



**UNIVERSIDAD POLITÉCNICA SALESIANA**

**SEDE CUENCA**

**CARRERA DE ELECTRICIDAD**

**MODELADO Y VALIDACIÓN DEL COMPORTAMIENTO DINÁMICO  
DE MAQUINAS DE INDUCCIÓN EN ATP-EMTP CON ARMÓNICOS  
ESPACIALES EN ATPDraw**

Trabajo de titulación previo a la obtención del  
título de Ingeniero Eléctrico

AUTORES: BRYAM STEVEN PULLA PLACENCIA  
RUBÉN NICOLAS GUEVARA VILLACÍS

TUTOR: ING. JOSÉ MANUEL ALLER CASTRO, PhD.

Cuenca - Ecuador

2025

**CERTIFICADO DE RESPONSABILIDAD Y AUTORÍA DEL TRABAJO DE  
TITULACIÓN**

Nosotros, Bryam Steven Pulla Placencia con documento de identificación N° 0105576151 y Rubén Nicolás Guevara Villacís con documento de identificación N° 0105053979 manifestamos que:

Somos los autores y responsables del presente trabajo; y, autorizamos a que sin fines de lucro la Universidad Politécnica Salesiana pueda usar, difundir, reproducir o publicar de manera total o parcial el presente trabajo de titulación.


Cuenca, 21 de febrero del 2025

Atentamente,



---

Bryam Steven Pulla Placencia  
0105576151



---

Rubén Nicolás Guevara Villacís  
0105053979

**CERTIFICADO DE CESIÓN DE DERECHOS DE AUTOR DEL TRABAJO DE  
TITULACIÓN A LA UNIVERSIDAD POLITÉCNICA SALESIANA**

Nosotros, Bryam Steven Pulla Placencia con documento de identificación N° 0105576151 y Rubén Nicolás Guevara Villacís con documento de identificación N° 0105053979, expresamos nuestra voluntad y por medio del presente documento cedemos a la Universidad Politécnica Salesiana la titularidad sobre los derechos patrimoniales en virtud de que somos autores del Proyecto técnico: “Modelado y Validación del Comportamiento Dinámico de Máquinas de Inducción en ATP-EMTP con Armónicos Espaciales en ATPDraw, el cual ha sido desarrollado para optar por el título de: Ingeniero Eléctrico, en la Universidad Politécnica Salesiana, quedando la Universidad facultada para ejercer plenamente los derechos cedidos anteriormente.

En concordancia con lo manifestado, suscribimos este documento en el momento que hacemos la entrega del trabajo final en formato digital a la Biblioteca de la Universidad Politécnica Salesiana.


Cuenca, 21 de febrero del 2025

Atentamente,



---

Bryam Steven Pulla Placencia  
0105576151



---

Rubén Nicolás Guevara Villacís  
0105053979

## CERTIFICADO DE DIRECCIÓN DEL TRABAJO DE TITULACIÓN

Yo, José Manuel Aller Castro con documento de identificación N° 0151561800, docente de la Universidad Politécnica Salesiana, declaro que bajo mi tutoría fue desarrollado el trabajo de titulación: **MODELA-DO Y VALIDACIÓN DEL COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE MAQUINAS DE INDUCCIÓN EN ATP-EMTP CON ARMÓNICOS ESPACIALES EN ATPDraw**, el, realizado por Bryam Steven Pulla Placencia con documento de identificación N° 0105576151 y por Rubén Nicolás Guevara Villacís con documento de identificación N°0105053979, obteniendo como resultado final el trabajo de titulación bajo la opción proyecto técnico que cumple con todos los requisitos determinados por la Universidad Politécnica Salesiana.

Cuenca, 21 de febrero del 2025

Atentamente,



---

Jose Manuel Aller Castro  
0151561800

## AGRADECIMIENTOS

Agradezco de todo corazón a Dios por darme la oportunidad de ingresar a la universidad, pues sé que muchas personas no cuentan con la misma posibilidad ni la suerte que tuve yo. Gracias a sus bendiciones, he podido seguir adelante en este proceso, con salud, sabiduría, inteligencia y todas las habilidades que me ha concedido.

También quiero expresar mi más profundo agradecimiento a mi padre, Rubén Guevara, quien ha trabajado incansablemente para apoyarme y se ha esforzado como nadie en ayudarme a construir mi futuro.

A mi madre, Nelly Villacís, quien, de igual manera, hizo hasta lo imposible por ayudarme a alcanzar mis sueños, apoyándome incondicionalmente y creyendo en mí en todo momento.

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento al Ing. José Manuel Aller por su invaluable guía, paciencia y apoyo durante todo este proceso. Su orientación y conocimiento han sido fundamentales para el desarrollo de este trabajo, brindándome las herramientas necesarias para mejorar cada día y superar los desafíos que se presentaron en el camino.

Por último, pero no menos importante, quiero agradecerme a mí mismo por todos estos años de sacrificio, por estudiar sin descanso día y noche, por esforzarme cuando otros disfrutaban el momento, por trabajar duro, por creer en mí, por luchar por mis objetivos y por motivarme a convertirme en la persona que quiero ser. Me felicito por no rendirme, a pesar de los obstáculos que enfrenté día tras día.

Rubén Nicolás Guevara Villacís

En primer lugar, quiero agradecer a Dios por darme la fortaleza y la sabiduría necesarias para culminar mi carrera, brindándome apoyo en los momentos más difíciles.

A mis padres, José y Nohemí, mi principal fuente de inspiración, por darme la oportunidad de estudiar. Su amor, guía y consejos han sido fundamentales para superar cada desafío y avanzar en este camino.

A mis hermanos, Edwin y Génesis, por su compañía, su apoyo incondicional y por recordarme siempre que, con esfuerzo y determinación, todo es posible.

A mis amigos Arnold Arévalo, Rubén Guevara, Cristian León y Bruno Ortiz, quienes no solo me han acompañado en este proceso, sino que en muchas ocasiones también han sido mis maestros, compartiendo su conocimiento y experiencia conmigo.

Finalmente, mi profundo agradecimiento al Ing. José Manuel Aller, cuya orientación y guía han sido clave en el desarrollo de esta tesis, haciendo posible este importante logro.

Mi gratitud hacia cada uno de ustedes será eterna.

Bryam Steven Pulla Placencia

## DEDICATORIA

A Dios, quien me ha permitido seguir adelante a pesar de todos los obstáculos, adversidades y problemas. Me ha dado la gran oportunidad de estar en este lugar todos estos años y culminar mi vida universitaria con éxito. Ha sido un pilar fundamental en mi vida, dándome la fortaleza para seguir adelante.

A mi padre, quien con esfuerzo y sacrificio ha trabajado incansablemente, de día y de noche, para apoyarme en la universidad. Su dedicación y constancia, a pesar de cualquier adversidad, hicieron lo imposible para ayudarme a alcanzar mi objetivo. Le agradezco por su cariño, comprensión y apoyo incondicional, por nunca perder la fe en mí y por ser un ejemplo de esfuerzo y perseverancia que me motiva a mejorar cada día.

A mi madre, quien ha sido una motivación para seguir adelante. Me enseñó que toda recompensa requiere sacrificio y que las cosas se logran con perseverancia y dedicación. Gracias a ella aprendí que nunca es tarde para empezar y que los sueños pueden hacerse realidad cuando menos lo esperamos. Me enseñó a trabajar duro, a confiar en el proceso y a seguir adelante a pesar de las críticas y los obstáculos.

A mi novia, Paulina, quien me ha apoyado durante todos estos años. Ha sido la mujer que confió en mí, me ayudó a crecer personalmente y me motivó a sacar la mejor versión de mí mismo. Su cariño y amor hicieron que este camino fuera más llevadero, ayudándome, de una u otra forma, a completar mi vida universitaria.

A todos mis amigos: Matías Morales, Bryam Pulla, Bruno Ortiz, Cristian León, Arnold Arévalo, Juan Cordero, Pedro León, Johan Lazo, quienes se convirtieron en una parte importante de mi vida durante este proceso universitario. Me brindaron su amistad sincera y me ofrecieron una mano cuando más los necesité. Agradezco todas las enseñanzas y aprendizajes que me dejaron en estos años. Siempre podrán contar conmigo.

A mis hermanos Andre Guevara, Sofía Guevara quienes son parte de mi familia y me han dado su compañía, apoyo, entendimiento y un vínculo tan grande como ser parte de mi familia y finalmente a mi mascota.

Rubén Nicolás Guevara Villacís

A mis padres, José y Nohemí, quienes con su amor, sacrificio y sabiduría han sido mi mayor apoyo en cada paso de mi vida. Gracias por enseñarme a luchar por mis sueños y por brindarme la oportunidad de alcanzar mis metas.

A mis hermanos, Edwin y Génesis, por su compañía constante, su apoyo incondicional y por recordarme siempre la importancia de la unión y el esfuerzo.

Este logro refleja todo lo que me han enseñado y el amor con el que me han apoyado.

Bryam Steven Pulla Placencia

## RESUMEN

Esta tesis aborda el modelado y la validación del comportamiento dinámico de las máquinas de inducción, enfocándose en los efectos de los armónicos espaciales. Utilizando el programa ATP-EMTP, se desarrolló un modelo que simula el comportamiento de las máquinas en presencia de las primeras, quinta y séptima armónica.

El objetivo principal fue construir un modelo para representar las máquinas de inducción bajo condiciones de distorsión armónica y validar dicho modelo mediante simulaciones. Los resultados mostraron que los armónicos espaciales afectan significativamente la corriente y el par motor, generando fluctuaciones que afectan la eficiencia y estabilidad de las máquinas.

Se pudo observar el impacto de la quinta y séptima armónica, las cuales generaron oscilaciones en el par motor y un aumento de las pérdidas. Esto resalta la necesidad de diseñar máquinas capaces de mitigar estos efectos, mejorando su eficiencia y durabilidad.

Este estudio contribuye al entendimiento de los efectos de los armónicos en las máquinas de inducción, proporcionando información útil para el diseño y la operación de estas máquinas en entornos industriales.

## ABSTRACT

This thesis addresses the modeling and validation of the dynamic behavior of induction machines, focusing on the effects of spatial harmonics. Using the ATP-EMTP program, a model was developed to simulate the behavior of these machines in the presence of the first, fifth, and seventh harmonics.

The main objective was to build a model to represent the operation of induction machines under harmonic distortion conditions and validate this model through simulations. The results showed that spatial harmonics significantly affect key variables such as current and torque, generating fluctuations that impact the efficiency and stability of the machines.

The impact of the fifth and seventh harmonics was observed, which caused oscillations in the torque and an increase in losses. This highlights the need to design machines capable of mitigating these effects, improving their efficiency and durability.

This study contributes to the understanding of the effects of harmonics on induction machines, providing useful information for the design and operation of these machines in industrial environments.

## **PALABRAS CLAVES**

Máquinas de inducción

Armónicos espaciales

Modelo VBR (Voltage Behind Reactance)

Modelo dinámico

Efectos de armónicos

Distorsión armónica

Rendimiento

Estabilidad

# ÍNDICE

<b>1. FUNDAMENTOS ELECTROMAGNÉTICOS Y REPRESENTACIONES VECTORIALES</b>	<b>3</b>
1.1. Introducción . . . . .	3
1.1.1. Teoría Electromagnética . . . . .	4
1.1.2. Espectro de Fourier . . . . .	4
1.1.3. Dominio de la frecuencia . . . . .	4
1.1.4. Vectores Espaciales . . . . .	5
<b>2. Formulación matemática de la máquina de inducción</b>	<b>7</b>
2.1. Introducción . . . . .	7
2.2. La Máquina de Inducción . . . . .	8
2.2.1. Constructibilidad MI . . . . .	9
2.2.2. Funcionalidad de la MI . . . . .	10
2.2.3. Modelo de la máquina de inducción en vectores espaciales . . . . .	11
2.2.4. Modelo armónico de la maquina de inducción . . . . .	15
2.2.5. Modelo VBR de la MI . . . . .	25
2.2.6. Modelo VBR de la MI con la Armonica Fundamental . . . . .	25
2.2.7. Modelo VBR de la MI considerando la Primera y Quinta Armónica . . . . .	27
2.2.8. Modelo VBR de la MI considerando la Primera, Quinta Y Séptima Armónica . . . . .	29
<b>3. APLICACIÓN DE ATP-EMTP EN EL ESTUDIO DE ARMÓNICAS ESPACIALES EN MAQUINAS DE INDUCCIÓN</b>	<b>33</b>
3.1. Introducción . . . . .	33
3.2. Modelación en ATP EMTP . . . . .	34
3.2.1. Uso de ATP-EMTP y ATPDraw en la Simulación de Sistemas Eléctricos . . . . .	34
3.2.2. Aplicaciones de ATP-EMTP . . . . .	34
3.2.3. Utilización de ATP-EMTP y ATP Draw en el Análisis de Armónicos Espaciales en MI . . . . .	34
3.2.4. Definiciones del programa ATP . . . . .	35
3.2.5. Utilización de MODELS . . . . .	36
3.2.6. Funciones residentes . . . . .	37
3.2.7. Bloque Fortran . . . . .	38
3.2.8. Fuente de Voltaje Alterno en ATPDraw . . . . .	39
3.2.9. TACRES en ATP-EMTP . . . . .	40
3.2.10. TACSIND en ATP-EMTP . . . . .	41

<b>4. SIMULACIONES EN ATP-EMPT Y SU INTERFAZ GRÁFICA ATPDraw</b>	<b>42</b>
4.1. Introducción . . . . .	42
4.2. Análisis de la MI con VBR: Simulaciones y Resultados . . . . .	42
4.2.1. Modelo VBR de la MI con la Armonica Fundamental en ATP Draw . . . . .	44
4.2.2. Simulación del comportamiento de la MI con VBR ante la armónica fundamental .	50
4.2.2.1. Par Eléctrico $T_e$ de MI con VBR ante la armónica fundamental . . . . .	50
4.2.2.2. Comportamiento de $w_m$ bajo el efecto de la armónica fundamental . . . . .	51
4.2.2.3. Corrientes en el devanado estatórico en la fases $A, B, C$ ante la armónica fundamental . . . . .	51
4.2.2.4. Influencia de la armónica fundamental en el Espectro de Fourier . . . . .	53
4.2.3. Modelo VBR de la MI con la Primera y Quinta Armónica en ATP Draw . . . . .	54
4.2.4. Simulación del comportamiento de la MI con VBR ante la primera y quinta armónica	60
4.2.4.1. Par Eléctrico $T_{e5}$ de MI con VBR ante la primera y quinta armónica . . . . .	60
4.2.4.2. Comportamiento de $w_m$ bajo el efecto de la armónica fundamental y quinta armónica . . . . .	60
4.2.4.3. Corrientes en el devanado estatórico en la fases $A, B, C$ ante la armónica fundamental y quinta armónica . . . . .	63
4.2.4.4. Influencia de la primera y quinta armónica en el Espectro de Fourier . . . . .	64
4.2.5. Modelo VBR de la MI con la Primera, Quinta y Séptima Armónica en ATPDraw .	66
4.2.6. Simulación del comportamiento de la MI con VBR ante la Primera, Quinta y Sép- tima Armónica en ATPDraw . . . . .	72
4.2.6.1. Par Eléctrico $T_{e7}$ de MI con VBR ante la primera, quinta y septima armónica	72
4.2.6.2. Comportamiento de $w_m$ bajo el efecto de la Primera, Quinta y Séptima Armónica . . . . .	72
4.2.6.3. Corrientes en el devanado estatórico en la fases $A, B, C$ ante la Primera, Quinta y Séptima Armónica . . . . .	75
4.2.6.4. Influencia de la Primera, Quinta y Séptima Armónica en el Espectro de Fourier . . . . .	76
<b>5. RESULTADOS EXPERIMENTALES</b>	<b>79</b>
<b>6. CONCLUSIONES</b>	<b>81</b>
6.1. Categorización del Trabajo de Titulación según Criterios ABET . . . . .	83

## ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Mapeo del tiempo a la frecuencia . . . . .	5
2.1. Máquina de inducción . . . . .	8
2.2. Partes de la máquina de inducción . . . . .	9
2.3. Inducción electromagnética . . . . .	11
2.4. Representación gráfica del vector espacial de un sistema trifásico [1]. . . . .	12
2.5. Circuito equivalente de la máquina de inducción en vectores espaciales referidos al sistema de referencia estático [1]. . . . .	14
2.6. Diagrama esquemático de las bobinas de una maquina de inducción en el rotor y estator [1]	16
3.1. Modelos VBR para el análisis transitorio de la MI . . . . .	36
3.2. Bloque Fortran ATPDraw . . . . .	38
3.3. Fuente de Voltaje Alterno . . . . .	39
3.4. Resistencia variable en el tiempo . . . . .	40
3.5. Inductancia variable en el tiempo . . . . .	41
4.1. Modelo en ATPDraw de una Máquina de Inducción VBR para el Análisis de Armónicos Espaciales . . . . .	43
4.2. Configuración del Modelo VBR en ATPDraw: Atributos y Parámetros . . . . .	44
4.3. Par eléctrico de la MI con la Armonica Fundamental . . . . .	50
4.4. Comportamiento de la velocidad angular . . . . .	51
4.5. Corrientes del estator $i_a, i_b, i_c$ de la MI con VBR . . . . .	52
4.6. Espectro de Fourier en la armónica fundamental . . . . .	53
4.7. Par eléctrico de la MI con la primera y quinta armónica . . . . .	60
4.8. Comportamiento de la velocidad angular con la primera y quinta armónica . . . . .	61
4.9. Comportamiento de la velocidad angular con la primera y quinta armónica . . . . .	62
4.10. Corrientes del estator $i_a, i_b, i_c$ de la MI con VBR . . . . .	63
4.11. Espectro de Fourier en la primera armonica . . . . .	64
4.12. Espectro de Fourier en la quinta armónica . . . . .	65
4.13. Par eléctrico de la MI con la la Primera, Quinta y Séptima Armónica. . . . .	72
4.14. Comportamiento de la velocidad angular con la Primera, Quinta y Séptima Armónica . . . . .	73
4.15. Comportamiento de la velocidad angular con la primera, quinta y séptima armónica . . . . .	74
4.16. Corrientes del estator $i_a, i_b, i_c$ de la MI con VBR . . . . .	75
4.17. Espectro de Fourier en la Primera Armónica . . . . .	76
4.18. Espectro de Fourier en la Quinta Armónica . . . . .	77
4.19. Espectro de Fourier en la Séptima Armónica . . . . .	77

# Índice de tablas

1.1. Forma Diferencial e Integral de las Leyes del Electromagnetismo . . . . .	4
6.1. Áreas del Trabajo de Grado . . . . .	83

# INTRODUCCIÓN

La máquina de inducción es uno de los dispositivos electromecánicos más utilizados en la industria debido a su diseño robusto y su capacidad de operar en condiciones severas. Su invención se atribuye a Nikola Tesla, quien, junto con Galileo Ferraris, presentó el concepto de campos magnéticos rotativos en 1888 [2]. Aunque ambos desarrollaron motores bifásicos de manera independiente, el diseño de Tesla resultó ser más eficiente y exitoso. Sus patentes fueron adquiridas por George Westinghouse, quien se encargó de su desarrollo y comercialización. Paralelamente, Mikhail Dolivo-Dobrowolsky [3] introdujo el motor de inducción trifásico en Alemania, mejorando su rendimiento con un rotor en jaula de ardilla y un devanado distribuido en el estator.

Dolivo-Dobrowolsky exhibió en 1891 un motor con rotor devanado y un sistema de arranque basado en resistencias líquidas. Posteriormente, en 1893, desarrolló motores con doble jaula de ardilla, mejorando el arranque respecto a los motores convencionales. Su sistema trifásico se consolidó en Europa sobre el bifásico estadounidense [4]. La máquina de inducción también jugó un papel clave en la adopción de la corriente alterna, promovida por Tesla frente a la corriente continua de Edison. La primera planta grande que usó la fuerza del agua para crear electricidad en las Cataratas del Niágara funcionó con generadores que producían corriente alterna para alimentar motores de inducción, facilitando la electrificación industrial [1].

El estudio de las máquinas de inducción tiene una larga trayectoria, destacando el método simbólico de Steinmetz para el análisis de circuitos de corriente alterna [5]. Sin embargo, en 1922, K. L. Hansen [6] identificó que la distribución sinusoidal del campo giratorio no siempre representa con precisión la curva real de velocidad-par, debido a la presencia de armónicos superiores. En 1924, se investigó el impacto de los armónicos generados por las ranuras del estator, descubriendo que estos afectan el rendimiento del motor y generan ruido [7].

Hasta 1940, los devanados concéntricos se usaban principalmente en motores monofásicos en EE.UU., pero luego se adoptaron en equipos de procesamiento de datos. Los armónicos espaciales en estos motores pueden generar errores en la transmisión de datos, por lo que es crucial su control [8]. Lyon [9] demostró que un estator con 9 ranuras por polo con distribución sinusoidal de espiras no generaría armónicos hasta el 17<sup>o</sup> orden, aunque no generalizó su método. Appleman [10] estudió la reducción de armónicos espaciales en motores pequeños, mientras que Bojer en 1947 analizó la influencia de la fuerza magnetomotriz primaria en la generación de armónicos [11].

En 1965, L. W. Buchanan [12] propuso un circuito equivalente para motores monofásicos considerando armónicos espaciales en el campo magnético. En 1982, se publicó un estudio sobre la prevención de pares armónicos en motores de jaula de ardilla mediante cuñas magnéticas de ferrita blanda, reduciendo en un cuarenta por ciento los pares asíncronos de 17<sup>o</sup> y 19<sup>o</sup> orden [13]. Ese mismo año, se propuso una técnica para evaluar los efectos de los armónicos espaciales en la curva de par-velocidad de motores de inducción, mostrando la importancia de diseñar combinaciones de ranuras adecuadas para evitar efectos indeseables [14].

La máquina de inducción ha revolucionado el campo de la electrificación al facilitar una conversión altamente eficiente de la energía eléctrica en mecánica, lo que la ha posicionado como un elemento clave dentro de la ingeniería eléctrica y sus múltiples aplicaciones. Actualmente, su uso predomina en la industria debido a su fiabilidad y desempeño.

Por este motivo, resulta imprescindible comprender su funcionamiento. En este estudio, se establece un modelo matemático de la máquina de inducción con el objetivo de determinar el par eléctrico generado por la armónica fundamental. Aplicando la misma metodología, se derivan las expresiones para el cálculo del par eléctrico asociado a la quinta y séptima armónica mediante el principio de superposición.

Seguidamente, se implementa la representación VBR (Voltage Behind Reactance) para modelar la máquina de inducción, un enfoque que simplifica su análisis al considerar un voltaje interno compuesto por una fuerza electromotriz y una reactancia que simula la impedancia interna. Este mismo criterio se extiende al estudio de la quinta y séptima armónica, en donde las ecuaciones están en función del rotor, dado que la formulación matemática es equivalente cuando se refiere al estator. Para caracterizar con precisión el par eléctrico, es esencial obtener una ecuación que permita sustituir la corriente del rotor.

Finalmente, se lleva a cabo una simulación mediante el software ATP-EMTP y su entorno gráfico ATPDraw, lo que permite representar el circuito correspondiente y, mediante programación en Models, analizar la influencia de los armónicos. A través de este proceso, se examina su efecto sobre variables clave como la velocidad angular, las corrientes y el par eléctrico. Así, se obtiene un modelo más preciso de la máquina de inducción, lo que facilita la toma de decisiones en su implementación en diversas aplicaciones industriales.

# CAPÍTULO 1

## FUNDAMENTOS ELECTROMAGNÉTICOS Y REPRESENTACIONES VECTORIALES

### 1.1. Introducción

Las ecuaciones de Maxwell constituyen la base del electromagnetismo y permiten describir la interacción entre los campos eléctricos y magnéticos en distintos sistemas físicos. En el contexto de las máquinas eléctricas, estas ecuaciones son esenciales para comprender su funcionamiento y modelar su comportamiento bajo diversas condiciones operativas. En particular, los armónicos espaciales introducen efectos que pueden influir en el desempeño de las máquinas de inducción, haciendo necesario un análisis más detallado de su impacto en la respuesta dinámica del sistema.

En este capítulo se abordan los fundamentos de la teoría electromagnética y su aplicación en el estudio de las máquinas de inducción. Se presentan las ecuaciones que rigen estos sistemas y se introduce la representación mediante vectores espaciales, una herramienta matemática que permite desacoplar las ecuaciones del modelo, simplificando el análisis de los fenómenos electromagnéticos involucrados. Este enfoque resulta fundamental para evaluar la influencia de los armónicos en la operación de la máquina y desarrollar estrategias que optimicen su desempeño en distintas condiciones de trabajo.

### 1.1.1. Teoría Electromagnética

El físico escocés James Clerk Maxwell (1831-1879) es reconocido como el pionero de la teoría electromagnética en su versión contemporánea. Su trabajo significativo llevó al descubrimiento de las ondas electromagnéticas. Maxwell formuló la primera teoría que unifica los conceptos de electricidad y magnetismo, abarcando todos los hallazgos experimentales y teóricos previos en estas áreas. Entre sus contribuciones, se destaca la introducción de la corriente de desplazamiento, así como la predicción de la existencia de ondas electromagnéticas. Sin embargo, las ecuaciones de Maxwell no fueron completamente aceptadas por la comunidad científica hasta 1888, cuando Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894) las validó mediante experimentos, logrando generar y detectar ondas de radio. Maxwell organizó las leyes del electromagnetismo en cuatro ecuaciones que describen condiciones estáticas. Para que un campo se clasifique como electromagnético, es necesario que cumpla con estas cuatro ecuaciones. La relevancia de las ecuaciones de Maxwell es fundamental, ya que condensan la totalidad de las leyes del electromagnetismo conocidas hasta la fecha.

Forma Diferencial	Forma Integral	Comentarios
$\nabla \cdot \mathbf{D} = P_v$	$\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_v p_v dv$	Ley de Gauss
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$	Inexistencia de carga magnética aislada
$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint_L \mathbf{D} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$	Ley de Faraday
$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s (\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) \cdot d\mathbf{S}$	Ley del circuito de Ampere

Tabla 1.1: Forma Diferencial e Integral de las Leyes del Electromagnetismo

### 1.1.2. Espectro de Fourier

La transformada de Fourier constituye una herramienta esencial en el análisis de señales y sistemas, ya que permite descomponer funciones o señales complejas en una combinación de ondas sinusoidales más simples. Este principio se fundamenta en la teoría desarrollada por Fourier, la cual postula que cualquier función periódica puede representarse como una suma infinita de funciones seno y coseno, cada una con su correspondiente amplitud y fase. Esta técnica es ampliamente utilizada en campos como la ingeniería, la física y las matemáticas, dado que facilita tanto el estudio como la manipulación de señales.

### 1.1.3. Dominio de la frecuencia

El estudio del comportamiento de las señales en el dominio de la frecuencia inicia con las series de Fourier, las cuales permiten expresar cualquier señal periódica como una combinación de ondas senoidales o armónicas. La distribución de los diferentes componentes de frecuencia presentes en una señal periódica se conoce como su espectro. Existen tres formas de las series de Fourier:

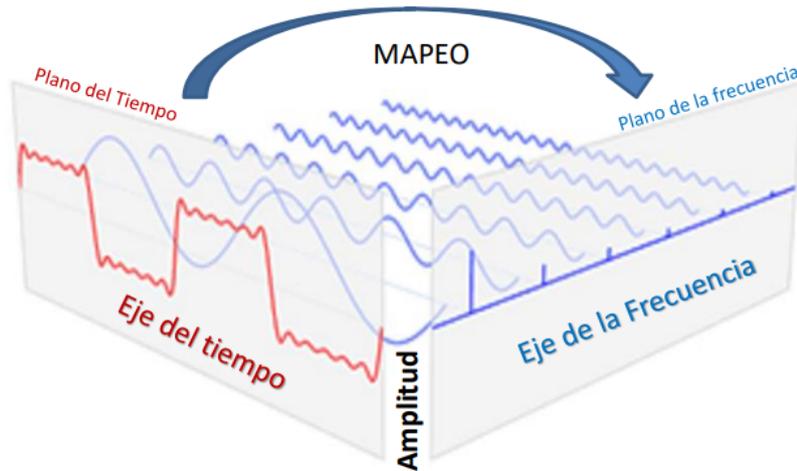


Figura 1.1: Mapeo del tiempo a la frecuencia

- Forma Trigonométrica:

$$x_p(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi k f_0 t) + b_k \sin(2\pi k f_0 t) \quad (1.1)$$

- Forma Polar:

$$x_p(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(2\pi k f_0 t + \theta_k) \quad (1.2)$$

- Forma Exponencial:

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{j2\pi k f_0 t} \quad (1.3)$$

Para realizar la transformada de Fourier se realiza una conversión del plano del tiempo a la plano de la frecuencia mediante un mapeo para encontrar las armónicas en el espectro de frecuencia.

