Universidad Politécnica Salesiana
Carrera de Ingeniería Mecánica

MANUAL DE MATRICES Y DETERMINANTES

Msc. Wilson Benavides

Wilson Benavides

Manual de Matrices y Determinantes

2012

ABYA YALA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA SALESIANA
ECUADOR
SALESIANOS DON BOSCO

Carrera de Ingeniería Mecánica

Manual de Matrices y Determinantes

Msc. Wilson Benavides

1era. edición:	© Editorial Universitaria Abya-Yala
	Casilla: 2074 P.B.X.: (+593 7) 2 862213 Fax: (+593 2) 4 088958 e-mail: rpublicas@ups.edu.ec www.ups.edu.ec
	Universidad Politécnica Salesiana Casilla: 2074 P.B.X.: (+593 7) 2862213 Cuenca-Ecuador
Revisión:	Msc. Wilson Bravo
Diseño, diagramación e Impresión:	Editorial Universitaria Abya-Yala
ISBN UPS:	978-9978101179

Impreso en Quito-Ecuador, agosto 2012

CONTENIDOS

UNIDAD 1: DIAGNÓSTICO Y NIVELACIÓN DE CONOCIMIENTOS
UNIDAD 2: MATRICES Y DETERMINANTES

- Definiciones. Clases
- Propiedades de las matrices
- Operaciones
- Matrices y sistemas de ecuaciones
- Determinante $n \times n$
- Propiedades de los determinantes
- Ejercicios de aplicación

Índice general

1 INTRODUCCIÓN **1**

2 DIAGNÓSTICO Y NIVELACIÓN DE CONOCIMIENTOS **5**

3 MATRICES Y DETERMINANTES **11**
- 3.1 Sumatoria 13
  - 3.1.1 Propiedades de las sumatorias 13
  - 3.1.2 Aplicaciones prácticas 19
- 3.2 Matrices 19
  - 3.2.1 Definición de matriz 19
  - 3.2.2 Notación de matrices 19
  - 3.2.3 Clases de matrices 20
  - 3.2.4 Operaciones elementales de fila 26
  - 3.2.5 Operaciones con matrices 28
  - 3.2.6 Matrices y sistemas de ecuaciones lineales 33
- 3.3 Determinantes 41
  - 3.3.1 Definición de determinante 41
  - 3.3.2 Matriz adjunta 45

4 BIBLIOGRAFÍA **51**

INTRODUCCIÓN

El autor del presente trabajo, con el afán de fortalecer el aprendizaje del álgebra lineal en los estudiantes del primer nivel de la Universidad Politécnica Salesiana, propone este *Manual de Matrices y Determinantes* como un instrumento de ayuda a quienes cursan la Carrera de Ingeniería Mecánica del Campus Kennedy.

Son muy conocidas, las dificultades que a nivel general se presentan en el aprendizaje de las matemáticas, las cuales, en parte, se atribuyen a la falta de metodología que presentan algunos libros que son utilizados como guía de estudio, ya que en su contenido proponen conceptos y definiciones sin la debida sustentación con ejemplos y aplicaciones prácticas.

Por esta razón, el presente trabajo incorpora, aparte de los conocimientos científicos necesarios acorde a las temáticas, aplicaciones prácticas y lineamientos procedimentales para resolver ejercicios. De esta manera se busca propiciar la reflexión y el análisis para que el estudiante logre un aprendizaje significativo.

El autor

PRIMERA UNIDAD

TEMÁTICA:
1. DIAGNÓSTICO Y NIVELACIÓN DE CONOCIMIENTOS

- Introducción

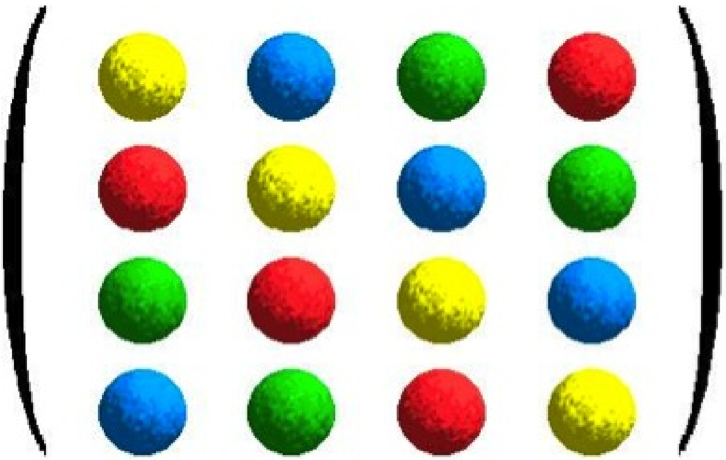
OBJETIVO:
Realizar un proceso de inducción en el estudio de la presente temática.

DIAGNÓSTICO Y NIVELACIÓN DE CONOCIMIENTOS

Introducción

Para la nivelación se debe anotar en síntesis los conocimientos previos que poseen los estudiantes en cuanto a conceptos, habilidades, aptitudes y valores detectados mediante prueba objetiva, prueba de ensayo, observación directa, entrevistas, trabajo de grupos y otros mecanismos empleados en la evaluación inicial. En función de estos prerrequisitos se planificará la nivelación de conocimientos.

SEGUNDA UNIDAD

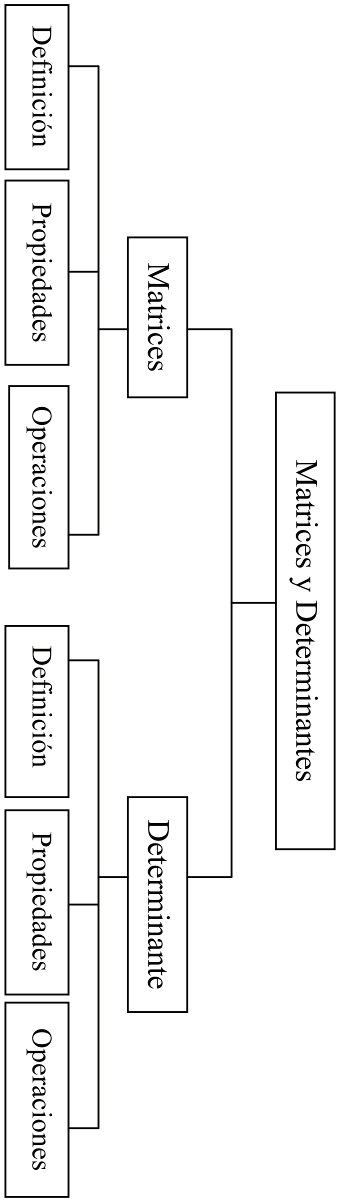


TEMÁTICA:
2. MATRICES Y DETERMINANTES

- Definiciones. Clases
- Propiedades de las matrices
- Operaciones
- Matrices y sistemas de ecuaciones
- Determinante $n \times n$
- Propiedades de los determinantes
- Ejercicios de aplicación

OBJETIVO:
Estudiar las propiedades de las matrices y determinantes y su aplicación en la resolución de ejercicios vinculados a la vida diaria.

