}$

Con su respectivo error representada por la matriz covarianza dada por cualquiera de las siguientes expresiones equivalentes.

Ecuación 50
$$\mathbf{C}_{post} = (\mathbf{G}^t \mathbf{C}_{obs}^{-1} \mathbf{G} + \mathbf{C}_{prior}^{-1})^{-1}$$

$$\mathbf{C}_{post} = \mathbf{C}_{prior} - \mathbf{C}_{prior} \mathbf{G}^t (\mathbf{G} \mathbf{C}_{prior} \mathbf{G}^t + \mathbf{C}_{obs})^{-1} \mathbf{G} \mathbf{C}_{prior}$$

Para este ejemplo donde el tamaño de las matrices es relativamente (16x22) e no hay mucha diferencia computacional entre las expresiones equivalentes de la ecuación 49 y 50, así que para calcular \mathbf{m}_{post} se utilizará la expresión (Tarantola, 2007).

Ecuación 51
$$\mathbf{m}_{post} = (\mathbf{G}^t \mathbf{C}_{obs}^{-1} \mathbf{G} + \mathbf{C}_{prior}^{-1})^{-1} \mathbf{G}^t \mathbf{C}_{obs}^{-1} \mathbf{d}_{obs} + \mathbf{C}_{prior}^{-1} \mathbf{m}_{prior}$$

Y para \mathbf{C}_{post} la expresión

Ecuación 52
$$\mathbf{C}_{post} = (\mathbf{G}^t \mathbf{C}_{obs}^{-1} \mathbf{G} + \mathbf{C}_{prior}^{-1})^{-1}$$

Después de la introducción del vector \mathbf{d}_{obs} y la matriz \mathbf{C}_{obs}

```
dobsInt=[6.93;11.29;12.88;25.65;18.28;14.09;10.05;
14.06;15.90;12.07;28.13;4.20;8.33;15.51;25.51;21.09;14.11
;9.99;15.94;17.89;16.16;20.08];
```

```
Cobs=sd^2*eye(22);%%errores en las observaciones
```

Implementando en Matlab el cálculo de \mathbf{C}_{post} y \mathbf{m}_{post}

```
Cobs=sd^2*eye(22);%%errores en las observaciones
```

```
Cpost=inv(G'*inv(Cobs)*G +inv(Cprior));%%%%%%%%c obs%los
errores en las observaciones
```

```
mpost=Cpost*(G'*inv(Cobs)*dobs + inv(Cprior)*mprior)
```

Una vez realizado estos cálculos se procede a graficar el modelo \mathbf{m}_{post} resultado de la inversión de la información a priori, para ver cómo se reconstruye el modelo original para su visualización se utiliza el siguiente código.

```
%%%graficando
```

```
mpost1=reshape(mpost,malla,malla);%%redimensiona la
matriz
```

```
mpost1=mpost1';%esto es x q matlab las columnas
```

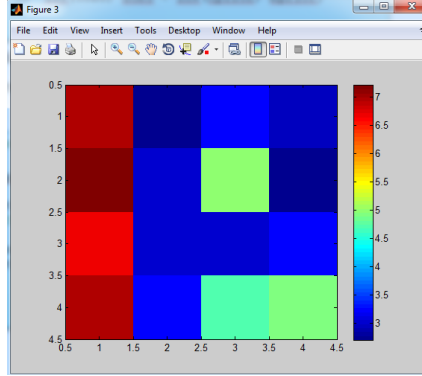
```
figure(3)
```

```
imagesc(mpost1)
```

```
colormap(jet)
```

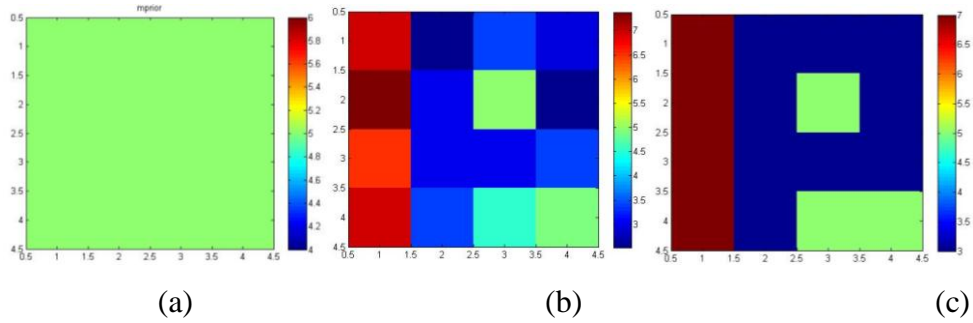
```
colorbar
```

Figura 11 Resultado de la resolución del problema inverso mediante mínimos cuadrados



Elaborado por: Byron Tarabata

Figura 12 m_{prior} , m_{post} , m_{true}



Elaborado por: Byron Tarabata

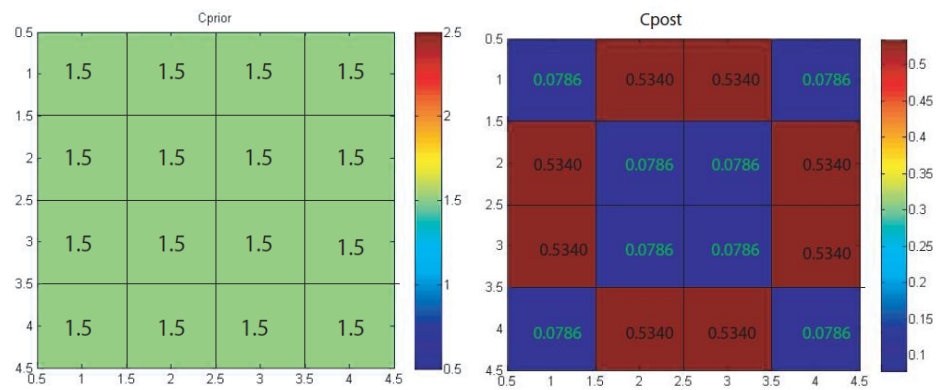
En esta figura se observa la diferencia entre el modelo inicial ((a) m_{prior}) y el modelo final ((b) m_{post}) donde con el modelo m_{prior} se llegó a un modelo muy próximo al modelo verdadero ((c) m_{true}) con el que se obtuvo de manera “artificial” los valores pseudo-observados. Lo que implica que aunque el modelo inicial no describa perfectamente la región donde se va a realizar la tomografía mediante la aplicación de la ecuación 51 se puede obtener un modelo más aproximado al modelo verdadero.

La desviación estándar correspondiente al modelo a posteriori m_{post} esta dada por la siguiente expresión

$$\text{Ecuación 53} \quad \sigma_i = \sqrt{\bar{C}_{ii}}$$

Es decir la raíz cuadrada de la diagonal de la matriz de covarianza C_{post} (Tarantola, 2007).

Figura 13 Cprior y Cpost



Elaborado por: Byron Tarabata

En esta ilustración se observa de manera gráfica y de manera numérica la diferencia de errores, ente el modelo inicial con un error de 1.5 y el modelo final donde se observa por ejemplo el error para los cuadrados azules es de 0.0786 y para los rojos es de 0.5340 con lo que se tiene un menor error que el inicial, esto se debe a que se trabajaron con datos ficticios, para el caso de la tomografía sísmica propiamente dicha, el modelo inicial su error son datos conocidos.

CAPÍTULO 3

DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN

En el siguiente capítulo se desarrolla la aplicación del problema inverso a los rayos provenientes del Pisayambo.

Para el desarrollo de este trabajo se utilizó modelo de tomografía de rayos usando bloques donde a diferencia de la tomografía médica la tomografía sísmica tiene principal característica y dificultad, que no se puede determinar a conveniencia la dirección de los rayos a través de la litosfera.

3.1 Aplicación a los rayos sísmicos del Pisayambo

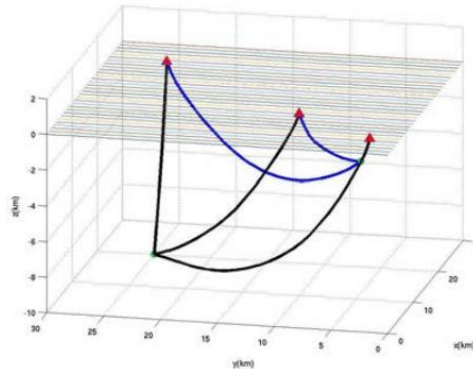
Una vez que se verificó que el modelo original se puede reconstruir mediante la utilización de la ecuación 51 se procede a aplicarlos a los rayos sísmicos del clúster Pisayambo.

3.2 Trazado de los rayos sísmicos en el clúster de Pisayambo

Para un caso real, los sismos se propagan en tres dimensiones. Para la obtención de los rayos se utilizó el principio de tiempo mínimo conocido como el principio de Fermat.

El algoritmo utilizado por (Araujo,2012) para calcular trayectoria del rayo busca el tiempo más pequeño de propagación entre el hipocentro y la estación a través del método de optimización simplex (Nishi, 2001), el que consiste en ir buscando la trayectoria más corta desde el hipocentro hasta la ubicación de la estación, teniendo como referencia un modelo de velocidades de la estructura de la interna de la tierra (Araujo, 2010)

Figura 14 Aplicación de FERMAT a un ejemplo sintético. Dos hipocentros, generan sendos sismos cuyos rayos se propagan hacia tres estaciones, situadas en la superficie.



Fuente: <http://lagranja.ups.edu.ec>

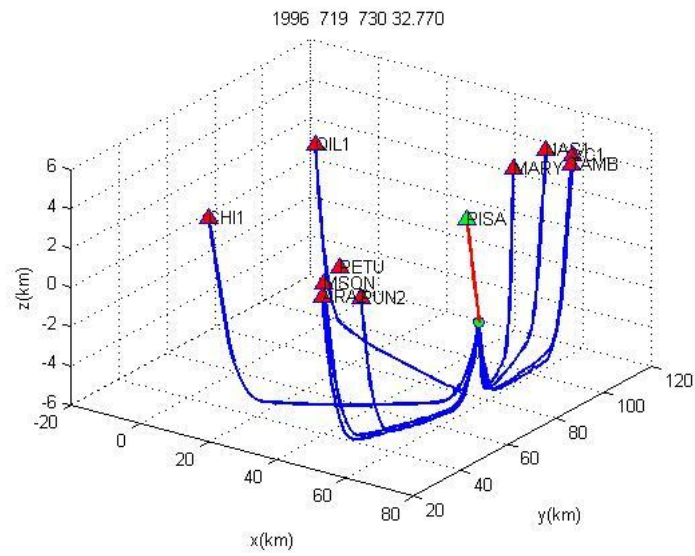
Los rayos sísmicos de la región del Pisayambo fueron obtenidos por (Araujo,2012) compilando el programa FERMAT

3.3 Aplicación de FERMAT a los datos de Pisayambo

Los sismos elegidos para trazar los rayos pertenecen a las estaciones del Instituto Geofísico de la Escuela Politécnica Nacional. De todos, para el trazado de los rayos se escogió 11 eventos, cada uno a dos kilómetros de profundidad del anterior, con la finalidad de observar cómo cambia la propagación de los rayos a distintas profundidades en busca de posibles anomalías (Araujo, 2012) .

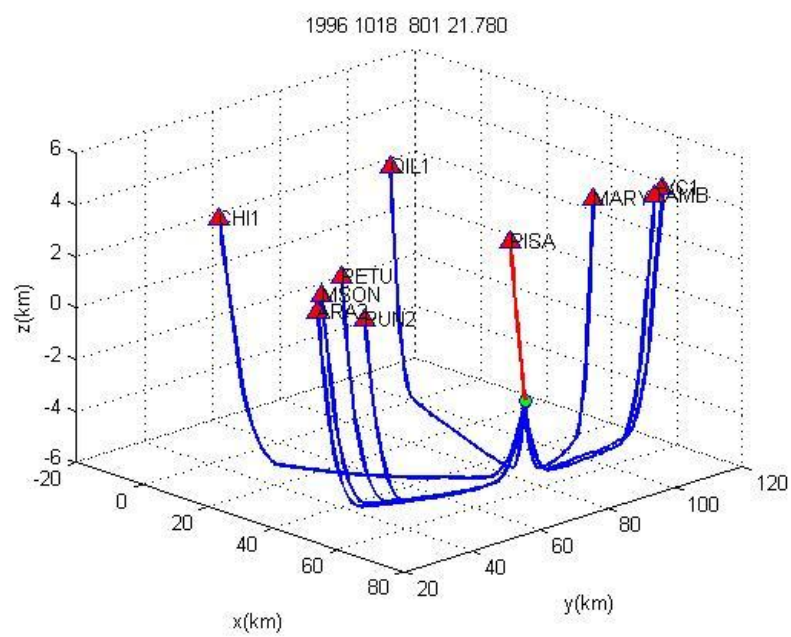
Se empieza con eventos superficiales a 0 kilómetros (figura 15) y a 2 kilómetros (figura 16) se puede constatar que el único rayo que tiene propagación directa desde el hipocentro hasta la estación es el que se traza hacia la estación del Pisayambo PISA.