#### 1.1.4. Vectores Espaciales

Un estudio sobre los acoplamientos presentes en el modelo de la máquina de inducción en coordenadas primitivas revela la descripción mediante matrices simétricas  $[S]$  y cíclicas  $[C(\theta)]$ . La diagonalización de estas matrices se logra a través del método de autovalores y autovectores. Este método permite verificar que la transformación de componentes simétricas propuestas por Fortescue puede llevar a cabo el desacoplamiento de las dos matrices mencionadas. La transformación correspondiente a las componentes simétricas hermitanas se define de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_+ \\ x_- \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{j\frac{2\pi}{3}} & e^{j\frac{4\pi}{3}} \\ 1 & e^{j\frac{4\pi}{3}} & e^{j\frac{2\pi}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

$$\begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{j\frac{4\pi}{3}} & e^{j\frac{2\pi}{3}} \\ 1 & e^{j\frac{2\pi}{3}} & e^{j\frac{4\pi}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

Al aplicar la transformación (1.4) a un sistema cíclico, queda como resultado:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_a \\ y_b \\ y_c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_+ \\ y_- \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_+ \\ x_- \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \begin{bmatrix} y_0 \\ y_+ \\ y_- \end{bmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_+ \\ x_- \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \begin{bmatrix} y_0 \\ y_+ \\ y_- \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & a+b\alpha+c\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & a+b\alpha^2+c\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_+ \\ x_- \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.6)$$

El desacoplamiento de las matrices simétricas se considera un caso específico dentro del contexto de las matrices cíclicas, en el cual se establece que  $b = c$ .

$$\begin{bmatrix} y_a \\ y_b \\ y_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_0 \\ y_+ \\ y_- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_+ \\ x_- \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

La transformación de componentes simétricas permite descomponer un sistema acoplado en tres sistemas independientes. El sistema de secuencia cero solo se genera cuando la suma instantánea de corrientes o tensiones no es cero. En sistemas trifásicos, esta componente requiere un cuarto conductor para su circulación. En cuanto a los sistemas de secuencia positiva y negativa, presentan una relación de conjugado entre sí. Debido a esta equivalencia, es posible representar el comportamiento de la máquina utilizando únicamente la transformación de secuencia positiva, también llamada transformación a vectores espaciales. Para asegurar que la potencia activa se mantenga constante durante esta conversión, es necesario aplicar la siguiente transformación:

$$x(t) \equiv \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & e^{j\frac{2\pi}{3}} & e^{j\frac{4\pi}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(t) \\ x_b(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(t) \\ x_b(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

# CAPÍTULO 2

## Formulación matemática de la máquina de inducción

### 2.1. Introducción

Las máquinas de inducción han sido, durante décadas, el pilar fundamental de la industria y la ingeniería eléctrica debido a su robustez, eficiencia y versatilidad. No obstante, la creciente demanda de un análisis más preciso y detallado ha impulsado el desarrollo de modelos matemáticos avanzados que permiten una comprensión más profunda de su comportamiento dinámico.

En este capítulo, se explorarán distintos enfoques de modelado de la máquina de inducción, comenzando con su representación en vectores espaciales, una herramienta poderosa para el análisis de sistemas eléctricos en condiciones dinámicas. Posteriormente, se abordará el modelo armónico, el cual permite evaluar los efectos de las componentes armónicas en el desempeño de la máquina.

Además, se profundizará en el modelo VBR, considerando la presencia de las diferentes armónicas mediante superposición: inicialmente con la componente fundamental, luego incorporando la quinta armónica y, finalmente, extendiendo el análisis hasta incluir la séptima armónica. A través de estos modelos, será posible obtener una visión más detallada de los fenómenos electromagnéticos que afectan el funcionamiento de la máquina, así como su impacto en aplicaciones de control y operación.

Este enfoque permitirá una mejor comprensión de las limitaciones y ventajas de cada modelo, proporcionando una base sólida para el diseño y la optimización de sistemas eléctricos modernos.

## 2.2. La Máquina de Inducción

Las máquinas de inducción han ganado gran popularidad en la industria moderna, convirtiéndose en una de las opciones más utilizadas para la conversión de energía electromecánica. Esto se debe a sus múltiples beneficios, entre los que sobresalen su diseño resistente, su capacidad de operar eficientemente en diversas condiciones, y su bajo costo de producción.

Las máquinas de inducción pueden construirse con diferentes configuraciones de fases, aunque lo más común es que utilicen tres devanados en el estator, distribuidos de manera uniforme alrededor de su periferia. El rotor, por otro lado, está constituido por varias barras conectadas en cortocircuito, formando lo que se conoce como una jaula de ardilla. Este tipo de máquinas también se emplea en diversas aplicaciones industriales, como en generadores de energía eólica, sistemas de elevación, y compresores de gran tamaño [15].

El desarrollo y operación de las máquinas de inducción han sido regulados por diversas normativas a lo largo del tiempo. Entre ellas, destaca la normativa [16], la cual establece lineamientos para los motores de inducción y las máquinas de inducción en general. Estas regulaciones han servido como base para el diseño y estandarización de estos dispositivos en la industria eléctrica.



Figura 2.1: Máquina de inducción

### 2.2.1. Constructibilidad MI

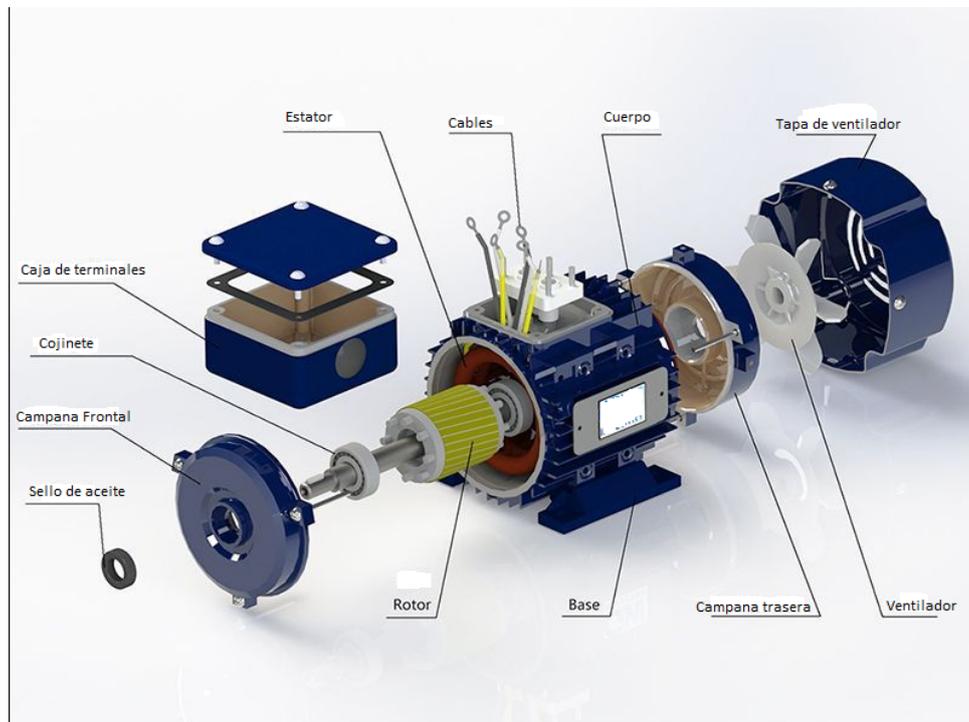


Figura 2.2: Partes de la máquina de inducción

En la figura 2.2 se observa la constructibilidad de la máquina de inducción, en donde, a continuación se describe los componentes de fabricación:

- Estator: Es la parte fija de la máquina que contiene los devanados de cobre. Estos devanados generan un campo magnético rotatorio cuando se aplica una corriente eléctrica.
- Cables: Conectan los devanados del estator a la fuente de alimentación, permitiendo el flujo de corriente eléctrica.
- Cuerpo: Soporte que ayuda a mantener la estructura de la máquina y facilita su montaje.
- Tapa de ventilador: Cubre el ventilador y protege los componentes internos de polvo y otros contaminantes.
- Caja de terminales: Aloja las conexiones eléctricas y proporciona un punto de acceso seguro para la conexión y desconexión de cables.
- Cojinete: Permite el movimiento suave del rotor, reduciendo la fricción y el desgaste.
- Campana Frontal: Cubre la parte delantera de la máquina, protegiendo los componentes internos y proporcionando soporte estructural.
- Sello de aceite: Evita la fuga de lubricante y la entrada de contaminantes en los cojinetes.

- Rotor: Es la parte móvil de la máquina que gira dentro del estator. El rotor puede ser de jaula de ardilla o bobinado, dependiendo del diseño.
- Base: Proporciona soporte y estabilidad a la máquina, asegurando que permanezca en su lugar durante la operación.
- Campana trasera: Cubre la parte posterior de la máquina, ofreciendo protección adicional a los componentes internos.
- Ventilador: Enfría la máquina durante la operación, previniendo el sobrecalentamiento y asegurando un funcionamiento eficiente.

La máquina de inducción, se destaca su diseño modular que facilita el ensamblaje y mantenimiento. Los materiales utilizados, como el acero para la estructura y el cobre para los devanados, son seleccionados por su durabilidad y eficiencia eléctrica. La fabricación de la máquina implica procesos de precisión para garantizar que todas las partes encajen correctamente y funcionen en armonía. La estandarización de componentes también juega un papel crucial, permitiendo la producción en masa y reduciendo costos. En resumen, la máquina de inducción es un ejemplo de ingeniería bien pensada, donde cada componente cumple una función específica para asegurar un rendimiento óptimo y una larga vida útil.

### 2.2.2. Funcionalidad de la MI

Su funcionamiento se basa en los principios del electromagnetismo y es ampliamente utilizado en diversas aplicaciones industriales y comerciales debido a su eficiencia, robustez y bajo mantenimiento. Principio de Funcionamiento:

- Campo Magnético Rotatorio: Cuando se aplica una corriente alterna a los devanados del estator, se genera un campo magnético rotatorio. Este campo gira a una velocidad sincrónica, que depende de la frecuencia de la corriente y del número de polos en el estator.
- Inducción en el Rotor: El campo magnético rotatorio induce corrientes en el rotor, ya sea en las barras de la jaula de ardilla o en los devanados del rotor bobinado. Estas corrientes generan su propio campo magnético en el rotor.
- Interacción de Campos Magnéticos: El campo magnético del rotor interactúa con el campo magnético del estator, produciendo un par de torsión (torque) que hace girar el rotor. El rotor siempre gira a una velocidad ligeramente menor que la velocidad del campo magnético rotatorio, un fenómeno conocido como deslizamiento.
- Conversión de Energía: La energía eléctrica suministrada al estator se convierte en energía mecánica en el rotor, que puede ser utilizada para accionar maquinaria, bombas, ventiladores, compresores, entre otros dispositivos.

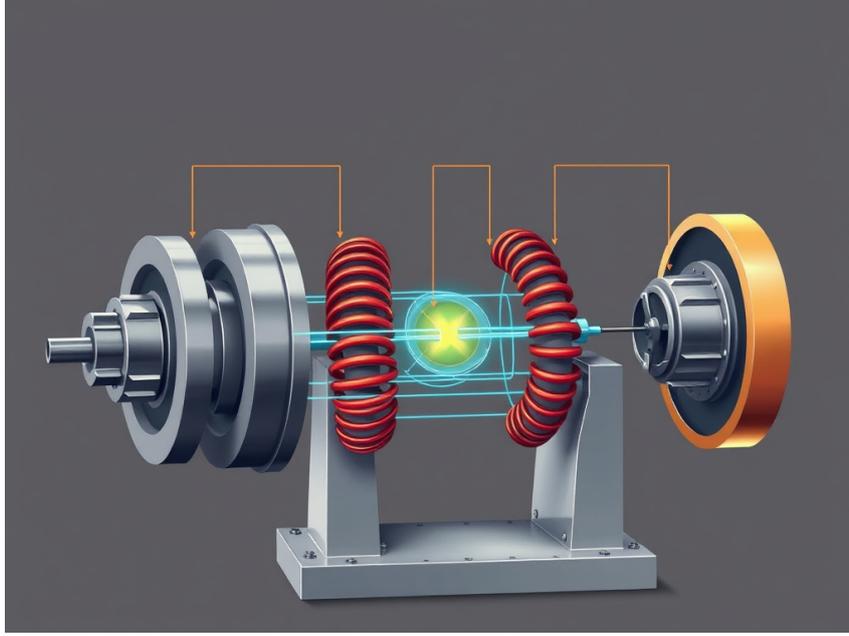


Figura 2.3: Inducción electromagnética

### 2.2.3. Modelo de la máquina de inducción en vectores espaciales

La transformación a vectores espaciales posibilita la representación de un sistema de tensiones, corrientes o flujos trifásicos a través de un vector en el espacio, cuya posición y magnitud varían con el tiempo. En la Fig.2.4 se presenta una representación gráfica que ilustra la interpretación geométrica de esta transformación en un instante específico. Al aplicar la transformación de la siguiente ecuación:

$$[v] = [R] [i] + p [\lambda] = [R] [i] + [L(\theta)] p [i] + \dot{\theta} [\tau(\theta)] [i] \quad (2.1)$$

$$T_e - T_m = \frac{1}{2} [i]^t [\tau] [i] - T_m = J\ddot{\theta} + p\dot{\theta} \quad (2.2)$$

Pasando al dominio de los vectores espaciales, se obtiene el siguiente resultado:

$$\begin{bmatrix} v_e \\ v_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_e & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_e \\ i_r \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} L_e & M_{er}e^{j\theta} \\ M_{er}e^{-j\theta} & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_e \\ i_r \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Donde:

$$v_e \equiv \sqrt{\frac{2}{3}} [1 \quad \alpha \quad \alpha^2] [v_a^e \quad v_b^e \quad v_c^e]^t \quad (2.4)$$

$$v_r \equiv \sqrt{\frac{2}{3}} [1 \quad \alpha \quad \alpha^2] [v_a^r \quad v_b^r \quad v_c^r]^t \quad (2.5)$$

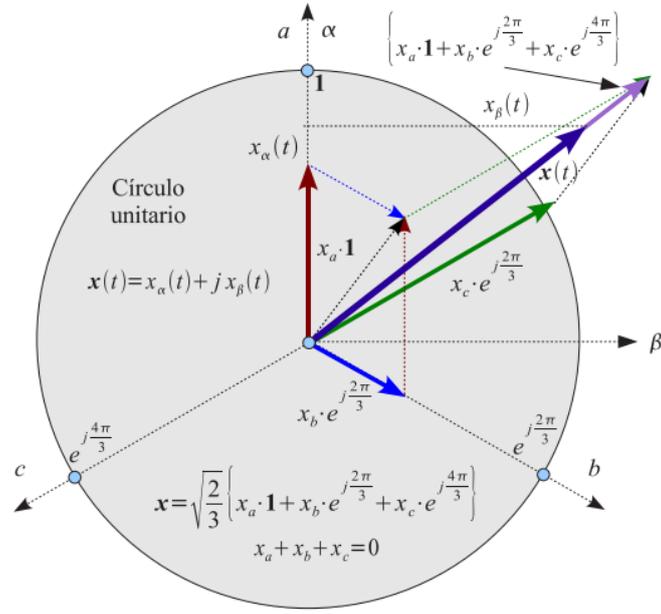


Figura 2.4: Representación gráfica del vector espacial de un sistema trifásico [1].

$$i_e \equiv \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a^e & i_b^e & i_c^e \end{bmatrix}^t \quad (2.6)$$

$$i_r \equiv \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a^r & i_b^r & i_c^r \end{bmatrix}^t \quad (2.7)$$

$$L_e \equiv L_{\sigma e} + \frac{3}{2}L_{me}; \quad L_r \equiv L_{\sigma r} + \frac{3}{2}L_{mr}; \quad \equiv M_{er} + \frac{3}{2}L_{er} \quad (2.8)$$

Los elementos presentes en la expresión (2.3) se pueden derivar al aplicar la transformación a vectores espaciales a las matrices que describen el modelo de la máquina en coordenadas primitivas. Esto incluye, por ejemplo, la transformación de vectores espaciales sobre la matriz identidad  $[I]$ :

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_a \\ y_b \\ y_c \end{bmatrix} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} \\ y &= \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} = x \end{aligned} \quad (2.9)$$

Transformación aplicada a la matriz simétrica [S]:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_a \\ y_b \\ y_c \end{bmatrix} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} \\ y &= \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2}x_a \\ \frac{3}{2}x_b \\ \frac{3}{2}x_c \end{bmatrix} = \frac{3}{2}x \end{aligned} \quad (2.10)$$

La misma transformación puede ser aplicada a la matriz cíclica [C( $\theta$ )], teniendo en cuenta  $\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{4\pi}{3}) \\ \cos(\theta + \frac{4\pi}{3}) & \cos \theta & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{4\pi}{3}) & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \left\{ \frac{e^{j\theta}}{2} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha^2 & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha^2 & 1 \end{bmatrix} + \frac{e^{-j\theta}}{2} \begin{bmatrix} 1 & \alpha^2 & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha^2 \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} \\ \mathbf{y} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2} \left\{ e^{j\theta} \begin{bmatrix} 3 & 3\alpha & 3\alpha^2 \end{bmatrix} + e^{-j\theta} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} = \frac{3}{2} e^{j\theta} \mathbf{x} \end{aligned} \quad (2.11)$$

La transformación a vectores espaciales de la expresión del par eléctrico, como se detalla en el balance de la ecuación, resulta en:

$$\begin{aligned} T_e &= \frac{1}{2} [\mathbf{i}]^t [\tau] [\mathbf{i}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} [\mathbf{i}_e] \\ [\mathbf{i}_r] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbf{0}] & L_{er} \frac{d}{d\theta} [\mathbf{C}(\theta)] \\ L_{er} \frac{d}{d\theta} [\mathbf{C}(\theta)]^t & [\mathbf{0}] \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} [\mathbf{i}_e] \\ [\mathbf{i}_r] \end{bmatrix} = \\ &= L_{er} [\mathbf{i}_e]^t \frac{d}{d\theta} [\mathbf{C}(\theta)] [\mathbf{i}_r] = \\ &= L_{er} [\mathbf{i}_e]^t \left\{ \frac{e^{-j\theta}}{2j} \begin{bmatrix} 1 & \alpha^2 & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha^2 \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{bmatrix} - \frac{e^{j\theta}}{2j} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha^2 & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha^2 & 1 \end{bmatrix} \right\} [\mathbf{i}_r] = \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} L_{er} \left\{ \frac{e^{-j\theta}}{2j} \mathbf{i}_e \begin{bmatrix} 1 & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix} - \frac{e^{j\theta}}{2j} \mathbf{i}_e^\times \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \right\} [\mathbf{i}_r] = \\ &= \frac{3}{2} L_{er} \left\{ \frac{e^{-j\theta}}{2j} \mathbf{i}_e \mathbf{i}_r^* - \frac{e^{j\theta}}{2j} \mathbf{i}_e^\times \mathbf{i}_r \right\} = M_{er} \Im m \{ \mathbf{i}_e \mathbf{i}_r^\times e^{-j\theta} \} = M_{er} \Im m \{ \mathbf{i}_e (\mathbf{i}_r e^{j\theta})^* \} \end{aligned} \quad (2.12)$$

El conjunto de ecuaciones diferenciales que describe el comportamiento de la máquina de inducción en el

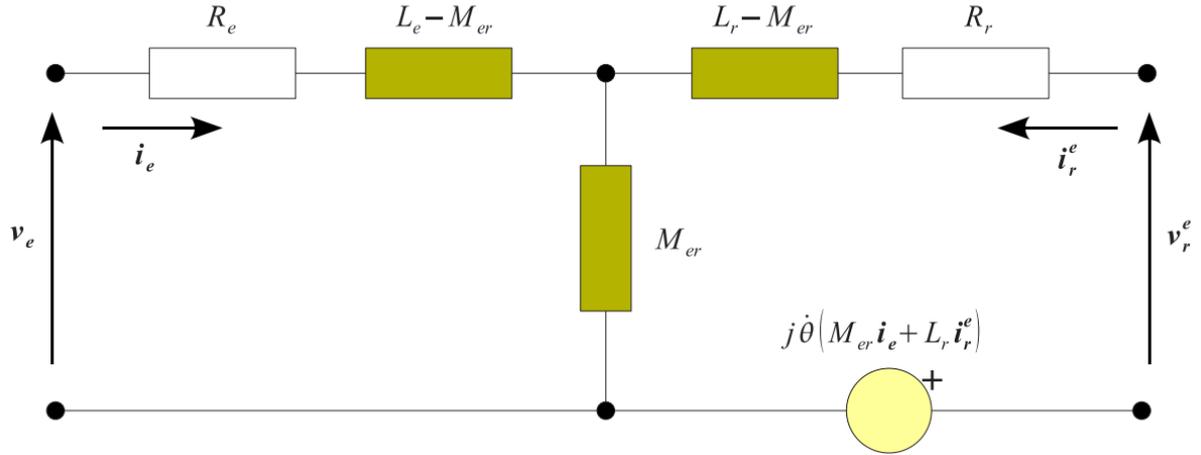


Figura 2.5: Circuito equivalente de la máquina de inducción en vectores espaciales referidos al sistema de referencia estático [1].

sistema de coordenadas de vectores espaciales es el siguiente:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v_e \\ v_r \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_e & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_e \\ i_r \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} L_e & M_{er}e^{j\theta} \\ M_{er}e^{-j\theta} & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_e \\ i_r \end{bmatrix} \\ &= M_{er} \mathfrak{S}\{i_e(i_r e^{j\theta})^*\} - T_m(\dot{\theta})J\ddot{\theta} + \dot{\theta} \end{aligned} \quad (2.13)$$

El modelo (2.13) simplifica considerablemente las expresiones (2.1) y (2.2) al representar las magnitudes trifásicas mediante vectores espaciales. De este modo, el sistema se ha reducido de las siete ecuaciones diferenciales originales a solo tres. Además, la dependencia de la posición angular  $\theta$  se ha simplificado a su inclusión en matrices de dimensión  $2 \times 2$ . No obstante, es posible eliminar la dependencia de  $\theta$  si las variables del rotor se expresan en relación con el estator, utilizando la siguiente transformación:

$$x_r^e \equiv x_r \cdot e^{j\theta} \quad (2.14)$$

Para implementar la transformación (2.14) en el modelo de la máquina representado en vectores espaciales (2.13), es necesario calcular la derivada asociada a esta transformación:

$$p x_r^e = p x_r \cdot e^{j\theta} + j\dot{\theta} x_r \cdot e^{j\theta} \implies p x_r \cdot e^{j\theta} = p x_r^e - j\dot{\theta} x_r^e \quad (2.15)$$

Al aplicar las expresiones (2.14) y (2.15) al modelo (2.13), se obtiene el siguiente modelo de la máquina

de inducción en vectores espaciales relacionados con el estator:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v_e \\ v_r^e \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_e & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_e \\ i_r^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_e & M_{er} \\ M_{er} & L_r \end{bmatrix} p \begin{bmatrix} i_e \\ i_r^e \end{bmatrix} - j\dot{\theta} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_{er} & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_e \\ i_r^e \end{bmatrix} \\ &= M_{er} \Im\{i_e (i_r^e)^*\} - T_m(\dot{\theta}) = J\ddot{\theta} + \rho\dot{\theta} \end{aligned} \quad (2.16)$$

El modelo (2.16) no depende de la posición angular  $\theta$ , que es una variable temporal, incluso en el caso específico de operación en régimen permanente. Esta dependencia se sustituye por la velocidad angular  $\dot{\theta}$ , que presenta una variación temporal más lenta. Este modelo puede ser representado mediante el circuito equivalente ilustrado en la fig.2.5. Este circuito simula el comportamiento eléctrico de la máquina durante el régimen transitorio y permite calcular el par eléctrico al evaluar la potencia activa transferida a la fuente dependiente de corriente del circuito rotórico.

#### 2.2.4. Modelo armónico de la maquina de inducción

La fig.2.6 muestra un esquema detallado del devanado rotórico de una máquina de inducción trifásica, un componente fundamental en la conversión de energía electromecánica. Su estructura se compone de un conjunto de bobinas interconectadas que forman un sistema trifásico, cuya configuración influye directamente en el desempeño del motor.

El devanado rotórico se caracteriza por su número de polos y espiras, parámetros esenciales que determinan sus propiedades eléctricas y mecánicas. La disposición de las bobinas, representada en la fig.2.6, incide en la distribución del campo magnético dentro del rotor y, en consecuencia, en la generación del par motor.

En condiciones normales de operación, las bobinas del rotor permanecen en cortocircuito, lo que permite la inducción de corrientes a partir del campo magnético rotatorio generado por el estator. Este fenómeno constituye el principio básico de funcionamiento de la máquina de inducción.

El análisis técnico del devanado rotórico debe considerar factores como la resistencia e inductancia de las bobinas, así como los efectos de las corrientes de fuga. Estos parámetros, obtenidos mediante cálculos teóricos y mediciones experimentales, son clave para la simulación, optimización y diseño de máquinas de inducción con alta eficiencia y confiabilidad.

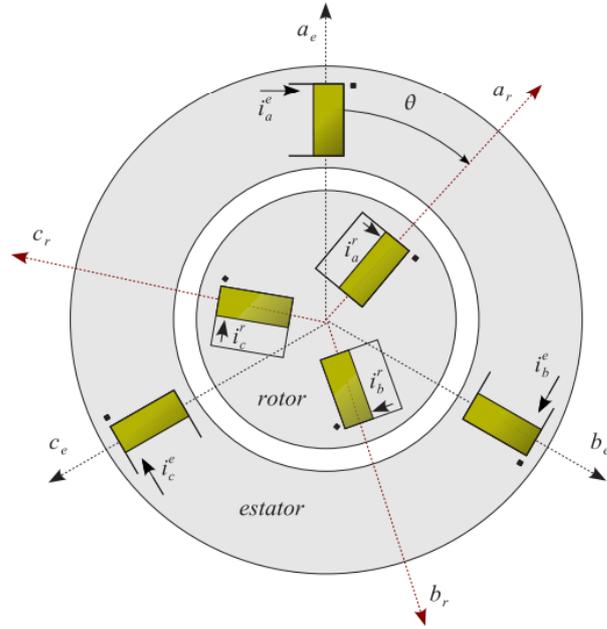


Figura 2.6: Diagrama esquemático de las bobinas de una máquina de inducción en el rotor y estator [1]

El comportamiento de la máquina de inducción está descrito por un conjunto de ecuaciones diferenciales, las cuales están definidas específicamente para el sistema de coordenadas mostrado en la fig.2.6.

$$[v] = [R][i] + p[\lambda] = [R][i] + L[\theta] + p[i] + \dot{\theta}\tau[\theta][i] \quad (2.17)$$

$$T_e - T_m = \frac{1}{2}[i]^t[\tau][i] - T_m = J\ddot{\theta} + p\dot{\theta} \quad (2.18)$$

Donde:

$$\begin{bmatrix} V_{ae} \\ V_{be} \\ V_{ce} \\ V_{ar} \\ V_{br} \\ V_{cr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_e[I] & [0] \\ [0] & R_r[I] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{ae} \\ I_{be} \\ I_{ce} \\ I_{ar} \\ I_{br} \\ I_{cr} \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} L_{ee} & L_{er}(\theta) \\ L_{re}(\theta) & L_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{ae} \\ I_{be} \\ I_{ce} \\ I_{ar} \\ I_{br} \\ I_{cr} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

$$[S] \equiv \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, \quad [I] \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [0] \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

$$[C(\theta)] \equiv \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{4\pi}{3}) \\ \cos(\theta + \frac{4\pi}{3}) & \cos(\theta) & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{4\pi}{3}) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Al incorporar las componentes armónicas de quinto y séptimo orden, la distribución espacial del campo magnético se ve alterada, modificando la interacción electromagnética de la máquina. Como consecuencia, la estructura matemática del sistema se redefine, obteniendo finalmente la siguiente expresión:

$$[L] = \begin{bmatrix} L_1 \cos(\theta) + & L_1 \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) + & L_1 \cos(\theta + \frac{4\pi}{3}) + \\ L_5 \cos 5(\theta) + & L_5 \cos 5(\theta + \frac{2\pi}{3}) + & L_5 \cos 5(\theta + \frac{4\pi}{3}) + \\ L_7 \cos 7(\theta) & L_7 \cos 7(\theta + \frac{2\pi}{3}) & L_7 \cos 7(\theta + \frac{4\pi}{3}) \\ \\ L_1 \cos(\theta + \frac{4\pi}{3}) + & L_1 \cos(\theta) + & L_1 \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) + \\ L_5 \cos 5(\theta + \frac{4\pi}{3}) + & L_5 \cos 5(\theta) + & L_5 \cos 5(\theta + \frac{2\pi}{3}) + \\ L_7 \cos 7(\theta + \frac{4\pi}{3}) & L_7 \cos 7(\theta) & L_7 \cos 7(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \\ L_1 \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) + & L_1 \cos(\theta + \frac{4\pi}{3}) + & [L] = L_1 \cos(\theta) + \\ L_5 \cos 5(\theta + \frac{2\pi}{3}) + & L_5 \cos 5(\theta + \frac{4\pi}{3}) + & L_5 \cos 5(\theta) + \\ L_7 \cos 7(\theta + \frac{2\pi}{3}) & L_7 \cos 7(\theta + \frac{4\pi}{3}) & L_7 \cos 7(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

A partir de la estructura matricial obtenida, se puede expresar la relación en función de las contribuciones de cada armónico. De este modo, la expresión matemática puede reorganizarse de la siguiente manera

$$[L] = \hat{L}_1 \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ c_1 & a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 & a_1 \end{bmatrix} + \hat{L}_5 \begin{bmatrix} a_5 & b_5 & c_5 \\ c_5 & a_5 & b_5 \\ b_5 & c_5 & a_5 \end{bmatrix} + \hat{L}_7 \begin{bmatrix} a_7 & b_7 & c_7 \\ c_7 & a_7 & b_7 \\ b_7 & c_7 & a_7 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Siendo sus componentes:

$$\begin{aligned} a_1 &= \cos(\theta) & a_5 &= \cos(5\theta) & a_7 &= \cos(7\theta) \\ b_1 &= \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & b_5 &= \cos(5\theta + \frac{10\pi}{3}) & b_7 &= \cos(7\theta + \frac{14\pi}{3}) \\ c_1 &= \cos(\theta + \frac{4\pi}{3}) & c_5 &= \cos(5\theta + \frac{20\pi}{3}) & c_7 &= \cos(7\theta + \frac{28\pi}{3}) \end{aligned}$$

Al calcular los ángulos de las componentes armónicas de orden 5 y 7, es necesario ajustar estos valores para que estén dentro del intervalo estándar de  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , que es el rango usual para las fases de las señales periódicas. Esto se logra restando múltiplos de  $2\pi$  a los ángulos fuera de este intervalo.

