



**UNIVERSIDAD POLITÉCNICA SALESIANA
SEDE QUITO**

CARRERA DE INGENIERÍA CIVIL

**VERIFICACIÓN DEL COMPORTAMIENTO DINÁMICO A TORSIÓN DE
UN MODELO FÍSICO TRIDIMENSIONAL CON BASE EN ENSAYOS EN
MESA VIBRATORIA**

Trabajo de titulación previo a la obtención del
Título de Ingeniero Civil e Ingeniera Civil

AUTORES: Miguel Ángel Correa López
Estefanía Michelle Gómez López

TUTOR: Wilson Ramiro Torres Berni

Quito - Ecuador
2022

CERTIFICADO DE RESPONSABILIDAD Y AUTORÍA DEL TRABAJO DE TITULACIÓN

Nosotros, Miguel Ángel Correa López con documento de identificación N°1724366677 y Estefanía Michelle Gómez López con documento de identificación N°1722641386; manifestamos que:

Somos los autores y responsables del presente trabajo; y, autorizamos a que sin fines de lucro la Universidad Politécnica Salesiana pueda usar, difundir, reproducir o publicar de manera total o parcial el presente trabajo de titulación.

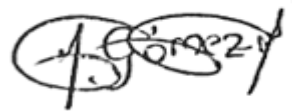
Quito, 14 de marzo del 2022

Atentamente,



Miguel Ángel Correa López

1724366677



Estefanía Michelle Gómez López

1722641386

CERTIFICADO DE CESIÓN DE DERECHOS DE AUTOR DEL TRABAJO DE TITULACIÓN A LA UNIVERSIDAD POLITÉCNICA SALESIANA

Nosotros, Miguel Ángel Correa López con documento de identificación N°1724366677 y Estefanía Michelle Gómez López con documento de identificación N°1722641386; expresamos nuestra voluntad y por medio del presente documento cedemos a la Universidad Politécnica Salesiana la titularidad sobre los derechos patrimoniales en virtud de que somos autores del Artículo Académico: “Verificación del comportamiento dinámico a torsión de un modelo físico tridimensional con base en ensayos en mesa vibratoria.”, el cual ha sido desarrollado para optar por el título de: Ingeniero Civil e Ingeniera Civil, en la Universidad Politécnica Salesiana, quedando la Universidad facultada para ejercer plenamente los derechos cedidos anteriormente.

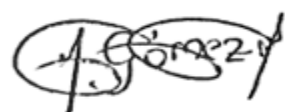
En concordancia con lo manifestado, suscribimos este documento en el momento que hacemos la entrega del trabajo final en formato digital a la Biblioteca de la Universidad Politécnica Salesiana.

Quito, 14 de marzo del 2022

Atentamente,



Miguel Ángel Correa López
1724366677



Estefanía Michelle Gómez López
1722641386

CERTIFICADO DE DIRECCIÓN DEL TRABAJO DE TITULACIÓN

Yo, Wilson Ramiro Torres Berni con documento de identificación N°1710259845 ,docente de la Universidad Politécnica Salesiana, declaro que bajo mi tutoría fue desarrollado el trabajo de titulación: VERIFICACIÓN DEL COMPORTAMIENTO DINÁMICO A TORSIÓN DE UN MODELO FÍSICO TRIDIMENSIONAL CON BASE EN ENSAYOS EN MESA VIBRATORIA, realizado por Miguel Ángel Correa López con documento de identificación N°1724366677 y por Estefanía Michelle Gómez López con documento de identificación N°1722641386, obteniendo como resultado final el trabajo de titulación bajo la opción de Artículo Académico que cumple con todos los requisitos determinados por la Universidad Politécnica Salesiana.

Quito, 14 de marzo del 2022

Atentamente,



Ing. Wilson Ramiro Torres Berni, PhD
1710259845

VERIFICACIÓN DEL COMPORTAMIENTO DINÁMICO A TORSIÓN DE UN MODELO FÍSICO TRIDIMENSIONAL CON BASE EN ENSAYOS EN MESA VIBRATORIA.

VERIFICATION OF THE TORSIONAL BEHAVIOR OF A THREE-DIMENSIONAL PHYSICAL MODEL BASED ON TESTING ON A SHAKING TABLE.