Figura 15 Evento a 0,994 km de profundidad



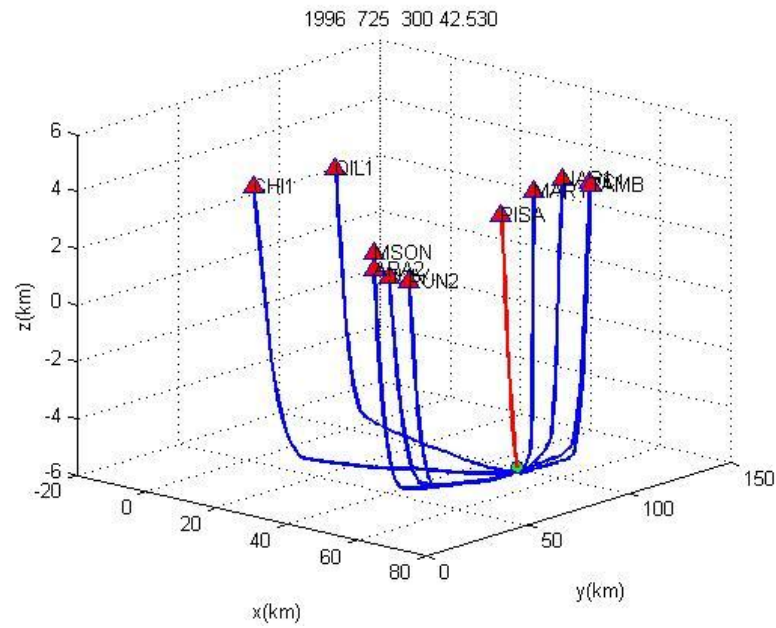
Elaborado por: Byron Tarabata

Figura 16 Evento a 2,047 km de profundidad



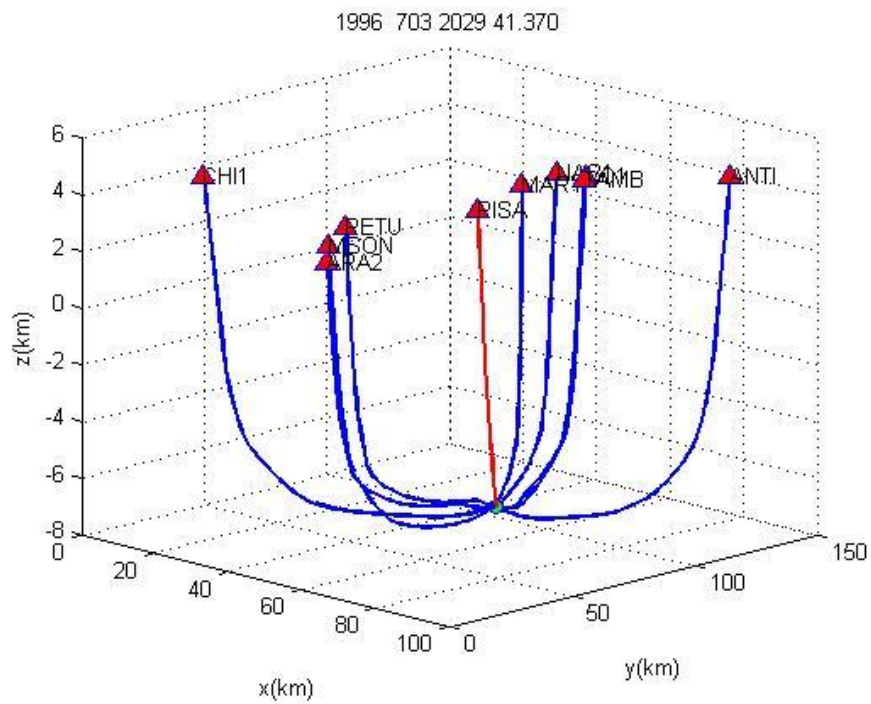
Elaborado por: Byron Tarabata

Figura 17 Evento a 4,796 km de profundidad



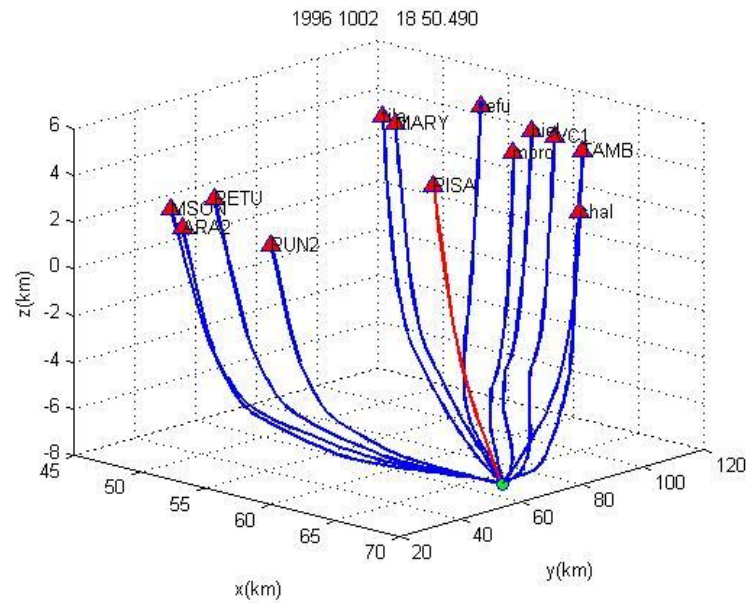
Elaborado por: Byron Tarabata

Figura 18 Evento a 6,517 km de profundidad



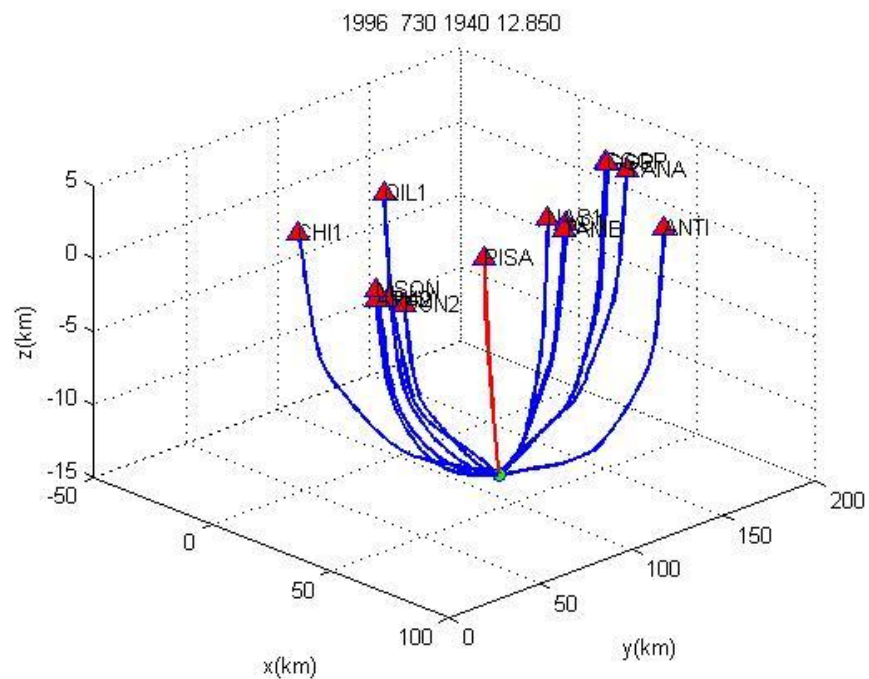
Elaborado por: Byron Tarabata

Figura 19 Evento a 7,470 km de profundidad



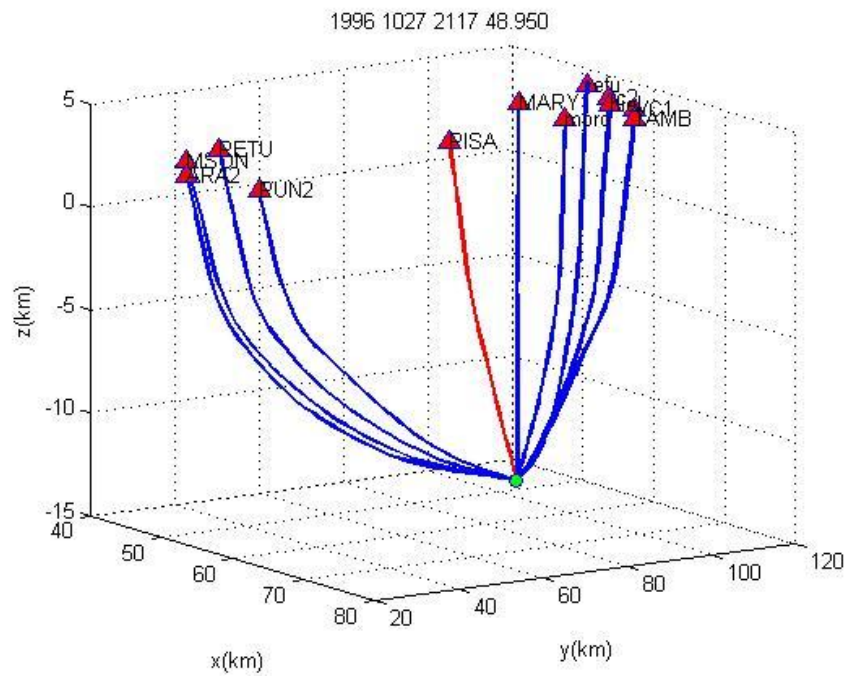
Elaborado por: Byron Tarabata

Figura 20 Evento a 10,323 km de profundidad



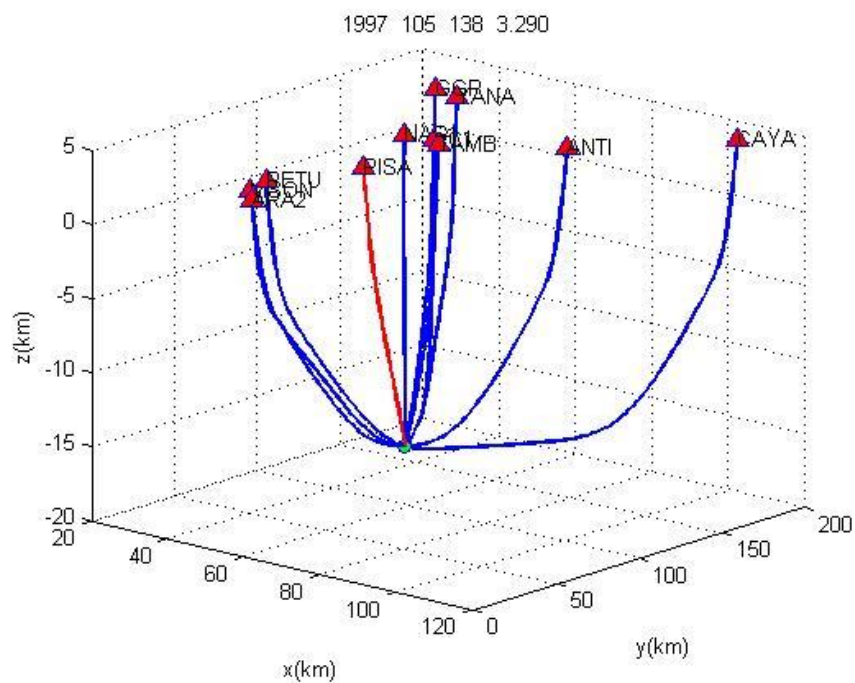
Elaborado por: Byron Tarabata

Figura 21 Evento a 11,419 km de profundidad



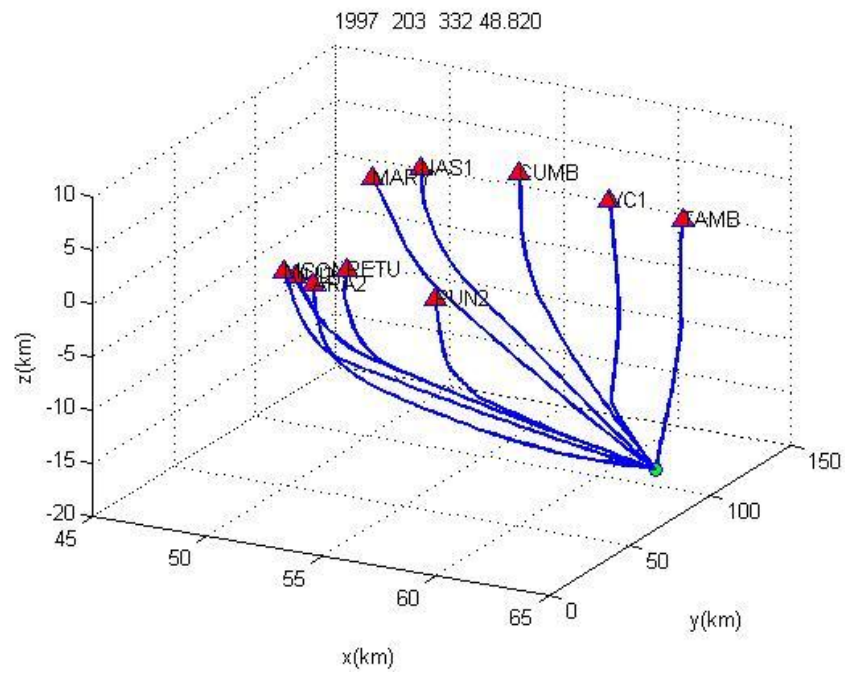
Elaborado por: Byron Tarabata

Figura 22 Evento a 14,723 km de profundidad



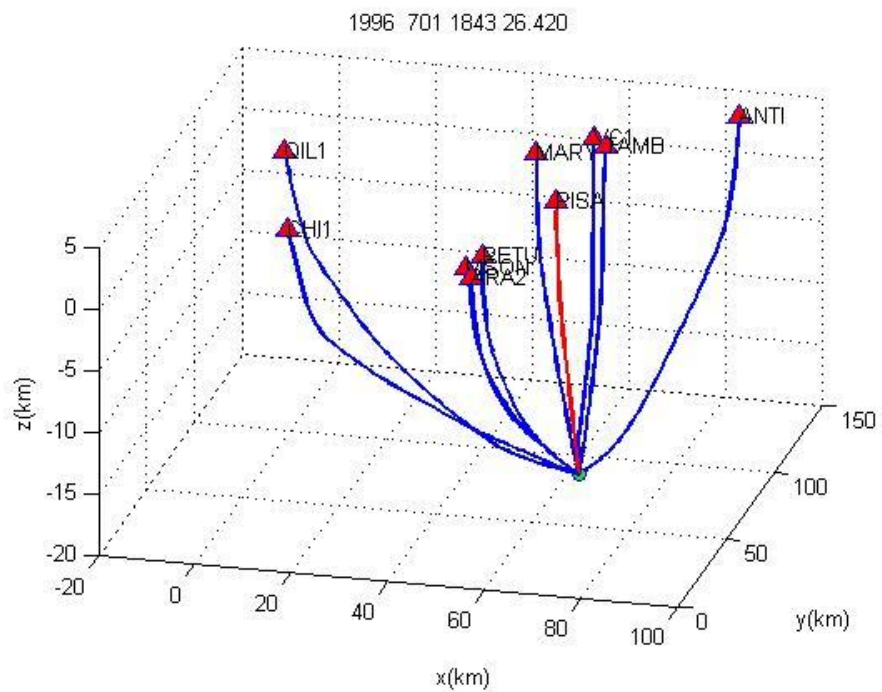
Elaborado por: Byron Tarabata

Figura 23 Evento a 15,220 km de profundidad



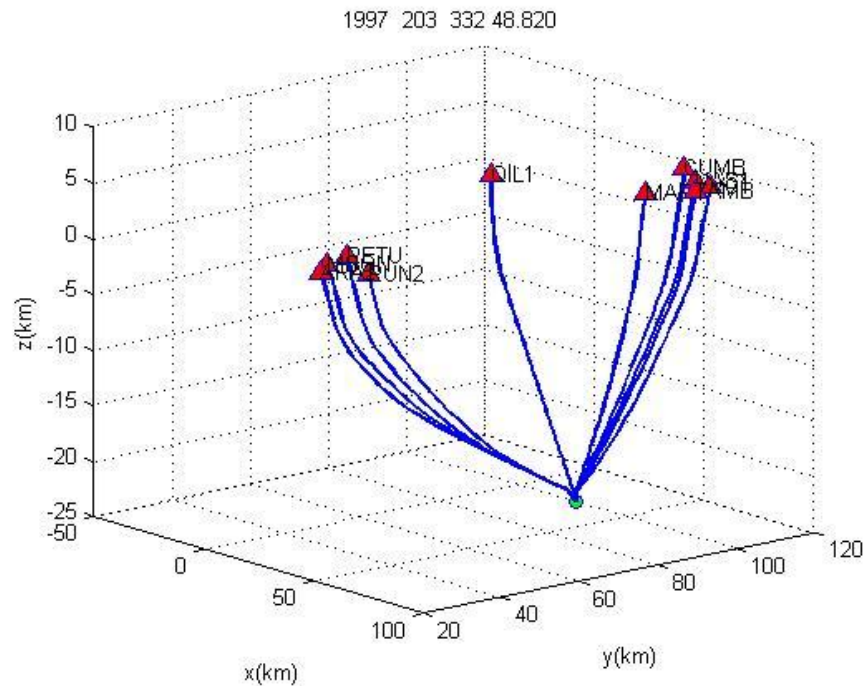
Elaborado por: Byron Tarabata

Figura 24 Evento a 18,307 km de profundidad



Elaborado por: Byron Tarabata

Figura 25 Evento a 20,962 km de profundidad



Elaborado por: Byron Tarabata

Una vez que se tiene clara la forma de desplazamiento de los diferentes rayos de los 11 eventos sísmicos, lo siguiente es determinar qué rayos atraviesan la región en estudio, es decir que rayos pasan por la zona del Pisayambo.

Después de seleccionar entre todos los eventos solo los que atraviesan la región del Pisayambo quedan solo 9 rayos con los cuales trabajar la obtención de la imagen tomográfica del Pisayambo.

El siguiente código representa los 9 rayos en la región del Pisayambo

Donde:

```
PISA=[60.948    69.827    -3.931];  son las coordenadas
%geográfica de la estación de Pisayambo
rh1A=[ 1    60.948    69.827    -3.931
```

Representa el primer punto x y z en el espacio por donde se irá trazando la trayectoria del rayo

h1=[65.566 68.321 0.994]; es el vector con las coordenadas del
hipocentro donde se origin el rayo

clc

%%salida de rayos a la estación Pisayambo

PISA=[60.948 69.827 -3.931];%%coordenadas de
la estación

%%rayo sísmico desde h1 hipocentro

%archivo graffermatej0.m

%rayo desde h1 hasta PISA:

```
rh1A=[ 1 60.948 69.827 -3.931
      2 61.109 69.768 -3.743
      3 61.766 69.528 -2.989
      4 62.529 69.250 -2.140
      5 63.354 68.950 -1.253
      6 65.014 68.473 0.499
      7 65.286 68.398 0.753
      8 65.566 68.321 0.994];
```

```
rh1Ax=rh1A(:,2);
```

```
rh1Ay=rh1A(:,3);
```

```
rh1Az=-rh1A(:,4);
```

hold on

```
line(rh1Ax,rh1Ay,rh1Az,'LineWidth',2)
```

%hipocentros de los dos eventos:

```
h1=[65.566 68.321 0.994];
```

```
plot3(h1(1),h1(2),-
```

```
h1(3),'o','MarkerFacecolor','g','MarkerSize',7)
```

%%

%grfico del rayo 2 archivo

%rayo desde h2 hasta PISA:

```
rh1A2=[ 1 60.948 69.827 -3.931
      2 61.114 69.818 -3.683
      3 61.393 69.801 -3.271
      4 61.701 69.782 -2.822
      5 62.130 69.748 -2.210
```

```

        6    62.641    69.707    -1.497
        7    62.778    69.696    -1.310
        8    64.359    69.717     0.833
        9    64.585    69.719     1.097
       10    64.843    69.720     1.380
       11    65.172    69.719     1.715
       12    65.527    69.716     2.047];

rh1Ax2=rh1A2(:,2);
rh1Ay2=rh1A2(:,3);
rh1Az2=-rh1A2(:,4);

hold on
line(rh1Ax2,rh1Ay2,rh1Az2,'LineWidth',2)

%hipocentros del evento:
h2=[65.527    69.716     2.047];
plot3(h2(1),h2(2),-
h2(3),'o','MarkerFacecolor','g','MarkerSize',7)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%5archivo graffermatej4.m
%rayo desde h1 hasta PISA:
rh1A4=[    1    60.948    69.827    -3.931
          2    61.118    69.837    -3.505
          3    61.339    69.851    -2.960
          4    61.630    69.868    -2.252
          5    61.928    69.885    -1.539
          6    61.989    69.888    -1.395
          7    63.167    69.755     1.500
          8    63.444    69.725     1.973
          9    63.776    69.686     2.496
         10    64.235    69.623     3.156
         11    64.794    69.544     3.876
         12    65.463    69.450     4.636
         13    65.624    69.432     4.796];

rh1Ax4=rh1A4(:,2);
rh1Ay4=rh1A4(:,3);