Por ejemplo para el componente  $B_5$ :

$$\frac{10\pi}{3} - 2\pi = \frac{4\pi}{3} \quad (2.24)$$

De manera similar, para la componente  $C_5$ :

$$\frac{20\pi}{3} - 2\pi - 2\pi - 2\pi = \frac{2\pi}{3} \quad (2.25)$$

La séptima armónica fue analizada mediante el mismo procedimiento de normalización aplicado a la quinta armónica, lo que permitió obtener los ángulos correspondientes. Estos resultados, junto con los de la quinta armónica, se presentan a continuación.

$$\begin{aligned} a_1 &= \cos(\theta) & a_5 &= \cos(5\theta) & a_7 &= \cos(7\theta) \\ b_1 &= \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & b_5 &= \cos\left(5\theta + \frac{4\pi}{3}\right) & b_7 &= \cos\left(7\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ c_1 &= \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) & c_5 &= \cos\left(5\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & c_7 &= \cos\left(7\theta + \frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

A partir de la estructura matricial obtenida, se puede expresar la relación en términos de magnitudes que representan la contribución de cada armónico. Para analizar el impacto de la quinta y séptima armónica en el comportamiento de la máquina de inducción, se aplica la transformación a vectores espaciales. Esta transformación permite representar un sistema de tensiones, corrientes o flujos trifásicos mediante un vector en el espacio, cuya posición y magnitud dependen del tiempo. La incorporación de los armónicos modifica la simetría del campo magnético giratorio, afectando parámetros clave como el par electromagnético.

$$L_1 \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) & \cos(\theta) & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{ar} \\ i_{br} \\ i_{cr} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

$$euler = \cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \quad (2.27)$$

$$e^{j\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)} = e^{j\theta} e^{j\frac{2\pi}{3}}$$

$$\alpha^2 = \frac{4\pi}{3}$$

$$\frac{L_1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} e^{j\theta} & e^{j\theta}\alpha & e^{j\theta}\alpha^2 \\ e^{j\theta}\alpha^2 & e^{j\theta} & e^{j\theta}\alpha \\ e^{j\theta}\alpha & e^{j\theta}\alpha^2 & e^{j\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-j\theta} & e^{-j\theta}\alpha^2 & e^{-j\theta}\alpha \\ e^{-j\theta}\alpha & e^{-j\theta} & e^{-j\theta}\alpha^2 \\ e^{-j\theta}\alpha^2 & e^{-j\theta}\alpha & e^{-j\theta} \end{bmatrix} \right\} \quad (2.28)$$

$$\begin{array}{r} \alpha = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \alpha^2 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 = 1 + 0 \\ \hline 0 + 0 \end{array}$$

$$\frac{L_1}{2} \left\{ \left[ \begin{array}{ccc} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha^2 & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha^2 & 1 \end{array} \right] e^{j\theta} + \left[ \begin{array}{ccc} 1 & \alpha^2 & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha^2 \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{array} \right] e^{-j\theta} \right\} \begin{bmatrix} i_{ar} \\ i_{br} \\ i_{cr} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

$$y = \frac{L_1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha^2 & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha^2 & 1 \end{bmatrix} e^{j\theta}$$

$$y = \frac{L_1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} [(1+1+1)(\alpha+\alpha+\alpha)(\alpha^2+\alpha^2+\alpha^2)] e^{j\theta}$$

$$y = \frac{L_1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} [(3)(3\alpha)(3\alpha^2)] e^{j\theta}$$

$$y = \frac{3}{2} L_1 \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha \dots \dots \dots \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{ar} \\ i_{br} \\ i_{cr} \end{bmatrix} e^{j\theta}$$

$$y = \frac{3}{2} L_1 e^{j\theta} \vec{i}_r \quad (2.30)$$

Para la Quinta Armónica

$$L_5 \begin{bmatrix} \cos(5\theta) & \cos(5\theta + \frac{4\pi}{3}) & \cos(5\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(5\theta + \frac{2\pi}{3}) & \cos(5\theta) & \cos(5\theta + \frac{4\pi}{3}) \\ \cos(5\theta + \frac{4\pi}{3}) & \cos(5\theta + \frac{2\pi}{3}) & \cos(5\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{ar} \\ i_{br} \\ i_{cr} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

$$\frac{L_5}{2} \left\{ \begin{bmatrix} e^{j5\theta} & e^{j5\theta} \alpha^2 & e^{j5\theta} \alpha \\ e^{j5\theta} \alpha & e^{j5\theta} & e^{j5\theta} \alpha^2 \\ e^{j5\theta} \alpha^2 & e^{j5\theta} \alpha & e^{j5\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-j5\theta} & e^{-j5\theta} \alpha & e^{-j5\theta} \alpha^2 \\ e^{-j5\theta} \alpha^2 & e^{-j5\theta} & e^{-j5\theta} \alpha \\ e^{-j5\theta} \alpha & e^{-j5\theta} \alpha^2 & e^{-j5\theta} \end{bmatrix} \right\}$$

$$\frac{L_5}{2} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \alpha^2 & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha^2 \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{bmatrix} e^{j5\theta} + \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha^2 & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha^2 & 1 \end{bmatrix} e^{-j5\theta} \right\} \begin{bmatrix} i_{ar} \\ i_{br} \\ i_{cr} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

$$y = \frac{L_5}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha^2 & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha^2 & 1 \end{bmatrix} e^{-j5\theta}$$

$$y = \frac{L_5}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} [(1+1+1)(\alpha+\alpha+\alpha)(\alpha^2+\alpha^2+\alpha^2)] e^{-j5\theta} \quad (2.33)$$

$$y = \frac{L_5}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} [(3)(3\alpha)(3\alpha^2)] e^{-j5\theta}$$

$$y = \frac{3}{2} L_5 \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{ar} \\ i_{br} \\ i_{cr} \end{bmatrix} e^{-j5\theta}$$

$$y = \frac{3}{2} L_5 e^{-j5\theta} \vec{i_r} \quad (2.34)$$

Para la Séptima Armónica

$$L_7 \begin{bmatrix} \cos(7\theta) & \cos(7\theta + \frac{2\pi}{3}) & \cos(7\theta + \frac{4\pi}{3}) \\ \cos(7\theta + \frac{4\pi}{3}) & \cos(7\theta) & \cos(7\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(7\theta + \frac{2\pi}{3}) & \cos(7\theta + \frac{4\pi}{3}) & \cos(7\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{ar} \\ i_{br} \\ i_{cr} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

$$\frac{L_7}{2} \left\{ \begin{bmatrix} e^{j7\theta} & e^{j7\theta}\alpha & e^{j7\theta}\alpha^2 \\ e^{j7\theta}\alpha^2 & e^{j7\theta} & e^{j7\theta}\alpha \\ e^{j7\theta}\alpha & e^{j7\theta}\alpha^2 & e^{j7\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-j7\theta} & e^{-j7\theta}\alpha^2 & e^{-j7\theta}\alpha \\ e^{-j7\theta}\alpha & e^{-j7\theta} & e^{-j7\theta}\alpha^2 \\ e^{-j7\theta}\alpha^2 & e^{-j7\theta}\alpha & e^{-j7\theta} \end{bmatrix} \right\}$$

$$\frac{L_7}{2} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha^2 & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha^2 & 1 \end{bmatrix} e^{j7\theta} + \begin{bmatrix} 1 & \alpha^2 & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha^2 \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{bmatrix} e^{-j7\theta} \right\} \begin{bmatrix} i_{ar} \\ i_{br} \\ i_{cr} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

$$y = \frac{L_7}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha^2 & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha^2 & 1 \end{bmatrix} e^{j7\theta}$$

$$y = \frac{L_7}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} [(1+1+1)(\alpha+\alpha+\alpha)(\alpha^2+\alpha^2+\alpha^2)] e^{j7\theta} \quad (2.37)$$

$$y = \frac{L_7}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} [(3)(3\alpha)(3\alpha^2)] e^{j7\theta}$$

$$y = \frac{3}{2} L_7 \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ i_{ar} \\ i_{br} \\ i_{cr} \end{bmatrix} e^{j7\theta}$$

$$y = \frac{3}{2} L_7 e^{j7\theta} \vec{i}_r \quad (2.38)$$

La combinación de las respuestas de las distintas armónicas se expresa en función de sus magnitudes ( $L_1, L_5, L_7$ ) y sus respectivas fases. La ecuación general que describe el comportamiento dinámico del sistema, teniendo en cuenta la influencia de estas armónicas, se presenta a continuación:

$$y = \frac{3}{2} \left( L_1 e^{j\theta} + L_5 e^{-j5\theta} + L_7 e^{j7\theta} + L_{11} e^{-j11\theta} + L_{13} e^{j13\theta} + \dots \right) \vec{i}_r \quad (2.39)$$

Esta relación también puede expresarse de manera compacta como la siguiente suma de componentes armónicas, considerando sus magnitudes y fases correspondientes

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} L_{6n-5} e^{j(6n-5)\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} L_{6n-1} e^{-j(6n-1)\theta} \quad (2.40)$$

Una vez obtenidas las componentes armónicas y su expresión general, el siguiente paso es calcular el par de la primera armónica de la máquina de inducción. Este parámetro es fundamental para evaluar el comportamiento dinámico del sistema, ya que está relacionado con la interacción entre las corrientes y los campos magnéticos generados por la armónica.

A continuación, se presenta el proceso para calcular el par de la primera armónica.

$$\begin{bmatrix} \vec{V}_e \\ \vec{V}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_e & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i}_e \\ \vec{i}_i \end{bmatrix} +$$

$$P \begin{bmatrix} L_{ee} + \frac{3}{2}L_{me} & \frac{3}{2}L_1e^{j\theta} + L_5e^{-j5\theta} + L_7e^{j7\theta} + \dots \\ \frac{3}{2}L_1e^{-j\theta} + L_5e^{j5\theta} + L_7e^{-j7\theta} + \dots & L_{rr} + \frac{3}{2}L_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i}_e \\ \vec{i}_r \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

$$T_e = \frac{1}{2} [i]^t \frac{\partial [L]}{\partial t} [i] \quad (2.42)$$

$$T_e = \frac{1}{2} [i]^t \begin{bmatrix} [0] & [\frac{\partial}{\partial \theta} L_{er}] \\ [\frac{\partial}{\partial \theta} L_{re}] & [0] \end{bmatrix} [i]$$

$$T_e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} [i_e]^t & [i_r]^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [0] & [\frac{\partial}{\partial \theta} L_{er}] \\ [\frac{\partial}{\partial \theta} L_{re}] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i}_e \\ \vec{i}_r \end{bmatrix}$$

$$T_e = \frac{1}{2} \left\{ [i_e]^t \frac{\partial}{\partial \theta} L_{er} [i_r] + [i_r]^t \frac{\partial}{\partial \theta} L_{re} [i_e] \right\}$$

$$T_e = \begin{bmatrix} i_{ae} & i_{be} & i_{ce} \end{bmatrix} \times L_1 \begin{bmatrix} -\sin(\theta) & -\sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta + \frac{4\pi}{3}) \\ -\sin(\theta + \frac{4\pi}{3}) & -\sin(\theta) & -\sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta + \frac{4\pi}{3}) & -\sin(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{ar} \\ i_{br} \\ i_{cr} \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

$$T_e = -\sqrt{\frac{3}{2}} [i_e]^t \frac{L_1}{2j} \left\{ e^{j\theta} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha^2 & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha^2 & 1 \end{bmatrix} - e^{-j\theta} \begin{bmatrix} 1 & \alpha^2 & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha^2 \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} i_{ar} \\ i_{br} \\ i_{cr} \end{bmatrix}$$

$$T_e = -\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{L_7}{2j} \cdot 7 \left\{ e^{j7\theta} \sqrt{\frac{3}{2}} [1 \ \alpha \ \alpha^2] \vec{i}_e^* - e^{-j7\theta} \sqrt{\frac{3}{2}} [1 \ \alpha^2 \ \alpha] \vec{i}_e \right\} \begin{bmatrix} i_{ar} \\ i_{br} \\ i_{cr} \end{bmatrix}$$

$$T_e = -\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{L_1}{2j} \left\{ e^{j\theta} \sqrt{\frac{3}{2}} \begin{bmatrix} \vec{i}_r \\ \alpha \vec{i}_r \\ \alpha^2 \vec{i}_r \end{bmatrix} \vec{i}_e^* - e^{-j\theta} \sqrt{\frac{3}{2}} \begin{bmatrix} \vec{i}_r \\ \alpha^2 \vec{i}_r \\ \alpha \vec{i}_r \end{bmatrix} \vec{i}_e \right\}$$

$$T_e = -\frac{3}{2} \frac{L_1}{2j} \left\{ e^{j\theta} \begin{matrix} \vec{i}_e^* & \vec{i}_r \\ \vec{i}_e & \vec{i}_r^* \end{matrix} - e^{-j\theta} \begin{matrix} \vec{i}_e & \vec{i}_r \\ \vec{i}_e^* & \vec{i}_r^* \end{matrix} \right\}$$

$$T_e = \frac{3}{2} L_1 \left\{ \frac{e^{-j\theta}}{2j} \begin{matrix} \vec{i}_e & \vec{i}_r \\ \vec{i}_e^* & \vec{i}_r^* \end{matrix} - \frac{e^{j\theta}}{2j} \begin{matrix} \vec{i}_e^* & \vec{i}_r \\ \vec{i}_e & \vec{i}_r^* \end{matrix} \right\}$$

$$T_e = \frac{3}{2} L_1 I_m \left\{ \begin{matrix} \vec{i}_e \\ \vec{i}_e \frac{(\vec{i}_r e^{j\theta})^*}{i_r \vec{e}} \end{matrix} \right\}$$

$$T_e = \frac{3}{2} L_1 I_m \left( \begin{matrix} \vec{i}_e & \vec{i}_r^* e^{j\theta} \end{matrix} \right) \quad (2.44)$$

El cálculo del par correspondiente a la quinta armónica se desarrolla de manera similar al de la primera armónica. Debido a que la metodología y las ecuaciones utilizadas son las mismas, el proceso para obtener el par de esta armónica sigue los mismos pasos detallados anteriormente.

$$T_e = \begin{bmatrix} i_{ae} & i_{be} & i_{ce} \end{bmatrix} \times L_5 \begin{bmatrix} -5 \sin(5\theta) & -5 \sin(5\theta + \frac{4\pi}{3}) & -5 \sin(5\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ -5 \sin(5\theta + \frac{2\pi}{3}) & -5 \sin(5\theta) & -5 \sin(5\theta + \frac{4\pi}{3}) \\ -5 \sin(5\theta + \frac{4\pi}{3}) & -5 \sin(5\theta + \frac{2\pi}{3}) & -5 \sin(5\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{ar} \\ i_{br} \\ i_{cr} \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

$$T_e = -\sqrt{\frac{3}{2}} [i_e]^t \frac{L_5}{2j} \cdot 5 \left\{ e^{j5\theta} \begin{bmatrix} 1 & \alpha^2 & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha^2 \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{bmatrix} - e^{-j5\theta} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha^2 & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha^2 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} i_{ar} \\ i_{br} \\ i_{cr} \end{bmatrix}$$

$$T_e = -\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot 5 \cdot \frac{L_5}{2j} \left\{ \sqrt{\frac{3}{2}} e^{j5\theta} \begin{bmatrix} \vec{i}_r \\ \alpha^2 \vec{i}_r \\ \alpha \vec{i}_r \end{bmatrix} \vec{i}_e - \sqrt{\frac{3}{2}} e^{-j5\theta} \begin{bmatrix} \vec{i}_r \\ \alpha \vec{i}_r \\ \alpha^2 \vec{i}_r \end{bmatrix} \vec{i}_e \right\}$$

$$T_e = -\frac{3}{2} \cdot 5 \cdot \frac{L_5}{2j} \left\{ e^{j5\theta} \begin{matrix} \vec{i}_e & \vec{i}_r \\ \vec{i}_e^* & \vec{i}_r^* \end{matrix} - e^{-j5\theta} \begin{matrix} \vec{i}_e^* & \vec{i}_r \\ \vec{i}_e & \vec{i}_r^* \end{matrix} \right\}$$

$$T_e = -\frac{15}{2} L_5 \left\{ \frac{e^{j5\theta}}{2j} \begin{matrix} \vec{i}_e & \vec{i}_r \\ \vec{i}_e^* & \vec{i}_r^* \end{matrix} - \frac{e^{-j5\theta}}{2j} \begin{matrix} \vec{i}_e^* & \vec{i}_r \\ \vec{i}_e & \vec{i}_r^* \end{matrix} \right\}$$

$$T_e = \frac{15}{2} L_5 \left\{ \frac{e^{-j5\theta}}{2j} \begin{matrix} \vec{i}_e^* & \vec{i}_r \\ \vec{i}_e & \vec{i}_r^* \end{matrix} - \frac{e^{j5\theta}}{2j} \begin{matrix} \vec{i}_e & \vec{i}_r \\ \vec{i}_e^* & \vec{i}_r^* \end{matrix} \right\}$$

$$T_e = \frac{15}{2} L_5 I_m \left( \begin{array}{c} \vec{i}_e^* \\ \vec{i}_r e^{-j5\theta} \end{array} \right) \quad (2.46)$$

El cálculo del par de la séptima armónica se realiza de la misma manera que el de las armónicas anteriores.

$$T_e = \begin{bmatrix} i_{ae} & i_{be} & i_{ce} \end{bmatrix} \times L_7 \begin{bmatrix} -7 \sin(7\theta) & -7 \sin(7\theta + \frac{2\pi}{3}) & -7 \sin(7\theta + \frac{4\pi}{3}) \\ -7 \sin(7\theta + \frac{4\pi}{3}) & -7 \sin(7\theta) & -7 \sin(7\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ -7 \sin(7\theta + \frac{2\pi}{3}) & -7 \sin(7\theta + \frac{4\pi}{3}) & -7 \sin(7\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{ar} \\ i_{br} \\ i_{cr} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

$$T_e = -\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot [i_e]^t \cdot \frac{L_7}{2j} \cdot 7 \left\{ e^{j7\theta} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha^2 & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha^2 & 1 \end{bmatrix} - e^{-j7\theta} \begin{bmatrix} 1 & \alpha^2 & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha^2 \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} i_{ar} \\ i_{br} \\ i_{cr} \end{bmatrix}$$

$$T_e = -\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{L_7}{2j} \cdot$$

$$7 \left\{ e^{j7\theta} \sqrt{\frac{3}{2}} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \vec{i}_e^* - e^{-j7\theta} \sqrt{\frac{3}{2}} \begin{bmatrix} 1 & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix} \vec{i}_e \right\} \begin{bmatrix} i_{ar} \\ i_{br} \\ i_{cr} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

$$T_e = -\frac{3}{2} \cdot \frac{L_7}{2j} \cdot 7 \left\{ e^{j7\theta} \begin{bmatrix} \vec{i}_r \\ \alpha \vec{i}_r \\ \alpha^2 \vec{i}_r \end{bmatrix} \vec{i}_e^* - e^{-j7\theta} \begin{bmatrix} \vec{i}_r \\ \alpha^2 \vec{i}_r \\ \alpha \vec{i}_r \end{bmatrix} \vec{i}_e \right\}$$

$$T_e = -\frac{3}{2} \cdot \frac{L_7}{2j} \cdot 7 \left\{ e^{j7\theta} \begin{array}{c} \vec{i}_e^* \\ \vec{i}_r \end{array} - e^{-j7\theta} \begin{array}{c} \vec{i}_e \\ \vec{i}_r^* \end{array} \right\}$$

$$T_e = \frac{21}{2} L_7 \left\{ \frac{e^{-j7\theta}}{2j} \vec{i}_e \vec{i}_r^* - \frac{e^{j7\theta}}{2j} \vec{i}_e^* \vec{i}_r \right\}$$

$$T_e = \frac{21}{2} L_7 I_m \left\{ \vec{i}_e \left( \vec{i}_r e^{j7\theta} \right)^* \right\} \quad (2.49)$$

Los cálculos del par para las armónicas de la primera, quinta y séptima orden han permitido obtener una representación del comportamiento dinámico de la máquina de inducción bajo la influencia de las armónicas espaciales. Estos resultados son fundamentales para evaluar el impacto de dichas armónicas en el rendimiento de la máquina, proporcionando información clave sobre la interacción entre las corrientes y los campos magnéticos generados por cada armónica

### 2.2.5. Modelo VBR de la MI

El modelo VBR de la máquina de inducción, analizado desde el rotor, permite estudiar su comportamiento dinámico considerando la influencia de las armónicas espaciales. Estas armónicas, generadas por las irregularidades en la distribución del flujo magnético, afectan la corriente en el rotor y el par electromagnético, lo que puede alterar el rendimiento de la máquina.

El análisis de este modelo con armónicas espaciales permite comprender mejor los efectos no lineales y transitorios que surgen en la máquina bajo estas condiciones. Esto es fundamental para evaluar el impacto de las armónicas en su comportamiento y contribuir a estrategias de optimización en su diseño y operación.

### 2.2.6. Modelo VBR de la MI con la Armonica Fundamental

Se desarrolla el modelo matemático que describe el comportamiento de la máquina de inducción bajo la presencia de una sola armónica, Como se muestra en la ecuación (2.50).

$$\begin{bmatrix} \vec{v}_e \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_e & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i}_e \\ \vec{i}_r \end{bmatrix} + p \left\{ \begin{bmatrix} L_e & M_1 e^{j\theta} \\ M_1 e^{-j\theta} & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i}_e \\ \vec{i}_r \end{bmatrix} \right\} \quad (2.50)$$

El vector espacial del flujo del rotor está dado por la ecuación (2.51).

$$\begin{bmatrix} \vec{\lambda}_e \\ \vec{\lambda}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_e & M_1 e^{j\theta} \\ M_1 e^{-j\theta} & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i}_e \\ \vec{i}_r \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

$$\vec{\lambda}_r = M_1 e^{-j\theta} \vec{i}_e + L_r \vec{i}_r \quad (2.52)$$

La corriente del rotor ( $i_r$ ) se calcula a partir de la siguiente expresión.

$$\vec{i}_r = \frac{1}{L_r} \left( \vec{\lambda}_r - M_1 e^{-j\theta} \vec{i}_e \right) \quad (2.53)$$

La ecuación del rotor se obtiene a partir de la (2.50).

$$0 = R_r \vec{i}_r + p \vec{\lambda}_r \quad (2.54)$$

La derivada del flujo del rotor se determina mediante la ecuación (2.54), tras sustituir la corriente del

rotor.

$$p\vec{\lambda}_r = -\frac{R_r}{L_r} \left( \vec{\lambda}_r - M_1 e^{-j\theta} \vec{i}_e \right) \quad (2.55)$$

Parte Real

$$p\lambda_{rx} = -\frac{R_r}{L_r} [\lambda_{rx} - M_1 (\cos \theta i_{ex} + \sin \theta i_{ey})] \quad (2.56)$$

Parte Imaginaria

$$p\lambda_{ry} = -\frac{R_r}{L_r} [\lambda_{ry} - M_1 (\cos \theta i_{ey} - \sin \theta i_{ex})] \quad (2.57)$$

La ecuación de tensión del estator ( $v_e$ ) se obtiene como resultado de (2.50).

$$\vec{v}_e = R_e \vec{i}_e + p \left( L_e \vec{i}_e + M_1 e^{j\theta} \vec{i}_r \right) \quad (2.58)$$

$$\vec{v}_e = R_e \vec{i}_e + L_e p \vec{i}_e + M_1 e^{j\theta} p \vec{i}_r + M_1 j \dot{\theta} e^{j\theta} \vec{i}_r \quad (2.59)$$

$$\vec{v}_e = R_e \vec{i}_e + L_e p \vec{i}_e + \frac{M_1}{L_r} e^{j\theta} \left[ p \vec{\lambda}_r - M_1 p \left( e^{-j\theta} \vec{i}_e \right) \right] + M_1 j \dot{\theta} e^{j\theta} \vec{i}_r \quad (2.60)$$

Tras agrupar los términos semejantes, obtenemos:

$$\vec{v}_e = \left( R_e + \frac{R_r}{L_r^2} M_1^2 \right) \vec{i}_e + \left( L_e - \frac{M_1^2}{L_r} \right) p \vec{i}_e + \frac{M_1}{L_r} e^{j\theta} \left( j \dot{\theta} - \frac{R_r}{L_r} \right) \vec{\lambda}_r \quad (2.61)$$

La resistencia equivalente ( $Req$ ) se define como:

$$Req = \left( R_e + \frac{R_r}{L_r^2} M_1^2 \right) \quad (2.62)$$

Por otro lado, la inductancia equivalente ( $Leq$ ) se calcula mediante:

$$Leq = \left( L_e - \frac{M_1^2}{L_r} \right) \quad (2.63)$$

Su fuerza electromotriz ( $Fem$ ) se define como:

$$E_e = \frac{M_1}{L_r} e^{j\theta} \left( j \dot{\theta} - \frac{R_r}{L_r} \right) \quad (2.64)$$

Este se divide en:

Parte Real

$$E_x = \frac{M_1}{L_r} \left[ -\frac{R_r}{L_r} (\cos \theta \lambda_{rx} - \sin \theta \lambda_{ry}) - \dot{\theta} (\cos \theta \lambda_{ry} + \sin \theta \lambda_{rx}) \right] \quad (2.65)$$

Parte imaginaria

$$E_y = \frac{M_1}{L_r} \left[ -\frac{R_r}{L_r} (\cos \theta \lambda_{ry} + \sin \theta \lambda_{rx}) + \dot{\theta} (\cos \theta \lambda_{rx} - \sin \theta \lambda_{ry}) \right] \quad (2.66)$$

Finalmente, su par eléctrico ( $Te$ ) se expresa como:

$$T_e = \frac{M}{L_r} [(\cos \theta \lambda_{rx} - \sin \theta \lambda_{ry}) i_{ey} - (\sin \theta \lambda_{rx} + \cos \theta \lambda_{ry}) i_{ex}] \quad (2.67)$$

### 2.2.7. Modelo VBR de la MI considerando la Primera y Quinta Armónica

Tras desarrollar el modelo para la primera armónica, es necesario extender el análisis para incluir la influencia de la quinta armónica. A continuación, se presenta el modelo dinámico de la máquina considerando ambas armónicas.

$$\begin{bmatrix} \vec{v}_e \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_e & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i}_e \\ \vec{i}_r \end{bmatrix} + p \left\{ \begin{bmatrix} L_e & M_1 e^{j\theta} + M_5 e^{-j5\theta} \\ M_1 e^{-j\theta} + M_5 e^{j5\theta} & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i}_e \\ \vec{i}_r \end{bmatrix} \right\} \quad (2.68)$$

El vector espacial del flujo del rotor, considerando la primera y quinta armónica, está dado por la ecuación (2.69).