ESTRUCTURA ACADÉMICA DE UNIDAD



MATRICES Y DETERMINANTES

Introducción

Antes de entrar a abordar el tema de las matrices y los determinantes se estudiará la teoría de la sumatoria de elementos, que es un capítulo importante para su entendimiento. Luego, ya en materia, revisaremos la definición de matriz, sus clases, las operaciones entre ellas y su aplicación en la resolución de sistemas de ecuaciones y cálculo de áreas. En cada caso, y a partir de la teoría, se presentan ejercicios resueltos y actividades para que el estudiante refuerce lo aprendido.

Estrategias de aprendizaje

Se recomienda al estudiante realizar las siguientes actividades para culminar con éxito su estudio de matrices y determinantes.

1. Lea todos los conceptos y definiciones que se detallan en el desarrollo de la unidad.

2. Realice una lista de los conceptos y definiciones que considere más importantes.

3. Lea con mucha atención los ejemplos resueltos y saque en una hoja los enunciados de estos.

4. Resuelva los ejercicios cuyos enunciados los anotó anteriormente, procurando no mirar la forma de resolución dada en el texto.

5. Si no logro resolver con éxito al menos el 70 % de los ejercicios, se recomienda volver a leer nuevamente los conceptos, definiciones y los ejemplos resueltos.

6. Si pudo resolver con éxito estos ejemplos, ¡Felicitaciones!, puede pasar a resolver los ejercicios propuestos de autoevaluación para la casa.

Sumatoria

Se representa por la letra sigma ($\sum$), la cual indica que se deben sumar ciertos elementos mediante letras con subíndices; estas letras que son variables se suelen representar por letras minúsculas del alfabeto como por ejemplo a_i, a_j, $\ldots$, a_n. El orden con que va a ir variando el subíndice se indica en los extremos del símbolo de sumatoria, siendo por lo general en la parte inferior el inicio y en la parte superior el final del orden hasta el cual se desea sumar, por ejemplo:

$\sum\limits_{i=1}^{i=5} a_i$ indica que el subíndice i va iniciar con el valor de 1, luego 2, y así sucesivamente hasta llegar a 5. Desarrollando la sumatoria, se tiene:

$$\sum_{i=1}^{i=5} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

$$\sum_{i=1}^{i=5} a_i = \sum_{i=1}^{5} a_i$$

Las sumatorias tienen ciertas propiedades que facilitan obtener su resultado, las cuales se enuncian a continuación, todas ellas son susceptibles de demostración. En este caso solo serán verificadas mediante ejemplificaciones.
A continuación exponemos algunas propiedades de sumatorias.

Propiedades de las sumatorias

1. $\sum\limits_{i=n}^{p} c.a_i = c \sum\limits_{i=1}^{p} a_i$

   donde c es una constante (no tiene subíndice)

Ejemplo:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=3}^{9} 5a_i &= 5a_3 + 5a_4 + 5a_5 + 5a_6 + 5a_7 + 5a_8 + 5a_9 \\
&= 5(a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9) \\
&\quad \text{sacando factor común 5} \\
&= 5\left(\sum_{i=3}^{9} a_i\right)
\end{aligned}
$$

Luego:

$$\sum_{i=3}^{9} 5a_i = 5\sum_{i=3}^{9} a_i$$

2. $\displaystyle\sum_{i=n}^{p}(a_i + b_i) = \sum_{i=n}^{p} a_i + \sum_{i=n}^{p} b_i$

Ejemplo:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{6}(a_i + b_i) &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) \\
&\quad + (a_4 + b_4) + (a_5 + b_5) + (a_6 + b_6) \\
&= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6) \\
&\quad + (b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6) \\
&\quad \text{asociando términos} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{6} a_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{6} b_i\right)
\end{aligned}
$$

Luego:

$$\sum_{i=1}^{6}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{6} a_i + \sum_{i=1}^{6} b_i$$

3. $\sum_{i=n}^{p}(a_i \cdot b_i) = \sum_{i=n}^{p}(b_i \cdot a_i)$

Ejemplo:

$$\sum_{i=5}^{i=8}(a_i \cdot b_i) = (a_5 b_5) + (a_6 b_6) + (a_7 b_7) + (a_8 b_8)$$
$$= \sum_{i=5}^{i=8}(b_i \times a_i)$$

se puede intercambiar el orden los factores en el producto entre dos números

Luego:

$$\sum_{i=5}^{i=8} a_i \cdot b_i = \sum_{i=5}^{i=8} b_i \cdot a_i$$

4. $\sum_{i=n}^{p} a_i = \sum_{i=n}^{q} a_i + \sum_{i=q+1}^{p} a_i$ siendo $n<q<p$

Ejemplo:

$$\begin{aligned}\sum_{i=3}^{7} a_i =& a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 \\ =&(a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7) \\ =& \left(\sum_{i=3}^{4} a_i\right) + \left(\sum_{i=5}^{7} a_i\right)\end{aligned}$$

Luego:

$$\sum_{i=3}^{7} a_i = \sum_{i=3}^{4} a_i + \sum_{i=5}^{7} a_i$$

5. $\displaystyle\sum_{i=n}^{p} a_{n+p-i} = \sum_{i=n}^{p} ai$

6. $\displaystyle\sum_{i=n}^{p} a_i = \sum_{i=n+q}^{p+q} a_{i-q}$

7. $\displaystyle\sum_{i=n}^{p} a_i + a_{p+1} = \sum_{i=n}^{p+1} a_i$

8. $\displaystyle\sum_{i=n}^{p} (a_i - a_{i-1}) = a_p - a_{n-1}$

9. $\displaystyle\sum_{i=n}^{p} a = ap \qquad a$ es constante

10. $\displaystyle\sum_{1}^{n} i = \frac{(n+1)\cdot n}{2} = 10$

Ejemplo:

$$\sum_{i=l}^{4} i = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

Luego:

$$\sum_{l}^{n} i = \frac{(4+1)\cdot 4}{2} = 10$$

ACTIVIDAD DEL ESTUDIANTE

Actividad para el aula

Resuelva los siguientes ejercicios:

1. Encuentre el valor de la siguiente expresión sin desarrollarla, únicamente aplique e indique qué propiedad fue usada.

$$\sum_{k=2}^{5}(3k+1)$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{5}(3k+1) &= \sum_{k=2-1}^{5-1}[3(k+1)+1] \qquad \text{propiedad 6} \quad q=-1\\
&= \sum_{k=1}^{4}[3k+3+1]\\
&= \sum_{k=1}^{4}[3k+4]\\
&= \sum_{k=1}^{4}3k+\sum_{k=1}^{4}4 \qquad \text{propiedad 2}\\
\sum_{k=2}^{5}(3k+1) &= \sum_{k=1}^{4}3k+\sum_{k=1}^{4}4 \qquad \text{propiedades 1 y 9}\\
&= 3\sum_{k=1}^{4}k+4\cdot 4\\
&= 3\left[\frac{(4+1)\cdot 4}{2}\right]+16\\
&= 3\cdot[10]+16\\
&= 46
\end{aligned}$$

2. En el desarrollo del ejercicio anterior, utilizando otras propiedades, indique cuáles fueron aplicadas.

$$\sum_{k=2}^{5}(3k+1) = \sum_{k=2}^{5}3k+1\sum_{k=2}^{5}1$$

$$
\begin{aligned}
&= 3\left[\sum_{k=1}^{5} k - \sum_{k=1}^{1} k\right] + (5-2+1) \\
&= 3\left[\frac{5(5+1)}{2} - \frac{n+1}{2}\right] + 4 \\
&= 42 + 4 \\
&= 46
\end{aligned}
$$

ACTIVIDAD DE REFUERZO

Actividad para la casa

Ejercicios propuestos (autoevaluación)

1. Encuentre el valor de la expresión siguiente, inclinando las propiedades que se deben usar para el efecto.

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) \qquad \text{Rpta} \quad n^2$$

2. Encuentre el valor de la expresión siguiente, indicando las propiedades que se deben usar para el efecto.

$$\sum_{i=1}^{3n}(2i-1) \qquad \text{Rpta} \quad 9(n+1)^2$$

3. Verifique:

a) $\displaystyle\sum_{i=n}^{p} a_i = \sum_{i=n+3}^{p+3} a_{i-3}$

b) $\displaystyle\sum_{i=n}^{p} a_i = \sum_{i=n-2}^{p-2} a_{i+2}$

Aplicaciones prácticas

Una de las aplicaciones más comunes de sumatorias se halla en programas bancarios donde se maneja gran cantidad de información de clientes, transacciones, números de cuenta, etc., por lo que se utilizan identificadores con subíndices que varían de uno en adelante.

Matrices

Definición de matriz

Una matriz A de $m \times n$ es un arreglo rectangular de $m \times n$ números dispuestos en m filas o renglones y n columnas.

Notación de matrices

Las matrices se representan mediante letras mayúsculas como A, B, C, D, E,. . . , mientras que los elementos de cada matriz con letras minúsculas acompañadas de dos subíndices que generalmente son i, j, las cuales representan el número de fila y el número de columna donde se encuentra ubicado dicho elemento. El número de filas y columnas de una matriz se representan por m y n, respectivamente.

Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 12 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 22 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 01 \\ 3 & i \end{pmatrix}$$

$$A = A_{2\times 2} = (a_{ij})_{2\times 2} \qquad B = B_{2\times 3} = (b_{ij})_{2\times 3} \qquad C = C_{2\times 2} = (c_{ij})_{2\times 2}$$

En la matriz B

$2 = b_{11}$	primera fila, primera columna
$1 = b_{12}$	primera fila, segunda columna
$0 = b_{13}$	primera fila, tercera columna
$3 = b_{21}$	segunda fila, primera columna
$22 = b_{22}$	segunda fila, primera columna
$4 = b_{23}$	segunda fila, primera columna

ACTIVIDAD DE REFUERZO

Actividad para la casa

Ejercicios propuestos (autoevaluación)

1. Represente cada uno de los elementos de la matriz C del ejemplo anterior e indique el número de fila y columna en el que se halla.

2. Escriba la matriz D cuyos elementos se muestran a continuación:

$$\begin{array}{lll} d_{11} = -2 & d_{21} = 6 & d_{31} = -1 \\ d_{12} = 3 & d_{22} = -8 & d_{32} = 7 \\ d_{13} = 1 & d_{23} = 2 & d_{33} = 3 \\ d_{14} = 5 & d_{24} = 4 & d_{34} = 2 \end{array}$$

Clases de matrices

Matrices iguales: Dos matrices $A = (aij)_{m1\times n1}$ y $B = (bij)_{m2\times n2}$ son iguales si y solo si:

$$\begin{cases} a) & m_1 = m_2 \\ b) & n_1 = n_2 \\ c) & a_{ij} = b_{ij} \end{cases} \quad \text{para todo } i, j \text{ elemento de los naturales}$$

Se notará $A = B$

Ejemplo:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 3}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 2}$ no son iguales porque: $n_1 \neq n_2$

$m_1 = 2 \quad n_1 = 3 \qquad m_2 = 2 \quad n_1 = 2$

$$a_{ij} \neq b_{ij}$$

$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & i \end{pmatrix}_{2\times 2}$ $\quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & i \end{pmatrix}_{2\times 2}$ son iguales porque:

a) $m_1 = m_2$

b) $n_1 = n_2$

c) $c_{ij} = d_{ij}$

$E = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}_{3\times 2}$ $\quad F = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}_{3\times 2}$ son iguales porque:

a) $m_1 = m_2$

b) $n_1 = n_2$

c) $e_{ij} = f_{ij}$

$G = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/3 & \alpha \end{pmatrix}_{3\times 2}$ $\quad H = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/3 & 2 \end{pmatrix}_{1\times 3}$ son iguales si y solo si:

$$\alpha = 2$$

ACTIVIDAD DE REFUERZO

Actividad para la casa

Ejercicios propuestos (autoevaluación)
Verifique si las siguientes matrices son iguales o no.