```

```

    rh1Az4=-rh1A4(:,4);
hold on
line(rh1Ax4,rh1Ay4,rh1Az4,'LineWidth',2)
%hipocentros de los dos eventos:
h4=[65.624    69.432    4.796];
plot3(h4(1),h4(2),-
h4(3),'o','MarkerFacecolor','g','MarkerSize',7)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%5555555555
%%% archivo graffermat6.m
%rayo desde h6 hasta PISA:
rh1A6=[ 1    60.948    69.827    -3.931
        2    61.041    69.894    -3.608
        3    61.229    70.030    -2.964
        4    61.443    70.185    -2.242
        5    61.667    70.348    -1.500
        6    61.684    70.360    -1.445
        7    62.294    71.070     1.500
        8    62.483    71.299     2.268
        9    62.711    71.577     3.103
       10    62.988    71.916     4.013
       11    63.325    72.328     5.001
       12    63.507    72.563     5.506
       13    63.742    72.872     6.171
       14    63.866    73.033     6.517];
rh1Ax6=rh1A6(:,2);
rh1Ay6=rh1A6(:,3);
rh1Az6=-rh1A6(:,4);
hold on
line(rh1Ax6,rh1Ay6,rh1Az6,'LineWidth',2)
%hipocentros de los dos eventos:
h6=[63.866    73.033     6.517];
plot3(h6(1),h6(2),-
h6(3),'o','MarkerFacecolor','g','MarkerSize',7)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

%%%  archivo graffermatej8.m
%rayo desde h1 hasta PISA:
rh1A8=[1    60.948    69.827    -3.931
        2    61.100    69.609    -3.516
        3    61.331    69.277    -2.896
        4    61.588    68.906    -2.215
        5    61.861    68.512    -1.508
        6    62.034    68.262    -1.069
        7    63.066    67.120     1.493
        8    63.505    66.598     2.328
        9    64.048    65.950     3.198
       10    64.733    65.130     4.098
       11    65.606    64.089     5.000
       12    66.505    62.992     5.804
       13    67.323    61.982     6.533
       14    67.793    61.401     6.948
       15    68.389    60.664     7.470];

rh1Ax8=rh1A8(:,2);
rh1Ay8=rh1A8(:,3);
rh1Az8=-rh1A8(:,4);
holdon
line(rh1Ax8,rh1Ay8,rh1Az8,'LineWidth',2)
%hipocentro del evento:
h8=[68.389    60.664     7.470];
plot3(h8(1),h8(2),-
h8(3),'o','MarkerFacecolor','g','MarkerSize',7)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%archivo graffermatej10.m
%rayo desde h1 hasta PISA:
rh1A10=[ 1    60.948    69.827    -3.931
         2    61.075    69.709    -3.506
         3    61.274    69.524    -2.850
         4    61.477    69.335    -2.189
         5    61.694    69.134    -1.499

```



```

        6    61.788    69.048    -1.210
        7    62.767    68.867     1.500
        8    63.041    68.815     2.118
        9    63.365    68.755     2.779
       10    63.746    68.683     3.491
       11    64.174    68.601     4.207
       12    64.696    68.499     4.989
       13    65.079    68.393     5.506
       14    65.863    68.180     6.552
       15    66.585    67.983     7.510
       16    67.536    67.724     8.764
       17    68.500    67.460    10.025
       18    68.730    67.398    10.323];

rh1Ax10=rh1A10(:,2);
rh1Ay10=rh1A10(:,3);
rh1Az10=-rh1A10(:,4);

hold on
line(rh1Ax10,rh1Ay10,rh1Az10,'LineWidth',2)
%hipocentros del evento:
h10=[68.730    67.398    10.323];
plot3(h10(1),h10(2),-
h10(3),'o','MarkerFacecolor','g','MarkerSize',7)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%archivo graffermatej12.m
%rayo desde h1 hasta PISA:
rh1A12=[1    60.948    69.827    -3.931
        2    61.114    69.833    -3.500
        3    61.341    69.841    -2.912
        4    61.584    69.850    -2.295
        5    61.890    69.861    -1.533
        6    61.947    69.863    -1.393
        7    63.151    69.752     1.500
        8    63.460    69.722     2.108
        9    63.829    69.685     2.769

```

```

10    64.259    69.641    3.466
11    64.775    69.585    4.215
12    65.378    69.519    5.000
13    65.832    69.461    5.537
14    66.676    69.352    6.532
15    67.501    69.245    7.498
16    68.367    69.128    8.490
17    68.725    69.079    8.896
18    69.250    69.007    9.490
19    69.580    68.959    9.861
20    70.170    68.868   10.520
21    70.508    68.816   10.897
22    70.978    68.743   11.419];

rh1Ax12=rh1A12(:,2);
rh1Ay12=rh1A12(:,3);
rh1Az12=-rh1A12(:,4);

hold on
line(rh1Ax12,rh1Ay12,rh1Az12,'LineWidth',2)

%hipocentro del evento:
h12=[70.978    68.743    11.419];
plot3(h12(1),h12(2),-
h12(3),'o','MarkerFacecolor','g','MarkerSize',7)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%grafermatej14.m
%rayo desde h1 hasta PISA:
rh1A14=[ 1    60.948    69.827    -3.931
        2    60.971    69.879    -3.746
        3    61.045    70.048    -3.153
        4    61.126    70.235    -2.506
        5    61.157    70.305    -2.265
        6    61.784    71.041     0.499
        7    61.979    71.263     1.242
        8    62.222    71.538     2.063
        9    62.527    71.883     2.967

```

```

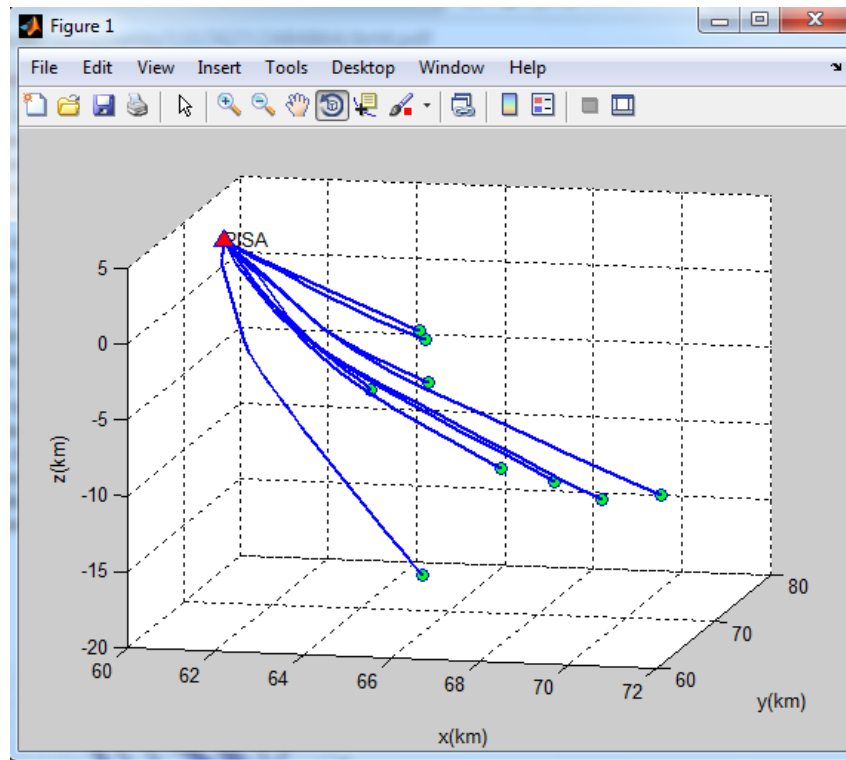
10    62.905    72.307    3.948
11    63.371    72.828    5.000
12    63.630    73.107    5.530
13    64.130    73.608    6.509
14    64.638    74.114    7.497
15    65.162    74.608    8.502
16    65.689    75.102    9.506
17    66.209    75.587   10.490
18    66.734    76.075   11.482
19    67.274    76.574   12.492
20    67.852    77.107   13.568
21    68.359    77.571   14.506
22    68.477    77.679   14.723];

rh1Ax14=rh1A14(:,2);
rh1Ay14=rh1A14(:,3);
rh1Az14=-rh1A14(:,4);

hold on
line(rh1Ax14,rh1Ay14,rh1Az14,'LineWidth',2)
%hipocentro del evento:
h14=[68.477    77.679    14.723];
plot3(h14(1),h14(2),-
h14(3),'o','MarkerFacecolor','g','MarkerSize',7)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%archivo graffermatej16
%%no hay rayo al Pisayambo
grid on
title('Rayos-Pisayambo ')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%grafico la estación
plot3(PISA(1),PISA(2),-
PISA(3),'^','MarkerFacecolor','r','MarkerSize',10)
text(PISA(1),PISA(2),-PISA(3),'PISA')
xlabel('x(km)')
ylabel('y(km)')
zlabel('z(km)')

```

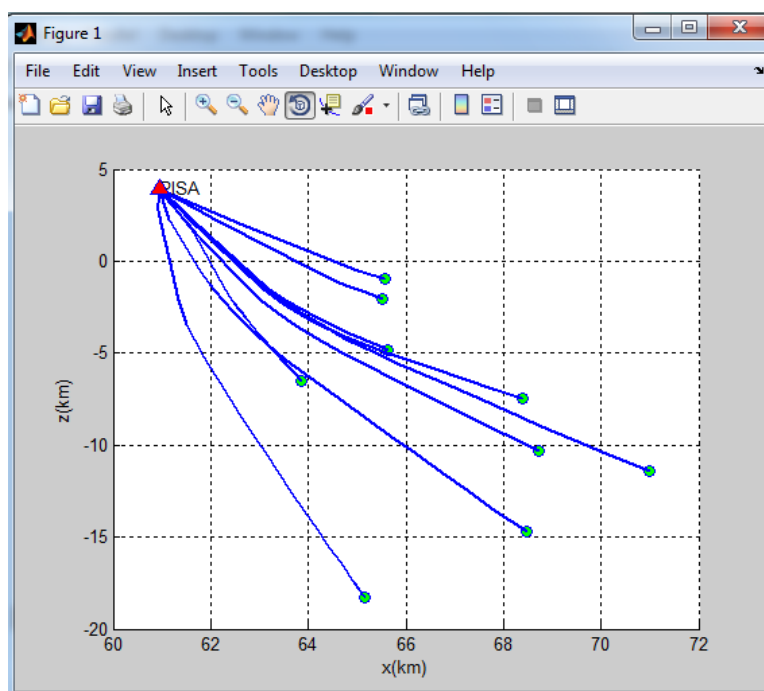
Figura 26 Rayos sísmicos de la región del Pisayambo



Elaborado por: Byron Tarabata

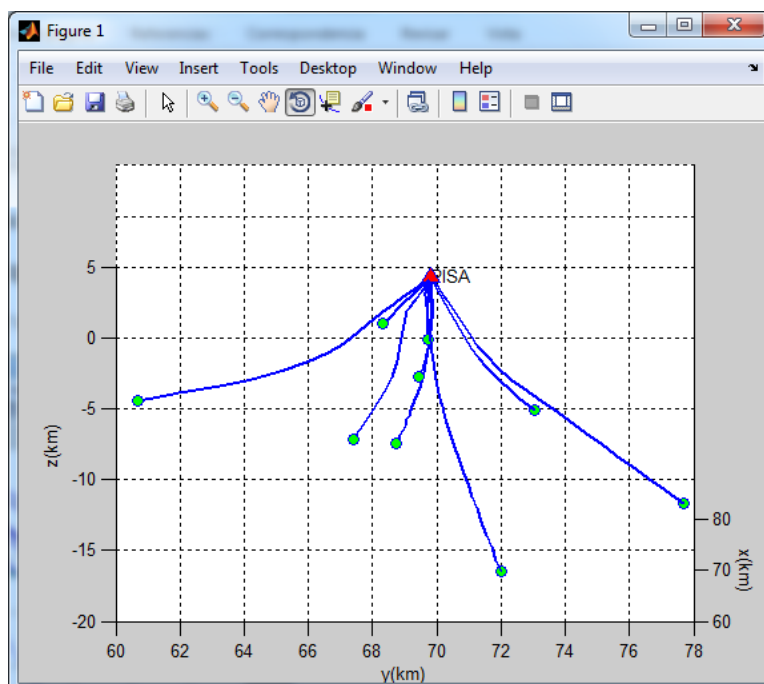
Como se observa en la figura 25 que la distribución de los rayos es en 3 dimensiones, y como el modelo de tomografía a realizarse corresponde a una experimento de rayos X en dos dimensiones, donde los rayos viajan rectilíneos, lo siguiente es determinar en qué plano los rayos tienen una tendencia más rectilínea para esto basta con seleccionar en que par de ejes los rayos son menos curvos.

Figura 27 Rayos sísmicos de la región del Pisayambo plano XZ



Elaborado por: Byron Tarabata

Figura 28 Rayos sísmicos de la región del Pisayambo plano YZ



Elaborado por: Byron Tarabata

Se puede observar en la figura 26 la trayectoria de los rayos sísmicos en plano XZ tienen una trayectoria más rectilínea que los rayos del plano YZ, por lo tanto se utilizarán para la realización de la tomografía.

La principal razón por la cual se seleccionó el plano X-Z para la realización de esta tomografía se debe a que la zona de subducción que entre la placa de nazca y la placa sudamericana se encuentra en el plano X-Z, a su vez en este plano los rayos tiene una trayectoria más rectilínea.

Establecidos los rayos sísmicos con los cuales se va a trabajar, con la finalidad de simplificar el problema de tomografía, lo ulterior es dividir el medio en bloques, con lo que se consigue obtener valores discretos para el modelo de lentitudes inicial según la acorde la ecuación 38, para la región del Pisayambo principalmente por la geometría de los rayos, la dimensión de cada bloque será 2 km para el eje Y 1 km para el eje X, de la dimensión de cada bloque depende la resolución de este tipo de tomografía, para este caso la única limitante es la longitud de onda, para las ondas P cuya velocidad es en promedio $C_p \approx 4.5 \text{ km/s}$ para las primeras capas de la litosfera, tienen una frecuencia $0.1 \text{ hz} < f < 15 \text{ hz}$ y con longitudes de onda en el rango de $0.3 \text{ km} < \lambda < 4.5 \text{ km}$ (Sarria, 2008, pág. 310).

Para obtener una representación en dos dimensiones de la figura 15 en el plano x-z se añade el siguiente código.

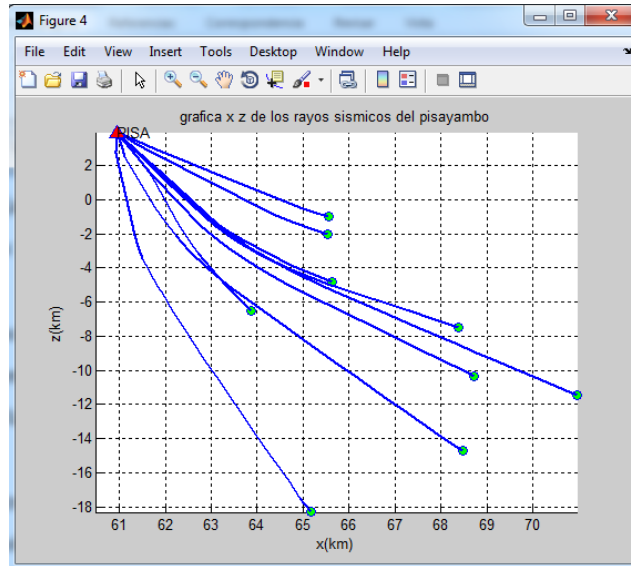
```
##### gráficas de los rayos
plot(rh1Ax,rh1Az,'LineWidth',2)
plot(rh1Ax2,rh1Az2,'LineWidth',2)
plot(rh1Ax4,rh1Az4,'LineWidth',2)
plot(rh1Ax6,rh1Az6,'LineWidth',2)
plot(rh1Ax8,rh1Az8,'LineWidth',2)
plot(rh1Ax10,rh1Az10,'LineWidth',2)%%
plot(rh1Ax12,rh1Az12,'LineWidth',2)
plot(rh1Ax14,rh1Az14,'LineWidth',2)
plot(rh1Ax18,rh1Az18,'LineWidth',2)
plot(60.95)
grid on
#####grafico la estación
plot(PISA(1),-
PISA(3),'^','MarkerFacecolor','r','MarkerSize',10)
text(PISA(1),-PISA(3),'PISA')
```

```

title('grafica x z de los rayos sismicos del pisayambo')
xlabel('x (km) ')
ylabel('z (km) ')
axis([60.5, 70.98, -18.31, 3.931])

```

Figura 29 Zona del Pisayambo discretizada en bloques de 1x2 km



Elaborado por: Byron Tarabata

Con la geometría de los rayos y los bloques lo siguiente es obtener los parámetros de la ecuación 51 y 52, para los datos del Pisayambo.

Ecuación 51
$$\mathbf{m}_{post} = (\mathbf{G}^t \mathbf{C}_{obs}^{-1} \mathbf{G} + \mathbf{C}_{prior}^{-1})^{-1} \mathbf{G}^t \mathbf{C}_{obs}^{-1} \mathbf{d}_{obs} + \mathbf{C}_{prior}^{-1} \mathbf{m}_{prior}$$

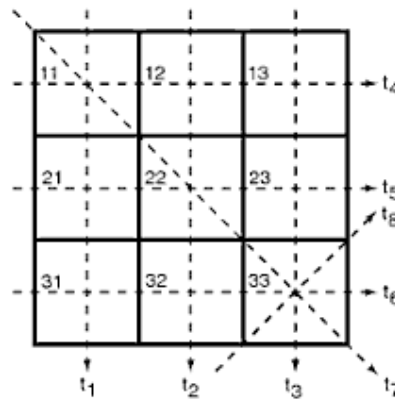
Ecuación 52
$$\mathbf{C}_{post} = (\mathbf{G}^t \mathbf{C}_{obs}^{-1} \mathbf{G} + \mathbf{C}_{prior}^{-1})^{-1}$$

3.4 Matriz G

La matriz G es la que relaciona de manera funcional las observaciones con los parámetros, para la tomografía sísmica corresponde a la longitud del rayo j en el bloque i expresada en kilómetros.

Se ilustrara esto con un ejemplo sencillo

Figura 30 Ejemplo simple de tomografía sísmica



Fuente: Parameter estimation and inverse problems

Para esta geometría se tiene una matriz de 8x9 donde 8 es el número de rayos y 9 es el número de parámetros (bloques). Con la finalidad de explicarla obtención los de elementos de la matriz G se obtendrá las longitudes que corresponden a la primera y la última fila de la matriz, en este caso se empieza con el rayo 1 el cual atraviesa por los bloques 11, 21, 31 entonces fila de la matriz primera fila es

$$\text{para } t_1 [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$$

Ya así para los demás rayos, en la última fila se tiene el rayo t_8 al cual le corresponden las siguientes longitudes donde q es la longitud del rayo atravesando el bloque.