$$\begin{bmatrix} \vec{\lambda}_e \\ \vec{\lambda}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_e & M_1 e^{j\theta} + M_5 e^{-j5\theta} \\ M_1 e^{-j\theta} + M_5 e^{j5\theta} & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i}_e \\ \vec{i}_r \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

$$\vec{\lambda}_r = (M_1 e^{-j\theta} + M_5 e^{j5\theta}) \vec{i}_e + L_r \vec{i}_r \quad (2.70)$$

La corriente del rotor se determina utilizando la siguiente expresión

$$\vec{i}_r = \frac{1}{L_r} [\vec{\lambda}_r - (M_1 e^{-j\theta} + M_5 e^{j5\theta}) \vec{i}_e] \quad (2.71)$$

La ecuación del rotor se expresa a partir de la (2.68).

$$0 = R_r \vec{i}_r + p \vec{\lambda}_r \quad (2.72)$$

La derivada del flujo del rotor se obtiene a partir de la (2.72), considerando la sustitución de la corriente del rotor.

$$p \vec{\lambda}_r = -\frac{R_r}{L_r} [(\lambda_{rx} + j \lambda_{ry}) - (M_1 e^{-j\theta} + M_5 e^{j5\theta}) (i_{ex} + j i_{ey})] \quad (2.73)$$

Parte Real:

$$p\lambda_{rx}^{\vec{}} = -\frac{R_r}{L_r} \{ \lambda_{rx} - M_1 (\cos \theta i_{ex} + \sin \theta i_{ey}) - M_5 (\cos 5\theta i_{ex} - \sin 5\theta i_{ey}) \} \quad (2.74)$$

Parte Imaginaria:

$$p\lambda_{ry}^{\vec{}} = -\frac{R_r}{L_r} \{ \lambda_{ry} - M_1 (\cos \theta i_{ey} - \sin \theta i_{ex}) - M_5 (\cos 5\theta i_{ey} + \sin 5\theta i_{ex}) \} \quad (2.75)$$

La ecuación de tensión del estator se obtiene como resultado de la (2.68).

$$\vec{v}_e = R_e \vec{i}_e + L_e p \vec{i}_e + (M_1 e^{j\theta} + M_5 e^{-j5\theta}) p \vec{i}_r + (M_1 e^{j\theta} - 5M_5 e^{-j5\theta}) j\dot{\theta} \vec{i}_r \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_e = R_e \vec{i}_e + L_e p \vec{i}_e + \frac{(M_1 e^{j\theta} + M_5 e^{-j5\theta})}{L_r} \left\{ -\frac{R_r}{L_r} \left[ \vec{\lambda}_r - (M_1 e^{-j\theta} + M_5 e^{j5\theta}) \vec{i}_e \right] - \right. \\ \left. M_1 \left( -j\dot{\theta} e^{-j\theta} \vec{i}_e + e^{-j\theta} p \vec{i}_e \right) - M_5 \left( j5\dot{\theta} e^{j5\theta} \vec{i}_e + e^{j5\theta} p \vec{i}_e \right) \right\} + \\ j\dot{\theta} \left( \frac{M_1}{L_r} e^{j\theta} - 5 \frac{M_5}{L_r} e^{-j5\theta} \right) \left[ \vec{\lambda}_r - (M_1 e^{-j\theta} + M_5 e^{j5\theta}) \vec{i}_e \right] \end{aligned} \quad (2.77)$$

Tras simplificar la expresión, obtenemos:

$$\begin{aligned} \vec{v}_e = \left[ R_e + \frac{R_r}{L_r^2} (M_1^2 + M_5^2 + 2M_1 M_5 \cos 6\theta) \right] \vec{i}_e \\ + \left[ L_e + \frac{1}{L_r} (M_1^2 + M_5^2 + 2M_1 M_5 \cos 6\theta) \right] p \vec{i}_e \\ + \left[ -\frac{R_r}{L_r} (M_1 e^{j\theta} + M_5 e^{-j5\theta}) j\dot{\theta} + (M_1 e^{j\theta} - 5M_5 e^{-j5\theta}) \right] \frac{\vec{\lambda}_r}{L_r} \\ + \left[ 12\dot{\theta} \frac{M_1 M_5}{L_r} \sin 6\theta \right] \vec{i}_e \end{aligned} \quad (2.78)$$

La resistencia equivalente  $R_{eq}$  se define como:

$$R_{eq} = \left[ R_e + \frac{R_r}{L_r^2} (M_1^2 + M_5^2 + 2M_1 M_5 \cos 6\theta) \right] \quad (2.79)$$

Por otro lado, la inductancia equivalente  $L_{eq}$  se calcula mediante:

$$L_{eq} = \left[ L_e + \frac{1}{L_r} (M_1^2 + M_5^2 + 2M_1 M_5 \cos 6\theta) \right] \quad (2.80)$$

Su fuerza electromotriz  $F_{em}$  se define como:

$$\begin{aligned} E_e = \left[ -\frac{R_r}{L_r} (M_1 e^{j\theta} + M_5 e^{-j5\theta}) j\dot{\theta} + (M_1 e^{j\theta} - 5M_5 e^{-j5\theta}) \right] \frac{\vec{\lambda}_r}{L_r} + \\ \left[ 12\dot{\theta} \frac{M_1 M_5}{L_r} \sin 6\theta \right] \vec{i}_e \end{aligned} \quad (2.81)$$

Este se divide en:

Parte Real:

$$\begin{aligned}
E_{ex} = & \frac{M_1}{L_r} \left[ -\frac{R_r}{L_r} (\cos \theta \lambda_{rx} - \sin \theta \lambda_{ry}) - \dot{\theta} (\sin \theta \lambda_{rx} + \cos \theta \lambda_{ry}) \right] + \\
& \frac{M_5}{L_r} \left[ -\frac{R_r}{L_r} (\cos 5\theta \lambda_{rx} + \sin 5\theta \lambda_{ry}) - 5\dot{\theta} (\sin 5\theta \lambda_{rx} - \cos 5\theta \lambda_{ry}) \right] + \\
& \left[ 12\dot{\theta} \frac{M_1 M_5}{L_r} \sin 6\theta \right] i_{ex}
\end{aligned} \tag{2.82}$$

Parte imaginaria:

$$\begin{aligned}
E_{ey} = & \frac{M_1}{L_r} \left[ \dot{\theta} (\cos \theta \lambda_{rx} - \sin \theta \lambda_{ry}) - \frac{R_r}{L_r} (\sin \theta \lambda_{rx} + \cos \theta \lambda_{ry}) \right] + \\
& \frac{M_5}{L_r} \left[ -5\dot{\theta} (\cos 5\theta \lambda_{rx} + \sin 5\theta \lambda_{ry}) + \frac{R_r}{L_r} (\sin 5\theta \lambda_{rx} - \cos 5\theta \lambda_{ry}) \right] + \\
& \left[ 12\dot{\theta} \frac{M_1 M_5}{L_r} \sin 6\theta \right] i_{ey}
\end{aligned} \tag{2.83}$$

Finalmente, su par eléctrico se expresa como:

$$\begin{aligned}
T_{e5} = & \frac{M_5}{L_r} \left\{ (\sin 5\theta \lambda_{rx} + \cos 5\theta \lambda_{ry}) i_{ex} - (\cos 5\theta \lambda_{rx} - \sin 5\theta \lambda_{ry}) i_{ey} - \right. \\
& \left. M_5 [(\sin 10\theta) i_{ex}^2 - (\cos 10\theta) i_{ey}^2] \right\}
\end{aligned} \tag{2.84}$$

### 2.2.8. Modelo VBR de la MI considerando la Primera, Quinta Y Séptima Armónica

Se extiende el modelo previamente desarrollado para incluir la séptima armónica, permitiendo un análisis más detallado de su influencia en la dinámica de la máquina de inducción. Esta incorporación posibilita evaluar los efectos combinados de las componentes armónicas en el comportamiento electromagnético, proporcionando una representación más precisa del sistema.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \vec{v}_e \\ 0 \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} R_e & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i}_e \\ \vec{i}_r \end{bmatrix} + \\
p \left\{ \begin{bmatrix} L_e & M_1 e^{j\theta} + M_5 e^{-j5\theta} + M_7 e^{j7\theta} \\ M_1 e^{-j\theta} + M_5 e^{j5\theta} + M_7 e^{-j7\theta} & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i}_e \\ \vec{i}_r \end{bmatrix} \right\}
\end{aligned} \tag{2.85}$$

El vector espacial del flujo del rotor está dado por la ecuación (2.86).

$$\begin{bmatrix} \vec{\lambda}_e \\ \vec{\lambda}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_e & M_1 e^{j\theta} + M_5 e^{-j5\theta} + M_7 e^{j7\theta} \\ M_1 e^{-j\theta} + M_5 e^{j5\theta} + M_7 e^{-j7\theta} & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i}_e \\ \vec{i}_r \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

$$\vec{\lambda}_r = (M_1 e^{-j\theta} + M_5 e^{j5\theta} + M_7 e^{-j7\theta}) \vec{i}_e + L_r \vec{i}_r \quad (2.87)$$

La corriente del rotor se calcula a partir de la siguiente expresión.

$$\vec{i}_r = \frac{1}{L_r} \left\{ \vec{\lambda}_r - (M_1 e^{-j\theta} + M_5 e^{j5\theta} + M_7 e^{-j7\theta}) \vec{i}_e \right\} \quad (2.88)$$

La ecuación del rotor se obtiene a partir de la (2.85).

$$0 = R_r \vec{i}_r + p \vec{\lambda}_r \quad (2.89)$$

La derivada del flujo del rotor se determina mediante la ecuación (2.89), tras sustituir la corriente del rotor.

$$p \vec{\lambda}_r = -R_r \left\{ \frac{1}{L_r} \left[ \vec{\lambda}_r - (M_1 e^{-j\theta} + M_5 e^{j5\theta} + M_7 e^{-j7\theta}) \vec{i}_e \right] \right\} \quad (2.90)$$

Parte Real

$$p \lambda_{rx} = -\frac{R_r}{L_r} \left\{ \lambda_{rx} - M_1 (\cos \theta i_{ex} + \sin \theta i_{ey}) - M_5 (\cos 5\theta i_{ex} - \sin 5\theta i_{ey}) - M_7 (\cos 7\theta i_{ex} + \sin 7\theta i_{ey}) \right\} \quad (2.91)$$

Parte Imaginaria

$$p \lambda_{ry} = -\frac{R_r}{L_r} \left\{ \lambda_{ry} - M_1 (\cos \theta i_{ey} - \sin \theta i_{ex}) - M_5 (\cos 5\theta i_{ey} + \sin 5\theta i_{ex}) - M_7 (\cos 7\theta i_{ey} - \sin 7\theta i_{ex}) \right\} \quad (2.92)$$

La ecuación de tensión del estator se obtiene como resultado de (2.85).

$$\begin{aligned} \vec{v}_e = R_e \vec{i}_e + L_e p \vec{i}_e + (M_1 e^{j\theta} + M_5 e^{-j5\theta} + M_7 e^{j7\theta}) p \vec{i}_r + \\ j \dot{\theta} M_1 e^{j\theta} \vec{i}_r - j 5 \dot{\theta} M_5 e^{-j5\theta} \vec{i}_r + j 7 \dot{\theta} M_7 e^{j7\theta} \vec{i}_r \end{aligned} \quad (2.93)$$

Al agrupar los términos semejantes, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\vec{v}_e = & \left[ R_e + \frac{R_r}{L_r^2} (M_1^2 + M_5^2 + M_7^2 + 2M_1M_5 \cos 6\theta + 2M_1M_7 \cos 6\theta + 2M_5M_7 \cos 6\theta) \right] \vec{i}_e \\
& + \left[ L_e - \frac{1}{L_r} (M_1^2 + M_5^2 + M_7^2 + 2M_1M_5 \cos 6\theta + 2M_1M_7 \cos 6\theta + 2M_5M_7 \cos 6\theta) \right] p\vec{i}_e \\
& + \left[ -\frac{R_r}{L_r} (M_1e^{j\theta} + M_5e^{-j5\theta} + M_7e^{j7\theta}) + j\dot{\theta} (M_1e^{j\theta} - 5M_5e^{-j5\theta} + 7M_7e^{j7\theta}) \right] \frac{\vec{\lambda}_r}{L_r} \\
& + \left[ 12\dot{\theta}M_1M_5 \sin 6\theta + 12\dot{\theta}M_1M_7 \sin 6\theta + 24\dot{\theta}M_5M_7 \sin 12\theta \right] \frac{\vec{i}_e}{L_r}
\end{aligned} \tag{2.94}$$

La resistencia equivalente  $R_{eq}$  se define como:

$$R_{eq} = \left[ R_e + \frac{R_r}{L_r^2} (M_1^2 + M_5^2 + M_7^2 + 2M_1M_5 \cos 6\theta + 2M_1M_7 \cos 6\theta + 2M_5M_7 \cos 6\theta) \right] \tag{2.95}$$

La inductancia equivalente  $L_{eq}$  se calcula mediante:

$$L_{eq} = \left[ L_e - \frac{1}{L_r} (M_1^2 + M_5^2 + M_7^2 + 2M_1M_5 \cos 6\theta + 2M_1M_7 \cos 6\theta + 2M_5M_7 \cos 6\theta) \right] \tag{2.96}$$

Su fuerza electromotriz  $F_{em}$  se define como:

$$\begin{aligned}
E_e = & \left[ -\frac{R_r}{L_r} (M_1e^{j\theta} + M_5e^{-j5\theta} + M_7e^{j7\theta}) + j\dot{\theta} (M_1e^{j\theta} - 5M_5e^{-j5\theta} + 7M_7e^{j7\theta}) \right] \frac{\vec{\lambda}_r}{L_r} \\
& + \left[ 12\dot{\theta}M_1M_5 \sin 6\theta + 12\dot{\theta}M_1M_7 \sin 6\theta + 24\dot{\theta}M_5M_7 \sin 12\theta \right] \frac{\vec{i}_e}{L_r}
\end{aligned} \tag{2.97}$$

Este se divide en:

Parte Real

$$\begin{aligned}
E_{ex} = & \frac{M_1}{L_r} \left[ -\frac{R_r}{L_r} (\cos \theta \lambda_{rx} - \sin \theta \lambda_{ry}) - \dot{\theta} (\sin \theta \lambda_{rx} + \cos \theta \lambda_{ry}) \right] + \\
& \frac{M_5}{L_r} \left[ -\frac{R_r}{L_r} (\cos 5\theta \lambda_{rx} + \sin 5\theta \lambda_{ry}) - 5\dot{\theta} (\sin 5\theta \lambda_{rx} - \cos 5\theta \lambda_{ry}) \right] + \\
& \frac{M_7}{L_r} \left[ -\frac{R_r}{L_r} (\cos 7\theta \lambda_{rx} - \sin 7\theta \lambda_{ry}) - 7\dot{\theta} (\sin 7\theta \lambda_{rx} + \cos 7\theta \lambda_{ry}) \right] + \\
& \left[ 12\dot{\theta}M_1M_5 \sin 6\theta + 12\dot{\theta}M_1M_7 \sin 6\theta + 24\dot{\theta}M_5M_7 \sin 12\theta \right] \frac{\dot{i}_{ex}}{L_r}
\end{aligned} \tag{2.98}$$

Parte imaginaria

$$\begin{aligned}
E_{ey} = & \frac{M_1}{L_r} \left[ \dot{\theta} (\cos \theta \lambda_{rx} - \sin \theta \lambda_{ry}) - \frac{R_r}{L_r} (\sin \theta \lambda_{rx} + \cos \theta \lambda_{ry}) \right] + \\
& \frac{M_5}{L_r} \left[ -5\dot{\theta} (\cos 5\theta \lambda_{rx} + \sin 5\theta \lambda_{ry}) + \frac{R_r}{L_r} (\sin 5\theta \lambda_{rx} - \cos 5\theta \lambda_{ry}) \right] + \\
& \frac{M_7}{L_r} \left[ 7\dot{\theta} (\cos 7\theta \lambda_{rx} - \sin 7\theta \lambda_{ry}) - \frac{R_r}{L_r} (\sin 7\theta \lambda_{rx} + \cos 7\theta \lambda_{ry}) \right] + \\
& \left[ 12\dot{\theta} M_1 M_5 \sin 6\theta + 12\dot{\theta} M_1 M_7 \sin 6\theta + 24\dot{\theta} M_5 M_7 \sin 12\theta \right] \frac{i_{ey}}{L_r}
\end{aligned} \tag{2.99}$$

Finalmente, su par eléctrico se expresa como:

$$T_{e7} = \frac{M_7}{L_r} [(\cos 7\theta \lambda_{rx} - \sin 7\theta \lambda_{ry}) i_{ey} - (\sin 7\theta \lambda_{rx} + \cos 7\theta \lambda_{ry}) i_{ex}] \tag{2.100}$$

A lo largo del desarrollo del modelo VBR, se ha analizado el impacto de la primera, quinta y séptima armónica en el comportamiento dinámico de la máquina de inducción. En el caso de la primera armónica, el modelo refleja únicamente el comportamiento fundamental de la máquina, sin la influencia de distorsiones armónicas. Sin embargo, al incluir la quinta armónica, se observa una modificación en la distribución de las corrientes inducidas en el rotor, lo que genera cambios en el par electromagnético.

Finalmente, al incorporar la séptima armónica, los efectos armónicos se intensifican, evidenciando una mayor complejidad en la interacción entre las corrientes y los campos magnéticos. Estos efectos podrán analizarse con mayor detalle a través de simulaciones en ATPDraw, lo que permitirá visualizar su impacto en el comportamiento dinámico de la máquina de inducción y validar los resultados obtenidos en el desarrollo teórico.

## CAPÍTULO 3

# APLICACIÓN DE ATP-EMTP EN EL ESTUDIO DE ARMÓNICAS ESPACIALES EN MAQUINAS DE INDUCCIÓN

### 3.1. Introducción

El análisis del comportamiento dinámico de las máquinas de inducción bajo la influencia de armónicos espaciales es esencial para comprender su rendimiento y eficiencia operativa. En este contexto, ATP-EMTP se presenta como una herramienta indispensable para la simulación precisa de fenómenos electromagnéticos y electromecánicos, permitiendo estudiar las interacciones complejas que ocurren en los sistemas eléctricos. La interfaz gráfica ATPDraw facilita la creación y modificación de modelos de circuitos eléctricos, haciendo que el proceso de simulación sea más accesible y eficiente.

Este capítulo aborda el uso de ATP-EMTP y ATPDraw en la modelización de máquinas de inducción, con un enfoque específico en el análisis de los efectos de los armónicos espaciales. Se exploran las capacidades del software para simular con precisión el impacto de estos armónicos en el comportamiento de las máquinas, lo que permite validar los resultados teóricos y obtener datos cruciales para la optimización del diseño y la operación de las máquinas de inducción. A través de esta herramienta, se pueden realizar ajustes en los modelos, comparando diferentes configuraciones y condiciones operativas para obtener conclusiones más precisas sobre los efectos de los armónicos en el rendimiento de la máquina.

## **3.2. Modelación en ATP EMTP**

### **3.2.1. Uso de ATP-EMTP y ATPDraw en la Simulación de Sistemas Eléctricos**

El programa ATP-EMTP [17] es un software especializado que permite la simulación digital de fenómenos transitorios electromagnéticos y electromecánicos con fines de diseño, especificación de equipos y definición de parámetros eléctricos fundamentales. Mediante esta herramienta, es posible modelar y resolver una amplia variedad de situaciones en instalaciones eléctricas, como sobre tensiones, cortocircuitos y otras transiciones rápidas que afectan el comportamiento de los sistemas. Además, ATP Draw es una interfaz gráfica que complementa el uso de ATP-EMTP, simplificando la creación de modelos de circuitos eléctricos. Los componentes se seleccionan de una librería con elementos predefinidos, cuyos parámetros se ajustan a través de ventanas de diálogo y se conectan de forma sencilla mediante el ratón. ATP Draw permite trabajar en varios circuitos simultáneamente, optimizando el proceso de simulación y facilitando la creación de modelos de forma rápida y eficiente.

### **3.2.2. Aplicaciones de ATP-EMTP**

El software ATP ofrece la capacidad de realizar múltiples estudios, destacando los siguientes análisis [18]:

- Maquinas Eléctricas
- Análisis de armónicos
- Sobre voltajes por maniobra
- Simulaciones de circuitos eléctricos
- Análisis de fallas en sistemas eléctricos
- Modelado de protecciones eléctricas
- Análisis de transitorios.

### **3.2.3. Utilización de ATP-EMTP y ATP Draw en el Análisis de Armónicos Espaciales en MI**

La utilización de ATP-EMTP y ATP Draw será fundamental para el análisis de la influencia de los armónicos espaciales en el comportamiento dinámico de las máquinas de inducción. Estas herramientas permitirán realizar simulaciones precisas, lo que facilitará la validación de los resultados teóricos obtenidos en el estudio, proporcionando un enfoque detallado para evaluar el impacto de los armónicos en el rendimiento de la máquina. En particular, el uso de ATP-EMTP, una plataforma avanzada para la

simulación de sistemas eléctricos transitorios, será esencial para modelar los fenómenos dinámicos que ocurren durante la operación de las máquinas de inducción bajo la influencia de armónicos espaciales.

Además, la capacidad de modelar las máquinas de inducción en estos entornos posibilitará el análisis de cómo los armónicos afectan parámetros críticos, tales como el rendimiento, la eficiencia operativa y las características del flujo magnético. La interfaz gráfica de ATP Draw, al permitir la creación y modificación intuitiva de modelos eléctricos, agilizará tanto la experimentación como la obtención de datos relevantes. Este enfoque será clave para evaluar el impacto de los armónicos espaciales sobre el comportamiento de la máquina, permitiendo realizar ajustes en los modelos para comparar resultados y obtener conclusiones más precisas sobre las condiciones operativas bajo distintas configuraciones de armónicos.

El análisis de los armónicos espaciales es fundamental, ya que su presencia puede afectar la distribución de la corriente y el flujo magnético dentro de la máquina de inducción, lo que impacta directamente en su rendimiento. Estos efectos pueden modificar parámetros como la eficiencia operativa y la estabilidad de la máquina. Gracias a ATP-EMTP y ATP Draw, será posible simular estos fenómenos con precisión, permitiendo estudiar cómo los armónicos espaciales influyen en el comportamiento de la máquina. Esto facilitará la validación de los resultados teóricos y proporcionará datos útiles para optimizar tanto el diseño como la operación de las máquinas de inducción en presencia de armónicos.

### **3.2.4. Definiciones del programa ATP**

El programa ATP, como herramienta de simulación de sistemas eléctricos, utiliza un conjunto de declaraciones específicas para definir y configurar los modelos. Estas declaraciones permiten a los usuarios especificar diversos aspectos de los modelos, desde la asignación de valores constantes hasta la definición de submodelos y funciones personalizadas.

- **CONST:** Permite la asignación de valores constantes a elementos internos del modelo, especificando valor y nombre.
- **DATA:** Facilita la asignación de parámetros de datos externos al modelo, indicando su valor y nombre.
- **VAR:** Define las variables internas del modelo, estableciendo su nombre.
- **INPUT:** Especifica las entradas del modelo, incluyendo su nombre, valor predeterminado y rango.
- **OUTPUT:** Determina qué modelos del programa se pueden utilizar como salidas del modelo actual.
- **FUNCTION:** Indica las funciones matemáticas o lógicas empleadas en el modelo.
- **MODEL:** Define los submodelos que se integran dentro del modelo principal."

### 3.2.5. Utilización de MODELS

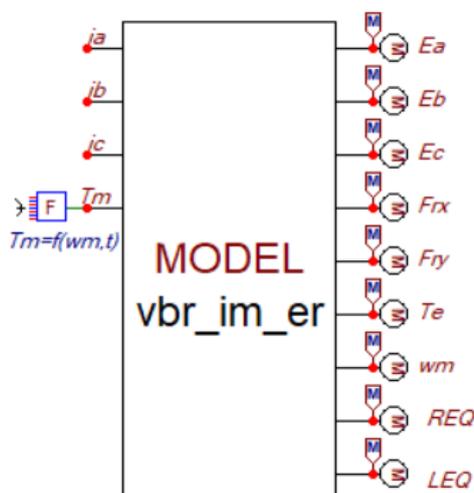


Figura 3.1: Models VBR para el análisis transitorio de la MI

MODELS es un lenguaje de propósito general diseñado para describir y analizar sistemas que cambian con el tiempo. Cuenta con un conjunto de herramientas de simulación que facilitan su aplicación en distintos contextos.

Este lenguaje se enfoca en la estructura del modelo y en la función de sus elementos, proporcionando una representación clara y organizada. Su descripción es lo suficientemente detallada como para servir tanto como documentación explicativa del sistema como para proporcionar los datos necesarios en una simulación.

En MODELS, un sistema se construye a partir de múltiples submodelos interconectados, los cuales operan de manera autónoma en términos de sus definiciones internas, como la asignación de nombres a variables, y en la ejecución de simulaciones, donde pueden establecer su propio intervalo de tiempo.

Además, MODELS diferencia entre la creación de un modelo y su implementación. Es posible desarrollar modelos de forma independiente, agruparlos en bibliotecas especializadas y reutilizarlos como módulos en otros sistemas más complejos.

Cada modelo se define mediante una sintaxis flexible basada en palabras clave, sin necesidad de un formato rígido, lo que facilita su comprensión y adaptación a distintos usos.

La documentación se estructura en dos partes principales: la primera detalla la construcción de un modelo, mientras que la segunda se centra en su aplicación dentro de una simulación.

### 3.2.6. Funciones residentes

Hay diversas funciones numéricas y lógicas que están integradas de manera permanente y listas para su empleo dentro de un modelo. Sus nombres pueden ser accedidos en cualquier modelo y pueden emplearse directamente sin requerir una declaración previa mediante la instrucción FUNCTION. Para utilizar una función predefinida, basta con llamar su nombre y suministrar los valores correspondientes a sus argumentos. El módulo MODELS es capaz de trabajar con las siguientes funciones residentes las cuales representan funciones numéricas que devuelven un valor para cada argumento de entrada:

- abs: valor absoluto de cada argumento
- sqrt: raíz cuadrada de cada argumento
- exp: exponencial de cada argumento
- ln: logaritmo en base e de cada
- log10: logaritmo en base 10 de cada argumento
- log2: logaritmo en base 2 de cada argumento
- recip 1/x: para cada argumento x, con protección de división por cero ( $1/0 = \text{inf}$ )
- factorial x!: para cada argumento x
- trunc: parte entera de cada argumento
- fract: parte fraccionaria de cada argument
- round: valor redondeado de cada argumento (al entero más cercano)
- rad: conversión de valor de grados a radianes, para cada argumento
- deg: conversión de valor de radianes a grados, para cada argumento
- sin: seno de cada argumento
- cos: coseno de cada argumento
- tan: tangente de cada argumento
- asin: arco seno de cada argumento
- acos: arco coseno de cada argumento
- atan: arco tangente de cada argumento
- sinh: seno hiperbólico de cada argumento
- cosh: coseno hiperbólico de cada argumento
- tanh: tangente hiperbólica de cada argumento
- asinh: arco seno hiperbólico de cada argumento
- acosh: arco coseno hiperbólico de cada argumento
- atanh: arco tangente hiperbólica de cada argumento

### 3.2.7. Bloque Fortran

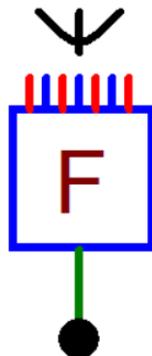


Figura 3.2: Bloque Fortran ATPDraw

El bloque Fortran en ATPDraw es una herramienta versátil que facilita la integración de funciones y modelos personalizados en las simulaciones. Actúa como un intermediario entre el entorno gráfico de ATPDraw y el lenguaje de programación Fortran, lo que permite una gran flexibilidad para modelar sistemas complejos.

Ventajas del Bloque Fortran:

- Implementación de funciones matemáticas y lógicas: El bloque Fortran permite implementar una amplia variedad de funciones matemáticas y lógicas en las simulaciones, abarcando desde operaciones básicas (suma, resta, multiplicación) hasta funciones más complejas, como exponenciales, logaritmos y funciones trigonométricas. Esta capacidad es especialmente útil para modelar el comportamiento de componentes no lineales o para la implementación de algoritmos de control personalizados.
- Modelado de componentes personalizados: Con el bloque Fortran, es posible crear modelos personalizados de componentes que no están disponibles en la biblioteca estándar de ATPDraw. Esto permite representar dispositivos electrónicos de potencia, máquinas eléctricas, sistemas de control, o cualquier otro componente que requiera una descripción matemática detallada.
- Interacción con otros componentes de ATPDraw: El bloque Fortran también puede interactuar con otros componentes de ATPDraw, como fuentes de energía, interruptores, resistencias, inductancias y capacitancias. Esta capacidad permite crear modelos complejos que combinan tanto componentes estándar de ATPDraw como funciones y modelos personalizados desarrollados en Fortran.