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \end{pmatrix}$ $\qquad B = (1\ 2)$

2) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad D = \begin{pmatrix} a & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & a \end{pmatrix}$

Matriz cuadrada: Una matriz A_{mn} se dice que es una matriz cuadrada si $m = n$.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{es una matriz cuadrada } m = 3\ n = 3$$

Matriz fila y matriz columna: ***i)*** Sea $A = (a_{ij})_{mxn}$ se llama i-ésima fila de A a la matriz $Ai = (a_{i1}\ a_{i2}\ a_{i3} \ldots a_{in})$ o matriz fila.

ii) Sea $A = (a_{ij})_{mxn}$ se llama j-ésima columna de A a la matriz

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \text{ o matriz columna}$$

Matriz transpuesta: Sea $A = (a_{ij})_{mxn}$, se llama matriz transpuesta de A a la matriz $B = (b_{kl})_{n\times m}$ tal que $b_{kl} = a_{lk}$. Se nota $B = A^t$.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}_{2\times 3} \quad \text{su matriz transpuesta es } A^t = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

ACTIVIDAD DE REFUERZO

Ejercicios propuestos (autoevaluación)
Halle la matriz transpuesta de las matrices B y C

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & -2 & 3 \\ -1 & 7 & 2 & 6 \end{pmatrix}_{3\times 4}$$

Matriz antisimétrica: Una matriz $A \in M_{n\times m}$ se llama antisimétrica, si la matriz transpuesta de A es igual a su opuesta. Es decir: $A^t = -A$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \quad A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad -A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$A^t = -A$ entonces A es una matriz antisimétrica

ACTIVIDAD DE REFUERZO

Ejercicios propuestos (autoevaluación)
Verifique si la matriz B es o no anti simétrica.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz nula: Una matriz $A = (a_{ij})_{mn}$ se dice matriz nula, si y solo si $a_{ij} = 0$ para todo i, j.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 2} \qquad \text{es una matriz nula}$$

Matriz identidad: Una matriz $A = (a_{ij})_{nxn}$ se llama matriz identidad, si y solo si:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad i = j \\ 0, & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 2} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ & & \end{pmatrix}$$

A y B son dos matrices identidad

Matriz diagonal: Una matriz A cuadrada de $n \times n$ se llama matriz diagonal, si y solo si $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$.

Ejemplo:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C y D son dos matrices diagonales

Matriz escalar: Una matriz cuadrada de $A_{n\times n}$ se llama matriz escalar si $a_{ii} = \alpha$ para todo i y $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$.

Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Las matrices A y B son dos matrices escalares

Matriz triangular superior: Una matriz cuadrada de $A_{n\times n}$ es triangular superior, si y solo si $a_{ij} = 0$ para todo i mayor que $j(i > j)$.

Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Las matrices A y B son triangulares superiores ya que tienen ceros bajo la diagonal.

Matriz triangular inferior: Una matriz cuadrada de $A_{n\times n}$ es triangular inferior, si y solo si $a_{ij} = 0$ para todo i menor que $j(i > j)$.

Ejemplos:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Las matrices C y D son triangulares inferiores ya que tienen ceros sobre la diagonal.

Operaciones elementales de fila

Entre las operaciones elementales de fila de una matriz de m filas y n columnas se pondrá atención principalmente en 3 operaciones:

1. Multiplicación de una fila por un escalar no nulo. Sea Ar la fila r-ésima y α un escalar diferente de cero
$$\alpha.Ar = \alpha(a_{r1}\ a_{r2} \ldots\ldots a_{rn})$$
$$\alpha.Ar = (\alpha a_{r1}\ \alpha a_{r2} \ldots\ldots \alpha a_{rn})$$
2. Reemplazo de la r-ésima fila de A por la fila r más α veces la fila s, siendo r diferente de s.
$$Ar \leftarrow Ar + \alpha As \quad r \neq s$$
3. Intercambiando filas en A
$$Ar \leftrightarrow As \quad r \neq s$$

Definición.- Sean A y B, dos matrices de $m \times n$, se dice que B es equivalente por filas a A, si B se obtiene de A por medio de un número finito de operaciones elementales de fila.

Definición.- Una matriz A de orden $m \times n$ se llama reducida por filas si:
1) El primer elemento no nulo de cada fila no nula es 1
2) Cada columna de A que tiene el primer elemento no nulo de alguna fila no nula, tiene todos sus otros elementos igual a cero.

Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ es una matriz reducida por filas

Teorema: Toda matriz A de rango $m \times n$ es equivalente por filas a una matriz reducida por filas.

Ejemplo:

Hallar una matriz reducida por filas que sea equivalente por filas a la matriz A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_2 = F_2 - 2F_1 \\ F_3 = F_3 - 3F_1 \end{matrix}$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_2 = (-1)F_2 \\ F_3 = F_3 - 2F_2 \end{matrix}$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad F_1 = F_1 - 2F_2$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{matriz reducida por filas}$$

Entonces la matriz R es equivalente a la matriz A

$$R \approx A$$

Definición.- El rango de una matriz A de orden $m \times n$ es el número de filas no nulas de una matriz reducida por filas que sean equivalente por filas a la matriz A. En el ejemplo anterior el rango de $A = 2$

Definición.- Una matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ se llama escalonada reducida por filas si:

1. A es reducida por filas.
2. Toda fila nula de A se hallan "bajo" las filas no nulas
3. Si las filas $1, 2, 3 \ldots r$ $(r \leq m)$ son las filas no nulas de A, y si el primer elemento no nulo de la fila i se halla en la columna k, entonces $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots < k_r$.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} r = 3 \\ i = 1 \\ i = 2 \\ i = 3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} k = 2 \\ k = 4 \\ k = 6 \end{matrix} \quad \text{Entonces} \quad \begin{matrix} k_1 < k_2 < k_3 \\ (2 < 4 < 6) \end{matrix}$$

Teorema: Toda matriz A de rango $m \times n$ es equivalente por filas a una matriz escalonada reducida por filas.