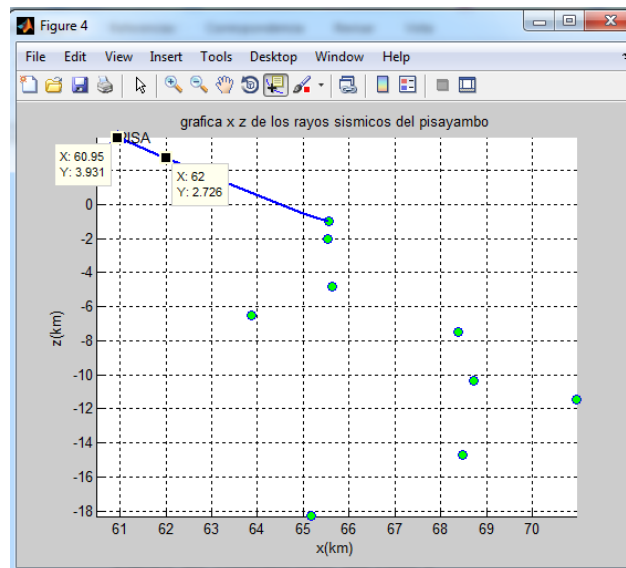
$$\text{para } t_8 [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \bar{2}]$$

Donde 1 corresponde a la longitud del rayo, debido a que se discretizo el medio en cuadrados de 1x1 u y $\bar{2}$ es la distancia de la diagonal.

En la figura 31 se representa la geometría de la zona en la que se va realizar la tomografía sísmica, en total se tiene una arreglo de 110 bloques y 9 rayos, lo que determina la dimensión de la matriz G, para este caso es una matriz de 9x110, lo siguiente es llenar esa matriz con la longitud del rayo para cada bloque.

Para esto se mide la distancia del rayo para cada bloque, en este caso se utilizó la herramienta de Matlab data cursor para obtener las coordenadas de cada segmento de rayo para proceder a calcular su longitud, para el caso en que un rayo no atravesase por un bloque su distancia será 0.

Figura 31 Coordenadas del rayo 1



Elaborado por: Byron Tarabata

Se calcula la longitud del rayo se calcula mediante la fórmula de a distancias entre dos puntos $l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Para el primer elemento de la Matriz G se tiene:

$$\text{Ecuación 55 } l = \sqrt{(60.95 - 62)^2 + (3.931 - 2.726)^2} = 1.5804 \text{ km}$$

Para los bloques por donde no atraviesa ningún rayo, el valor que le corresponderá a la matriz G será 0.

Se realiza lo mismo para los 9 rayos por cada bloque el resultado de esta matriz G se encuentra en el archivo matrizGPisayambo.mat.

Figura 32 Matriz G, longitudes de los rayos del Pisayambo.

Variable Editor - matrizGPisayambo													
File Edit View Graphics Debug Desktop Window Help													
Stack: Base No valid plots for: matrizGPi...													
matrizGPisayambo <9x10 double>													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1.5804	1.0010	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.5151	1.4856
2	1.8650	0.4770	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.2320	1.2250
3	2.0810	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.6882	1.4650	0
4	1.0996	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.1375	0	0
5	2.0590	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1.1592
6	2.0090	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.4673	0.6507	0
7	2.0620	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.8060	1.3390	0
8	1.9480	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.0200	0	0
9	1.9280	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.9840	0	0
10													

Elaborado por: Byron Tarabata

3.5 Matriz d_{obs} . Y C_{obs}

La matriz d_{obs} son los datos observados, para este estudio equivalen a los tiempos (en segundos) de arribo de los rayos sísmicos, desde su origen en el hipocentro hasta ser registrados por la estación sísmica.

El tiempo de propagación es una de las salidas del programa FERMAT a los datos del Pisayambo que se encuentran en el archivo TravelTime.out

Event list

1996 719 730 32.770 65.566 68.321 0.994

1996 719 730 32.770 65.566 68.321 0.994

VC1 10.418

NAS1 10.771

TAMB 9.353

MARY 8.857

QIL1 13.895

PISA 2.103

CHI1 13.269

RUN2 8.450

ARA2 10.296

MSON 10.095

C_{obs} es la matriz de covarianza que acompaña a los datos observados d_{obs} , por lo tanto su unidad también está en segundos, es una matriz identidad de dimensión 9x9 que está dada por la ecuación 48 donde el valor de la desviación estándar está dado por el error del programa FERMAT. Para este caso el error está en parámetro

Simplex minimum: 0.01

n_1km= 1.0 ndiv = 3

Block size = 1.000

Simplex parameter: Max loop= 100 Local max loop= 100

Simplex range : 0.50

Simplex minimum: 0.01
 Initial simplex size: 0.20
 Number of station: 10
 Number of event: 1
 Number of grid in x,y,z: 7 7 4
 xmin, xmax: 0.0 180.0
 ymin, ymax: 0.0 240.0
 zmin, zmax: -5.0 20.0
 ngx, ngy, ngz : 7 7 4

Código Matlab

```

%tiempo de propagación de acuerdo a cada rayo
%PISA 2.103 en archivo travel time carpeta PISA 0
%PISA 2.197 en carpeta travel time carpeta PISA 2
%PISA 2.578 en carpeta travel time carpeta PISA 4
%PISA 2.776 en archivo travel time carpeta PISA 6
%PISA 3.831 en carpeta travel time carpeta PISA 8
%PISA 3.682 en carpeta travel time carpeta PISA 10
%PISA 4.008 en archivo travel time carpeta PISA 12
%PISA 4.528 en carpeta travel time carpeta PISA 14
%PISA ----- en carpeta travel time carpeta PISA 16
%PISA 4.604 en archivó travel time carpeta PISA 18
%PISA ----- en carpeta travel time carpeta PISA 20
dobs=[2.103;2.197;2.578;2.776;3.831;3.682;4.008;4.528;
4.604];
sd=0.01;%error en los tiempos, Simplex minimun.
Cobs=sd^2*eye(9);%%errores en las observaciones
  
```

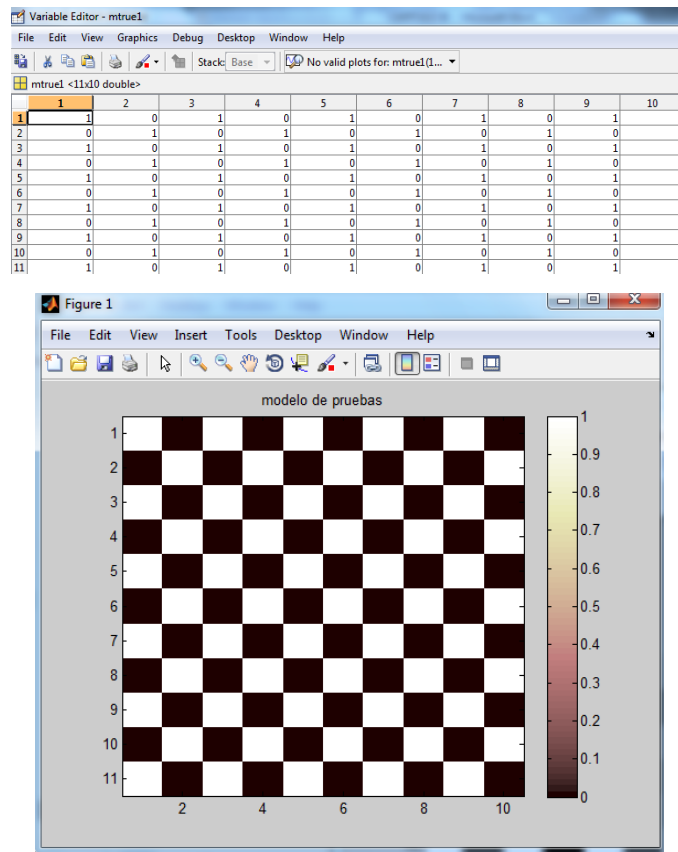
3.6 Mprior y Cprior

La información a prior es la información que se obtiene independientemente del resultado de las medidas, para la tomografía sísmica esta información está dada por \mathbf{m}_{prior} y \mathbf{C}_{prior} , donde \mathbf{m}_{prior} es el modelo a priori de lentitudes y \mathbf{C}_{prior} su respectiva matriz de covarianza que contiene los errores del modelo \mathbf{m}_{prior} .

3.7 Prueba del modelo a los datos del Pisayambo

Para ver como se reconstruye m_{post} se genera un modelo m_{prior} con una combinación unos y ceros que representan un modelo sintético de velocidades con atenuaciones altas y bajas, que representan un tablero de ajedrez llamado “check-board test”, esto se hace con la finalidad de observar la resolución del modelo a posteriori (Jean-Jacques, Luis, & Gerard, 1993)

Figura 33 Modelo de prueba Mprior



Elaborado por: Byron Tarabata

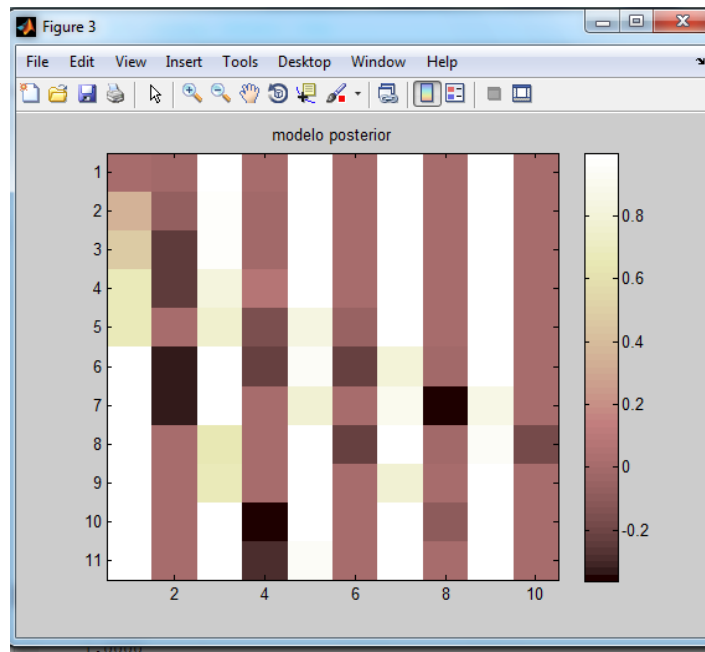
Se observa en la figura 34 como se genera el modelo original resultado de la inversión de datos. Para esta primera parte en el cual se utiliza un modelo a prior arbitrario, no tiene mucha importancia la matriz de covarianza C_{prior} , en este caso se utilizó una desviación estándar de $s_m = 0.01$.

```
sm=0.01; %error en el modelo
```

```
Cprior=sm^2*eye(110);
```

Con todos los parámetros de la ecuación 51, datos observados e información a priori, el resultado de esta ecuación está dado en la matriz m_{post} .

Figura 34 Modelo Mpost resultado de la ecuación 51.



Elaborado por: Byron Tarabata

En la figura 34 se obtiene mediante la aplicación de la ecuación 51 la que es la solución probabilística de Tarantola–Valette del problema inverso, se utilizó el modelo de ajedrez de la figura 33 para , inferir el modelo de velocidades, mediante los datos observados \mathbf{d}_{obs} , su error \mathbf{C}_{obs} , el modelo inicial \mathbf{m}_{prior} , y su error \mathbf{C}_{prior} . La imagen de la figura 34 muestra cómo se obtiene un nuevo modelo de velocidades a partir de la ecuación 51, en esta imagen se observa como en la sección diagonal de la imagen que es por donde atraviesan los rayos se reconstruye mejor la imagen, mientras que en los extremos superior derecho, e inferior izquierdo de la imagen no se puede reconstruir, siendo la principal razón la falta de rayos que atraviesan esa región.

3.8 Tomografía a la zona del Pisayambo

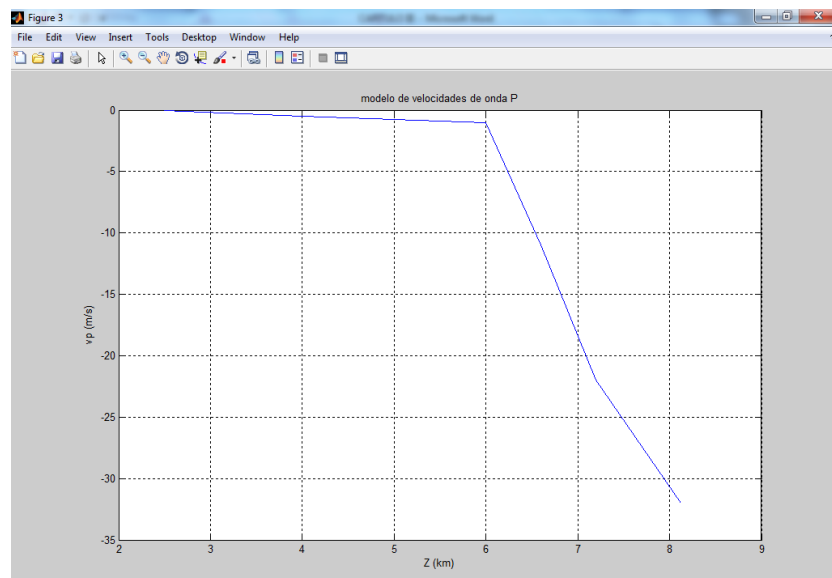
El anterior ejemplo se realizó con un modelo sintético de lentitudes, para tomografía de la región de Pisayambo es necesario conocer el verdadero modelo de lentitudes así como el error del modelo, lo que equivale a obtener \mathbf{m}_{prior} y su respectiva matriz de covarianza \mathbf{C}_{prior} para la zona de estudio, a continuación el modelo de velocidades para ondas P para la región ecuatoriana (Manchuel, et al., 2011).

Tabla 2 Modelo de velocidades de ondas P utilizando estaciones terrestres

Profundidad Z (km)	Vp (km/s)	Error $\sigma = 0.4 \text{ km/s}$
0.0	2.5	0.4
0.5	4.0	0.4
1.0	6.0	0.4
11.0	6.6	0.4
22.0	7.2	0.4
32.0	8.15	0.4

Fuente:(Manchuel, Régnier, Béthoux, Font, & Yepez, 2011)

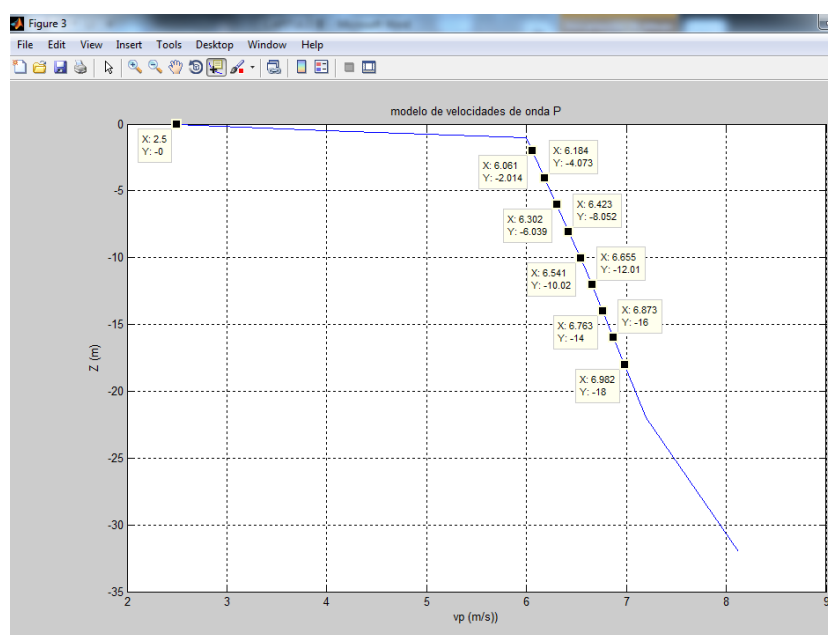
Figura 35 Velocidades de ondas P



Elaborado por: Byron Tarabata

La figura 34 que representa de manera gráfica de la tabla 2 posee valores discretos de velocidades de ondas P, solo para determinadas profundidades, para obtener el modelo de lentitudes según la discretización que se observa en la figura 27 se interpolará los valores de la tabla 4 representados en la figura 24 utilizando e la herramienta data Cursor de Matlab la cual al desplazarse por la curva muestra el valor de la ordenada y de la abscisa.

Figura 36 Velocidades de ondas P para diferentes profundidades



Elaborado por: Byron Tarabata

Tabla 3 Velocidades de ondas P para diferentes profundidades

Profundidad Z (km)	Vp (km/s)	Error $\sigma = 0.4 \text{ km/s}$
0.0	2.5	0.4
2	6.061	0.4
4	6.184	0.4
6	6.302	0.4
8	6.423	0.4
10	6.541	0.4
12	6.655	0.4
14	6.763	0.4
16	6.873	0.4
18	6.982	0.4

Elaborado por: Byron Tarabata

Obtenidos ya los valores de velocidades de ondas P para las diferentes profundidades se crea el modelo a priori, m_{prior} de velocidades para la región del Pisayambo.