### 3.2.8. Fuente de Voltaje Alterno en ATPDraw



Figura 3.3: Fuente de Voltaje Alterno

En el análisis y simulación de sistemas eléctricos mediante ATP-EMTP, la fuente de voltaje alterno (AC Source) representa un elemento fundamental para la modelización de sistemas de generación y distribución de energía. Su representación gráfica en ATPDraw se caracteriza por un círculo con una onda sinusoidal en su interior, lo que indica la naturaleza alterna de la señal generada. Este componente permite introducir señales de voltaje sinusoidal en los circuitos eléctricos simulados, proporcionando una referencia de tensión con características definidas de amplitud, frecuencia y fase, lo que permite evaluar el comportamiento de diversos elementos del sistema frente a excitaciones alternas.

En cuanto a sus aplicaciones, la implementación de este componente en ATP-EMTP es crucial en diversos estudios eléctricos. Entre sus usos más relevantes destacan el análisis de circuitos en estado estable y transitorio, el estudio del comportamiento de máquinas eléctricas bajo diferentes condiciones de operación, la evaluación de armónicos en redes eléctricas debido a cargas no lineales y la realización de pruebas de confiabilidad mediante la inyección de señales controladas. Gracias a su versatilidad y precisión, la fuente de voltaje alterno en ATPDraw constituye una herramienta clave para la investigación y análisis de fenómenos eléctricos en el ámbito de la ingeniería.

### 3.2.9. TACRES en ATP-EMTP

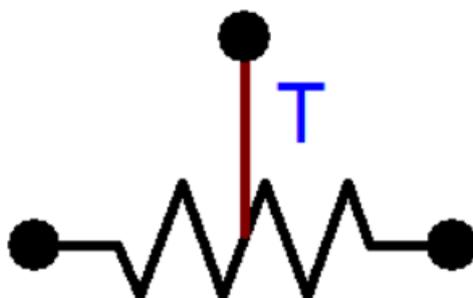


Figura 3.4: Resistencia variable en el tiempo

El TACRES (Time-Dependent AC Resistor) es un modelo de resistencia variable en el tiempo utilizado en ATP-EMTP para representar cargas cuya impedancia cambia dinámicamente. Su símbolo en ATPDraw se distingue por una resistencia con una conexión adicional, la cual indica una entrada de control o dependencia temporal. Este componente es fundamental para la simulación de sistemas eléctricos donde la resistencia no es constante, sino que varía en función del tiempo o de una señal externa.

El funcionamiento del TACRES se basa en la definición de una resistencia inicial y una función matemática que determina su variación a lo largo del tiempo. Esta característica lo hace especialmente útil en estudios de transitorios eléctricos, ya que permite modelar fenómenos complejos como la formación y extinción de arcos eléctricos en interruptores, la conmutación de dispositivos de protección y el comportamiento de cargas dinámicas en redes de potencia. Además, se emplea en la simulación de fallas eléctricas donde la impedancia varía debido a efectos térmicos, mecánicos o electromagnéticos.

Gracias a su versatilidad, el modelo TACRES permite realizar análisis avanzados en la simulación de sistemas eléctricos, proporcionando una herramienta clave para el diseño y la evaluación del desempeño de redes de potencia bajo condiciones de operación variables.

### 3.2.10. TACSIND en ATP-EMTP

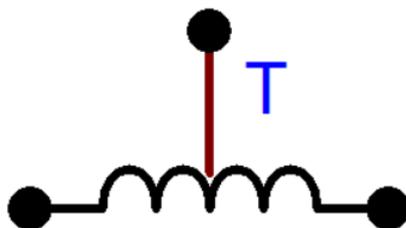


Figura 3.5: Inductancia variable en el tiempo

El TACSIND (Time-Dependent AC Inductor) es un modelo de inductancia variable en el tiempo utilizado en ATP-EMTP para representar sistemas en los que la inductancia cambia dinámicamente según una señal de control externa o una función del tiempo. Su símbolo en ATPDraw se representa como una bobina con una conexión adicional en la parte superior, lo que indica la entrada de una señal de control.

El comportamiento del TACSIND se define mediante una inductancia inicial y una ecuación que describe su variación en función del tiempo o de una señal externa. Este modelo es clave para la simulación de sistemas donde la reactividad del circuito cambia con el tiempo, como en el caso de máquinas eléctricas, inductores saturables, sistemas de control en electrónica de potencia y estudios de transitorios electromagnéticos.

Entre sus aplicaciones más relevantes se encuentran el modelado de inductores con características dependientes de la corriente, la simulación de reactancias variables en sistemas de compensación de potencia reactiva y el análisis de fenómenos de saturación en transformadores e inductancias de máquinas eléctricas. Gracias a su capacidad de representar variaciones dinámicas en la inductancia, el TACSIND es una herramienta esencial para la simulación de sistemas eléctricos avanzados en ATP-EMTP.

## CAPÍTULO 4

# SIMULACIONES EN ATP-EMPT Y SU INTERFAZ GRÁFICA ATPDraw

### 4.1. Introducción

El presente capítulo aborda el análisis del comportamiento dinámico de una máquina de inducción modelada mediante la técnica de Variables de Estado en el marco de la representación en Base Rotante (VBR). Para ello, se han desarrollado simulaciones en ATPDraw con el objetivo de evaluar el impacto de los armónicos espaciales sobre el desempeño de la máquina. En particular, se estudia la influencia de la armónica fundamental y se establecen las bases para la posterior incorporación de los armónicos de quinto y séptimo orden.

Los resultados permiten caracterizar la respuesta transitoria y en régimen permanente de la máquina bajo la acción de la armónica fundamental, sirviendo como referencia para futuras simulaciones que consideren la presencia de armónicos de mayor orden.

### 4.2. Análisis de la MI con VBR: Simulaciones y Resultados

En este capítulo se presentan las simulaciones de los resultados obtenidos en el diseño del modelo dinámico de la máquina de inducción en ATPDraw. Se examina el impacto de los armónicos primero, quinto y séptimo en el comportamiento de la máquina, evaluando sus efectos sobre el rendimiento y la estabilidad del sistema.

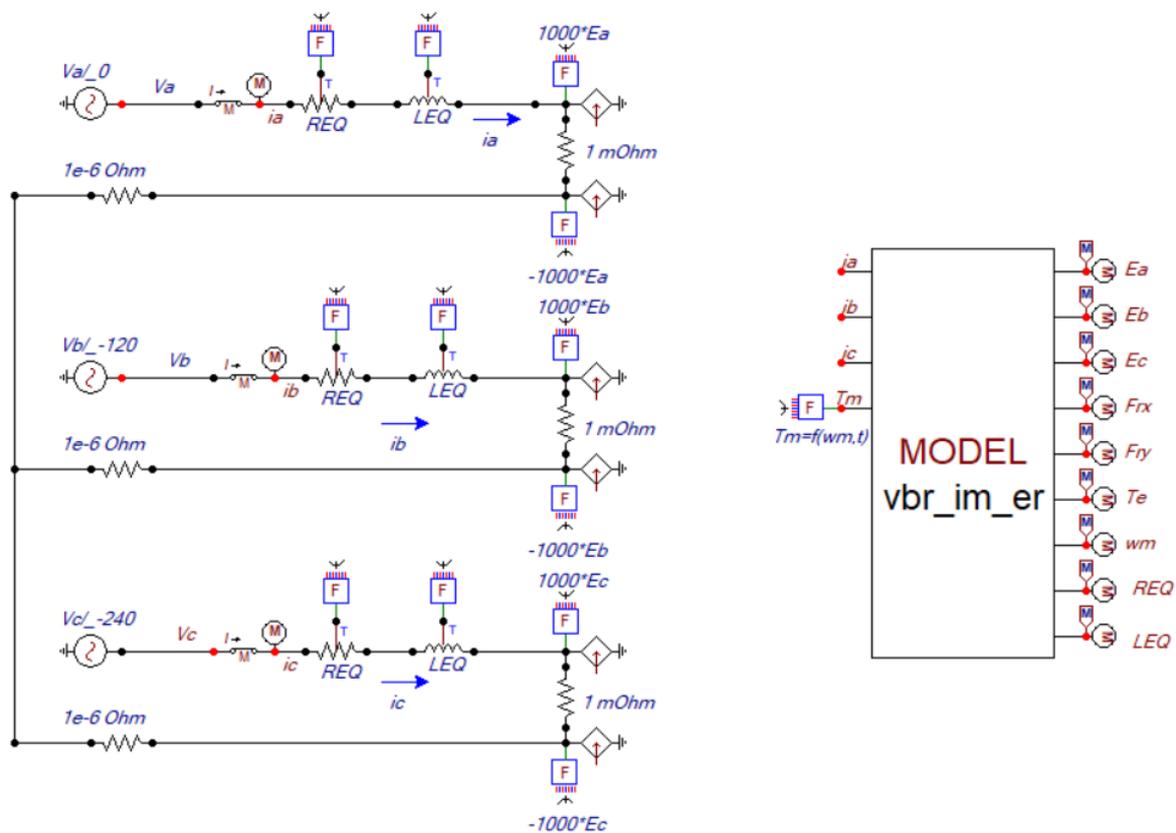


Figura 4.1: Modelo en ATPDraw de una Máquina de Inducción VBR para el Análisis de Armónicos Espaciales

La Fig.4.1 representa el modelo dinámico de una máquina de inducción desarrollado en ATPDraw, con un enfoque que considera la influencia de los armónicos espaciales en su comportamiento. Para lograr una simulación más precisa, se han implementado fuentes dependientes a través de TACS programables, permitiendo modelar los efectos de los armónicos de primer, quinto y séptimo orden en la respuesta de la máquina.

Dado que ATP-EMTP no proporciona fuentes dependientes aisladas de tierra, se recurre a un esquema alternativo basado en un equivalente de Norton. Este método emplea dos fuentes de corriente controladas que interactúan con una resistencia para evitar referencias a tierra no deseadas, facilitando la representación de configuraciones como conexión en estrella, en delta o en condiciones de desbalance.

Para incorporar el modelo VBR dentro de ATPDraw y reflejar adecuadamente los armónicos espaciales, es necesario recurrir al módulo MODELS. Este entorno de programación, similar a Python, permite definir ecuaciones matemáticas que describen el impacto de los armónicos en la dinámica de la máquina, proporcionando una herramienta eficaz para el análisis de su desempeño en distintas condiciones de operación.

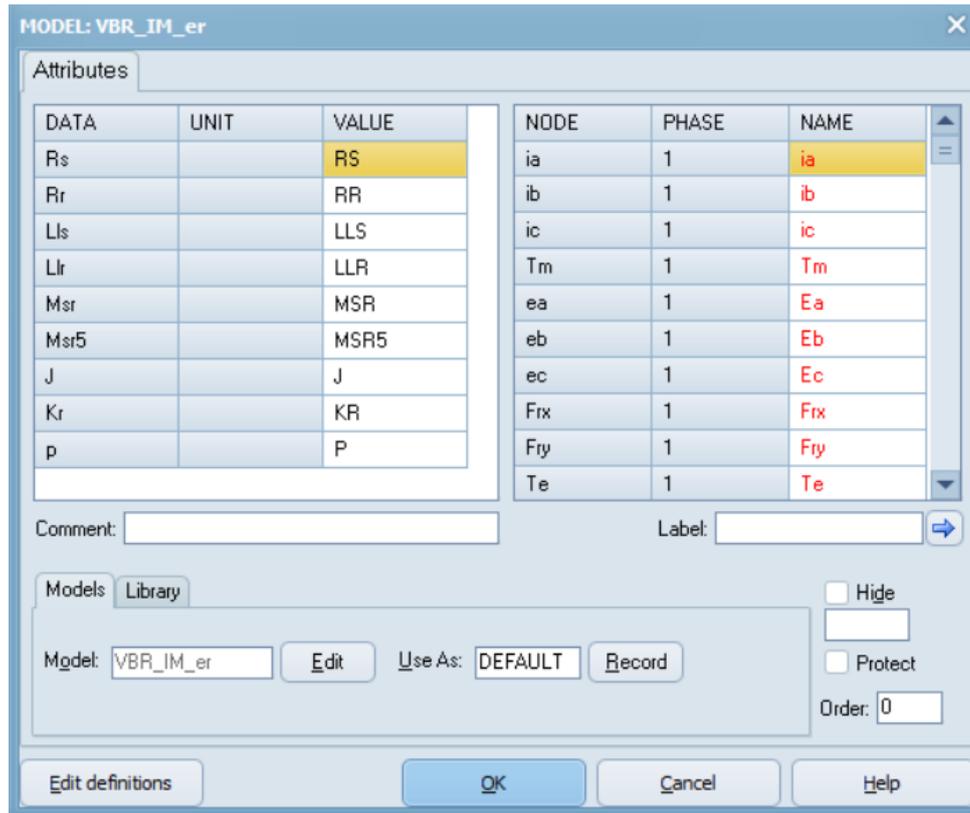


Figura 4.2: Configuración del Modelo VBR en ATPDraw: Atributos y Parámetros

La Fig.4.2 muestra la configuración del modelo de máquina de inducción con representación VBR en ATPDraw. En esta configuración, se definen los parámetros eléctricos y mecánicos de la máquina, así como las variables de salida que se utilizarán para analizar su comportamiento durante la simulación.

#### 4.2.1. Modelo VBR de la MI con la Armonica Fundamental en ATP Draw

Para implementar la programación en MODELS dentro de ATPDraw, es fundamental definir los parámetros eléctricos y mecánicos de la máquina de inducción a simular. En el Algoritmo 1.1 se establece el código que describe variables clave como resistencias, inductancias, inercia, coeficiente de fricción y número de pares de polos. Estos parámetros, representados por  $Re, Rr, Le, Lr, Mer, J, K$  y  $p$ , permiten caracterizar el comportamiento dinámico de la máquina. Además, se especifican las variables de entrada, que incluyen las corrientes de fase  $ia, ib, ic$  y el par mecánico  $Tm$ , así como las variables de salida, tales como las fuerzas electromotrices  $ea, eb, ec$ , los componentes del flujo rotórico  $Frx$  y  $Fry$ , el par electromagnético  $Te$  y la velocidad angular  $\omega_m$ .

En la programación, se utilizan los comandos CONST y VAR para definir tanto constantes como variables necesarias en los cálculos. Cabe destacar que las constantes  $Mer5$  y  $Mer7$  han sido establecidas en cero, ya que el modelo solo considera la armónica fundamental, descartando la influencia de las armónicas de quinto y séptimo orden.

---

**Algoritmo 1.1**

VARIABLES de entrada y salida utilizadas en el programa.

---

```
MODEL VBR_IM

DATA Rs {df1t: 0.3},Rr {df1t: 0.3}
DATA Lls{df1t: 2.e-3},Llr{df1t: 2.e-3},Msr{df1t: 60.e-3};
DATA J {df1t: 0.163},Kr {df1t:0},p {df1t:2}

INPUT ia, ib, ic, Tm

CONST SQRT23{val: 0.816496581},SQRT1_2{val: 0.707106781}
CONST SQRT1_6{val: 0.408248290},SQRT1_3{val: 0.577350269}

OUTPUT ea,eb,ec,FrX,Fry,Te,wm,REQ,LEQ
VAR ea,eb,ec,FrX,Fry,Te,wm,ix,iy,io,pFrX,pFry,REQ,LEQ
VAR ex,ey,eo,pwm,Lr,M1,Le,M5,M7,TETITA,THETA
VAR Aux1,Aux2,Aux3,Aux4,AUX5
```

---

El apartado HISTORY en ATPDraw permite almacenar los valores previos de aquellas variables que intervienen en los cálculos diferenciales del modelo, asegurando una correcta evolución del sistema en el tiempo. En el Algoritmo 1.2 se definen las variables que requieren persistencia para la integración de las ecuaciones del modelo. Entre ellas se encuentran las derivadas de los flujos rotóricos  $pFr_x$ ,  $pFr_y$  y sus respectivas integrales, que representan el comportamiento del campo magnético en el rotor. También se almacena la velocidad angular  $w_m$  y su derivada  $pwm$ , las cuales son esenciales para calcular la dinámica mecánica de la máquina y la corriente de secuencia cero  $i_0$ . La correcta gestión de estas variables garantiza la estabilidad de la simulación y una representación precisa del comportamiento de la máquina de inducción bajo la acción de la armónica fundamental.

---

**Algoritmo 1.2**

Almacenamiento de Variables en el Modelo VBR de la MI .

---

```
HISTORY
pFrx {dflt:0}
integral(pFrx) {dflt:0}
pFry {dflt:0}
integral(pFry) {dflt:0}

pwm {dflt:0}
integral(pwm) {dflt:0}

io {dflt:0}

wm {dflt:0}
integral(wm){dflt:0}
```

---

En la sección INIT del Algoritmo 1.3 del modelo VBR de la máquina de inducción en ATPDraw, se establecen las condiciones iniciales esenciales para garantizar una simulación estable. Se asignan valores iniciales de cero a las fuerzas electromotrices  $ea, eb, ec$ , la velocidad angular  $wm$  y su derivada  $pwm$ , el ángulo de posición del rotor ( $Tetita, Theta$ ), así como los flujos rotóricos  $Fr<sub>x</sub>, Fr<sub>y</sub>$  y sus derivadas  $pFr<sub>x</sub>, pFr<sub>y</sub>$ . Esto permite que el sistema inicie desde un estado de equilibrio antes de la aplicación de cualquier excitación, asegurando una representación precisa de su comportamiento dinámico bajo la influencia de la armónica fundamental.

---

**Algoritmo 1.3**

Definición de Condiciones Iniciales en el Modelo VBR de la MI .

---

```
INIT
  ea:=0
  eb:=0
  ec:=0
  wm:=0
  pwm:=0
  Tetita:=0
  Theta:=0
  pFrx:=0
  pFry:=0
  Frx:=0
  Fry:=0

ENDINIT
```

---

En la sección EXEC del Algoritmo 1.4 y 1.5, se implementan las ecuaciones que modelan el comportamiento dinámico de la máquina de inducción en ATPDraw. Se definen las inductancias del rotor y del estator, y se transforman las corrientes del estator en componentes espaciales. A continuación, se calculan las derivadas de los flujos rotóricos y se integran para obtener los flujos, lo que permite determinar las impedancias equivalentes de la máquina. Se calculan las fuerzas electromotrices y el par electromagnético, y finalmente, se resuelve la ecuación dinámica para obtener la velocidad angular y la posición del rotor. Este proceso asegura una simulación precisa de la máquina, considerando los efectos de los armónicos espaciales.

---

**Algoritmo 1.4**Ejecución del Modelo VBR de la MI.

---

EXEC

Lr:=(Llr+Msr)

Le:=(LLS+MSR)

M1 := Msr

-- Stator currents to space vector components ix, iy, io

ix:= SQRT23\*(ia-0.5\*ib-0.5\*ic)

iy:= SQRT1\_2\*(ib-ic)

io:= SQRT1\_2\*(ia+ib+ic)

AUX1:=Fr<sub>x</sub>\*cos(tetita)-Fry\*sin(tetita)AUX2:=Fr<sub>x</sub>\*sin(tetita)+Fry\*cos(tetita)

AUX3:=ix\*cos(tetita)+iy\*sin(tetita)

AUX4:=iy\*cos(tetita)-ix\*sin(tetita)

-- Rotor fluxes derivatives

pFr<sub>x</sub>:= -Rr\*(Fr<sub>x</sub>-M1\*AUX3)/Lr

pFry:= -Rr\*(Fry-M1\*AUX4)/Lr

-- Rotor fluxes calculation

Fr<sub>x</sub>:=INTEGRAL(pFr<sub>x</sub>)

Fry:=INTEGRAL(pFry)

---

**Algoritmo 1.5**Ejecución del Modelo VBR de la MI.

---

```
-- REQ calculation
REQ:=RS+(RR/(Lr**2))*M1**2

-- LEQ calculation
LEQ:=(LE-(1/LR)*(M1**2))

-- FEM calculation in space vector coordinates
ex:=M1*(-Rr*AUX1/Lr-p*wm*AUX2)/Lr
ey:=M1*(p*wm*AUX1-Rr*AUX2/Lr)/Lr
eo:= Rs*io+lls*deriv(io)

-- FEM space vector transformation to abc
ea:= SQRT23*ex+SQRT1_3*eo
eb:=-SQRT1_6*ex+SQRT1_2*ey+SQRT1_3*eo
ec:=-SQRT1_6*ex-SQRT1_2*ey+SQRT1_3*eo

-- Electric torque calculation
Te:=p*M1*(AUX1*iy-AUX2*ix)/Lr

-- Dynamic equation -- angular speed derivative
pwm:=(Te-Tm-Kr*wm)/J

-- Integration of the dynamic equation
wm:=INTEGRAL(pwm) -- angular speed

-- Integration
Theta:=INTEGRAL(wm)
Tetita:=p*Theta--TRUNC(aux5)*2*pi

ENDEXEC
ENDMODEL
```

---

## 4.2.2. Simulación del comportamiento de la MI con VBR ante la armónica fundamental

### 4.2.2.1. Par Eléctrico $T_e$ de MI con VBR ante la armónica fundamental

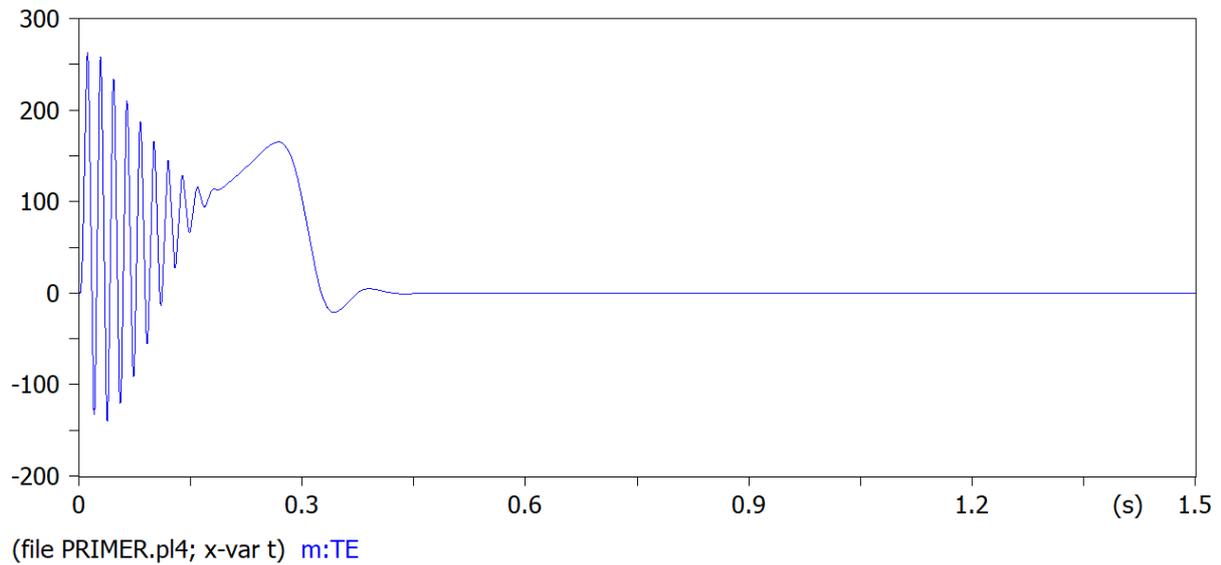


Figura 4.3: Par eléctrico de la MI con la Armonica Fundamental

La Fig.4.3 muestra la evolución temporal del par electromagnético  $T_e$  de la máquina de inducción modelada con el método VBR considerando únicamente la armónica fundamental. Se observa que la respuesta inicial del par exhibe oscilaciones de alta frecuencia, las cuales disminuyen progresivamente hasta alcanzar un estado estacionario en cero.

Dado que en esta simulación no se han considerado las armónicas de 5° y 7° orden, la señal de par se mantiene limpia, sin las distorsiones típicas inducidas por estos armónicos espaciales.

Además, la simulación ha sido ejecutada con un paso de tiempo de  $1 \times 10^{-5} s$ , lo que permite capturar con precisión las oscilaciones transitorias del sistema.

#### 4.2.2.2. Comportamiento de $w_m$ bajo el efecto de la armónica fundamental

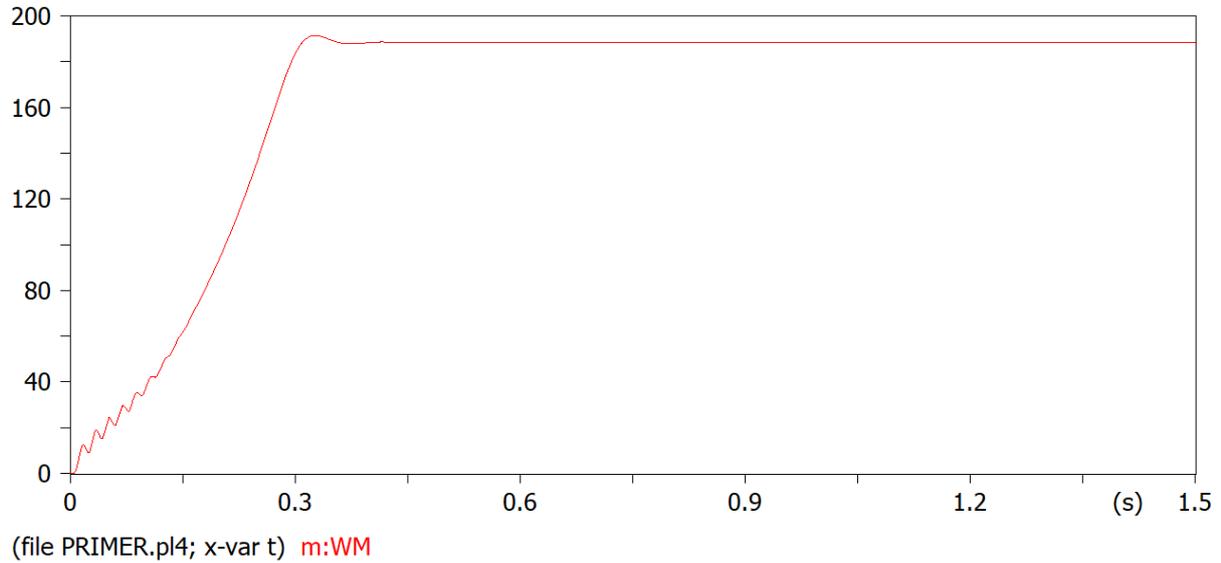
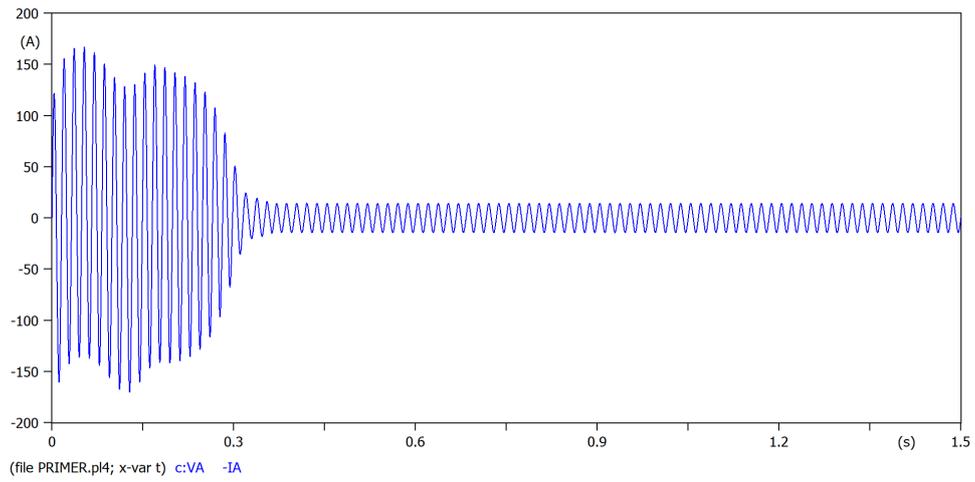


Figura 4.4: Comportamiento de la velocidad angular

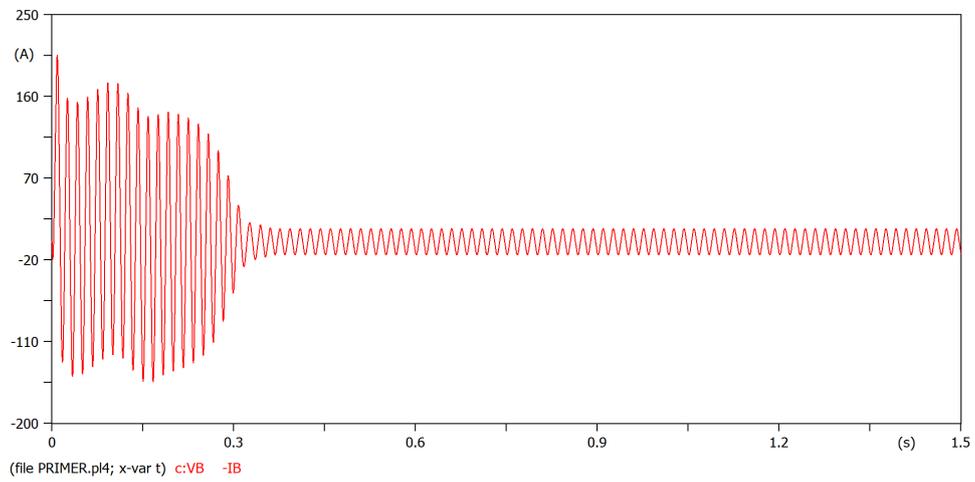
La Fig.4.4 ilustra la variación de la velocidad mecánica ( $\omega_m$ ) en el tiempo para una máquina de inducción modelada mediante el enfoque VBR, considerando únicamente la armónica fundamental. Se aprecia que la velocidad inicia en cero y experimenta un incremento progresivo, con una etapa transitoria caracterizada por ligeras oscilaciones antes de estabilizarse. Alrededor de los 0,35s, la velocidad alcanza un valor cercano a  $200\text{rad/s}$ , donde permanece constante, lo que indica que la máquina ha llegado a su régimen estacionario.