Operaciones con matrices

Suma de matrices:

Dadas las matrices entre $\begin{matrix} A = (a_{ij})_{m\times n} \\ B = (b_{ij})_{m\times n} \end{matrix}$

Llamaremos suma de la matriz A y B a la matriz $C = (c_{ij})_{m\times n}$ tal que $C_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ notaremos como $C = A + B$

Ejemplos:

Realizar la suma entre A y B

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 7 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

ACTIVIDAD DE REFUERZO

Ejercicios propuestos (autoevaluación)
Conocidas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & -5 & 2 \\ 6 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 7 & 6 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

Determine:

1) $A + B$

2) $A + C$

3) $B + C$

Propiedades de la suma de matrices

1) $A - B = A + (-B)$
2) $-(-A) = A$
3) $-O_{m\times n} = O_{m\times n}$
4) $-(A+B) = (-A) + (-B)$
5) Para todas las matrices A y B existe una matriz X tal que $A + X = B$
6) Si $A + B = A + C$, entonces $B = C$.

Producto de un escalar por una matiz:

Sea $A = (a_{ij})_{m\times n}$, a_{ij} elemento de la matriz A y α un número, entonces: $\alpha \cdot A = \alpha(a_{ij})_{m\times n} = (\alpha a_{ij})_{m\times n}$.

Ejemplo:

$$2^* \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$$

Propiedades del producto de un escalar por una matriz

1. $1 \cdot A = A$
2. $(0) \cdot A = (0)$
3. $\alpha \cdot (0) = (0)$
4. $(-1)A = -A$
5. Si $\alpha \cdot A = (0)$ entonces $\alpha = 0$ o $A = (0)$

6. Entonces $\alpha \cdot (\beta A) = \beta(\alpha \cdot A)$
7. $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$
8. $\alpha(A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$
9. $\alpha(A - B) = \alpha \cdot A - \alpha \cdot B$

Producto de matrices

Dadas las matrices $A = (a_{ij})_{m\times n}, B = (b_{ij})_{n\times p}$, llamamos producto de A por B a la matriz $C = (c_{ij})_{m\times p}$ tal que:

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} \quad \begin{matrix} \text{Para todo } i = 1, \dots m \\ \text{Para todo } j = 1, \dots p \end{matrix}$$

Notaremos como $C = A \cdot B$

Ejemplo:

Realizar el producto de A por B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}_{2\times 3} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

$c_{11} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 = -1$
$c_{12} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot (1) = -3$
$c_{13} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot (0) + (-1) \cdot (3) = 1$
$c_{21} = 1 \cdot 1 + (-1)(-1) + 3(0) = 2$
$c_{22} = 1 \cdot 2 + (-1)(-2) + 3(1) = 7$
$c_{23} = 1 \cdot 4 + (-1) \cdot 0 + 3 = 13$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 2 & 7 & 13 \end{pmatrix}$$

ACTIVIDAD DE REFUERZO

Ejercicios propuestos (autoevaluación)
Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{2\times 3} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

Realice los siguientes productos:

1) $A \cdot B$

2) $A \cdot C$

3) $B \cdot C$

4) $C \cdot A$

Propiedades del producto de matrices

Las propiedades del producto se dan mediante los siguientes teoremas:
Para todo número y toda matriz $A_{m\times n}$ y $B_{n\times p}$

1. $[\alpha \cdot A]B = \alpha[A \cdot B]$
2. $[A \cdot \alpha]B = \alpha[A \cdot B]$
3. $[A \cdot B]\alpha = A[B \cdot \alpha]$
4. $A \cdot [B + C] = A \cdot B + A \cdot C$
5. $[A + B]C = A \cdot C + B \cdot C$
6. $[A \cdot B]C = A[B \cdot C]$

Observación.- El producto entre las matrices no es conmutativo, es decir: $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Matrices y sistemas de ecuaciones lineales

Sea un sistema de m ecuaciones lineales y n incógnitas representadas como sigue:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \ldots\ldots\ + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \ldots\ldots\ + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_m x_1 + a_{m2}x_2 + \ \ldots\ldots\ + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

y sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$$ la matriz denominada matriz de coeficientes

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1}$$ la matriz columna de variables $x_1, x_2, \cdots x_n$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$ la matriz columna de variables $b_1, b_2, \cdots b_n$

Como la matriz es de orden A y X una matriz de orden $n \times 1$, el producto matricial $A \cdot X$ es una matriz de orden $m \times 1$. Por lo que el sistema de ecuaciones y n incógnitas inicial puede ser expresado como:

$$A \cdot X = b$$

Ejemplo:

Escribir mediante representación matricial el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x_1 + ax_2 + 2x_3 & = 5 \\ -2x_1 + 2x_2 + 4x_3 & = 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 & = 2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = b$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ACTIVIDAD DE REFUERZO

Ejercicios propuestos (autoevaluación)
Escriba mediante representación matricial los siguientes sistemas de ecuaciones:

1) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 5 \\ -x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -1 \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = -2 \\ -2x_1 + 6x_2 = 4 \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 2 \end{cases}$$

4) $$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 18 \end{cases}$$

Inversa de una matriz cuadrada

Sean A y B dos matrices de orden $n \times m$ tal que $A \cdot B = B \cdot A = I$ donde I es la matriz identidad de orden $n \times n$; entonces B se llama la inversa de A y se denota por A^{-1}, entonces se tienen que:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Si la matriz A tiene inversa se dice que A es invertible, además una matriz cuadrada que no es invertible se llama *singular* y aquella que es invertible se dice que es *no singular*.

Teorema: Si una matriz A es invertible, entonces su inversa es única.

Teorema: Sean A y B dos matrices invertibles de orden $n \times n$ entonces $A \cdot B$ es invertible y $(A \cdot B)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

Si la matriz es invertible, el sistema $A \cdot X = b$ tiene solución única $X = A^{-1} \cdot b$. Siendo esta la razón por la que se estudian las matrices inversas.

Inversa aumentada

Cuando un sistema de ecuaciones puede ser expresado en notación matricial, para su resolución, existe una notación que es más simplificada denominada matriz aumentada. Esta se condensa en una sola matriz, la de coeficientes de las variables y de los coeficientes independientes "del otro lado de la igualdad" separadas en una línea vertical; así por ejemplo:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

matriz de coeficientes de las variables $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

matriz de coeficientes independientes $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

matriz de variables $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

notación matricial del sistema de ecuaciones $A \cdot x = b$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

matriz aumentada $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right)$

Eliminación de Gauss-Jordan

Es un método que sirve para resolver sistemas de ecuaciones mediante operaciones elementales en las filas de la matriz aumentada para convertir la matriz de coeficientes de las variables "matriz A" en una matriz identidad I, así por ejemplo:
Resolver el siguiente sistema de ecuaciones utilizando el método de eliminación de Gauss-Jordan.