Figura 37 Matriz Mprior para la región del Pisayambo

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2.5000	2.5000	2.5000	2.5000	2.5000	2.5000	2.5000	2.5000	2.5000	2.5000
2	2.5000	2.5000	2.5000	2.5000	2.5000	2.5000	2.5000	2.5000	2.5000	2.5000
3	6.0070	6.0070	6.0070	6.0070	6.0070	6.0070	6.0070	6.0070	6.0070	6.0070
4	6.1220	6.1220	6.1220	6.1220	6.1220	6.1220	6.1220	6.1220	6.1220	6.1220
5	6.2410	6.2410	6.2410	6.2410	6.2410	6.2410	6.2410	6.2410	6.2410	6.2410
6	6.3620	6.3620	6.3620	6.3620	6.3620	6.3620	6.3620	6.3620	6.3620	6.3620
7	6.4800	6.4800	6.4800	6.4800	6.4800	6.4800	6.4800	6.4800	6.4800	6.4800
8	6.6010	6.6010	6.6010	6.6010	6.6010	6.6010	6.6010	6.6010	6.6010	6.6010
9	6.7090	6.7090	6.7090	6.7090	6.7090	6.7090	6.7090	6.7090	6.7090	6.7090
10	6.8180	6.8180	6.8180	6.8180	6.8180	6.8180	6.8180	6.8180	6.8180	6.8180
11	6.9270	6.9270	6.9270	6.9270	6.9270	6.9270	6.9270	6.9270	6.9270	6.9270

Elaborado por: Byron Tarabata

La ecuación 14 permite calcular el tiempo de propagación del rayo sísmico, que básicamente es una integral de línea del espacio recorrido dividido para la velocidad del rayo, la ecuación es no lineal si se expresa en términos de velocidades sísmicas.

Es por eso que con la finalidad de linealizar el problema se realiza un simple cambio de variable expresando el modelo m_{prior} en términos de lentitudes, lo que equivale al inverso de la velocidad.

Ecuación 56
$$s = \frac{1}{v}$$

Dónde: s es la lentitud para la onda p , se expresa en segundos sobre kilómetro.

Implementando en Matlab:

```
%modelo de lentitudes
z=[ 0 0.5 1.0 11.0 22.0 32.0];
z=z*-1
vp=[2.5 4.0 6.0 6.6 7.2 8.125];
figure(3)
plot(vp,z)
xlabel('vp (m/s)')
ylabel('Z (m)')
title('modelo de velocidades de onda P')
grid on
```

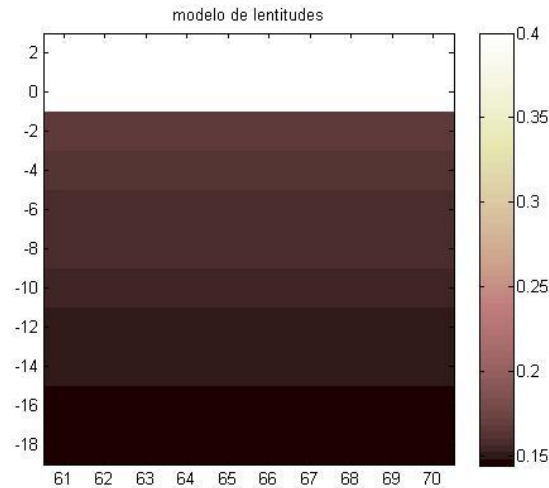


```

load velProp.mat
velocidadP=modPropagacion;
%como trabajamos con la lentitud
%%invertimos v=d/t s=1/v s=t/d
slownes=1./velocidadP;
figure(1)
imagesc(slownes)
colormap(pink)
colorbar
title('modelo de lentitudes')
mtrue=reshape(slownes,110,1);%%%1 x 110

```

Figura 38 Modelo de lentitudes para la región del Pisayambo



Elaborado por: Byron Tarabata

La figura 38 representa el modelo a priori \mathbf{m}_{prior} , que es un modelo de lentitudes de capas planas para distintas profundidades, de la región ecuatoriana con el que se parte para obtener la imagen tomográfica de la región del Pisayambo.

El error para el modelo a prior está determinado por $\sigma = 0.4 \text{ km/s}$, (Monteiller et al., 2006), se debe tener en cuenta que este error es para las velocidades, cuando el cálculo del error de una medición se hace indirectamente a partir de otras que ya se conocen que tienen su propio margen de error, se tiene que calcular lo que comúnmente suele llamarse error derivado (Beckwith, Marangoni, & Lienhard, 2007).

Para calcular el error derivado se deriva la ecuación 56 respecto a la variable conocida.

Ecuación 57

$$\frac{\partial s}{\partial v} = \frac{-1}{v^2}$$

Entonces el error en el modelo de lentitudes queda expresado de la siguiente manera.

Ecuación 58

$$\sigma_s = \frac{-1}{\sigma_v^2} = \frac{-1}{0.16}$$

Dónde:

σ_s es el error para el modelo de lentitudes.

σ_v es el error para el modelo de velocidades.

El modelo de lentitudes con su respectivo error para la región ecuatoriana para el desarrollo de esta investigación, se indica en la siguiente tabla.

Tabla 4 modelo de lentitudes (Slowness) de ondas p

Profundidad Z (km)	Lentitud $Sp = 0 \text{ s/km}$	Error $\sigma_s = 0.16 \text{ s/km}$
-2.0	0.4000	0.16
0.0	0.4000	0.16
2	0.1665	0.16
4	0.1633	0.16
6	0.1602	0.16
8	0.1572	0.16
10	0.1543	0.16
12	0.1515	0.16
14	0.1491	0.16
16	0.1467	0.16
18	0.1444	0.16

Elaborado por: Byron Tarabata

Con el error en el modelo de velocidades se obtiene la matriz de covarianza C_{prior} .

%%%%%%Cprior

%la lentitud es el inverso de las velocidades..entonces

%el error

%%% debe ser relaciona do alas velocidades

%error en la velocidad es ev=0.2 km/s

```

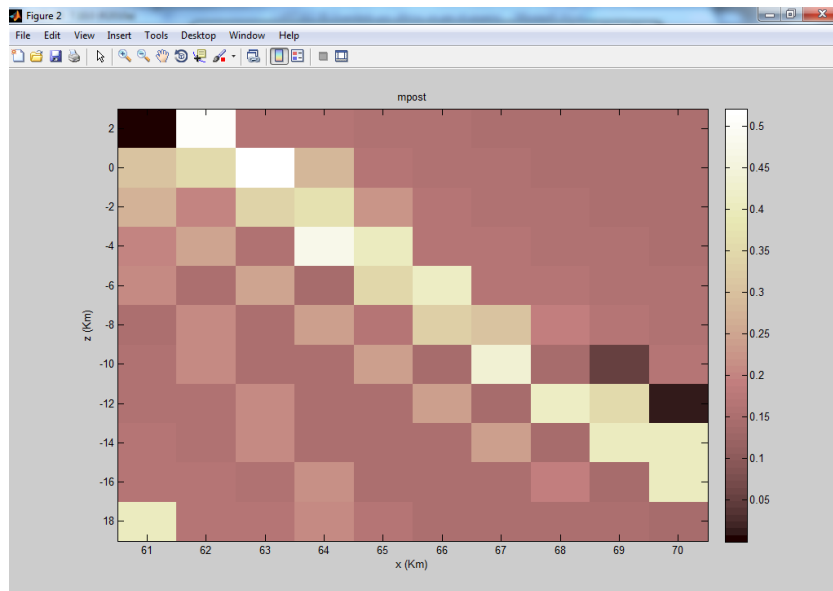
%s=1/v;

syms sv
s=1/v;
ds=diff(s,v);
ev=0.2;
es=-1/ev^2;
CpriorV=es^2*eye(110);%%%sm desviación %estándar

```

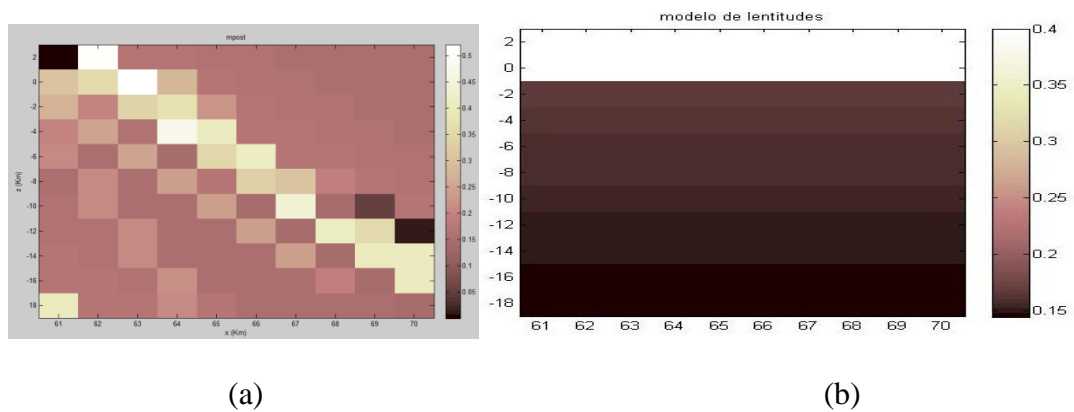
Ya obtenidos los parámetros necesarios para la ecuación 51, se calcula el modelo a posteriori m_{post} que representa la imagen tomográfica de la región del Pisayambo.

Figura 39 Tomografía de la región del Pisayambo



Elaborado por: Byron Tarabata.

Figura 40 Mprior y Mpost



(a)

(b)

Elaborado por: Byron Tarabata

En el modelo original de capas planas se observa que a mayor profundidad se tiene una menor lentitud (mayor velocidad), para el modelo de lentitudes inicial de la figura 40 (a) en el rango de 15 a 18 km de profundidad se tiene una lentitud que está entre 0.2 y 0.15 s/km, en la figura 40 (b) se observa que a la misma profundidad el valor de lentitudes está entre 0.01 y 0.1 s/km.

Se realiza el mismo análisis para las capas más superficiales que están entre 0 y 4 km de profundidad se tiene un valor de lentitud entre 0 y 0.3 s/km para el modelo inicial, para la imagen de la figura 40 (b) las lentitudes para las mismas profundidades están en el rango de 0.45 y 0.30 s/km.

3.9 Pseudocódigo del programa de Tomografía

Paso 1: Parametrización del sistema:

Discretizar la región del Pisayambo en bloques

Pasó 2: Problema directo:

Trazado de los rayos sísmico del Pisayambo.

Obtención de las longitudes correspondientes a la Matriz G.

Pasó 3: Mediciones e Información a Priori:

Modelo de velocidades para la litosfera ecuatoriana: M_{prior} .

Error en el modelo de velocidades a priori: C_{prior} .

Obtener los tiempos de llegada para los rayos sísmicos: d_{obs} .

Obtener el error para los tiempos de llegada de los rayos sísmicos: C_{obs} .

Pasó 4: Problema Inverso: Inversión de datos utilizando el algoritmo Tarantola-Valette

Obtener modelo a posteriori M_{post}

Obtener la covarianza a posteriori C_{post} .

Fin

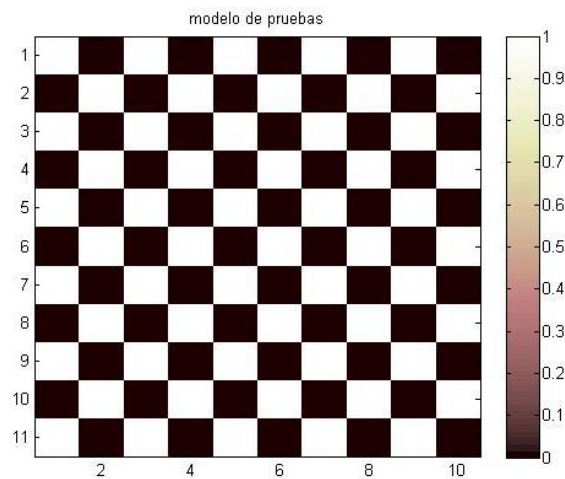
CAPÍTULO 4

ANÁLISIS DE RESULTADOS

4.1 Validación de modelos aplicados

En el caso de tomografía sísmica al tratarse de un método de inversión de datos en el cual se tiene errores en los tiempos d_{obs} y en el modelo m_{prior} que están dados en la matriz C_{obs} y en C_{prior} respectivamente, para la validación de resultados se analizara como estos valores de error afectan al modelo posteriori m_{post} de la ecuación 51 utilizando como modelo a prior el tablero de ajedrez de la figura 33.

Figura 41 Modelo de pruebas M_{prior} “check-board”



Elaborado por: Byron Tarabata

En esta parte del modelo se utilizó un valor de error para los datos de $s_d = 0.01$ que están dados por el parámetro simplex mínimo del programa FERMAT.

```
sd=0.01; %valor de simplex mínimo
```

```
%OJO AKA
```

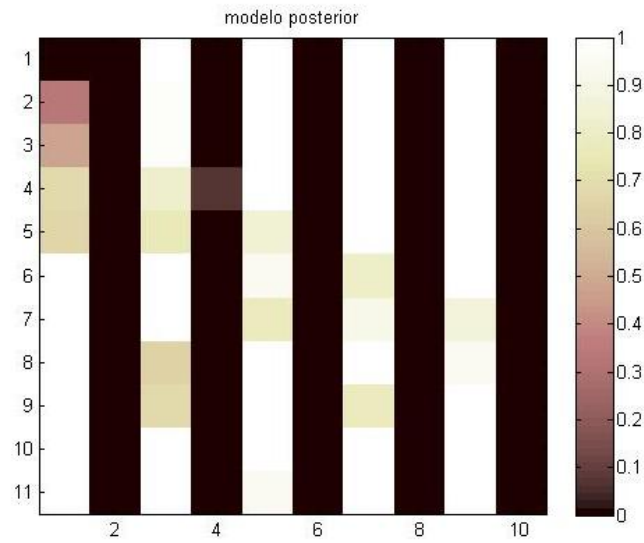
```
Cobs=sd^2*eye(9); %errores en las observaciones
```

Y para el error en el modelo a prior m_{prior} se utilizó un error de prueba de $s_m = 0.01$

```
sm=0.01; %error en el modelo a prior
```

```
Cprior=sm^2*eye(110);
```

Figura 42 Modelo Mpost



Elaborado por: Byron Tarabata

La desviación estándar del modelo \mathbf{m}_{post} esta dado por raíz cuadrada de la matriz de covarianza del modelo a posteriori \mathbf{C}_{post} .

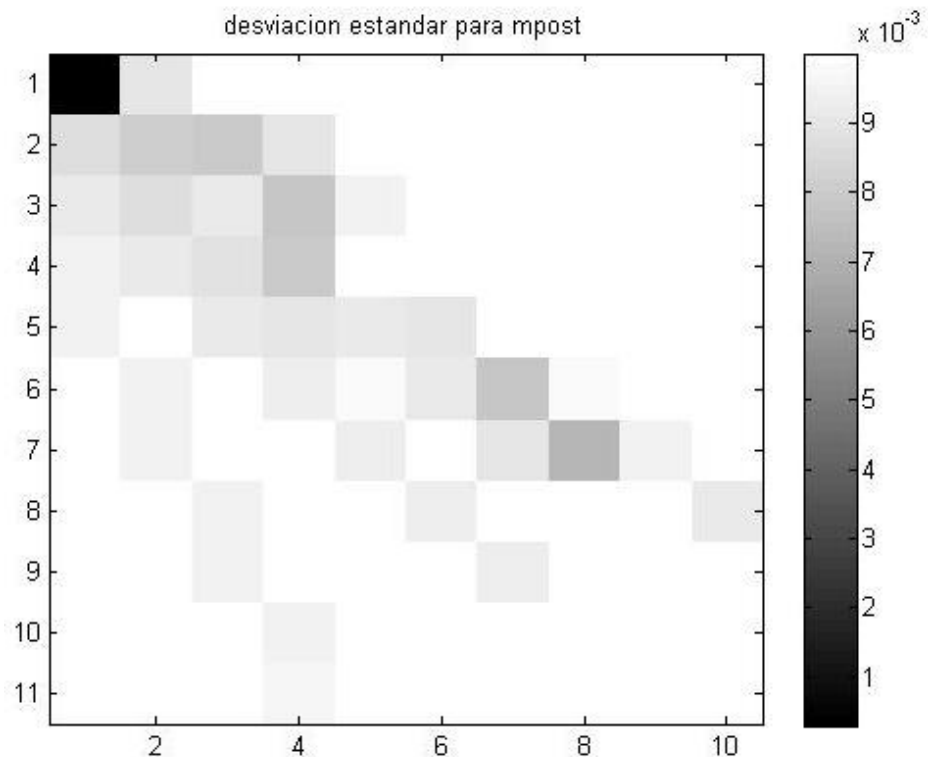
Figura 43 Error a posteriori para cada bloque

smpostM <11x10 double>										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2.9686e-06	0.0090	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100
2	0.0087	0.0081	0.0079	0.0090	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100
3	0.0092	0.0087	0.0092	0.0078	0.0095	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100
4	0.0095	0.0092	0.0088	0.0079	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100
5	0.0095	0.0100	0.0092	0.0090	0.0092	0.0090	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100
6	0.0100	0.0095	0.0100	0.0093	0.0097	0.0091	0.0079	0.0097	0.0100	0.0100
7	0.0100	0.0095	0.0100	0.0100	0.0093	0.0100	0.0090	0.0073	0.0095	0.0100
8	0.0100	0.0100	0.0094	0.0100	0.0100	0.0093	0.0100	0.0099	0.0099	0.0091
9	0.0100	0.0100	0.0095	0.0100	0.0100	0.0100	0.0093	0.0100	0.0100	0.0100
10	0.0100	0.0100	0.0100	0.0094	0.0100	0.0100	0.0100	0.0099	0.0100	0.0100
11	0.0100	0.0100	0.0100	0.0096	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100
12										

Elaborado por: Byron Tarabata

El modelo \mathbf{m}_{post} tiene un error máximo de 0.01 que es el error del modelo inicial \mathbf{m}_{prior} , esto significa que el error no aumenta sino que se mantiene en los bloques por donde no atraviesan los rayos y no se tiene información.