#### 4.2.2.3. Corrientes en el devanado estático en la fases $A, B, C$ ante la armónica fundamental

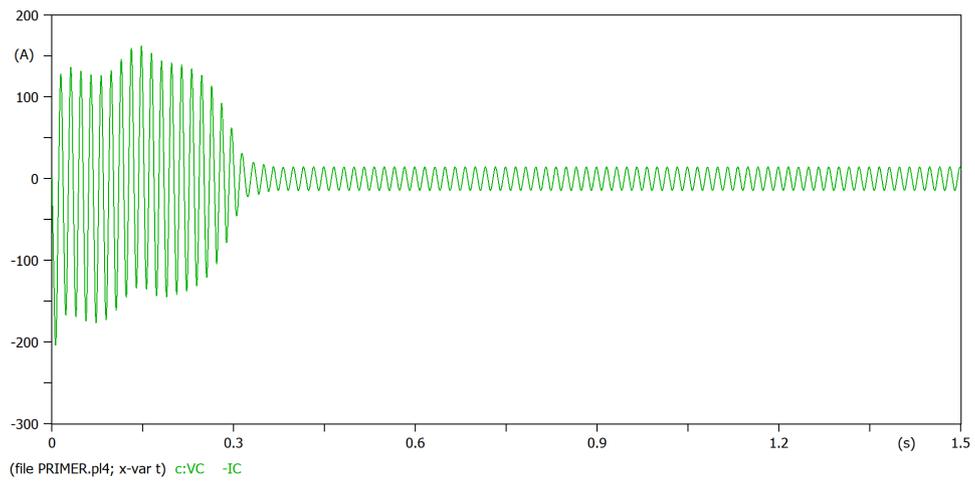
La Fig.4.5 muestra la evolución de las corrientes de fase en una máquina de inducción modelada por el método VBR. Se observa una fase transitoria con oscilaciones de gran amplitud, que disminuyen hasta estabilizarse alrededor de 0,35s. En el régimen permanente, las corrientes presentan un comportamiento sinusoidal sin distorsiones.



(a) Corriente  $i_a$



(b) Corriente  $i_b$



(c) Corriente  $i_c$

Figura 4.5: Corrientes del estator  $i_a, i_b, i_c$  de la MI con VBR

En la gráfica de las corrientes del estator en las distintas fases, se observa un régimen transitorio con picos de corriente hasta los 0.33 segundos. Sin embargo, a partir de este momento, se establece el régimen permanente, el cual presenta una forma sinusoidal con una corriente de 14 amperios.

#### 4.2.2.4. Influencia de la armónica fundamental en el Espectro de Fourier

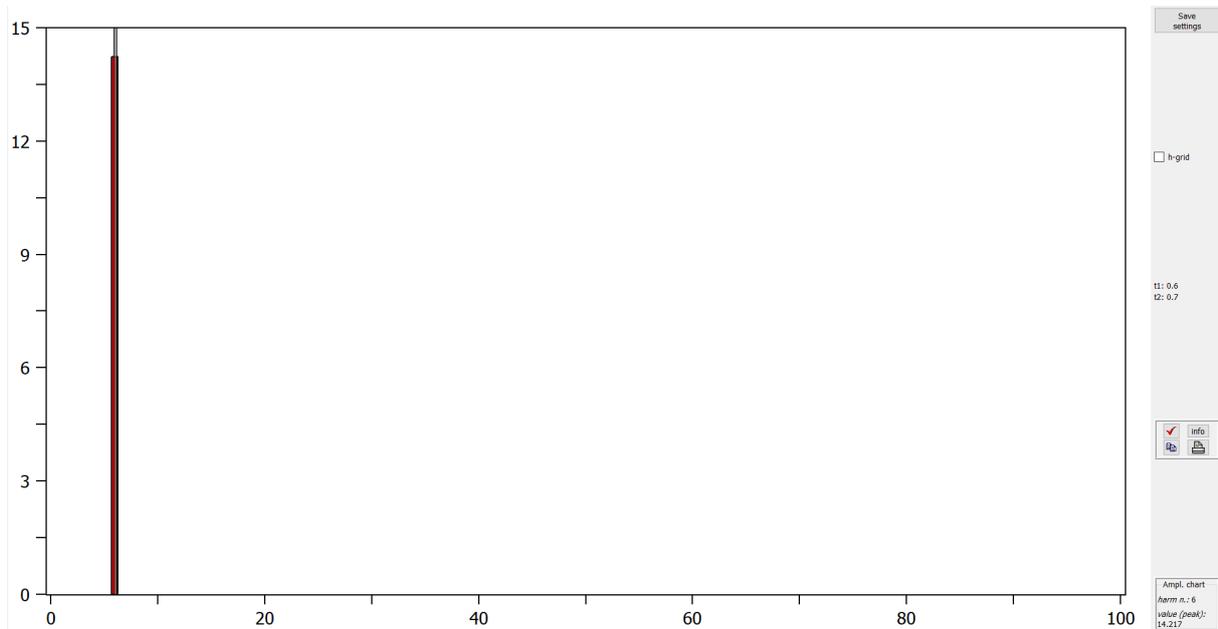


Figura 4.6: Espectro de Fourier en la armónica fundamental

Al realizar la transformada de Fourier de la armónica fundamental, se seleccionó un intervalo de tiempo entre 0.6 segundos y 0.7 segundos, completando así un ciclo. Con un valor de delta t de 0.1, se llevó a cabo el siguiente proceso, comenzando por determinar el periodo, la frecuencia y, a partir de estos valores, identificar el número de armónica presente en el espectro de Fourier:

$$f = \frac{1}{\Delta T} \quad (4.1)$$

$$f = \frac{1}{0,1} = 10Hz$$

$$f = \frac{nh \cdot frecuencia}{frecuencia red}$$

Donde  $nh$ =número de armonica

$$f = \frac{6 \cdot 10Hz}{60Hz} = 1 \text{ armonica} \quad (4.2)$$

La frecuencia detectada a partir de la serie de Fourier corresponde a la primera armónica respecto a la frecuencia fundamental del sistema (60 Hz).

En la figura 4.6 mediante el análisis del espectro de frecuencias de Fourier se observa que únicamente existe presencia de la armónica fundamental, lo cual, es lo esperado ya que únicamente existe componente de primera armónica.

### 4.2.3. Modelo VBR de la MI con la Primera y Quinta Armónica en ATP Draw

En la implementación del modelo VBR en ATPDraw, se han definido los parámetros eléctricos y mecánicos que caracterizan el comportamiento dinámico de la máquina de inducción al considerar tanto la armónica fundamental como la de quinto orden. En el Algoritmo 2.1, se establece el código en MODELS, donde se asignan valores a variables clave como la resistencia y la inductancia del estator y del rotor, el acoplamiento magnético, la inercia, el coeficiente de fricción y el número de pares de polos. Dichos parámetros, representados por  $R_e$ ,  $R_r$ ,  $L_{le}$ ,  $L_{lr}$ ,  $M_{er}$ ,  $J$ ,  $K$  y  $p$ , permiten describir con precisión la respuesta dinámica de la máquina frente a perturbaciones.

El modelo toma como entradas las corrientes de fase  $i_a$ ,  $i_b$ ,  $i_c$  y el par mecánico  $T_m$ , mientras que las salidas incluyen las tensiones inducidas  $e_a$ ,  $e_b$ ,  $e_c$ , los flujos en el rotor  $F_{rx}$  y  $F_{ry}$ , la velocidad angular  $\omega_m$  y el par electromagnético  $T_e$ . Para estructurar correctamente la simulación, se emplean los comandos CONST y VAR, que permiten definir las constantes y variables involucradas en los cálculos internos del modelo.

A diferencia del caso en que solo se consideraba la armónica fundamental, en este nuevo enfoque se incorpora la quinta armónica, a través del parámetro  $Msr5$ , lo que introduce efectos adicionales en las ecuaciones de flujo y par. Como resultado, aparecen oscilaciones adicionales en el sistema, especialmente en la evolución del par electromagnético  $T_e$ , el cual ahora posee un término adicional  $Te5$  derivado de la interacción entre la componente fundamental y la de quinto orden.

---

### Algoritmo 2.1

VARIABLES de entrada y salida utilizadas en el programa.

---

```
MODEL VBR_MI_5
DATA Rs {dflt: 0.3},Rr {dflt: 0.3}
DATA Lls {dflt: 2.e-3},Llr {dflt: 2.e-3}
DATA Msr {dflt: 60.e-3},Msr5 {dflt: 60.e-5}
DATA J {dflt: 0.163},Kr {dflt:0},p {dflt:2}
INPUT ia, ib, ic, Tm
CONST SQRT23 {val:0.816496581},SQRT1_2{val: 0.707106781}
CONST SQRT1_6 {val:0.408248290},SQRT1_3{val: 0.577350269}
OUTPUT ea,eb,ec,FrX,Fry,Te,wm,REQ,LEQ
VAR ea,eb,ec,FrX,Fry,Te,wm,ix,iy,io,pFrX,pFry,REQ,LEQ,T5
VAR ex,ey,ex5,ey5,eo,pwm,Lr,M1,Le,M5,TETITA,THETA,Te5
VAR Aux1,Aux2,Aux3,Aux4,AUX5,AUX6,AUX7,AUX8,AUX9
VAR AUX10,AUX11,AUX12,AUX20
```

---

Con la incorporación de la quinta armónica, la estructura del bloque HISTORY en ATPDraw se mantiene sin cambios respecto al caso con solo la armónica fundamental. Sin embargo, la dinámica del sistema experimenta nuevas interacciones debido a la influencia de términos adicionales en los flujos rotóricos y el par electromagnético. En particular, la excitación armónica de quinto orden introduce oscilaciones adicionales en la respuesta transitoria, lo que impacta la evolución de la velocidad angular  $w_m$ .

---

**Algoritmo 2.2**

Almacenamiento de Variables en el Modelo VBR de la MI .

---

```
HISTORY
pFrx {dflt:0}
integral(pFrx) {dflt:0}
pFry {dflt:0}
integral(pFry) {dflt:0}

pwm {dflt:0}
integral(pwm) {dflt:0}

io {dflt:0}

wm {dflt:0}
integral(wm){dflt:0}
```

---

En la sección INIT del Algoritmo 2.3, la configuración inicial del modelo VBR en ATPDraw permanece inalterada con respecto al caso donde solo se consideraba la armónica fundamental. Las variables clave, como las fuerzas electromotrices  $ea, eb, ec$ , la velocidad angular  $wm$ , el ángulo de posición del rotor  $Tetita, Theta$  y los flujos rotóricos  $Fr<sub>x</sub>, Fr<sub>y</sub>$ , continúan inicializándose en cero para garantizar que la simulación comience desde un estado de equilibrio.

Sin embargo, al incorporar la quinta armónica, es importante considerar que su efecto se manifestará progresivamente a medida que avanza la simulación, impactando las oscilaciones del flujo rotórico y el par electromagnético. Aunque el bloque INIT no requiere modificaciones estructurales, la dinámica del sistema experimentará una mayor complejidad debido a la interacción entre las componentes de diferente orden armónico.

---

### Algoritmo 2.3

Definición de Condiciones Iniciales en el Modelo VBR de la MI .

---

```
INIT
  ea:=0
  eb:=0
  ec:=0
  wm:=0
  pwm:=0
  Tetita:=0
  Theta:=0
  pFrx:=0
  pFry:=0
  Frx:=0
  Fry:=0

ENDINIT
```

---

En la sección EXEC del Algoritmo 2,4 y 2,5, se mantiene la estructura base utilizada para modelar el comportamiento dinámico de la máquina de inducción, pero con la incorporación de la quinta armónica, se agregan términos adicionales que afectan la interacción entre el estator y el rotor.

La inclusión de la inductancia mutua  $M5$  introduce componentes oscilatorias adicionales en los flujos del rotor y en la ecuación de par electromagnético. En particular:

- Se definen nuevas variables auxiliares ( $AUX5$  a  $AUX12$ ) para representar la influencia de la armónica de orden cinco en los flujos rotóricos y en la conversión de coordenadas espaciales.
- Se modifican las ecuaciones de cálculo de flujos del rotor ( $pFr_x, pFr_y$ ) para incluir el efecto de  $M5$ .
- Se ajustan las expresiones de la impedancia equivalente ( $REQ$ ) y la inductancia equivalente ( $LEQ$ ) para reflejar la presencia de términos dependientes de la frecuencia armónica.
- Se agregan nuevos términos en la ecuación de las fuerzas electromotrices ( $ex, ey$ ), con factores dependientes de la quinta armónica y su interacción con la velocidad angular.
- Se introduce el par electromagnético de la quinta armónica ( $Te_5$ ), que aparece como un término adicional en la ecuación de torque total. Su expresión revela la presencia de oscilaciones de alta frecuencia que pueden influir en la estabilidad mecánica de la máquina.

---

## Algoritmo 2.4

Ejecución del Modelo VBR de la MI.

---

EXEC

```
Lr:=(Llr+Msr) -- Rotor inductance
Le:=(LLS+MSR)

M1 := Msr -- Mutual inductance
M5 := Msr5

-- Stator currents to space vector components ix, iy, io
ix:= SQRT23*(ia-0.5*ib-0.5*ic)
iy:= SQRT1_2*(ib-ic)
io:= SQRT1_2*(ia+ib+ic)

--Auxiliares
AUX1:=Frx*cos(tetita)-Fry*sin(tetita)
AUX2:=Frx*sin(tetita)+Fry*cos(tetita)
AUX3:=ix*cos(tetita)+iy*sin(tetita)
AUX4:=iy*cos(tetita)-ix*sin(tetita)
AUX5:=Frx*cos(5*tetita)+Fry*sin(5*tetita)
AUX6:=Frx*sin(5*tetita)-Fry*cos(5*tetita)
AUX7:=ix*cos(5*tetita)-iy*sin(5*tetita)
AUX8:=iy*cos(5*tetita)+ix*sin(5*tetita)
AUX9:=Frx*sin(5*tetita)+Fry*cos(5*tetita)
AUX10:=Frx*cos(5*tetita)-Fry*sin(5*tetita)

AUX11:=12*(M1*M5/lr)*p*wm*sin(6*tetita)*ix
AUX12:=12*(M1*M5/lr)*p*wm*sin(6*tetita)*iy

-- Rotor fluxes derivatives
pFrx:-Rr*(Frx-M1*AUX3-M5*AUX7)/Lr
pFry:-Rr*(Fry-M1*AUX4-M5*AUX8)/Lr
--write(pfrx,pfry)
```

---

---

## Algoritmo 2.5

Ejecución del Modelo VBR de la MI.

---

```
-- Rotor fluxes calculation
FrX:=INTEGRAL(pFrX)
FrY:=INTEGRAL(pFrY)
-- REQ calculation
REQ:=RS+(RR/(Lr**2))*M1**2+M5**2+2*M1*M5*cos(6*tetita)
-- LEQ calculation
LEQ:=(LE-(1/LR)*(M1**2+M5**2+2*M1*M5*cos(6*tetita)))
-- FEM calculation in space vector coordinates
ex5:=(M5*(-Rr*AUX5/Lr-p*wm*5*AUX6)/Lr)+AUX11
ex:=(M1*(-Rr*AUX1/Lr-p*wm*AUX2)/Lr)+ex5
ey5:=(M5*(-p*wm*5*AUX5+Rr*AUX6/Lr)/Lr)+AUX12
ey:=(M1*(p*wm*AUX1-Rr*AUX2/Lr)/Lr)+ey5
eo:= Rs*io+lls*deriv(io)
-- FEM space vector transformation to abc
ea:= SQRT23*ex+SQRT1_3*eo
eb:=-SQRT1_6*ex+SQRT1_2*ey+SQRT1_3*eo
ec:=-SQRT1_6*ex-SQRT1_2*ey+SQRT1_3*eo
-- Electric torque calculation
T5:=M5*sin(10*tetita)*ix**2+M5*cos(10*tetita)*iy**2
Te5:=p*M5*(AUX9*ix-AUX10*iy-T5)/Lr
Te:=p*M1*(AUX1*iy-AUX2*ix)/Lr+Te5
-- Dynamic equation -- angular speed derivative
pwm:=(Te-Tm-Kr*wm)/J
-- Integration of the dynamic equation
wm:=INTEGRAL(pwm) -- angular speed
-- Integration
Theta:=INTEGRAL(wm)
Tetita:=p*Theta
ENDEXEC
ENDMODEL
```

---

#### 4.2.4. Simulación del comportamiento de la MI con VBR ante la primera y quinta armónica

##### 4.2.4.1. Par Eléctrico $T_{e5}$ de MI con VBR ante la primera y quinta armónica

La Fig.4.7 muestra la evolución temporal del par electromagnético ( $T_e$ ) de la máquina de inducción modelada con el método VBR considerando la armónica fundamental y la armónica de 5.<sup>o</sup> orden. Se observa que la respuesta inicial del par exhibe oscilaciones de mayor amplitud en comparación con el caso donde solo se consideraba la armónica fundamental, lo que indica una mayor perturbación transitoria en la máquina.

En el estado estacionario, aunque el valor medio del par tiende a cero, se mantienen pequeñas oscilaciones residuales que no estaban presentes en el caso anterior, lo que sugiere la influencia de la quinta armónica en la respuesta dinámica del sistema.

Estos efectos evidencian que la introducción de la armónica de 5.<sup>o</sup> orden modifica el comportamiento del par electromagnético, generando nuevas componentes de frecuencia en la señal y alterando la estabilidad transitoria de la máquina.

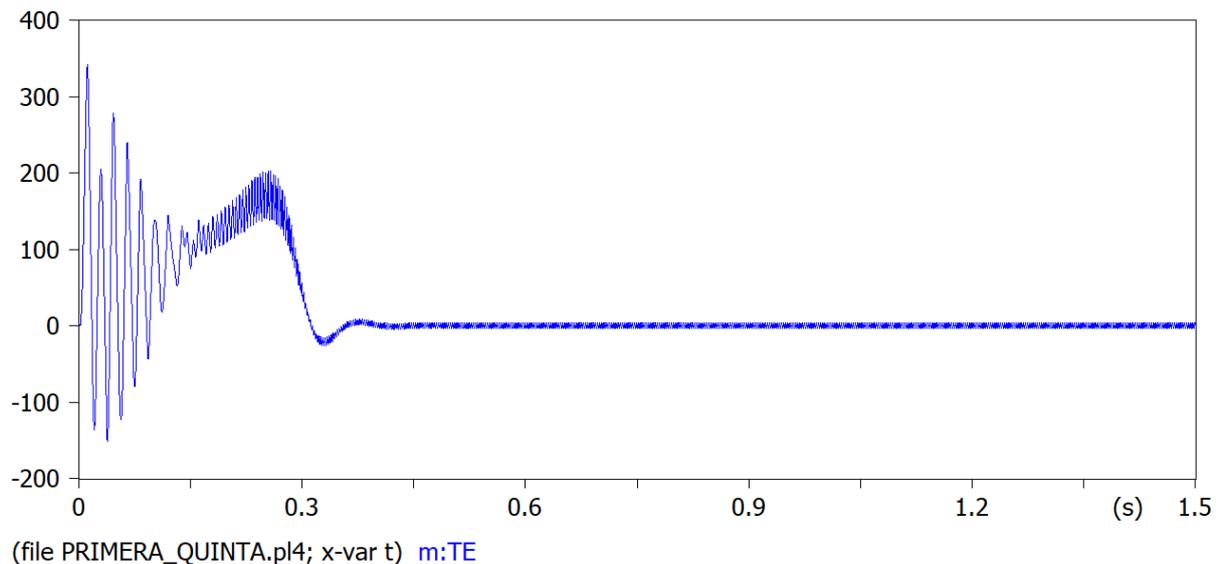


Figura 4.7: Par eléctrico de la MI con la primera y quinta armónica

##### 4.2.4.2. Comportamiento de $w_m$ bajo el efecto de la armónica fundamental y quinta armónica

La Fig.4.8 muestra la evolución temporal de la velocidad mecánica ( $w_m$ ) considerando tanto la armónica fundamental como la armónica de 5.<sup>o</sup> orden. En comparación con el caso en el que solo se consideraba

la armónica fundamental, se observa que la respuesta inicial presenta oscilaciones de mayor frecuencia en el arranque, lo que indica la influencia de la quinta armónica en la dinámica transitoria del sistema.

A medida que avanza la simulación, la velocidad mecánica sigue una tendencia de crecimiento similar hasta alcanzar el estado estacionario, aunque con una ligera perturbación adicional antes de estabilizarse. En contraste con el escenario sin armónicas adicionales, donde la transición era más suave, en este caso se perciben fluctuaciones iniciales más pronunciadas debido a la interacción entre la armónica de 5.<sup>o</sup> orden y el campo fundamental.

Al realizar un análisis detallado en la Fig.4.9 entre los segundos 0.4 y 0.6, se evidencia que, aunque las oscilaciones han disminuido considerablemente en amplitud, aún persisten en la señal. Esto sugiere que la presencia de la quinta armónica introduce efectos de oscilación de menor magnitud incluso en el régimen estacionario, lo que podría influir en la estabilidad del sistema bajo ciertas condiciones de operación.

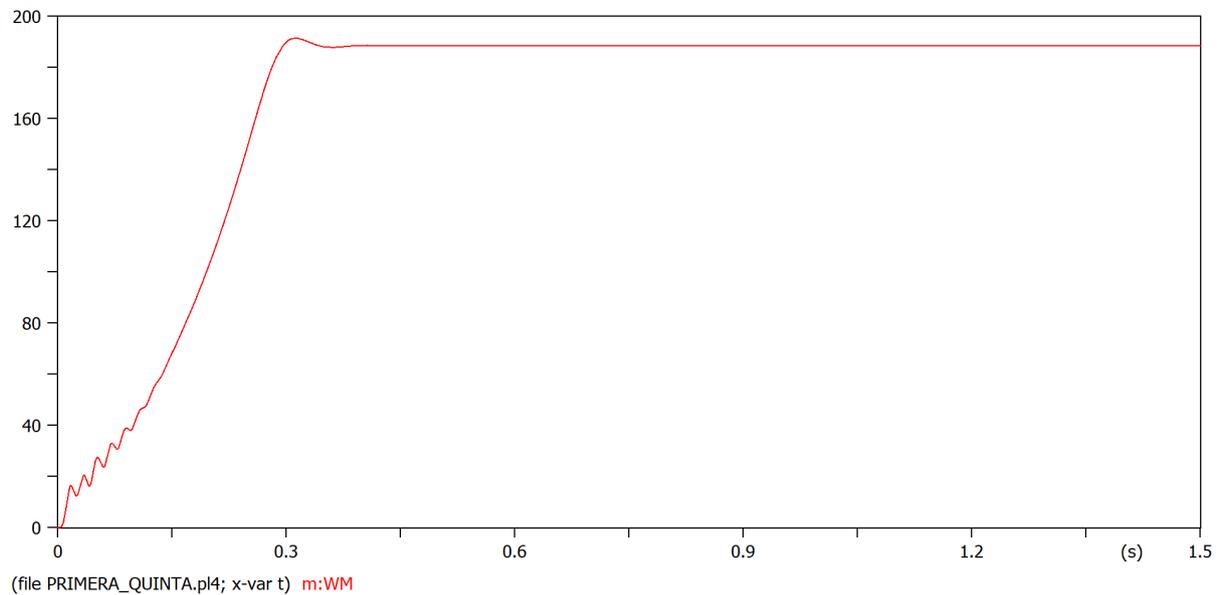


Figura 4.8: Comportamiento de la velocidad angular con la primera y quinta armónica

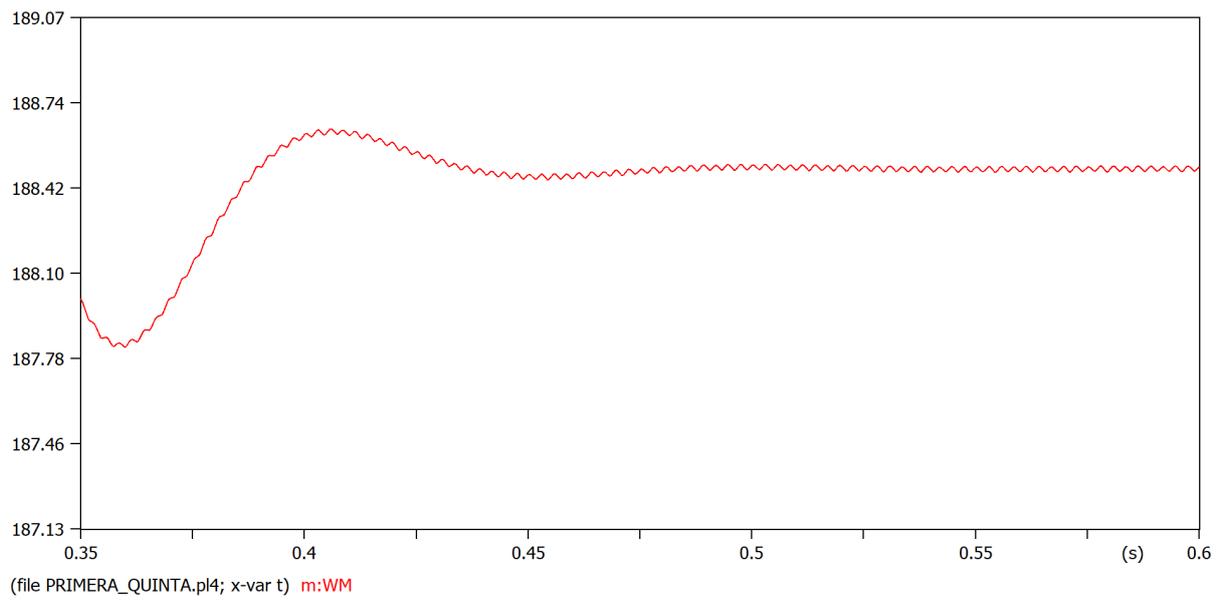
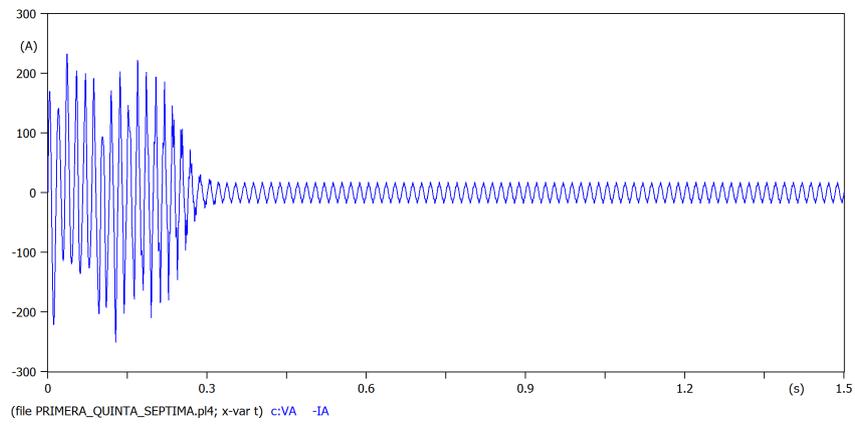
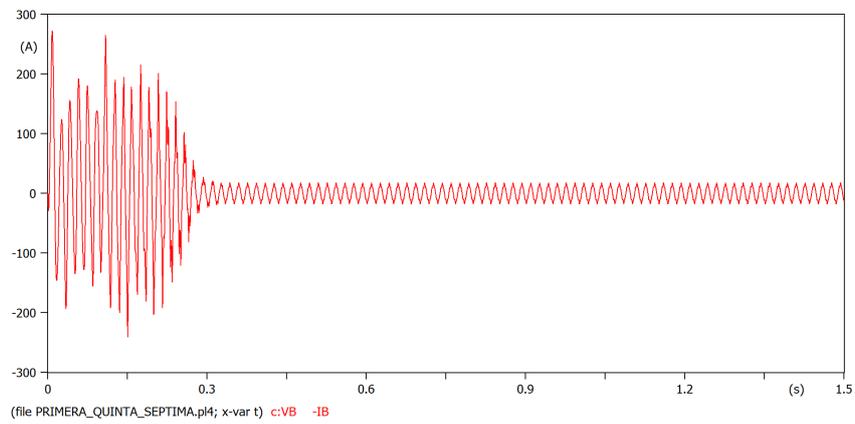


Figura 4.9: Comportamiento de la velocidad angular con la primera y quinta armónica

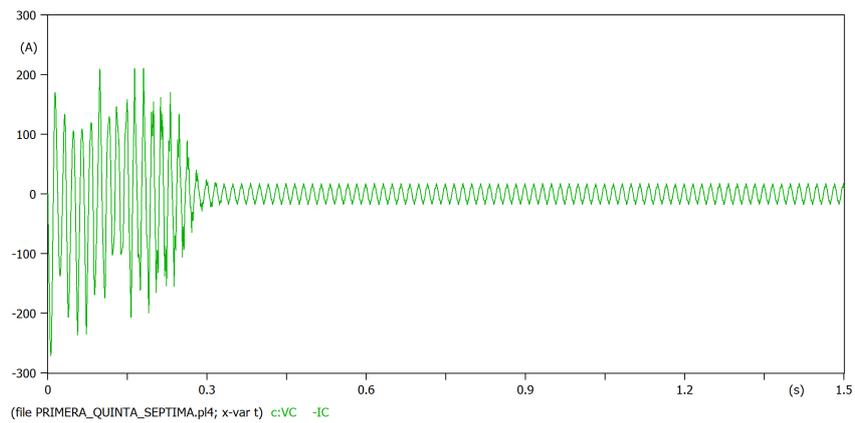
4.2.4.3. Corrientes en el devanado estatórico en la fases  $A, B, C$  ante la armónica fundamental y quinta armónica



(a) Corriente  $i_a$



(b) Corriente  $i_b$



(c) Corriente  $i_c$

Figura 4.10: Corrientes del estator  $i_a, i_b, i_c$  de la MI con VBR

En la gráfica de las corrientes del estator en las diferentes fases presenta un régimen transitorio con picos de corriente mas altos que en el caso de primera armónica, de igual forma, hasta un tiempo 0.33 segundos, sin embargo, a partir de este tiempo se presenta el régimen permanente con forma sinusoidal con una corriente de 14.7 amperios.