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 6x_3 = 9 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 6 \\ -x_1 + 16x_2 - 14x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -6 & 9 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ -1 & 16 & -14 & 3 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ -1 & 16 & -14 & 3 \end{array}\right) F_1' = F_1/3$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 18 & -16 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} F_2' = F_2 - 2F_1 \\ F_3' = F_3 + F_1 \end{array}$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -160 & 6 \end{array}\right) \quad F_3' = F_3 - 18F_2$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/80 \end{array}\right) \quad F_3' = \frac{F_3}{-160}$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -18 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/80 \end{array}\right) \quad F_1' = F_1 - 2F_2$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 93/40 \\ 0 & 1 & 0 & 3/10 \\ 0 & 0 & 1 & -3/80 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} F_1' = F_1 + 18F_3 \\ F_2' = F_2 - 8F_3 \end{array}$$

$$\text{Entonces} \quad \begin{array}{rl} x_1 = & 93/40 \\ x_2 = & 3/10 \\ x_3 = & -3/80 \end{array}$$

ACTIVIDAD DE REFUERZO

Ejercicios propuestos (autoevaluación)
Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando el método de eliminación de Gauss-Jordan.

$$1) \begin{cases} 2x + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 3_x = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} -x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 9 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

Cálculo de la inversa de una matriz

Para calcular la inversa de una matriz cuadrada se suele seguir el siguiente procedimiento.

a) Se escribe la matriz aumentada$(A|I)$.

b) Mediante la reducción por reglones se lleva a la matriz A a su forma escalonada reducida por reglones.

c) Si la forma escalonada reducida por reglones de A es la matriz identidad I entonces la matriz que se halla a la derecha de la vertical es A^{-1}.

d) Si la reducción de la matriz A conduce a una fila de ceros a la izquierda de la vertical, entonces A no tiene inversa, es decir A no es invertible.

Ejemplo:

Determinar si es que existe la inversa de A, donde A es la matriz de coeficientes de las variables del sistema del ejercicio resuelto por el método de Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 6 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 16 & -14 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1/3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 16 & -14 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) F_1' = \frac{F_1}{3}$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 18 & -16 & 1/3 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} F_2' = F_2 - 2F_1 \\ F_3' = F_3 + F_1 \end{array}$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -160 & 37/3 & -18 & 1 \end{array}\right) F_3' = F_3 - 18F_2$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -37/480 & 9/80 & -1/160 \end{array}\right) F_3' = \frac{F_3}{-160}$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -18 & 5/3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -37/480 & 9/80 & -1/160 \end{array} \right) \quad F_1' = F_1 - 2F_2$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 67/240 & 1/40 & -9/80 \\ 0 & 1 & 0 & -1/20 & 1/10 & 1/20 \\ 0 & 0 & 1 & -37/480 & 9/80 & -1/160 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} F_1' = F_1 + 18F_3 \\ F_2' = F_2 - 8F_3 \end{array}$$

Entonces $A^{-1} = \begin{pmatrix} 67/240 & 1/40 & -9/80 \\ -1/20 & 1/10 & 1/20 \\ -37/480 & 9/80 & -1/160 \end{pmatrix}$ es la matriz inversa

recuerde que $A^{-1} \cdot A = I = A \cdot A^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -6 \\ 2 & 5 & 4 \\ -1 & 16 & -14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 67/240 & 1/40 & -9/80 \\ -1/20 & 1/10 & 1/20 \\ -37/480 & 9/80 & -1/160 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Además el sistema de ecuaciones puede ser expresado en forma matricial como:
$A \cdot x = b$

$\underbrace{A^{-1} \cdot A} \cdot x = A^{-1} \cdot b$

$I \cdot x = A^{-1} \cdot b$ multiplicamos a la igualdad por A^{-1} $x = A^{-1} \cdot b$

$\boxed{x = A^{-1} \cdot b}$

Es la forma de resolver un sistema de ecuaciones conociendo su matriz inversa.

$$X = \begin{pmatrix} 67/240 & 1/40 & -9/80 \\ -1/20 & 1/10 & 1/20 \\ -37/480 & 9/80 & -1/160 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{67}{240}\cdot 9 & +\frac{1}{40}\cdot 6 & -\frac{9}{80}\cdot 3 \\ -\frac{1}{20}\cdot 9 & +\frac{1}{10}\cdot 6 & +\frac{1}{20}\cdot 3 \\ -\frac{37}{480}\cdot 9 & +\frac{9}{80}\cdot 6 & -\frac{1}{160}\cdot 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 93/40 \\ 3/10 \\ -3/80 \end{pmatrix} \quad \text{Como } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Entonces $X_1 = \frac{93}{40}$ $X_2 = \frac{3}{10}$ $X_3 = -\frac{3}{80}$

ACTIVIDAD DE REFUERZO

Ejercicios propuestos (autoevaluación)
Hallar las matrices inversas de los coeficientes en los tres ejercicios propuestos para su resolución por el método de Gauss-Jordan. Además que la matriz inversa se halla bien calculada por medio de $A^{-1} \cdot A = I$ y hallar la matriz X mediante $X = A{-}1 \cdot b$.

Aplicaciones Prácticas

Contacto directo e indirecto con una enfermedad contagiosa. En este ejemplo se muestra cómo se puede usar una matriz para modelar la manera en que se extiende una enfermedad contagiosa. Suponga que cuatro personas de un primer grupo, han contraído esta enfermedad. Este grupo hace contacto con cinco personas de un segundo grupo. Estos contactos, llamados contactos directos, se pueden representar por una matriz de 4×5.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En este caso se hace $a_{ij} = 1$, si la i-ésima persona del primer grupo hace contacto con la j-ésima persona del segundo grupo. Por ejemplo, el 1 en la tercera fila y cuarta columna significa que la tercera persona del primer grupo (infectada) hizo contacto con la cuarta persona del segundo grupo.

Determinantes

El método anterior no es el único para hallar una matriz inversa, también se lo puede hallar mediante el determinante y la matriz adjunta.