Figura 44 Desviación estándar para Mpost



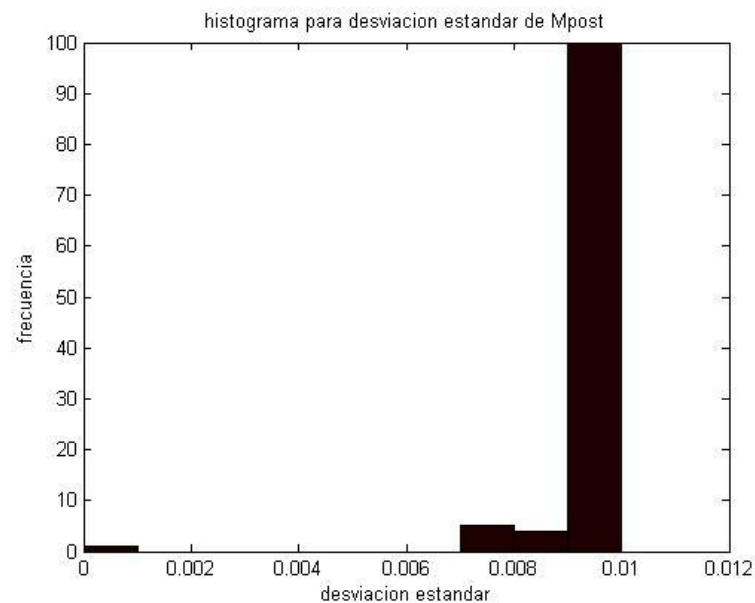
Elaborado por: Byron Tarabata

El primer escaque² tiene un menor valor de error con un valor de 2.9686×10^{-6} la razón de esto es que en ahí convergen todos los rayos sísmicos es por ello que el error es menor en ese bloque, a diferencia de los demás bloques donde el error oscila entre 0.007 y 0.009 para los bloques donde atraviesa por lo menos un rayo, mientras que para los bloques donde no existen rayos el error se mantiene en 0.01.

El siguiente histograma de frecuencia indica que valores de error son más recurrentes.

² Escaque: Es el nombre que recibe en ajedrez cada una de las 64 casillas de las que consta el tablero.

Figura 45 Histograma de frecuencia para los valores de la desviación estándar de Mpost



Elaborado por: Byron Tarabata

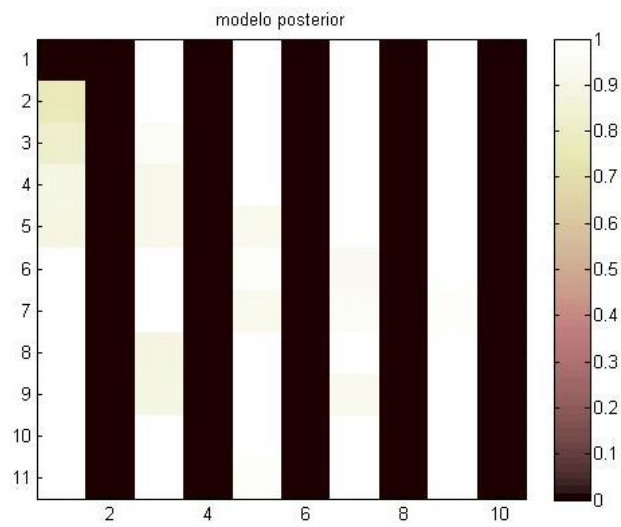
Figura 46 Error a priori para cada bloque.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100
2	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100
3	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100
4	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100
5	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100
6	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100
7	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100
8	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100
9	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100
10	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100
11	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100

Elaborado por: Byron Tarabata

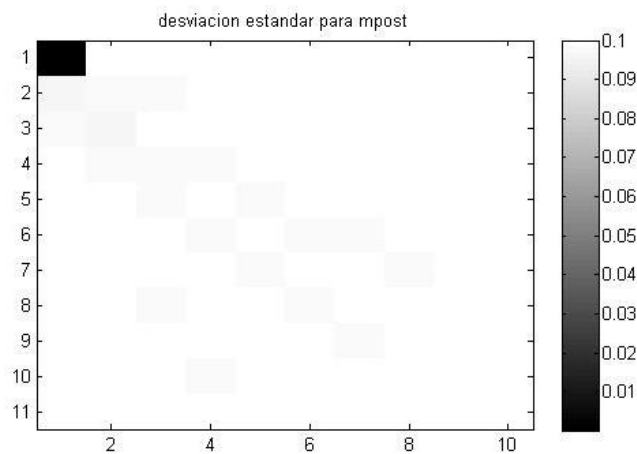
Con la finalidad de analizar cómo afecta el error en las observaciones sd y el error en el modelo sm . Partiendo de un hipotético se establecerá un error en las observaciones de $sd=1$, y con un error para el modelo a priori $sm=0.1$.

Figura 47 Mpost con sd=1 y sm=0.1



Elaborado por: Byron Tarabata

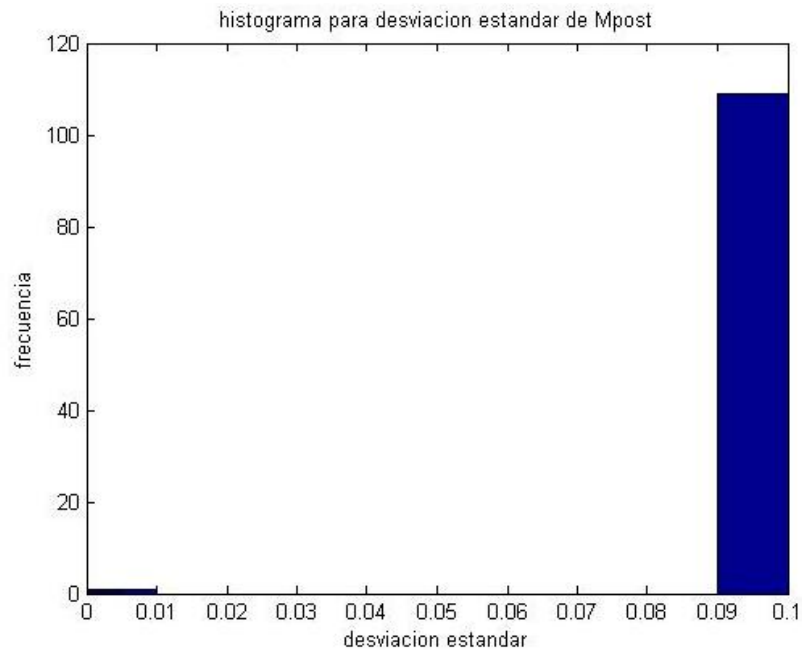
Figura 48 Desviación estándar de Mpost



smpostM <11x10 double>										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	9.7580e-05	0.0994	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000
2	0.0959	0.0972	0.0983	0.0997	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000
3	0.0975	0.0965	0.0990	0.0987	0.0995	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000
4	0.0986	0.0981	0.0970	0.0977	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000
5	0.0985	0.1000	0.0980	0.0986	0.0979	0.0995	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000
6	0.1000	0.0986	0.1000	0.0982	0.0997	0.0984	0.0984	0.0999	0.1000	0.1000
7	0.1000	0.0986	0.1000	0.1000	0.0983	0.1000	0.0989	0.0971	0.0995	0.1000
8	0.1000	0.1000	0.0984	0.1000	0.1000	0.0983	0.1000	0.0999	0.0999	0.0991
9	0.1000	0.1000	0.0987	0.1000	0.1000	0.1000	0.0983	0.1000	0.1000	0.1000
10	0.1000	0.1000	0.1000	0.0983	0.1000	0.1000	0.1000	0.0996	0.1000	0.1000
11	0.1000	0.1000	0.1000	0.0989	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000

Elaborado por: Byron Tarabata

Figura 49 Histograma de frecuencia para Mpost



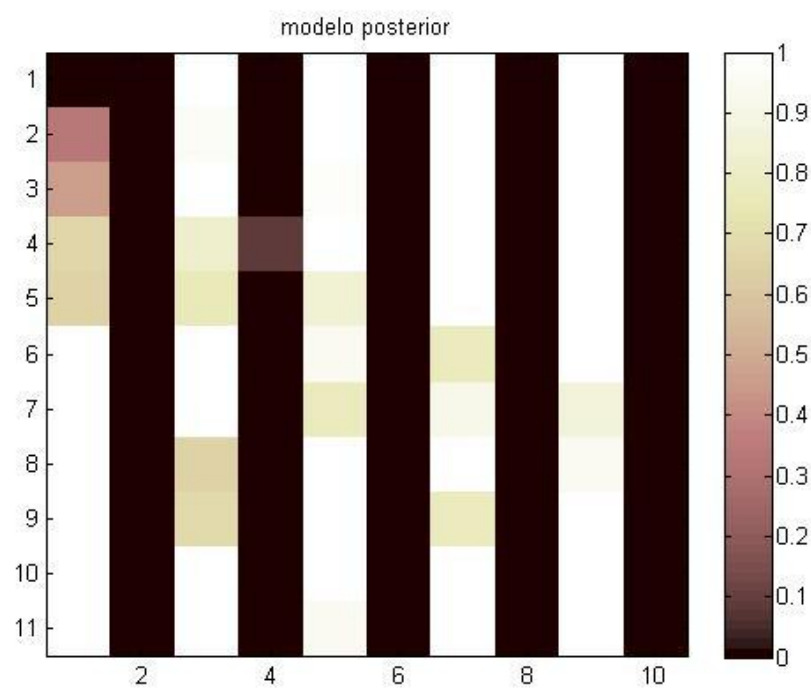
Elaborado por: Byron Tarabata

Se observa que al aumentar el error en las observaciones el valor de la desviación estándar de la para Mpost para el primer escaque figura 48 es de 9.758×10^{-5} evidenciando que el error se ha incrementado en 6.7894×10^{-6} unidades (segundos/kilómetros).

Como se observa en el histograma figura 49 casi todos los bloques poseen la misma desviación estándar exceptuando el primer escaque (figura 47 b), donde el error permanece constante, de manera similar a la figura 44 donde el error se mantenía en los bloques donde no atravesaban rayos.

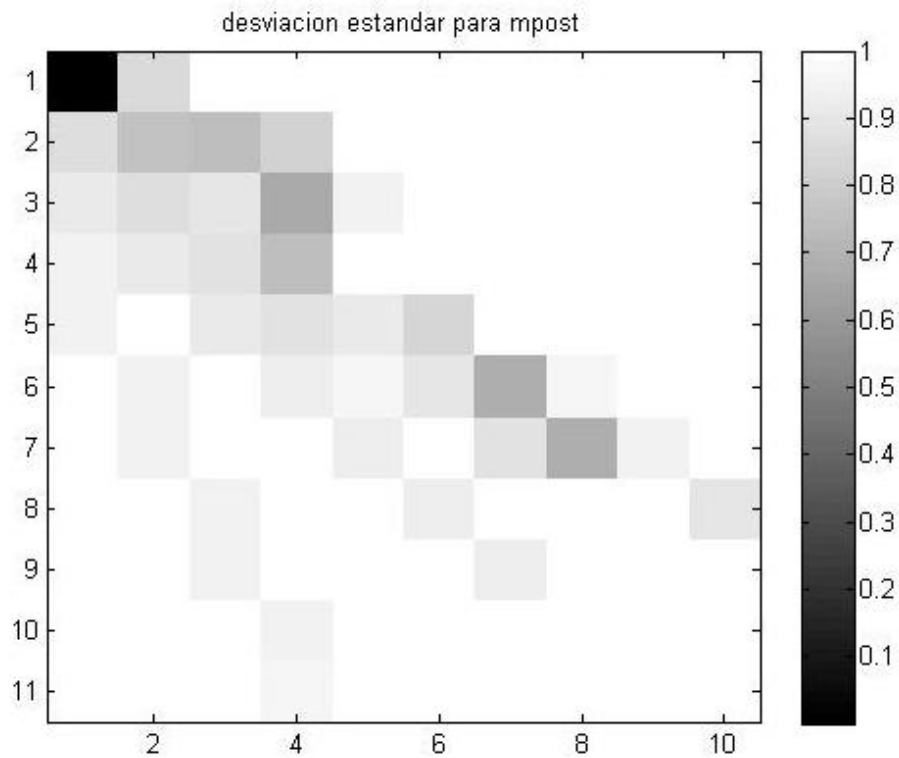
También se realizara otra prueba incrementado el error en el modelo y disminuyendo el error en las observaciones para ello se establecen los valores de $sm=1$, y $sd=0.1$.

Figura 50 Mpost con $sm=1$ y $sd=0.1$



Elaborado por: Byron Tarabata

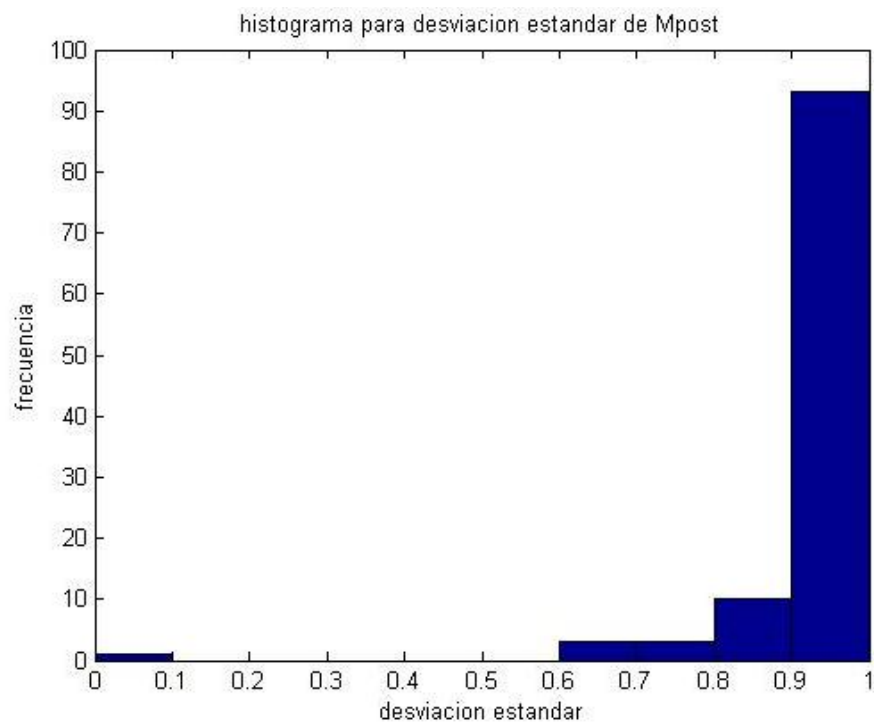
Figura 51 Desviación estándar de Mpost



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	2.7935e-04	0.8556	1	1	1	1	1	1	1	1	
2	0.8687	0.7608	0.7491	0.8135	1	1	1	1	1	1	
3	0.9171	0.8607	0.8991	0.6572	0.9398	1	1	1	1	1	
4	0.9502	0.9211	0.8751	0.7457	1	1	1	1	1	1	
5	0.9459	1	0.9182	0.8887	0.9119	0.8428	1	1	1	1	
6	1	0.9482	1.0000	0.9286	0.9675	0.9041	0.6786	0.9545	1	1	
7	1	0.9476	1	1	0.9305	1	0.8901	0.6780	0.9476	1	
8	1	1	0.9423	1	1	0.9325	1	0.9941	0.9926	0.8972	
9	1	1	0.9524	1	1	1	0.9319	1	1	1	
10	1	1	1	0.9382	1	1	1	0.9853	1	1	
11	1	1	1	0.9608	0.9987	1	1	1	1	1	
12											

Elaborado por: Byron Tarabata.

Figura 52 Histograma de Cpost

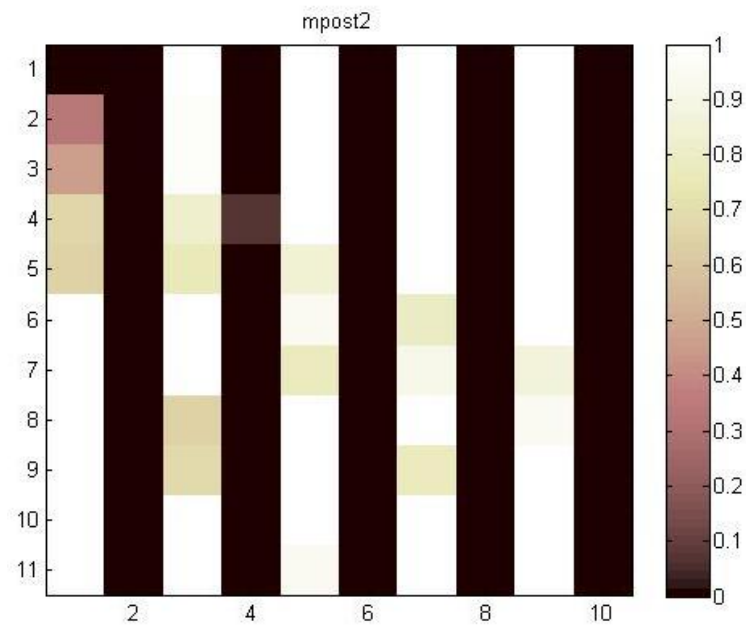


Elaborado por: Byron Tarabata

En el primer escaque el valor es 2.7935×10^{-4} (s/km) tomando en cuenta que su error inicial era de 1, para los demás escaques donde atraviesa por lo menos un rayo el error tiene valores comprendidos entre 0.7 y 0.9 (s/km) error no varía en los bloques donde no hay rayos.