**4.2.4.4. Influencia de la primera y quinta armónica en el Espectro de Fourier**

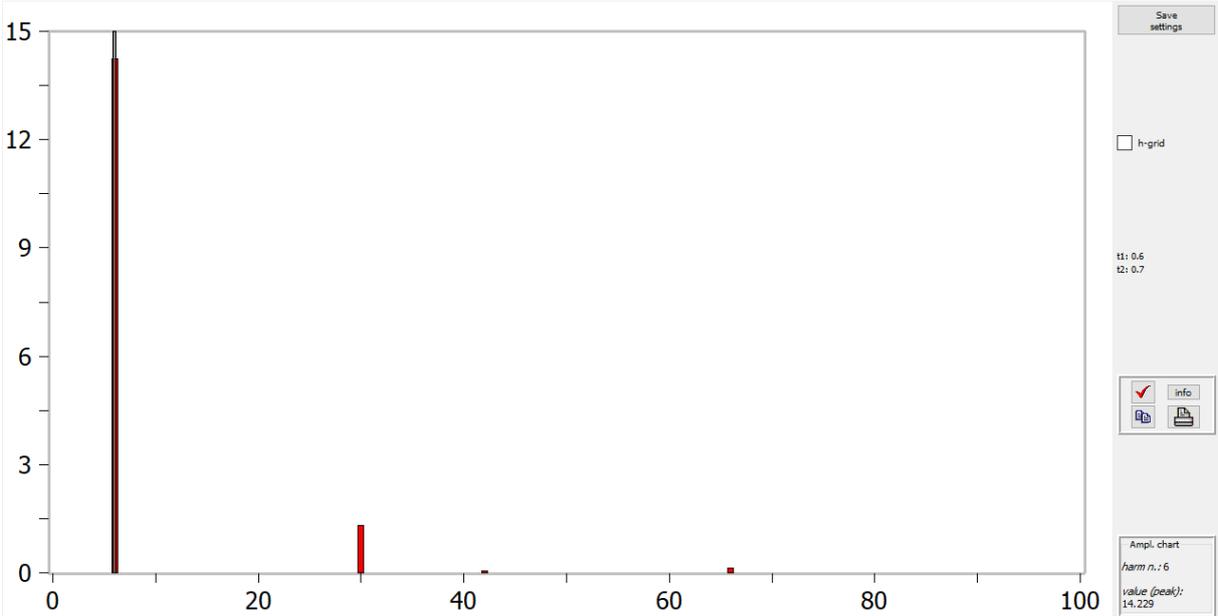


Figura 4.11: Espectro de Fourier en la primera armonica

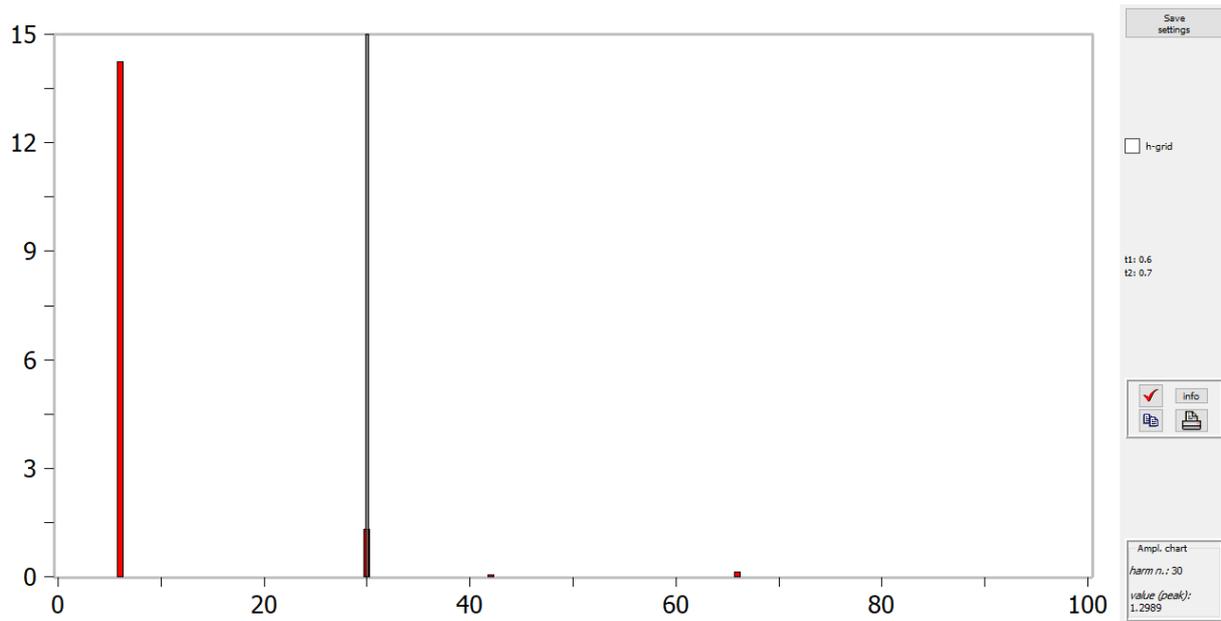


Figura 4.12: Espectro de Fourier en la quinta armónica

De igual forma, se realizó la transformada de Fourier en el modelo de primera y quinta armónica. Se eligió un intervalo de tiempo de 0.6 segundos a 0.7 segundos, completando un ciclo. Con un delta t de 0.1, se llevó a cabo el siguiente proceso: se comenzó por determinar el período  $T$  y la frecuencia  $f$ , lo que permitió identificar el número de armónica presente en el espectro de Fourier.

$$f = \frac{1}{\Delta T} \quad (4.3)$$

$$f = \frac{1}{0,1} = 10Hz$$

$$f = \frac{nh \cdot frecuencia}{frecuencia red}$$

Donde  $nh$ =número de armonica

$$f = \frac{6 \cdot 10Hz}{60Hz} = 1 \text{ armonica} \quad (4.4)$$

De forma similar para la quinta armónica:

$$f = \frac{1}{\Delta T}$$

$$f = \frac{1}{0,1} = 10Hz$$

$$f = \frac{nh \cdot frecuencia}{frecuencia\ red}$$

Donde  $nh$ =número de armonica

$$f = \frac{30 \cdot 10Hz}{60Hz} = 5\ armonica \quad (4.5)$$

La frecuencia detectada a partir de la serie de Fourier corresponde a la primera y quinta armónica respecto a la frecuencia fundamental del sistema (60 Hz).

En las figuras Fig.4.11 y 4.12, mediante el análisis del espectro de frecuencias de Fourier, se observa la presencia de la primera y la quinta armónica, lo cual es esperado, ya que en este modelo se añade la quinta armónica, y su efecto es claramente visible en las gráficas. Aunque también se detecta la presencia de otras armónicas, su influencia es casi despreciable debido a su valor extremadamente pequeño.

#### 4.2.5. Modelo VBR de la MI con la Primera, Quinta y Séptima Armónica en ATPDraw

En la implementación del modelo VBR en ATPDraw, se han definido los parámetros eléctricos y mecánicos que caracterizan el comportamiento dinámico de la máquina de inducción al considerar la armónica fundamental y las componentes armónicas adicionales. En el Algoritmo 3.1, se establece el código en MODELS, donde se asignan valores a variables clave como la resistencia y la inductancia del estator y del rotor, el acoplamiento magnético, la inercia, el coeficiente de fricción y el número de pares de polos.

El modelo toma como entradas las corrientes de fase ( $i_a, i_b, i_c$ ) y el par mecánico  $T_m$ , mientras que las salidas incluyen las tensiones inducidas, los flujos en el rotor, la velocidad angular ( $\omega_m$ ) y el par electromagnético ( $T_e$ ). Para estructurar correctamente la simulación, se emplean los comandos CONST y VAR, que permiten definir las constantes y variables involucradas en los cálculos internos del modelo.

Además de la quinta armónica, ahora se incorpora la séptima, representada por el parámetro ( $Msr7$ ), lo que genera nuevas oscilaciones en el sistema. Como consecuencia, el par electromagnético ( $T_e$ ) no solo presenta el término ( $T_{e5}$ ), sino también  $Te7$ , reflejando la interacción con esta nueva componente y su impacto en la estabilidad de la máquina.

---

### Algoritmo 3.1

Variables de entrada y salida utilizadas en el programa.

---

```
MODEL VBR_MI_7
DATA Rs {dflt: 0.3},Rr {dflt: 0.3}
DATA Lls {dflt: 2.e-3},Llr {dflt: 2.e-3},Msr{dflt: 60.e-3}
DATA Msr5 {dflt: 60.e-5},Msr7 {dflt: 60.e-7}
DATA J {dflt: 0.163},Kr {dflt:0},p {dflt:2}
INPUT ia, ib, ic, Tm
CONST SQRT23 {val: 0.816496581},SQRT1_2{val: 0.707106781}
CONST SQRT1_6 {val: 0.408248290},SQRT1_3{val: 0.577350269}

OUTPUT ea,eb,ec,FrX,Fry,Te,wm,REQ,LEQ
VAR ea,eb,ec,FrX,Fry,Te,wm,ix,iy,io,pFrX,pFry,REQ,LEQ
VAR ex,ey,eo,pwm,Lr,Le,M1,M5,M7,TETITA,THETA,Te5,Te7
VAR ex5,ex7,ey5,ey7,R1,L1,x7,y7,T5
VAR AUX1,AUX2,AUX3,AUX4,AUX5,AUX6,AUX7,AUX8,AUX9,AUX10
VAR AUX11,AUX12,AUX13,AUX14,AUX15,AUX16,AUX17,AUX18,AUX20
```

---

Con la incorporación de la quinta y séptima armónica, la estructura del bloque HISTORY en ATPDraw se mantiene sin cambios respecto al caso con solo la armónica fundamental. Sin embargo, la dinámica del sistema experimenta nuevas interacciones debido a la influencia de términos adicionales en los flujos rotóricos y el par electromagnético. En particular, la excitación armónica introduce oscilaciones adicionales en la respuesta transitoria, afectando la evolución de la velocidad angular  $\omega_m$ . La séptima armónica, representada por el parámetro  $Msr7$ , genera un nuevo conjunto de términos que intensifican estas oscilaciones y modifican la estabilidad del sistema.

---

**Algoritmo 3.2**

Almacenamiento de Variables en el Modelo VBR de la MI .

---

```
HISTORY
pFrx {dflt:0}
integral(pFrx) {dflt:0}
pFry {dflt:0}
integral(pFry) {dflt:0}

pwm {dflt:0}
integral(pwm) {dflt:0}

io {dflt:0}

wm {dflt:0}
integral(wm){dflt:0}
```

---

En la sección INIT del Algoritmo 3.3, la configuración inicial del modelo VBR en ATPDraw permanece inalterada con respecto al caso donde solo se consideraba la armónica fundamental. Las variables clave, como las fuerzas electromotrices  $e_a, e_b, e_c$ , la velocidad angular  $\omega_m$ , el ángulo de posición del rotor ( $Tetita, Theta$ ) y los flujos rotóricos ( $Fr_x, Fr_y$ ), continúan inicializándose en cero para garantizar que la simulación comience desde un estado de equilibrio.

---

**Algoritmo 3.3**

Definición de Condiciones Iniciales en el Modelo VBR de la MI .

---

```
INIT
  ea:=0
  eb:=0
  ec:=0
  wm:=0
  pwm:=0
  Tetita:=0
  Theta:=0
  pFrx:=0
  pFry:=0
  Frx:=0
  Fry:=0

ENDINIT
```

---

En la sección EXEC de los Algoritmos 3.4 y 3.5, se mantiene la estructura base utilizada para modelar el comportamiento dinámico de la máquina de inducción, con la adición de los términos necesarios para representar la interacción de las armónicas de quinto y séptimo orden con el estator y el rotor.

La inductancia mutua M5 ya introducía oscilaciones en los flujos del rotor y el par electromagnético, y con la incorporación de M7, estas interacciones se vuelven aún más complejas.

- Se agregan nuevas variables auxiliares ( $AUX13$ ) a ( $AUX18$ ) que representan la influencia combinada de las armónicas de orden cinco y siete en los flujos rotóricos y en la conversión de coordenadas espaciales.
- Se extiende la modificación de las ecuaciones de cálculo de los flujos del rotor ( $pFr_x, pFr_y$ ) para incluir el efecto de ( $M7$ ), sumándose al impacto de ( $M5$ ).
- Se ajustan aún más las expresiones de la impedancia equivalente ( $REQ$ ) y la inductancia equivalente ( $LEQ$ ) para reflejar la presencia de términos dependientes de las frecuencias armónicas quinta y séptima.
- Se introducen nuevos términos en la ecuación de las fuerzas electromotrices ( $ex, ey$ ), considerando la interacción de ambas armónicas con la velocidad angular.
- Se añade el par electromagnético de la séptima armónica ( $Te_7$ ), que genera oscilaciones adicionales de alta frecuencia, afectando la estabilidad electromecánica de la máquina.

---

### Algoritmo 3.4

Ejecución del Modelo VBR de la MI.

---

EXEC

```
Lr:=(Llr+Msr) -- Rotor inductance
Le:=(LLS+MSR)
M1 := Msr -- Mutual inductance
M5 := Msr5
M7 := Msr7
--Stator currents to space vector components ix, iy, io
ix:= SQRT23*(ia-0.5*ib-0.5*ic)
iy:= SQRT1_2*(ib-ic)
io:= SQRT1_2*(ia+ib+ic)
--Auxiliares
AUX1:=Frx*cos(tetita)-Fry*sin(tetita)
AUX2:=Frx*sin(tetita)+Fry*cos(tetita)
AUX3:=ix*cos(tetita)+iy*sin(tetita)
AUX4:=iy*cos(tetita)-ix*sin(tetita)
AUX5:=Frx*cos(5*tetita)+Fry*sin(5*tetita)
AUX6:=Frx*sin(5*tetita)-Fry*cos(5*tetita)
AUX7:=ix*cos(5*tetita)-iy*sin(5*tetita)
AUX8:=iy*cos(5*tetita)+ix*sin(5*tetita)
AUX9:=Frx*sin(5*tetita)+Fry*cos(5*tetita)
AUX10:=Frx*cos(5*tetita)-Fry*sin(5*tetita)
AUX11:=12*p*wm*(M1*M5/Lr)*sin(6*tetita)
AUX12:=12*p*wm*(M1*M7/Lr)*sin(6*tetita)
AUX13:=24*p*wm*(M5*M7/Lr)*sin(12*tetita)
AUX14:=Frx*cos(7*tetita)-Fry*sin(7*tetita)
AUX15:=Frx*sin(7*tetita)+Fry*cos(7*tetita)
AUX16:=ix*cos(7*tetita)+iy*sin(7*tetita)
AUX17:=iy*cos(7*tetita)-ix*sin(7*tetita)
AUX18:=2*M1*M7*cos(6*tetita)+2*M5*M7*cos(6*tetita)
-- Rotor fluxes derivatives
pFrx:-Rr*(Frx-M1*AUX3-M5*AUX7-M7*AUX16)/Lr
pFry:-Rr*(Fry-M1*AUX4-M5*AUX8-M7*AUX17)/Lr
```

---

---

### Algoritmo 3.5

Ejecución del Modelo VBR de la MI.

---

```
-- Rotor fluxes calculation
FrX:=INTEGRAL(pFrX)
FrY:=INTEGRAL(pFrY)
-- REQ calculation
R1:=2*M1*M5*cos(6*tetita)+AUX18
REQ:=RS+(RR/(Lr**2))*M1**2+M5**2+M7**2+R1
-- LEQ calculation
L1:=2*M1*M5*cos(6*tetita)+AUX18
LEQ:=(LE-(1/LR)*(M1**2+M5**2+M7**2+L1))
-- FEM calculation in space vector coordinates
x7:=(AUX11+AUX12+AUX13)*ix
ex7:=(M7*(-Rr*AUX14/Lr-p*wm*7*AUX15)/Lr)+x7
ex5:=(M5*(-Rr*AUX5/Lr-p*wm*5*AUX6)/Lr)
ex:=(M1*(-Rr*AUX1/Lr-p*wm*AUX2)/Lr)+ex5+ex7
y7:=(AUX11+AUX12+AUX13)*iy
ey7:=(M7*(p*wm*7*AUX14-Rr*AUX15/Lr)/Lr)+y7
ey5:=(M5*(-p*wm*5*AUX5+Rr*AUX6/Lr)/Lr)
ey:=(M1*(p*wm*AUX1-Rr*AUX2/Lr)/Lr)+ey5+ey7
eo:= Rs*io+lls*deriv(io)
-- FEM space vector transformation to abc
ea:= SQRT23*ex+SQRT1_3*eo
eb:=-SQRT1_6*ex+SQRT1_2*ey+SQRT1_3*eo
ec:=-SQRT1_6*ex-SQRT1_2*ey+SQRT1_3*eo
-- Electric torque calculation
Te7:=p*M7*(AUX14*iy-AUX15*ix)/Lr
T5:=M5*sin(10*tetita)*ix**2+M5*cos(10*tetita)*iy**2
Te5:=p*M5*(AUX9*ix-AUX10*iy-T5)/Lr
Te:=p*M1*(AUX1*iy-AUX2*ix)/Lr+Te5+Te7
-- Dynamic equation -- angular speed derivative
pwm:=(Te-Tm-Kr*wm)/J
-- Integration of the dynamic equation
wm:=INTEGRAL(pwm) -- angular speed
Theta:=INTEGRAL(wm)
Tetita:=p*Theta
ENDEXEC
ENDMODEL
```

---

## 4.2.6. Simulación del comportamiento de la MI con VBR ante la Primera, Quinta y Séptima Armónica en ATPDraw

### 4.2.6.1. Par Eléctrico $T_{e7}$ de MI con VBR ante la primera, quinta y septima armónica

La Fig.4.13 presenta la evolución del par electromagnético ( $T_e$ ) en la máquina de inducción modelada con el método VBR, considerando la influencia de la armónica fundamental, así como las armónicas de 5.<sup>o</sup> y 7.<sup>o</sup> orden. Se aprecia que, en los primeros instantes, el par experimenta oscilaciones de mayor amplitud en comparación con el caso en el que solo se tomaba en cuenta la componente fundamental, lo que refleja una mayor perturbación transitoria en el sistema.

A medida que la máquina alcanza el estado estacionario, aunque el valor medio del par se estabiliza, persisten oscilaciones residuales más marcadas debido a la interacción de las armónicas adicionales. Es decir, las armónicas de 5.<sup>o</sup> y 7.<sup>o</sup> orden altera la dinámica del par electromagnético, incorporando nuevas frecuencias a la señal y modificando tanto la respuesta transitoria como las fluctuaciones en régimen permanente.

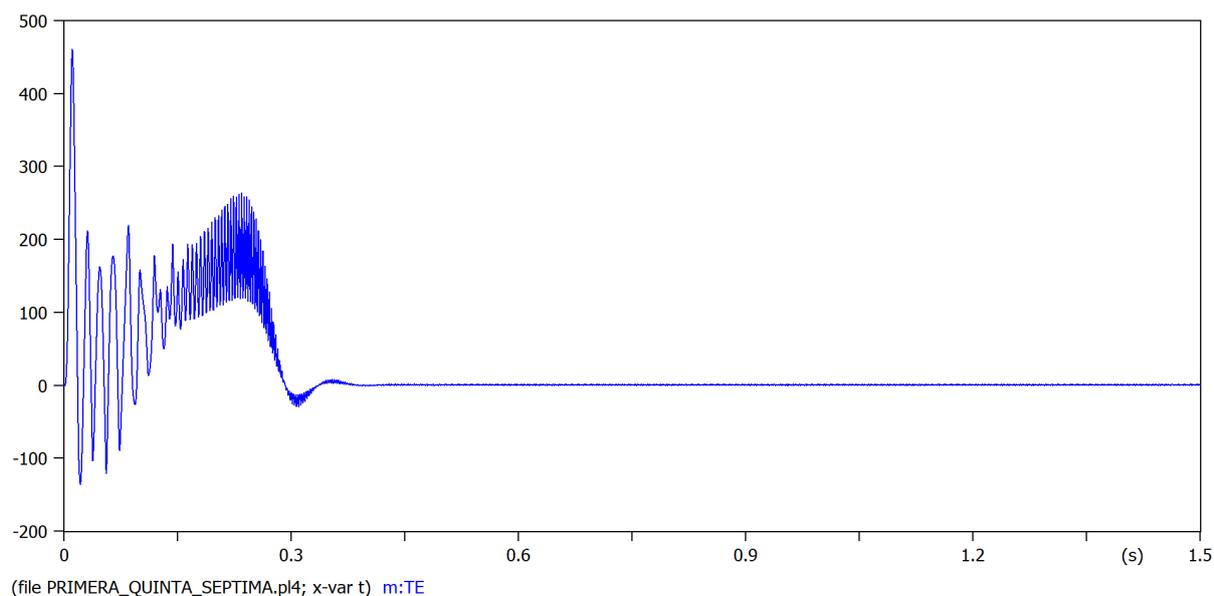


Figura 4.13: Par eléctrico de la MI con la la Primera, Quinta y Séptima Armónica.

### 4.2.6.2. Comportamiento de $w_m$ bajo el efecto de la Primera, Quinta y Séptima Armónica

La Fig. 4.14 muestra la evolución temporal de la velocidad mecánica ( $w_m$ ) considerando la armónica fundamental, la armónica de 5.<sup>o</sup> orden y la armónica de 7.<sup>o</sup> orden. En comparación con los casos anteriores, la respuesta inicial presenta oscilaciones de mayor frecuencia y amplitud en el arranque, lo que indica una mayor influencia de las armónicas en la dinámica transitoria del sistema.

A medida que avanza la simulación, la velocidad mecánica sigue una tendencia de crecimiento hasta alcanzar el estado estacionario. Sin embargo, en este caso, la presencia de la séptima armónica introduce nuevas fluctuaciones que afectan la estabilización de la velocidad mecánica. Se observa que las oscilaciones en la respuesta transitoria son más pronunciadas en comparación con el caso en el que solo se consideraba la quinta armónica.

Un análisis detallado en la Fig. 4.15, en el intervalo de tiempo entre los segundos 0.4 y 0.7, se observa que las fluctuaciones presentan una mayor densidad de oscilaciones en comparación con los casos anteriores, lo que evidencia que la séptima armónica introduce una componente de alta frecuencia que afecta la estabilidad de la velocidad mecánica incluso en el régimen estacionario. Estos resultados sugieren que la combinación de armónicas de diferentes órdenes puede generar efectos acumulativos que podrían impactar la estabilidad operativa de la máquina en condiciones reales de funcionamiento.