Definición de determinante

Se define al determinante como una función que asigna un número a una matriz cuadrada.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ una matriz cuadrada de orden 2×2, el determinante de la matriz A se denota por $detA$ o $|A|$.

$$detA = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = |A|.$$

Sea en forma general una matriz cuadrada de orden entonces el determinante de denotado por esta dado por:

$$\boxed{detA = |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + \ldots + a_{1n}A_{1n}}$$

Que se puede escribir en forma reducida utilizando la notación de sumatoria

$$\boxed{detA = |A| = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k}}$$

Donde: A_{1k} se conoce como cofactor $1k$ de A y se lo determina como

$\boxed{A_{1k} = (-1)^{1+k}|M_{1k}|}$ y $|M_{1k}|$ se denomina menor $1k$ de A

$|M_{1k}|$ representa el determinante de la matriz de orden $(n-1) \times (n-1)$ obtenida eliminado la fila 1 y la columna k

Ejemplo:

Calcular el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 9 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 9 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 9 \end{vmatrix} = 2\left[(-1)^{1+1}|M_{11}|\right] + (-3)\left[(-1)^{1+2}|M_{12}|\right] + 5\left[(-1)^{1+3}|M_{13}|\right]$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 9 \end{vmatrix} = 2(-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} + (-3)(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} + 5(-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 9 \end{vmatrix} = 2[0 \cdot 9 - (4)(-3)] + 3[(1)(9) - (4)(3)] + 5[1 \cdot (-3) - 0(3)]$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot 12 + 3(-3) + 5(-3) = 0$$

Nota 1:
En la definición del determinante de orden $n \times n$ se escogieron los coeficientes $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1k}$ es decir la primera fila, pero se puede escoger cualquier fila o cualquier columna para resolver el determinante.

Nota 2:
Si los coeficientes de la fila o columna son ceros, facilita el cálculo del determinante, siendo esta la razón por la que se escoge la fila o columna con el mayor número de ceros, pero si no existen filas o columnas con ceros, mediante las operaciones elementales se puede obtener filas o columnas con ceros.

Ejemplo:

Calcular el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 9 \end{pmatrix}$ utilizando la segunda

Calcular el determinante de la matriz utilizando la segunda columna y obteniendo una matriz equivalente mediante operaciones elementales con el mayor número de ceros.

Utilizando la segunda columna:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 9 \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 9 \end{vmatrix} = (-3)\left[(-1)^{1+2}M_{12}\right] + \cancelto{0}{0\left[(-1)^{2+2}|M_{22}|\right]} + (-3\left[(-1)^{3+2}|M_{32}|\right]$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 9 \end{vmatrix} = (-3)(-1)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} + (-3)(-1)\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 9 \end{vmatrix} = 3[(1)(9) - (4)(3)] + 3[(2)(4) - (5)(1)]$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 9 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) + 3(3) = 0$$

Utilizando una matriz equivalente con el mayor número de CEROS en la segunda columna de la matriz A:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 9 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} F_3' = \frac{F_3}{3} \approx \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} F_3' = F_3 - F_2$$
$$\approx \begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} F_1' = F_1 - 3F_3 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Matriz equivalente a la matriz A

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \cancelto{0}{0\left[(-1)^{1+2}|M_{12}|\right]} + \cancelto{0}{0\left[(-1)^{2+2}|M_{22}|\right]} + (-1)\left[(-1)^{3+2}|M_{32}|\right]$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)(-1)\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1[(2)(4) - (8)(1)]$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1[8 - 8] = 0$$

Como se puede observar la matriz se resolvió considerando la primera fila, la segunda columna y una matriz equivalente con el mayor número de ceros y su resultado es el mismo cero.

ACTIVIDAD DE REFUERZO

Ejercicios propuestos (autoevaluación)
Resuelva los siguientes determinantes:

a) Utilizando cualquier fila.

b) Utilizando cualquier columna.

c) Utilizando una matriz equivalente con mayor número de ceros en sus filas o columnas.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & -1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 4 & 0 \\ 4 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Teorema.- Si la matriz A es invertible, entonces $detA \neq 0$ y

$$\boxed{detA^{-1} = \frac{1}{detA}}$$

Matriz adjunta

Sea A una matriz cuadrada de orden $n \times n$ y sea $B = (A_{ij})$ la matriz de cofactores de la matriz A. Entonces la adjunta de A, que se denota por $AdjA$, es la transpuesta de la matriz B de orden $n \times n$.

$$\boxed{AdjA = B^t = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}}$$

$$B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{n1} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Teorema.- Sea A una matriz cuadrada de orden $n \times n$. Entonces A es invertible, si y solo si $detA \neq 0$. Si el $detA \neq 0$, entonces:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{detA} \cdot AdjA}$$

Ejemplo:

Utilizando la matriz adjunta y el determinante hallar la inversa de A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -6 \\ 2 & 5 & 4 \\ -1 & 16 & -14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -6 \\ 2 & 5 & 4 \\ -1 & 16 & -14 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 5 & 9 \\ -1 & 16 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 9 \\ -1 & 18 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C_3 = C_3 + C_2 \qquad C_2 = C_2 + 2C_1$$

Se utilizó operaciones elementales en las columnas y se obtiene una matriz equivalente.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 9 \\ -1 & 18 & 2 \end{vmatrix} = 3(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 18 & 2 \end{vmatrix} + \cancelto{0}{0(-1)^{1+2}}|M_{12}| + \cancelto{0}{0(-1)^{1+3}}|M_{13}|$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 9 \\ -1 & 18 & 2 \end{vmatrix} = 3[(1)(2)-(9)(18)] = 3(2-162) = -480 \qquad detA = -480 \neq 0$$

Entonces A es invertible $A^{-1} = \dfrac{1}{detA}\,AdjA$

$$B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 16 & -14 \end{vmatrix} \begin{aligned} &= (-70-64)(1) \\ &= -134 \end{aligned} \qquad A_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -14 \end{vmatrix} \begin{aligned} &= (-28+4)(-1) \\ &= -24 \end{aligned}$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 16 \end{vmatrix} \begin{aligned} &= (-32+5)(1) \\ &= 37 \end{aligned} \qquad A_{21} = \begin{vmatrix} 6 & -6 \\ 16 & -14 \end{vmatrix} \begin{aligned} &= (-84+96)(-1) \\ &= -12 \end{aligned}$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 14 \end{vmatrix} \begin{aligned} &= (-42-6)(1) \\ &= -48 \end{aligned} \qquad A_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -1 & 16 \end{vmatrix} \begin{aligned} &= (48+6)(-1) \\ &= -54 \end{aligned}$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 6 & -6 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \begin{aligned} &= (24+30)(1) \\ &= 54 \end{aligned} \qquad A_{32} = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \begin{aligned} &= (12+12)(-1) \\ &= 24 \end{aligned}$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \begin{aligned} &= (15-12)(1) \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$B = \begin{pmatrix} -134 & 24 & 37 \\ -12 & -48 & -54 \\ 54 & -24 & 3 \end{pmatrix} \qquad B^t = \begin{pmatrix} -134 & -12 & 54 \\ 24 & -48 & -24 \\ 37 & -54 & 3 \end{pmatrix}$$