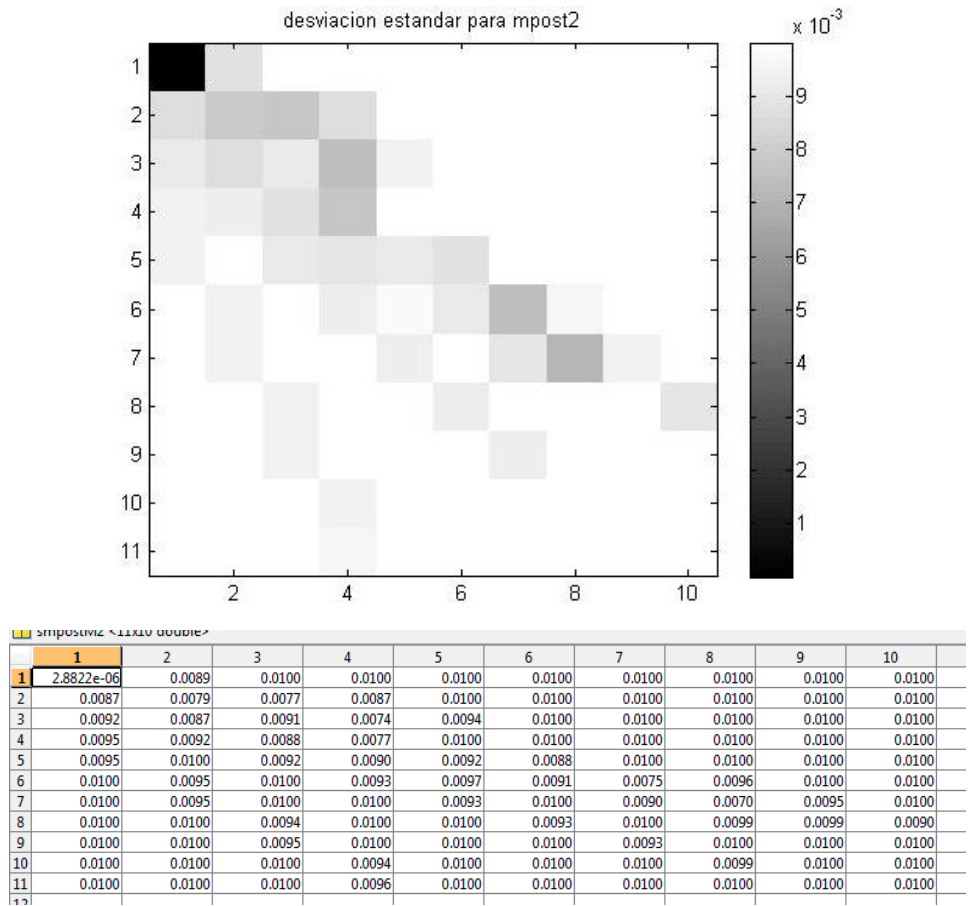
Una última prueba al modelo Mpost consiste en tomar como información a priori la información a posteriori, para ello se utilizara Mpost y Cpost de la como Mprior y Cprior respectivamente .

Figura 53 Mpost 2



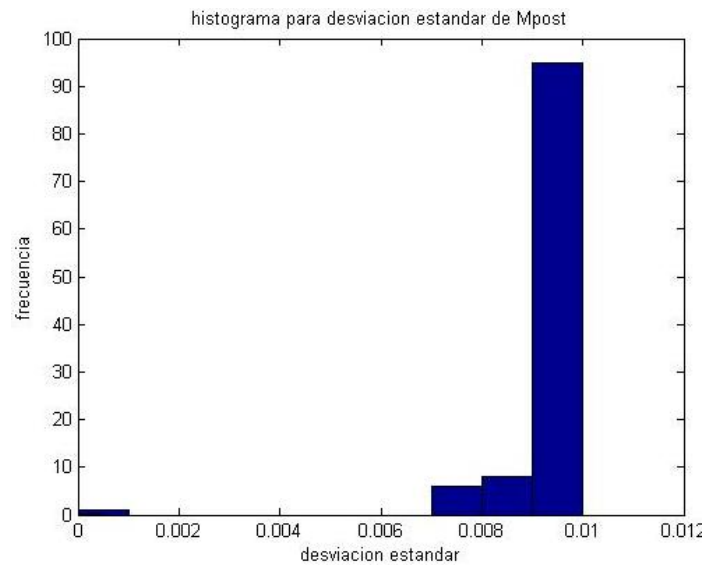
Elaborado por: Byron Tarabata

Figura 54 Desviación estándar para Mpost 2



Elaborado por: Byron Tarabata

Figura 55 Histograma Cpost 2



Elaborado por: Byron Tarabata

Aquí se observa que el error para el primer bloque es de 2.882×10^{-6} este mientras que el error para el mismo bloque del Mpost de la figura 44 es (2.9686×10^{-6}) , con lo que se evidencia que el error ha disminuido, esto solo para el primer bloque por donde atraviesan todos los rayos.

En los demás bloques de Mpost2 el error permanece invariable de manera similar al Mpost original donde el error permanecía constante solo en los escaques donde no atravesaban rayos.

CONCLUSIONES

Se logró visualizar y manipular señales sísmicas de la región del Pisayambo, dando continuación a la línea de investigación Análisis de señales sísmicas y tomografía de volcanes que desarrolla el Centro de investigación y modelamiento ambiental.

En sismología existen diferentes herramientas para visualización de señales sísmicas, dentro de ellas esta SAC que es un software de propósito general para la manipulación de series de tiempo, con énfasis en señales sísmicas, el cual se distribuye bajo los términos GNU GPL (General Public License).

Este Software se instaló en una computadora del CIMA, para facilitar las labores en la línea de investigación de Análisis de señales sísmicas. Usado principalmente para la observación de las señales del catálogo sísmico de la región del Pisayambo.

Se desarrolló un software de tomografía sísmica en Matlab, el cual permite obtener la solución al problema inverso, mediante la aplicación del algoritmo Tarantola-Valette con el que se obtuvo un nuevo modelo discreto de lentitudes que corresponde a la tomografía de la región del Pisayambo.

La tomografía sísmica está compuesta de dos partes la primera el Problema directo el cual consiste en obtener datos mediante la aplicación de ecuaciones que se conocen de antemano, para esta investigación la solución del problema directo fue la obtención del tiempo de propagación de la onda utilizando para ello el principio de Fermat, con lo que se puede determinar el trayecto del rayo sísmico, y la segunda parte la resolución del Problema inverso con el que a partir de las mediciones y observaciones se puede inferir ciertos parámetros del fenómeno estudiado, para la tomografía consistió en obtener los parámetros de lentitud del medio conociendo los tiempos de propagación.

La solución del problema inverso mediante métodos clásicos del álgebra lineal tienen su limitación ya que solo sirve cuando las matrices son invertibles, la utilización de una nueva técnica de inversión de datos basado en el algoritmo de Tarantola-Valette donde a diferencia del método clásico este permite invertir matrices no cuadradas y toma en cuenta los errores de la teoría.

Se partió de un modelo de capas planas como modelo a prior de la litosfera ecuatoriana, después de realizada la inversión de los datos se obtuvo un modelo en malla correspondiente a un modelo de lentitudes de la región del Pisayambo, donde se observa una nueva distribución de lentitudes distribuida de manera diagonal a través de la región del Pisayambo.

RECOMENDACIONES

Si bien la teoría del problema inverso fue desarrollada para solucionar problemas en la geofísica se recomienda utilizar esta nueva herramienta matemática para estudiar otros fenómenos dentro de la electrónica, se recomienda la realización estudios de tomografía de rayos X, utilizando los equipos del laboratorio de física, o desarrollar tomografía de impedancia eléctrica, o impartirse en la materia de métodos numéricos como nuevo método para el ajuste de curvas.

En la realización de esta investigación se utilizó un número limitado de rayos sísmicos, se recomienda la utilización de más rayos con la finalidad de aporten más información sobre la estructura del suelo de la región del Pisayambo. Para mejorar la resolución de la tomografía se debería reducir el tamaño de cada bloque aumentando así el número de bloques teniendo en cuenta que el tamaño de cada bloque está limitado por la longitud de onda de una onda sísmica que están en el orden de 0.3 y 4.5 kilómetros.

Para futuras investigaciones se recomienda la elaboración de un código que permita calcular la longitud de cada rayo para cada bloque de la matriz G.

La discretización para la región del Pisayambo está dada por bloques de 2 km para el eje “y” 1 km para el eje “x”, se realizó esta discretización en función a la geometría de los rayos sísmicos que atraviesan la región en estudio.

LISTA DE REFERENCIAS

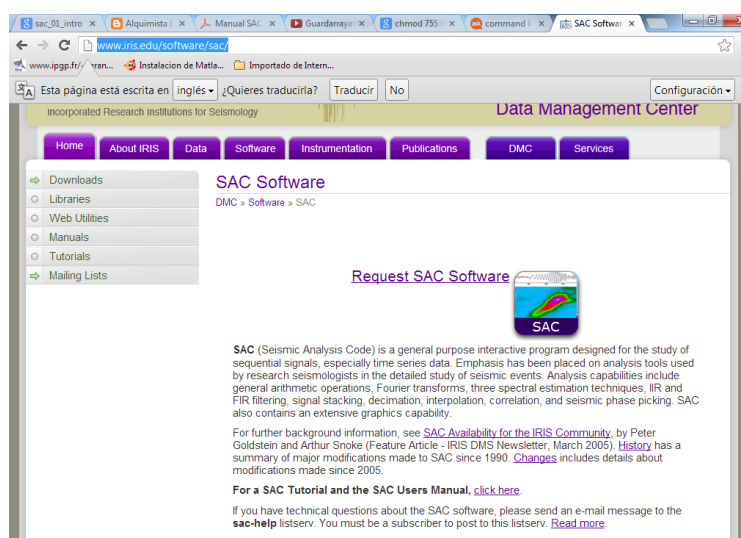
- Alvarado, A. (2009). *Origen de las fallas geologicas*. Quito, Ecuador: Instituto Geofísico de la escuela Politecnica Nacional.
- Araujo, S. (2008). *Teoria del Problema Inverso*. Memorias del XI encuentro de matematicas. Quito: Escuela Politecnica Nacional.
- Araujo, S. (2010). *Aplicacion del principio de Fermat a la tomografia sismica.parte I .fundamentos fisicos*. La Granja(12), 13-18.
- Araujo, S. (2012). 2. *Resolución del problema directo de tomografía sísmica: trazado de rayos sísmicos en el clúster de Pisayambo*. La Granja(15), 48-54.
- Araujo, S., Troncoso, L., & Ruiz, M. (2009). *Relocalizacion de dobles diferencias del cluster sismico de Pisayambo*. Quito: IGEPN.
- Arrieta, E. (2011). *Tratameinto de señales y construccion de un catalogo sismico con eventos del cluster Pisayambo*. Quito.
- Aster, R., Borchers , B., & Thurber , C. (2012). *Parameter Estimation and Inverse Problems (Second Edition)*. Oxford: Academic press.
- Barzola, J., Vargas, P., & Pastorino, M. (2007). *Métodos de Scattering Inverso Electromagnético para pruebas y evaluaciones no destructivas*. Revista Tecnológica ESPOL, 1-8.
- Beckwith, T., Marangoni, R., & Lienhard, J. (2007). *Mechanical Measurements*. mexico: Prentice hall .
- Blanco, J. (1995). *Tomografia lineal con residuos temporales del manto bajo la peninsula iberica*. Madrid.
- Hecht, E. (2000). *Óptica*. Madrid: Pearson Addison Wesley.
- Instituto Geofísico. (2010). *Informe sísmico para el año 2010*. Quito: Escuela Politecnica Nacional.
- Jean-Jacques, L., Luis, R., & Gerard, W. (1993). *On the use of the checker-board test to assess the resolution of tomographic inversions*. Geophys, 313-318.
- Keller, E., & Blodgett, R. (2006). *Riesgos Naturales*. Madrid, España: Pearson Prentice Hall.
- Manchuel, K., Regnier, M., Bethoux, N., Font, Y., Sallares, V., Diaz, J., & Yopez, H. (2011). *New insights on the interseismic active deformation along the North Ecuadorian–South Colombian (NESC) margin*. Tectonics , 30.

- Monteiller, V., Araujo, S., Métaxian, J.-P., & Valette, B. (2006). Tomografías de ondas P en el Ecuador. *6tas Jornadas en ciencias de la tierra* (págs. 205-206). Quito: Escuela Politecnica nacional.
- Rosental, M., & Iudin, P. (1973). *Diccionario Filosofico*. Argentina: Ediciones Universo.
- Sarria, A. (2007). *Dianmica Terrestre (Vision integral para la ingenieria moderna)*. Bogota, Colombia : Ediciones Unidas.
- Sarria, A. (2008). *Terremotos e infraestructura*. Bogota, Colombia: Ediciones Uniandes.
- Shearer, P. (2009). *Introduction to Seismologi*. Cambridge University Press: Cambridge University Press.
- Tarantola, A. (2005). *Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation*. Paris, Francia: SIAM.
- Tarantola, A. (2007). *Individual sections of the book, Inverse Problem Exercices* . Paris: SIAM.
- Tarantola, A. (2007). *Inverse Problems Exercises* (Vol. I). Paris: SIAM.

5 ANEXOS

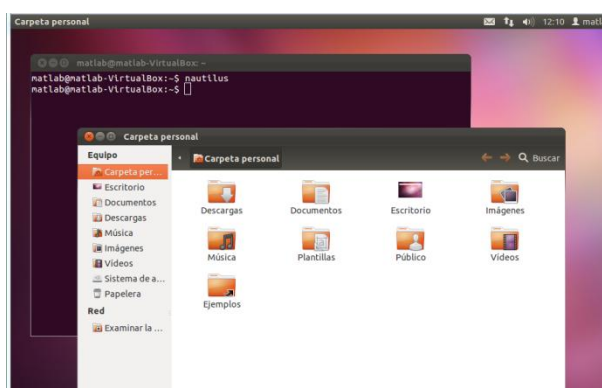
Anexo 1. Instalación y utilización de SAC

Para instalar SAC (Seismic Analysis Code) lo primero es obtener el software desde la página web de los desarrolladores <http://www.iris.edu/software/sac/>, en la pestaña “Request SAC software”. Hay que llenar unos detalles para obtener el programa: el tipo de plataforma computacional, 32 o 64 bit, y cosas como su nombre e institución en la que va a usarse.



La respuesta de esta solicitud va a estar un email de IRIS que contiene el programa adjunto en un archivo llamado algo como `sac-101.5c-linux_x86_32.tar.gz`. Hay que mover el archivo .tar dentro del directorio donde quiere instalar el programa y extraerlo:

En este caso se usó el administrador de archivos Nautilus para extraer en el directorio `/usr/local/`



Se copia el archivo “`sac-101.5c-linux_x86_32.tar.gz`” en la carpeta `/usr/local/` se extrae el archivo creándose así la carpeta `sac`.

El tipo de función puede ser *impulse*, *step*, *boxcar* entre otros; *delta* es la separación en segundos entre los puntos de la serie del tiempo, *npts* es el número de puntos en total en la serie de tiempo, y *begin* es el tiempo cuando empieza la serie de tiempo.

Por ejemplo, para una señal de tipo escalón, con 1000 puntos en el serie de tiempo separados por 0.01 segundos (entonces una serie de tiempo de 10 segundos en total), usamos:

```
SAC>funcgen step delta 0.01 npts 1000 begin 0
```

Crear gráficos en SAC

Para hacer un gráfico en SAC, se usa el comando “plot”. Se puede teclear “p” en el lugar de “plot” si quieren, siempre los comandos en SAC puede ser acortados.

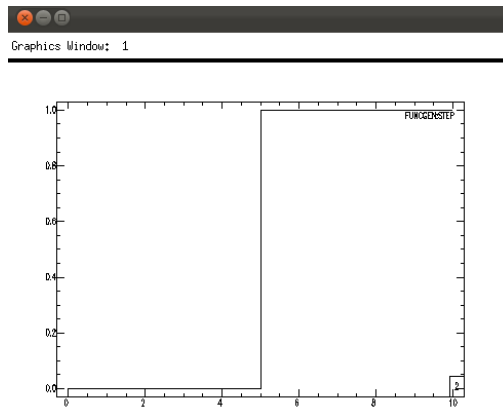
Para ver la serie de tiempo en un gráfico e interactuar con él, se puede usar el comando “plotpk” o “ppk”. En esta ventana, se puede elegir la llegada de fases sísmicas y hacer zoom en la serie de tiempo:

zoom in: x

zoom out: o

Para hacer un gráfico de una señal para poder ponerlo en un documento, debemos usar el formato “sacgraphicsformat (sgf)” con el comando “begindevices” o “bd”. Después, el comando “plot” hace el gráfico en un archivo .sgf en su sistema. Se puede convertir el gráfico al formato .ps usando el comando “sgftops”. Por ejemplo:

```
SAC>funcgenstep delta 0.01 npts 1000 begin 0
SAC>begindevicessgf
SAC>plot
SAC>ls
SAC>sgftops f001.sgf grafico_escalon.ps
SAC>begindevicesxwindow
```



Archivos SAC - guardar y leer

Después de generar una función en SAC con “funcgen”, se puede usar el comando “write” (o simplemente “w”) para guardarlo como un archivo:

```
SAC>funcgen step delta 0.01 npts 1000 begin 0
SAC> write sac_escalon.sac
SAC> quit
```

Ahora que el archivo .sac está guardado, podemos leerlo con “read” (“r”):

```
SAC> read 19980101.004359.PISA._.SAC
SAC> plot
SAC> quit
```

Encabezados en SAC

Cada archivo de SAC tiene un encabezado (header), que muestra algunos detalles de la serie de tiempo e información adicional asociada con el sismograma. Para ello se utiliza el comando “listhdr” (“lh”).

```
matlab@matlab-VirtualBox: ~
FILE: 19980101.004359.PISA._.SAC - 1
-----
NPTS = 10292
B = 0.000000e+00
E = 1.029100e+02
IFTYPE = TIME SERIES FILE
LEVEN = TRUE
DELTA = 1.000000e-02
ODELTA = 1.000000e-02
IDEP = UNKNOWN
DEPMIN = 9.000000e+00
DEPMAX = 2.102400e+04
DEPMEN = 4.518529e+01
TOMARKER = 30.68 ( P 0)
T1MARKER = 41.47 ( S 2)
KZDATE = JAN 01 (001), 1998
KZTIME = 00:43:59.939
KINST = ACQ2.53
KSTNM = PISA
Waiting
LOVROK = TRUE
NVHDR = 6
LPSPOL = TRUE
LCALDA = TRUE
KCMPNM =
```

Elaborado por: Byron Tarabata

La combinación de archivos

Si dos archivos tienen las mismas variables - DELTA, BEGIN y NPTS - es posible combinarlos usando los siguientes comandos:

“mulf” - multiplicar lo que es en la memoria de SAC por un archivo, punto por punto.