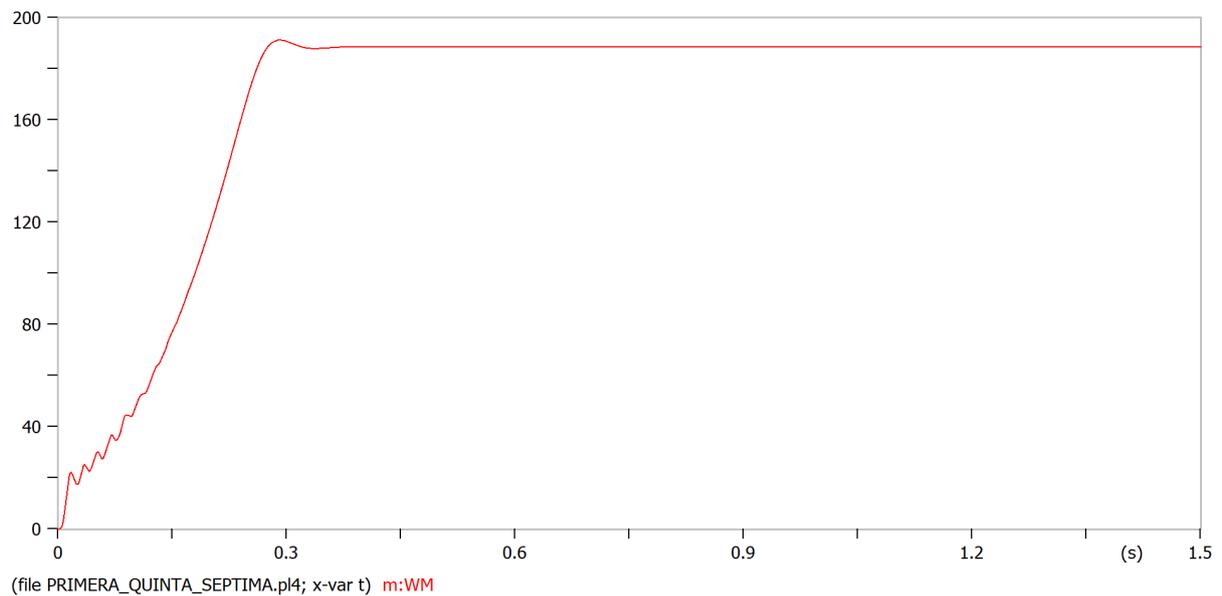


Figura 4.14: Comportamiento de la velocidad angular con la Primera, Quinta y Séptima Armónica

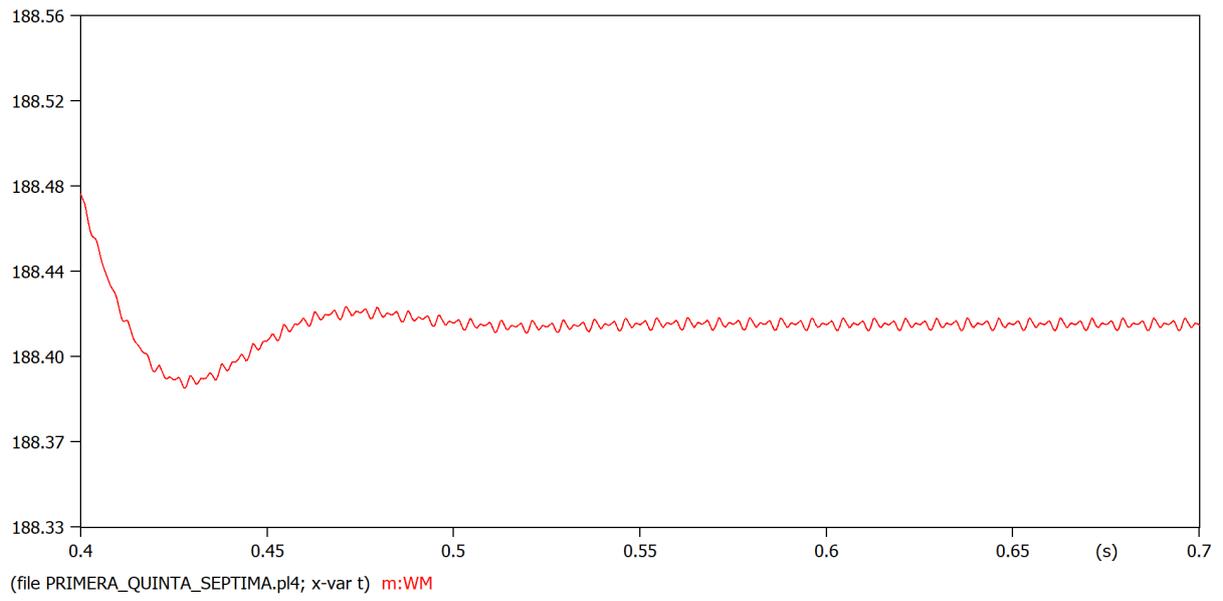
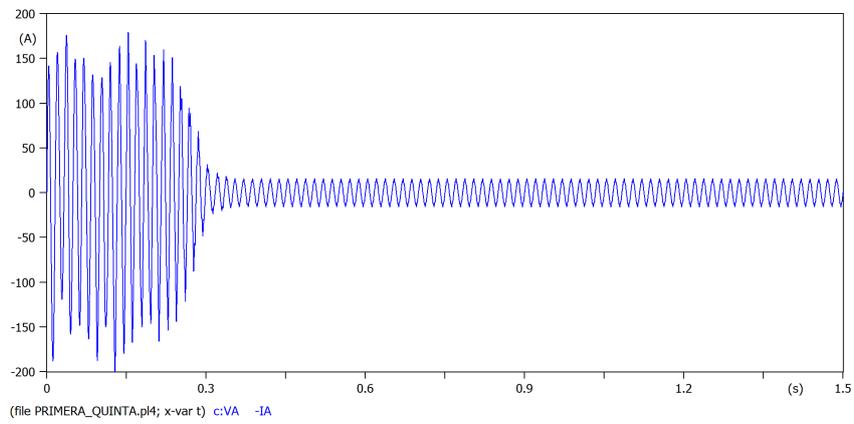
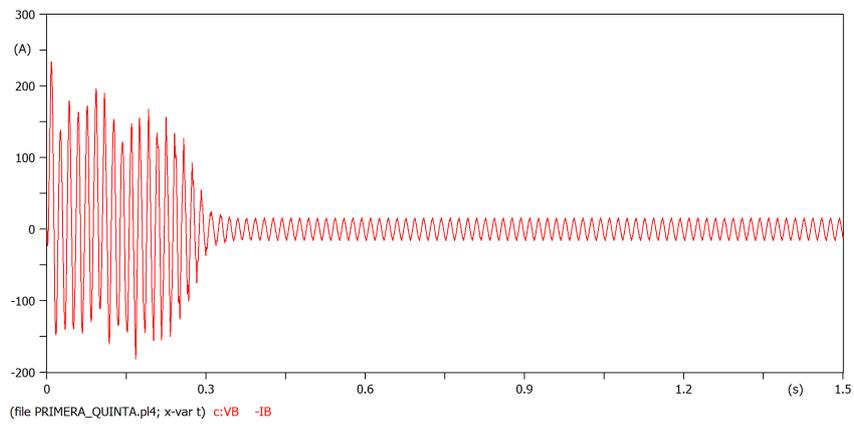


Figura 4.15: Comportamiento de la velocidad angular con la primera, quinta y séptima armónica

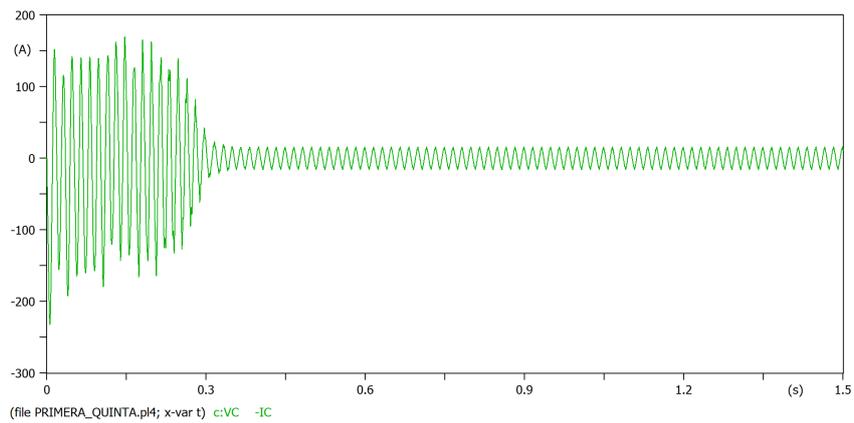
#### 4.2.6.3. Corrientes en el devanado estático en la fases $A, B, C$ ante la Primera, Quinta y Séptima Armónica



(a) Corriente  $i_a$



(b) Corriente  $i_b$



(c) Corriente  $i_c$

Figura 4.16: Corrientes del estator  $i_a, i_b, i_c$  de la MI con VBR

En la gráfica de las corrientes del estator en las diferentes fases presenta un régimen transitorio con picos de corriente similares al modelo de primera y quinta armónica, de igual forma, hasta un tiempo 0.33 segundos, sin embargo, a partir de este tiempo se presenta el régimen permanente con forma sinusoidal con una corriente de 17 amperios.

#### 4.2.6.4. Influencia de la Primera, Quinta y Séptima Armónica en el Espectro de Fourier

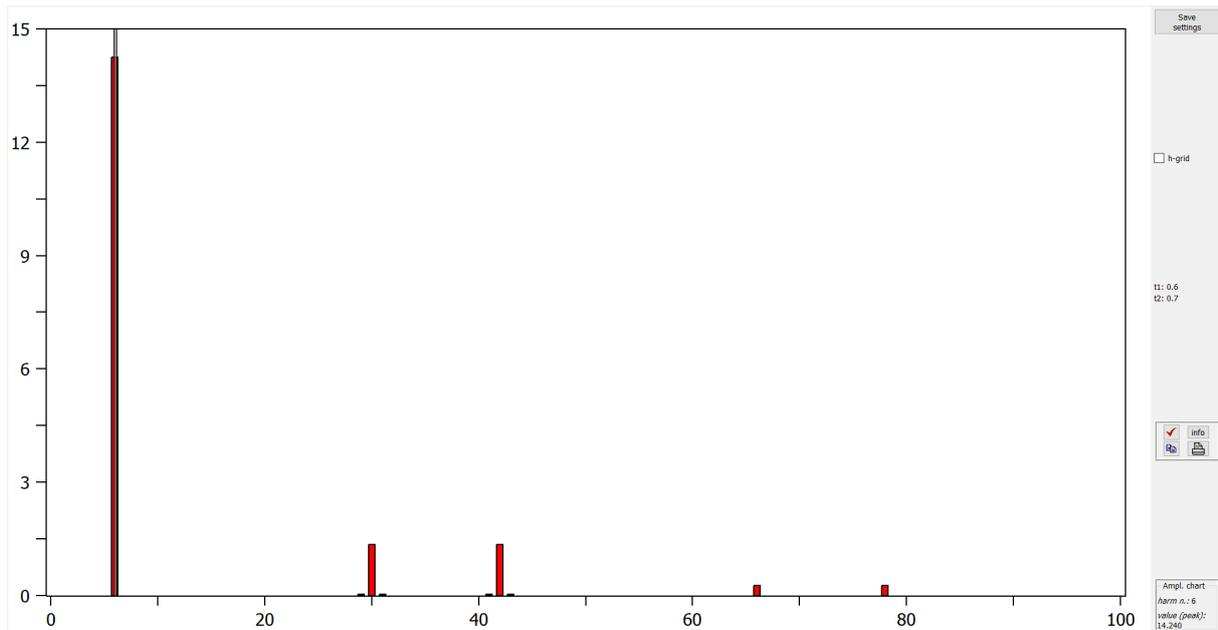


Figura 4.17: Espectro de Fourier en la Primera Armónica

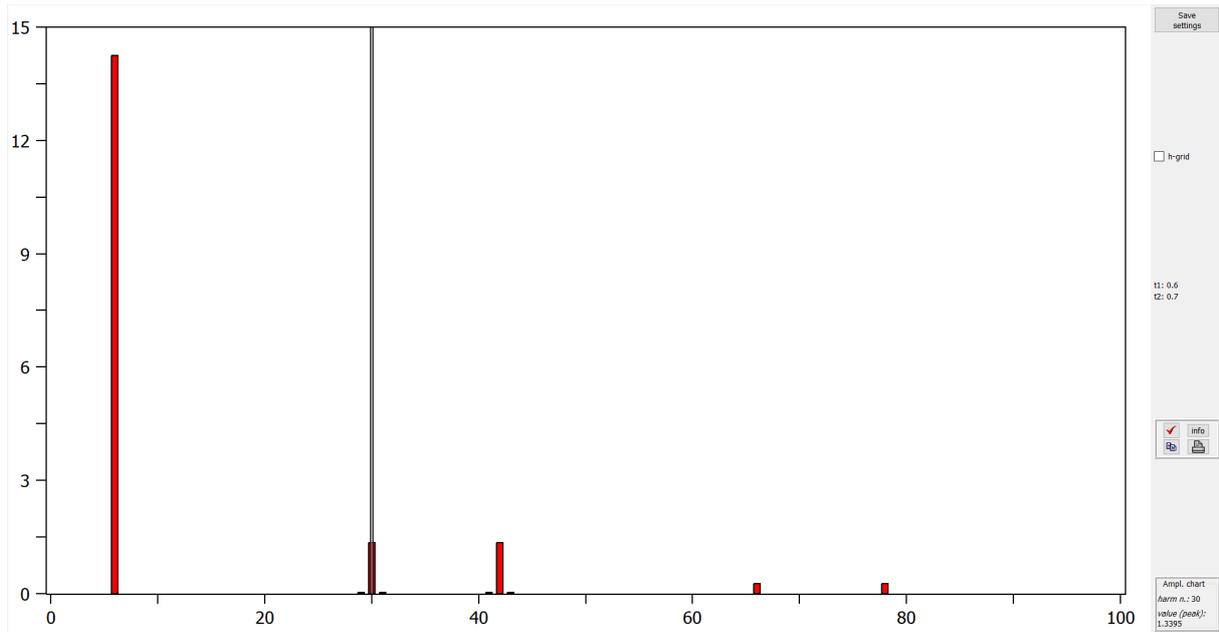


Figura 4.18: Espectro de Fourier en la Quinta Armónica

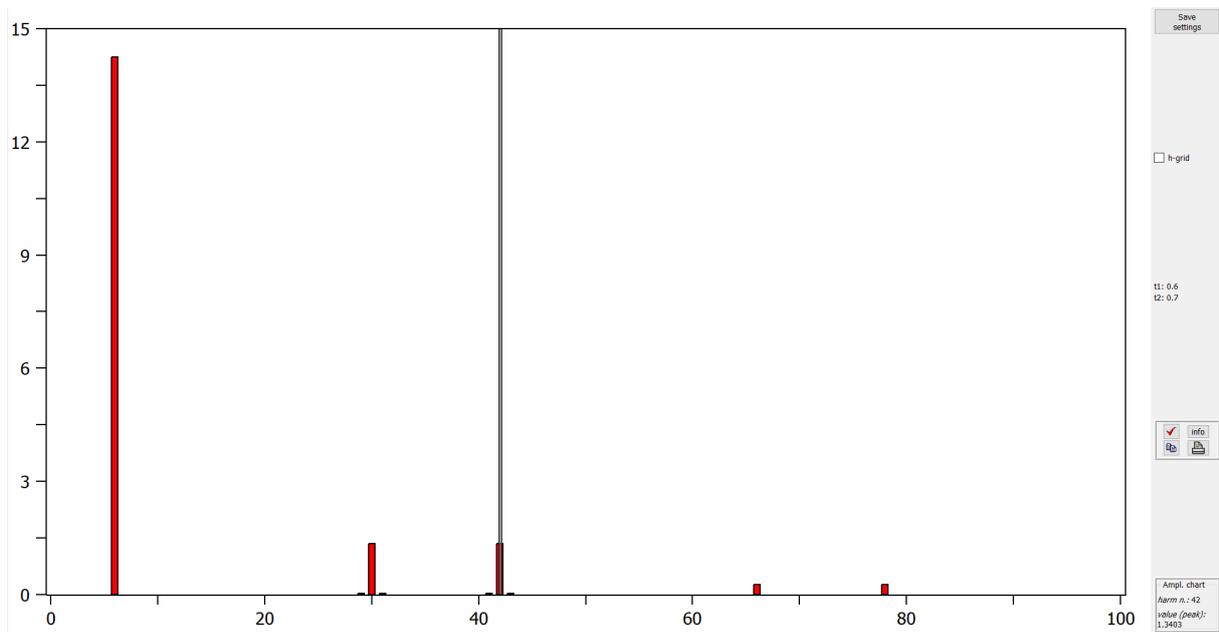


Figura 4.19: Espectro de Fourier en la Séptima Armónica

Se realizó la transformada de Fourier en el modelo de primera, quinta y séptima armónica. Se eligió un intervalo de tiempo de 0.6 segundos a 0.7 segundos, completando un ciclo. Con un delta t de 0.1, se llevó a cabo el siguiente proceso: se comenzó por determinar el período y la frecuencia, lo que permitió

identificar el número de armónica presente en el espectro de Fourier.

$$f = \frac{1}{\Delta T} \quad (4.6)$$

$$f = \frac{1}{0,1} = 10Hz$$

$$f = \frac{nh \cdot frecuencia}{frecuencia red}$$

Donde  $nh$ =número de armonica

$$f = \frac{6 \cdot 10Hz}{60Hz} = 1 \textit{ armonica} \quad (4.7)$$

De forma similar para la quinta armónica:

$$f = \frac{1}{0,1} = 10Hz$$

$$f = \frac{nh \cdot frecuencia}{frecuencia red}$$

$$f = \frac{30 \cdot 10Hz}{60Hz} = 5 \textit{ armonica} \quad (4.8)$$

Por último, para la séptima armónica:

$$f = \frac{1}{0,1} = 10Hz$$

$$f = \frac{nh \cdot frecuencia}{frecuencia red}$$

$$f = \frac{42 \cdot 10Hz}{60Hz} = 7 \textit{ armonica} \quad (4.9)$$

La frecuencia detectada a partir de la serie de Fourier corresponde a la primera, quinta y séptima armónica respecto a la frecuencia fundamental del sistema ( $60Hz$ ).

En las figuras 4.17, 4.18 y 4.19, mediante el análisis del espectro de frecuencias de Fourier, se observa la presencia de la primera, quinta y séptima armónica, lo cual es lo esperado, ya que en este modelo se añade la séptima armónica de la misma magnitud que la quinta armónica para poder observar con mayor detalle el efecto que tiene sobre la máquina de inducción, su influencia es claramente visible en las gráficas.

Aunque también se detecta la presencia de otras armónicas, su influencia es casi despreciable debido a su valor extremadamente pequeño.

## CAPÍTULO 5

# RESULTADOS EXPERIMENTALES

El presente análisis de resultados pone en evidencia la importancia de modelar la máquina de inducción utilizando la técnica VBR, lo que permite obtener una representación precisa de la armónica fundamental. Esta armónica constituye el modelo principal de estudio, siendo el componente esencial para la evaluación del comportamiento eléctrico y mecánico de la máquina a lo largo del tiempo. La armónica fundamental es responsable del funcionamiento base de la máquina, y su correcta representación permite realizar análisis predictivos sobre el desempeño general de la máquina. Sin embargo, para llevar a cabo un estudio más detallado y considerar de manera integral el efecto de las armónicas espaciales, resulta necesario aplicar el principio de superposición. Dicho principio implica la suma de las diferentes armónicas presentes en el sistema, lo que permite obtener un modelo más realista y cercano a las condiciones de operación reales. A medida que se incorporan armónicas de mayor orden, su influencia sobre los parámetros eléctricos y mecánicos de la máquina de inducción tiende a disminuir progresivamente. Esto se debe a que la amplitud de cada armónica decrece con el incremento de su número de orden, reduciendo su impacto en el comportamiento general del sistema. No obstante, es relevante señalar que algunas armónicas giran en sentido contrario al flujo principal, mientras que otras mantienen la misma dirección. Esta diferenciación en el sentido de giro introduce efectos adicionales que deben ser considerados en el diseño y operación de la máquina, ya que pueden generar perturbaciones o desbalances en su funcionamiento. Las armónicas que giran en sentido contrario pueden generar campos magnéticos opuestos que provocan efectos indeseados como reducción en la eficiencia, sobrecalentamiento y disminución de la estabilidad en la velocidad angular. Cada armónica contribuye con un par eléctrico particular, lo que implica que el par total de la máquina de inducción se obtiene mediante la suma de los pares individuales generados por cada armónica presente en el sistema. En los primeros órdenes armónicos, la influencia sobre el par eléctrico es significativamente notoria, mientras que en armónicas de orden superior su impacto se atenúa de manera progresiva. Esta disminución en la contribución armónica al par total puede interpretarse como una tendencia natural del sistema a filtrar las componentes de alta frecuencia, limitando su incidencia en el comportamiento general de la máquina. Adicionalmente, los efectos de la interacción de múltiples armónicas pueden generar oscilaciones de baja frecuencia en la operación del motor, lo que puede afectar la estabilidad en el suministro de potencia mecánica. Desde el punto de vista de la simulación, los resultados obtenidos revelan que el modelo basado exclusivamente en la armónica fundamental presenta señales completamente limpias y sin distorsiones en variables clave como las corrientes del estator, la

velocidad angular y el par eléctrico. En este escenario idealizado, el comportamiento de la máquina se mantiene estable y sin presencia de perturbaciones que puedan comprometer su eficiencia o rendimiento. No obstante, al incorporar armónicas de quinto y séptimo orden en el análisis, se observa una alteración notable en la respuesta del sistema. Específicamente, se detecta la aparición de distorsiones armónicas que afectan la forma original de las señales, generando oscilaciones adicionales en los valores medidos, incremento en los niveles de ruido y una menor claridad en la salida del sistema. Esta presencia de distorsiones introduce variaciones en la corriente del estator, lo que a su vez puede provocar un aumento en las pérdidas energéticas y en la temperatura de la máquina. La influencia de las armónicas espaciales en la operación de la máquina de inducción es un factor determinante en su desempeño. Estas armónicas pueden generar efectos adversos como fluctuaciones en el par eléctrico, variaciones en la velocidad angular y alteraciones en las corrientes del estator. Como consecuencia, la presencia de estas componentes no deseadas puede inducir vibraciones mecánicas, incrementar los niveles de ruido operativo y provocar interferencias electromagnéticas que afectan la estabilidad del sistema. Asimismo, las vibraciones mecánicas generadas por la presencia de armónicas pueden acelerar el desgaste de los cojinetes y aumentar la probabilidad de fallos mecánicos prematuros. La combinación de estos efectos hace que la inclusión del análisis de armónicas espaciales sea fundamental para mejorar la confiabilidad y el tiempo de vida útil de la máquina de inducción. Finalmente, incluir las armónicas espaciales dentro del modelo de análisis de la máquina de inducción permite una aproximación más precisa y realista a su comportamiento en condiciones operativas reales. Considerar estos efectos en el diseño y optimización de la máquina permite desarrollar estrategias de control y mitigación adecuadas para minimizar la distorsión armónica y mejorar el rendimiento del sistema. De esta manera, se contribuye a prolongar la vida útil de la máquina, reducir el impacto de las perturbaciones electromagnéticas y garantizar un funcionamiento eficiente en aplicaciones industriales y comerciales. Adicionalmente, la implementación de técnicas de filtrado activo y estrategias de diseño de devanados optimizados pueden ayudar a mitigar los efectos adversos de las armónicas, logrando una operación más estable y eficiente de la máquina de inducción.

## CAPÍTULO 6

# CONCLUSIONES

En esta investigación se ha abordado el modelado y la validación del comportamiento dinámico de las máquinas de inducción, con un enfoque específico en el impacto de los armónicos espaciales. Estos armónicos, particularmente los de orden superior, se presentan con frecuencia en los sistemas eléctricos industriales y afectan significativamente el rendimiento y la estabilidad de las máquinas de inducción. A través de la herramienta ATP-EMTP, se ha logrado modelar el comportamiento de estas máquinas bajo condiciones de distorsión armónica, específicamente con los efectos de la primera, quinta y séptima armónica, proporcionando un análisis detallado de cómo estas distorsiones impactan variables clave como la corriente, el par motor y la velocidad.

El propósito central de esta tesis fue desarrollar un modelo capaz de representar adecuadamente el comportamiento de las máquinas de inducción en presencia de armónicos espaciales y validar dicho modelo a través de simulaciones en ATP-EMTP. Para ello, se compararon los resultados obtenidos con datos previos y estudios experimentales existentes, lo que permitió confirmar la precisión y fiabilidad del modelo propuesto. Este modelo ha sido fundamental para entender cómo los armónicos afectan la operación de las máquinas, destacando la necesidad de considerar estos efectos al diseñar y operar estos sistemas en entornos industriales.

Uno de los hallazgos más significativos de esta investigación fue la confirmación de que los armónicos espaciales tienen un impacto notable sobre las características operativas de las máquinas de inducción. Los efectos de los armónicos de la primera, quinta y séptima armónica generaron fluctuaciones en las corrientes y en el par motor, lo que afectó negativamente tanto la eficiencia como la estabilidad de las máquinas. Estos efectos no solo generan pérdidas de energía, sino que también aceleran el desgaste de los componentes y disminuyen la vida útil de las máquinas. De igual forma, los armónicos provocaron variaciones en la potencia activa y reactiva, lo que puede comprometer la estabilidad de sistemas eléctricos más amplios.

Específicamente, la quinta armónica fue la que mostró el mayor impacto sobre el comportamiento dinámico de la máquina, provocando oscilaciones más pronunciadas en el par motor. Estos resultados subrayan la importancia de diseñar máquinas de inducción capaces de mitigar los efectos de los armónicos,

ya que la eficiencia operativa y la fiabilidad a largo plazo dependen en gran medida de la capacidad de los sistemas para gestionar estas distorsiones.

Aunque esta investigación ha logrado abordar en profundidad el impacto de los armónicos espaciales en las máquinas de inducción, existen ciertas limitaciones que deben tenerse en cuenta. En primer lugar, los modelos utilizados en esta tesis son simplificaciones que no capturan todos los efectos posibles en condiciones reales de operación. Aunque las simulaciones realizadas han sido validadas con datos teóricos y experimentales disponibles, es necesario realizar estudios adicionales que consideren otros factores que puedan influir en el rendimiento de las máquinas de inducción, como las variaciones de temperatura o las interacciones electromagnéticas complejas. Además, la validación experimental de los resultados obtenidos en esta investigación es una parte esencial que debe ser llevada a cabo en futuras investigaciones, para asegurar que los modelos sean representativos de la realidad operativa de las máquinas de inducción.

El impacto de este estudio es considerable tanto desde el punto de vista teórico como práctico. Teóricamente, la tesis contribuye a la comprensión más profunda de los efectos de los armónicos espaciales en el comportamiento dinámico de las máquinas de inducción, proporcionando una herramienta más precisa para el análisis de estos sistemas. Prácticamente, los resultados de esta investigación tienen aplicaciones directas en el diseño y la operación de sistemas industriales que emplean estas máquinas. Al identificar los efectos de los armónicos y proponer estrategias de mitigación, como el uso de filtros armónicos o la optimización de diseños.

En cuanto a las recomendaciones para futuras investigaciones, se sugiere profundizar en el estudio de otros armónicos de orden superior que podrían tener un impacto relevante en el comportamiento de las máquinas de inducción, especialmente en condiciones de operación más complejas. Asimismo, sería recomendable explorar nuevas tecnologías de filtrado armónico que puedan ofrecer soluciones más eficientes para mitigar los efectos de las distorsiones en tiempo real. Además, se recomienda realizar pruebas experimentales adicionales para validar los resultados obtenidos en simulación, lo que permitiría afinar aún más los modelos propuestos y garantizar su aplicabilidad en diversos escenarios de operación.

En conclusión, esta tesis ha demostrado que los armónicos espaciales representan un desafío significativo para el rendimiento dinámico de las máquinas de inducción, afectando variables clave como la corriente, el par motor y la velocidad. Al modelar y simular estos efectos utilizando ATP-EMTP, se ha logrado una mejor comprensión de cómo los armónicos afectan la operación de estas máquinas.

## 6.1. Categorización del Trabajo de Titulación según Criterios ABET

Tabla 6.1: Áreas del Trabajo de Grado

Título del Trabajo:	Accesibilidad	Estética	
Restricciones múltiples (dos o más)	Códigos	Construibilidad	2.2.1 ■
	Costos	Ergonomía	
	Extensibilidad	Funcionalidad	2.2.2 ■
	Interoperabilidad	Consideraciones Legales	
	Mantenibilidad	Manufacturabilidad	
	Mercadeo	Política	
	Regulaciones	Cronogramas	
	Normativas	2.2 ■	Sostenibilidad
	Impacto Ambiental		Impacto Social
	Usabilidad		Otros:
Normas relevantes (dos o más)			
	112-2017		
Elementos del proceso	Identificación de oportunidades	Generación de soluciones múltiples	4 ■
	Desarrollo de requerimientos	4.2.1 ■	Evaluación de soluciones
	Procesos iterativos		5 ■
	Realizar compromisos o tratos		Consideración de riesgos
Basado en trabajos anteriores	Protecciones	Iluminación	
	Optimización de sistemas	Alta Tensión	
	Energías alternativas	Distribución	
	Máquinas eléctricas	2 ■	Otros temas

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] J. M. Aller, *Máquinas Eléctricas Rotativas: Introducción a la teoría general*. Equinoccio, 2006.
- [2] G. Ferraris and R. Arno, “Arrangement for starting alternating-current motors.,” 1899. U.S. Patent 629,897, filed July 6, 1895, issued August 1, 1899.
- [3] M. von Dolivo-Dobrovolsky, “Alternating-current motor,” 1890. U.S. Patent 427,978, filed July 1, 1889, issued May 13, 1890.
- [4] J. Mora, *Máquinas eléctricas, 6a edc.* McGraw-Hill Interamericana de España S.L., 2008.
- [5] C. P. Steinmetz, *Theory and calculation of alternating current phenomena*, vol. 4. McGraw-Hill Book Company, Incorporated, 1916.
- [6] K. L. Hansen, “Torque components due to space harmonics in induction motors,” *Journal of the American Institute of Electrical Engineers*, vol. 41, no. 12, pp. 928–932, 1922.
- [7] C. A. M. Weber and F. W. Lee, “Harmonics due to slot openings,” *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, vol. XLIII, pp. 687–694, 1924.
- [8] A. J. Berman, G. Farmanfarma, and R. Schinzinger, “Space harmonics generated by concentric windings [includes discussion],” *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers. Part III: Power Apparatus and Systems*, vol. 73, no. 2, pp. 1416–1421, 1954.
- [9] W. V. Lyon, “Application of harmonic analysis to the theory of synchronous machines,” *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, vol. XXXVII, no. 2, pp. 1477–1517, 1918.
- [10] W. R. Appleman, “The cause and elimination of noise in small motors,” *Electrical Engineering*, vol. 56, no. 11, pp. 1359–1367, 1937.
- [11] H. L. Bojer, *Pre-Determination of shaded Pole induction motor performance*. I Kommisjon Hos. F. Bruns Bokhandel, 1948.
- [12] L. W. Buchanan, “An equivalent circuit for a single-phase motor having space harmonics in its magnetic field,” *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. 84, no. 11, pp. 999–1007, 1965.
- [13] Y. Anazawa, A. Kaga, H. Akagami, S. Watabe, and M. Makino, “Prevention of harmonic torques in squirrel cage induction motors by means of soft ferrite magnetic wedges,” *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 18, no. 6, pp. 1550–1552, 1982.

- [14] C. F. Landt, "A technique for assessing space harmonic effects in squirrel cage induction motors," *Transactions of the South African Institute of Electrical Engineers*, vol. 73, no. 1, pp. 2–9, 1982.
- [15] F. R. Cevallos Aguirre and F. O. Pinos Vergara, *Estimación de eficiencia en máquinas de inducción en ambientes industriales*. B.S. thesis, Universidad Politecnica Salesiana, 2019.
- [16] I. A. de Ingenieros Eléctricos, "Aiec induction motors and induction machines in general," tech. rep., AIEE, 1927.
- [17] E. E.-A. U. G. (EEUG), *Manual de usuario ATPDraw*. European EMTP-ATP, 2023.
- [18] E. Haginomori, T. Koshiduka, J. Arai, and H. Ikeda, *Power system transient analysis: theory and practice using simulation programs (ATP-EMTP)*. John Wiley & Sons, 2016.