Recuerda que $AdjA = B^t = \begin{pmatrix} -134 & -12 & 54 \\ 24 & -48 & -24 \\ 37 & -54 & 3 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \tfrac{1}{-480}\begin{pmatrix} -134 & -12 & 54 \\ 24 & -48 & -24 \\ 37 & -54 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 67/240 & 1/40 & -9/80 \\ -1/20 & 1/10 & 1/20 \\ -37/480 & 9/80 & -1/160 \end{pmatrix}$$

ACTIVIDAD DE REFUERZO

Ejercicios propuestos (autoevaluación)
Calcule la inversa de las siguientes matrices usando el determinante y la adjunta.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 3 & -12 & -2 & -6 \\ -2 & 10 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

APLICACIONES PRÁCTICAS

Áreas de un triángulo y de un paralelogramo.- Se escoge un vértice del paralelogramo como origen de un sistema de referencia y se escribe en notación vectorial esos dos lados que salen del vértice, luego se realiza el producto cruz o vectorial mediante el determinante, cuya primera fila son los unitarios i, j, k, como segunda fila los coeficientes del vector que representa al primer lado y como tercera fila los coeficientes del vector que representa al segundo lado. El resultado de este determinante es el área del paralelogramo y la mitad de ese valor es el área del triángulo.

RECUERDE QUE:

- $\sum_{i=n}^{p} c \cdot a_i = c \sum_{i=l}^{p} a_i$
- $\sum_{i=n}^{p} (a_i + b_i) = \sum_{i=n}^{p} a_i + \sum_{i=n}^{p} b_i$

- $\sum_{i=n}^{p}(a_i \cdot b_i) = \sum_{i=n}^{p}(b_i \cdot a_i)$
- $\sum_{i=n}^{p} a_i = \sum_{i=n}^{q} a_i + \sum_{i=q+1}^{p} a_i$
- $\sum_{i=n}^{p} a_{n+p-i} = \sum_{i=n}^{p} a_i$
- $\sum_{i=n}^{p} a_i = \sum_{i=n+q}^{p+q} a_{i-q}$
- $\sum_{i=n}^{p} a = ap$
- $\sum_{1}^{n} i = \frac{(n+1)n}{2}$
- Una matriz A de $m \times n$ es un arreglo rectangular de $m \times n$ números dispuestos en m filas o renglones y n columnas.
- Dos matrices $A = (aij)_m l \times nl$ y $B = (bij)_m 2 \times n2$ son iguales si y solo si:

$$\begin{cases} a) & m_1 = m_2 \\ b) & n_1 = n_2 \qquad \text{para todo } i, j \text{ elemento de los naturales} \\ c) & a_{ij} = b_{ij} \end{cases}$$

- Una matriz A_{mn} se dice que es una matriz cuadrada si $m = n$.
- Sea $A = (a_{ij})_{m\times n}$ se llama matriz transpuesta de A a la matriz $B = (b_{kl})_{n\times m}$ tal que $b_{kl} = a_{lk}$, se notará $B = A^t$.
- Una matriz $A \in M_{n\times m}$ se llama antisimétrica, si A transpuesta $A^t = -A$.
- Una matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$ se llama matriz identidad, si y solo si:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

- Una matriz A cuadrada de $n \times n$ se llama matriz diagonal, si y solo si $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$.
- Una matriz cuadrada de $A_{n\times n}$ es triangular superior, si y solo si $a_{ij} = 0$ para todo i mayor que $j(i > j)$.
- Una matriz cuadrada de $A_{n\times n}$ es triangular inferior, si y solo si $a_{ij} = 0$ para todo menor que $j(i > j)$.

- Sean A y B, dos matrices de $m \times n$, se dice que B es equivalente por filas a A, si B se obtiene de A por medio de un número finito de operaciones elementales de fila.
- Una matriz A de orden $m \times n$ se llama reducida por filas si:
  1. el primer elemento no nulo de cada fila no nula es 1
  2. cada columna de A que tiene el primer elemento no nulo de alguna fila no nula, tiene todos sus otros elementos igual a cero.
- Dadas las matrices $A = (a_{ij})_{m\times n}$ y $B = (b_{ij})_{m\times n}$. Llamaremos suma de A y B a la matriz $C = (c_{ij})_{m\times n}$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Notaremos $C = A + B$.
- Dadas las matrices $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times p}$. Llamamos producto de A con B a la matriz $C = (c_{ij})_{m\times p}$ tal que:

$$c_{ij} = \sum_{k=l}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} \qquad \begin{array}{l} \text{Para todo } i = 1, \cdots m \\ \text{Para todo } j = 1, \cdots p \end{array}$$

- Sean A y B dos matrices de orden $n \times n$ tal que $A \cdot B = B \cdot A = I$ donde es la matriz identidad de orden $n \times n$. Entonces B se llama la inversa de A y se denota por A^{-1}, entonces se tienen que:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I.$$

- Si una matriz A es invertible, entonces su inversa es única.
- Sean A y B dos matrices invertibles de orden $n \times n$, entonces $A \cdot B$ es invertible, y $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.
- Se define al determinante como una función que asigna un número a una matriz cuadrada.

BIBLIOGRAFÍA

Grossman, Stanley

1991 *Algebra lineal.* México: Editorial McGraw-Hill Interamericana. Tercera edición en español.

Grossman, Stanley

1988 *Aplicaciones de álgebra lineal.* México: Editorial Iberoamericana.

Kleiman, Ariel

1973 *Matrices, aplicaciones matemáticas en economía y administración.* México: Editorial Limusa.

Kolman, Bernard

1981 *Algebra lineal.* México: Editorial Fondo educativo interamericano.

Kreider, D. Kuller, R. Ostberg, D. Perkius, F

1971 *Introducción al análisis lineal parte I.* México: Editorial Fondo educativo interamericano.

Lay, David

1999 *Algebra lineal y sus aplicaciones.* México: Editorial Addison Wesley. Segunda edición.