Estefanía Gómez-López¹, Miguel Correa-López², Wilson Torres-Berni³

Resumen

En la actualidad el estudio de la Dinámica Estructural es indispensable tanto en lo teórico como en lo práctico a través de la simulación por computadora o mediante ensayos de laboratorio. El objetivo principal de este trabajo es que los estudiantes de Ingeniería Civil puedan observar de manera física el comportamiento dinámico a la torsión en un modelo tridimensional. El ensayo se lleva a cabo mediante el uso de una mesa vibratoria propiedad de la Universidad Politécnica Salesiana y la resolución del modelo analítico con base en la aplicación del Método de Newmark para obtener la respuesta del sistema dinámico. Se construyó un modelo de 2 niveles que está conformado por columnas de acero inoxidable, y por pisos de acrílico, adicional se compone de lingotes de acero (masas) los cuales se pueden colocar en diferentes puntos de la estructura para verificar el comportamiento dinámico a torsión. Los resultados obtenidos en las pruebas son coherentes, esto permite validar la metodología aplicada y garantizar el desempeño del equipo empleado.

Palabras Claves: descomposición modal, mesa vibratoria, método de Newmark modelo tridimensional, torsión.

Abstract

At present, the theoretical and practical study of Structural Dynamics is very important by means of simulation or laboratory tests. The main objective of this work is that Civil Engineering students can observe the dynamic behavior with torsion in a three-dimensional model.

The test is carried out using a shaking table owned by the Salesian Polytechnic University and the resolution of the analytical model based on the application of the Newmark Method to obtain the response of the dynamic system. A 2-level model was built, it is made up of stainless-steel columns and acrylic plates, in addition it is composed of steel ingots (masses) which can be placed at different points of the structure to verify the dynamic behavior to torsion.

The results obtained in the tests are consistent, this allows validating the applied methodology and assuring the performance of the equipment used.

Keywords: modal decomposition, Shaking Table, Newmark method, 3d model, torsion.

¹Departamento de Ingeniería Civil-Universidad Politécnica Salesiana- Quito, Ecuador
Autor para correspondencia: egomez11@est.ups.edu.ec

² Departamento de Ingeniería Civil-Universidad Politécnica Salesiana- Quito, Ecuador
Autor para correspondencia: mcorreal@est.ups.edu.ec

³ Departamento de Ingeniería Civil-Universidad Politécnica Salesiana- Quito, Ecuador
Autor para correspondencia: wtorresb@ups.edu.ec

1. Introducción

Ecuador es un país que se encuentra atravesado por una serie de fallas geológicas, esto le convierte en una zona de gran actividad sísmica, que ha generado grandes desastres en el territorio. Uno de los más importantes fue el sismo ocurrido en la Costa Noroeste de Ecuador el 16 de abril del 2016, en las provincias de Esmeraldas y Manabí, con una magnitud de 7.8 Mw [1], sismo que causó daños materiales y un sinnúmero de víctimas.

Un sismo es un fenómeno natural que se presenta por la liberación de energía en la tierra, mediante la ruptura de las capas de la corteza terrestre, se manifiesta como vibraciones que se propagan en todas las direcciones con duración e intensidad variable. [2].

Para predecir el comportamiento de una estructura frente a dichos fenómenos es fundamental el estudio de la Dinámica Estructural, el análisis permite evaluar el diseño de una edificación una vez construida o identificar posibles daños luego un evento sísmico. [3].

Este proyecto se centra en construir un modelo tridimensional de múltiples grados de libertad (MGDL), que está constituido por pisos de acrílico los cuales actúan como losas flexural y axialmente rígidas y con columnas de acero inoxidable que tendrá un comportamiento fundamentalmente a flexión, no todas las columnas tienen la misma rigidez, característica que amplificará el efecto de torsión, adicionalmente los lingotes de acero se ubicarán en diferentes puntos de los acrílicos con el mismo objetivo. Para el modelo analítico se desarrolló un script en MatLab el cual está basando en el Método de Newmark considerando el comportamiento de un edificio a cortante [4].

A fin de obtener resultados de propiedades modales y propiedades dinámicas en modelos estructurales se han implementado técnicas experimentales a través de la colocación de

acelerómetros y la utilización de equipos de excitación dinámica que simulan sismos a escala [3].

En esta investigación, el equipo de excitación dinámica que se empleó es la Shake Table II es un dispositivo simulador de movimientos en 1 o 2 direcciones, que genera aceleraciones de piso a través de movimientos sinusoidales o registros sísmicos (escalados), el cual permite colocar acelerómetros que adquieren datos, este tipo de análisis está directamente ligado al tipo de excitación, la amplitud de aceleraciones y la duración. Cabe recalcar que la mesa vibratoria tiene limitaciones en cuanto a frecuencia máxima de 10 Hz, y la masa sobre la mesa no supere los 27.2 kg. [5].

2. Materiales y Métodos

2.1. Sistemas de múltiples grados de libertad

El sistema de múltiples grados de libertad MGDL, es un sistema dinámico que requiere más de una coordenada de movimiento para describir la cinemática de este.

En la Figura 1 se muestra el pórtico tridimensional de análisis, consta de dos niveles, en cada nivel con sus masas concentradas se dispone de tres grados de libertad, dando un total de seis grados de libertad en el pórtico a ensayarse ($x_1, y_1, rz_1, x_2, y_2, rz_2$).