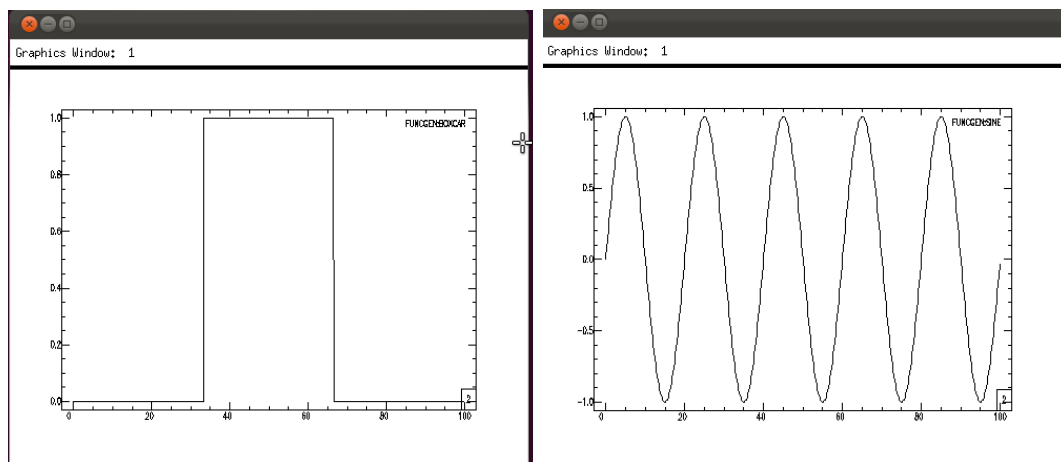
“addf” - sumar un archivo a la memoria.

“subf” - sustraer un archivo de la memoria.

“divf” - dividir la memoria por un archivo.

Por ejemplo, creamos dos señales en SAC:

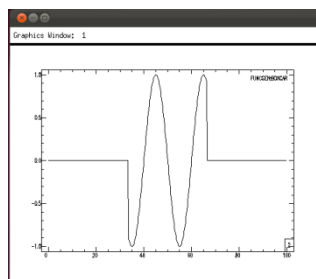
```
SAC>funcgen boxcar npts 1000 delta 0.1 begin 0
SAC>                                     plot
SAC>                                     write boxcar.sac
SAC>funcgen sine npts 1000 delta 0.1 begin 0
SAC>                                     plot
SAC> write sine.sac
```



Elaborado por: Byron Tarabata

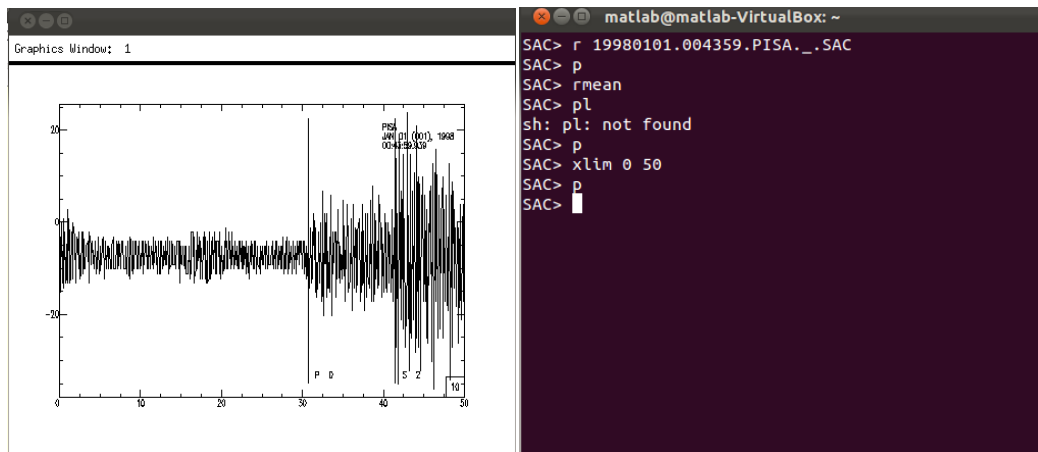
Ahora se los puede multiplicar.

```
SAC>read boxcar.sac
SAC>mulfsine.sac
SAC> plot
```



Visualización de una señal sísmica:

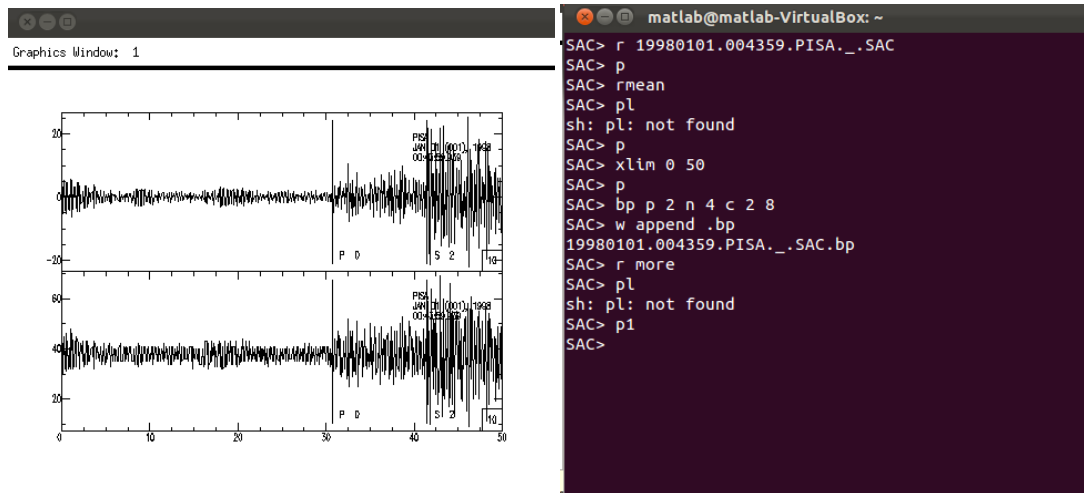
```
SAC> r 19980101.004359.PISA._.SAC # lee una señal
SAC>rmean                          # elimina el promedio
SAC>plot                            # visualiza la señal
SAC>xlim 0 50                       # zoom de la señal
SAC>plot                            # visualiza la señal
```



Elaborado por: Byron Tarabata

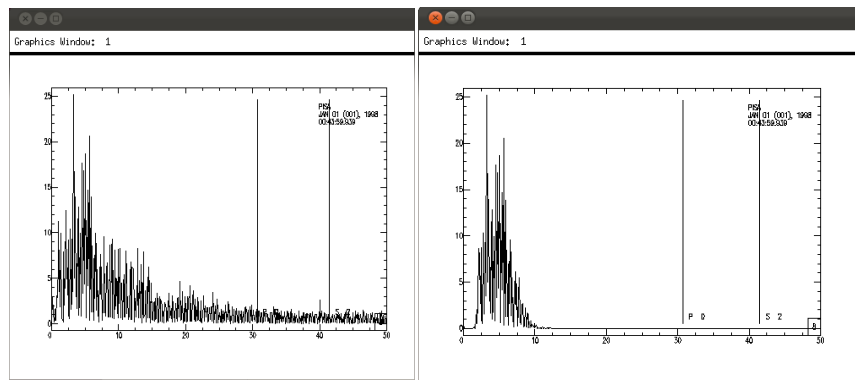
Filtrado y análisis espectral:

```
SAC> r 19980101.004359.PISA._.SAC # lee una señal
SAC>rmean                          # elimina el promedio
SAC>plot                            # visualiza la señal
SAC>xlim 0 50                       # zoom de la señal
SAC>plot                            # visualiza la señal
SAC>bp p 2 n 4 c 2 8                # aplica un filtro pasa
baja de 2 a 8 hertz
SAC> w append .db                  # guarda la señal filtrada como
19980101.004359.PISA._.SAC
SAC> r more                        # lee los datos originales de nuevo
SAC> pl                            # visualiza la señal original y a señal
filtrada
```



Elaborado por: Byron Tarabata

```
SAC> r 19980101.004359.PISA._.SAC # lee una señal
SAC>rmean # elimina el promedio
SAC>tapper# aplica una ventana Hanning de 0,05 de
anchura a los datos
SAC>fft # aplica la transformada rápida de
Fourier
SAC>keepam # visualiza la señal
SAC>cut 0 50 # recorta la señal
SAC> pl # visualiza la FFT de la señal
```



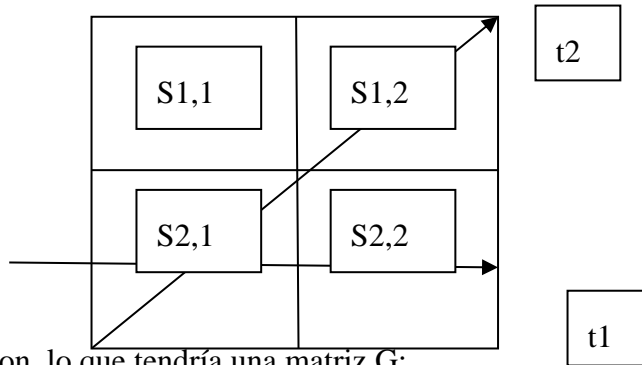
```

matlab@matlab-VirtualBox: ~
ERROR 1307: Illegal operation on spectral file 19980101.0
Use PLOTSP command to plot spectral data.
SAC> keepam
SAC> fft
DC level after DFT is 100.14
SAC> p1
ERROR 1307: Illegal operation on spectral file 19980101.0
Use PLOTSP command to plot spectral data.
SAC> p
ERROR 1307: Illegal operation on spectral file 19980101.0
Use PLOTSP command to plot spectral data.
SAC> plotsp
Waitingplotsp
SAC>
SAC>
SAC> r 19980101.004359.PISA._.SAC
SAC> rmean
SAC> taper
SAC> fft
DC level after DFT is -0.10913
SAC> keepam
SAC> cut 0 50
SAC> p1
SAC>

```

Anexo 2 Cálculo de Mpost

Considerese la siguiente geometria con cuatro bloques y dos rayos:



Con lo que tendría una matriz G :

$$G = \begin{bmatrix} 0 & \bar{2} & \bar{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (A.1)$$

Y los tiempos para cada rayo:

$$d_{obs} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (A.2)$$

Con lo que se tendría la ecuación $d = G \cdot m$

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{2} & \bar{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_{1,1} \\ s_{1,2} \\ s_{2,1} \\ s_{2,2} \end{bmatrix} \quad (A.3)$$

Donde t_1 y t_2 son los tiempos de arribo de los rayos, $s_{1,1}$ es el parámetro m de lentitud para cada bloque.

Hallar los parámetros mediante la inversión de la matriz G no es posible, ya que no es una matriz cuadrada para ello se utilizara la solución al problema inverso mediante el algoritmo Tarantola-Valette mediante la siguiente ecuación.

$$\mathbf{m}_{post} = \mathbf{G}^t \mathbf{C}_{obs}^{-1} \mathbf{G} + \mathbf{C}_{prior}^{-1} \mathbf{G}^t \mathbf{C}_{obs}^{-1} \mathbf{d}_{obs} + \mathbf{C}_{prior}^{-1} \mathbf{m}_{prior} \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{C}_{post} = \mathbf{G}^t \mathbf{C}_{obs}^{-1} \mathbf{G} + \mathbf{C}_{prior}^{-1} \quad (\text{A.5})$$

Para ello se completaran los parámetros faltantes de la ecuación A.4

Cobs:

$$\mathbf{C}_{obs} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Cprior:

$$\mathbf{C}_{prior} = \begin{bmatrix} 0.5 & & & \\ & 0.5 & & \\ & & 0.5 & \\ & & & 0.5 \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

dobs:

$$\mathbf{d}_{obs} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Mprior:

$$\mathbf{m}_{prior} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

Remplazando a la ecuación A.5 en la ecuación A.4 se tiene:

$$\mathbf{m}_{post} = \mathbf{C}_{post} \mathbf{G}^t \mathbf{C}_{obs}^{-1} \mathbf{d}_{obs} + \mathbf{C}_{prior}^{-1} \mathbf{m}_{prior} \quad (\text{A.10})$$

Calculando

Cpost

$$\mathbf{C}_{post} = \mathbf{G}^t \mathbf{C}_{obs}^{-1} \mathbf{G} + \mathbf{C}_{prior}^{-1} \quad (\text{A.11})$$

$$\mathbf{G}^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

$$\mathbf{C}_{obs}^{-1} = \frac{1}{\mathbf{C}_{obs}} \text{adj}(\mathbf{C}_{obs}) \quad (\text{A.13})$$

$$\mathbf{C}_{obs}^{-1} = \frac{1}{0.25} \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

Se considera el mismo error para el modelo a priori

$$\mathbf{C}_{prior}^{-1} = \frac{1}{\mathbf{C}_{prior}} \text{adj}(\mathbf{C}_{prior}) \quad (\text{A.14})$$

$$\mathbf{C}_{prior}^{-1} = \frac{1}{0.625} \begin{pmatrix} 0.125 & & & \\ & 0.125 & & \\ & & 0.125 & \\ & & & 0.125 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.15})$$

Y se tiene:

$$\mathbf{C}_{post} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{0}{2} & 0 \\ \frac{0}{2} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix})^{-1} \quad (\text{A.16})$$

$$\mathbf{C}_{post} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2692 & -0.1538 & 0.0769 \\ 0 & -0.1553 & 0.2308 & -0.1154 \\ 0 & 0.0769 & -0.1154 & 0.3077 \end{pmatrix} \quad (\text{A.17})$$

$$\mathbf{G}^t \mathbf{C}_{obs}^{-1} \mathbf{d}_{obs} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{0}{2} & 0 \\ \frac{0}{2} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6.8284 & 4 \end{pmatrix} \quad (\text{A.18})$$

$$\mathbf{C}_{prior}^{-1} \mathbf{m}_{prior} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.19})$$

$$\mathbf{G}^t \mathbf{C}_{obs}^{-1} \mathbf{d}_{obs} + \mathbf{C}_{prior}^{-1} \mathbf{m}_{prior} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2.8284 & 2 \\ 6.8284 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4.8284 & 2 \\ 6.8284 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.20})$$

Retomando la ecuación A.10

$$\mathbf{m}_{post} = \mathbf{C}_{post} \mathbf{G}^t \mathbf{C}_{obs}^{-1} \mathbf{d}_{obs} + \mathbf{C}_{prior}^{-1} \mathbf{m}_{prior}$$

$$\mathbf{m}_{post} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2692 & -0.1538 & 0.0769 \\ 0 & -0.1553 & 0.2308 & -0.1154 \\ 0 & 0.0769 & -0.1154 & 0.3077 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4.8284 \\ 6.8284 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.21})$$

$$\mathbf{m}_{post} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.7110 \\ 0.1406 \\ 1.4279 \end{pmatrix} \quad (\text{A.22})$$

Calculo de Mpost utilizado la ecuación

$$\mathbf{m}_{post} = \mathbf{m}_{prior} + \mathbf{G}^t \mathbf{C}_{obs}^{-1} \mathbf{G} + \mathbf{C}_{prior}^{-1} - \mathbf{G}^t \mathbf{C}_{obs}^{-1} \mathbf{d}_{obs} - \mathbf{G} \mathbf{m}_{prior} \quad (\text{A.23})$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2692 & -0.1538 & 0.0769 \\ 0 & -0.1553 & 0.2308 & -0.1154 \\ 0 & 0.0769 & -0.1154 & 0.3077 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{m}_{post} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.7110 \\ 0.1406 \\ 1.4279 \end{pmatrix} \quad (\text{A.24})$$

Calculo de Mpost utilizando la ecuación:

$$\mathbf{m}_{post} = \mathbf{m}_{prior} + \mathbf{C}_{prior} \mathbf{G}^t (\mathbf{G} \mathbf{C}_{prior} \mathbf{G}^t + \mathbf{C}_{obs})^{-1} \mathbf{d}_{obs} - \mathbf{G} \mathbf{m}_{prior} \quad (\text{A.25})$$

$$\mathbf{m}_{post} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0.5 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.26})$$

$$\mathbf{m}_{post} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.7110 \\ 0.1406 \\ 1.4279 \end{pmatrix} \quad (\text{A.27})$$

Anexo 3. Teoría del Problema Inverso