Para el análisis dinámico de una estructura, la cual se puede representar a través de la concentración de masas en la losa de cada piso, que a su vez se consideran como elementos extremadamente rígidos a flexión, por lo tanto, los únicos elementos que aportan a la rigidez del sistema son las columnas, este tipo de modelos se comportan como edificios a cortante. [6].

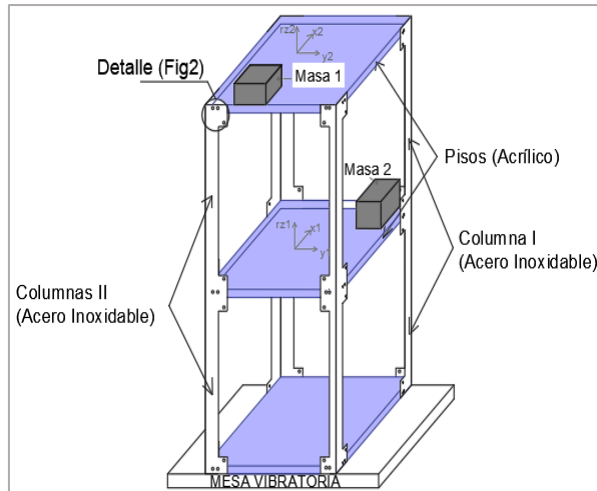


Figura 1: Modelo de 6 GDL.

Para garantizar que no existan rotaciones entre losas y columnas, se debe realizar una conexión mediante tornillos en el modelo experimental, como se muestra en la Figura 2.

En el pórtico tridimensional, que se muestra en la Figura 3, las losas de cada piso aportan masa al nivel en que se encuentran y las columnas aportan la mitad de la masa que está sobre y por debajo de dicho nivel. [4].

En la Figura 3: $m_{\text{Piso } 1,2}$: representa la masa del piso (losa de acrílico), $m_{\text{Columna I, II}}$: representa la masa de cada columna.

2.2. Fuerzas de resistencia de los elementos del pórtico tridimensional

Las fuerzas actuantes en cada piso se ubican en el centro de masa, mientras que la fuerza resistente en el centro de rigidez, es decir donde se puede considerar concentradas las fuerzas que resisten la sollicitación actuante sobre la estructura. [7].

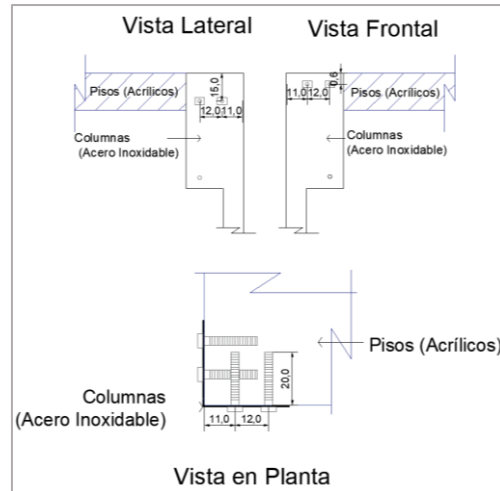


Figura 2: Detalle de conexión (losa - columna), (dimensiones en mm).

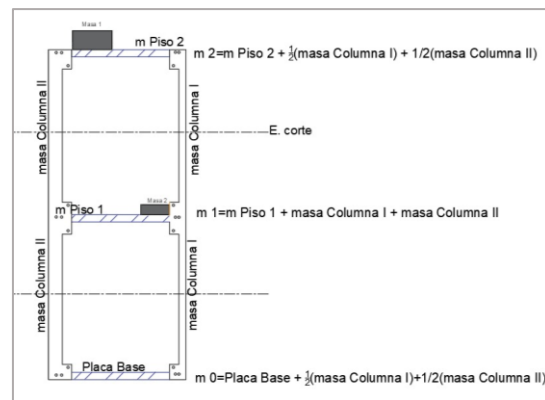


Figura 3: Distribución de masa en el pórtico tridimensional.

2.2.1 Fuerza elástica, de amortiguamiento e inerciales

La fuerza elástica relaciona las fuerzas externas sobre la componente de rigidez de la estructura con los desplazamientos de los grados de libertad dinámicos, como se muestra en la ecuación (1) [7].

$$\begin{bmatrix} F_{s1} \\ F_{s2} \\ \vdots \\ F_{si} \\ \vdots \\ F_{sn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1i} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2i} & \dots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{i1} & K_{i2} & \dots & K_{ii} & \dots & K_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{ni} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad (1)$$

Donde: $[F_s]$: es el vector de la fuerza elástica, $[u]$: es el vector de desplazamiento que se relacionan a través de la matriz de rigidez $[K]$.

Las velocidades en cada grado de libertad producen fuerzas internas de amortiguamiento como se muestra en la ecuación (2). [7].

$$\begin{bmatrix} F_{D1} \\ F_{D2} \\ \dots \\ F_{Di} \\ \dots \\ F_{Dn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1i} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2i} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{i1} & C_{i2} & \dots & C_{ii} & \dots & C_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{ni} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dots \\ \dot{u}_i \\ \dots \\ \dot{u}_n \end{bmatrix} \quad (2)$$

Donde: $[F_D]$: es el vector de fuerzas de amortiguamiento $[\dot{u}]$: el vector de velocidad que se relaciona a través de la matriz de amortiguamiento $[C]$.

La fuerza inercial, es una de las tres fuerzas externas, que actúan sobre el componente de masa, por lo tanto, se requieren fuerzas externas para equilibrar el sistema, como se muestra en la ecuación (3). [7].

$$\begin{bmatrix} F_{i1} \\ F_{i2} \\ \dots \\ F_{ii} \\ \dots \\ F_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1i} & \dots & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} & \dots & M_{2i} & \dots & M_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{i1} & M_{i2} & \dots & M_{ii} & \dots & M_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \dots & M_{ni} & \dots & M_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \dots \\ \ddot{u}_i \\ \dots \\ \ddot{u}_n \end{bmatrix} \quad (3)$$

Donde: $[F_i]$: es la fuerza inercial, $[\ddot{u}]$: el vector de aceleración que se relaciona a través de la matriz de masa $[M]$.

2.3. Factor de amortiguamiento

El amortiguamiento ξ se define como la capacidad del sistema para disipar energía. El factor de amortiguamiento se lo puede calcular con el método de Ancho de Banda. [8].

La frecuencia natural ω_n , y el factor de amortiguamiento, se pueden obtener a través de la curva de respuesta en el dominio de la frecuencia a partir de ensayos experimentales, la cual es controlada por la cantidad de amortiguamiento en el sistema. [7].

Con la finalidad de aplicar el método de ancho de banda a través de equipos experimentales, se debe obtener la relación entre la amplitud de aceleración de cada piso, respecto a la amplitud de aceleración de la base, ambas amplitudes en el dominio de la frecuencia, a esto se conoce como transmisibilidad, como se muestra en la ecuación (4). [7].

$$Tr = \frac{\ddot{a}_a(\omega)}{\ddot{a}_o(\omega)} \quad (4)$$

Donde: Tr: es la transmisibilidad, $\ddot{a}_a(\omega)$: amplitud de aceleración de piso, $\ddot{a}_o(\omega)$: amplitud de aceleración de la base.

Por medio de la transformada de Fourier se puede obtener una representación gráfica de la transmisibilidad vs frecuencia, y obtener el factor de amortiguamiento mediante la media potencia como se muestra en la Figura 4. A partir de dos frecuencias f_1, f_2 , las cuales están ubicadas a $1/\sqrt{2}$ desde la amplitud máxima, se determina el factor de amortiguamiento a partir de la ecuación (5). [7].

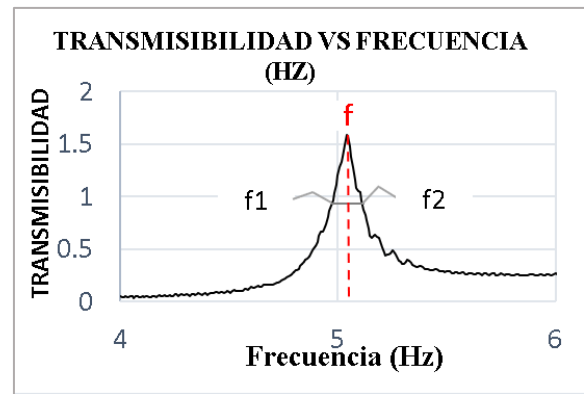


Figura 4: Ancho de Banda

$$\xi = \frac{f_2 - f_1}{2f} \quad (5)$$

Donde: f : frecuencia de máxima amplitud, f_1 y f_2 : son las frecuencias de media potencia.

2.4. Rigidez del pórtico plano

En una edificación que posee plantas irregulares respecto a los ejes x,y que será sometido a excitación sísmica, y además presenta propiedades de rigidez asimétricas respecto a dichos ejes, cada diafragma de piso al ser un elemento infinitamente rígido en su propio plano tiene tres grados de libertad, traslación en x, en y y rotación torsional alrededor del eje z, como se muestra en la Figura 5, la matriz de rigidez de este sistema con respecto a los grados de libertad globales, se fórmula mediante el método de la rigidez directa. [7].

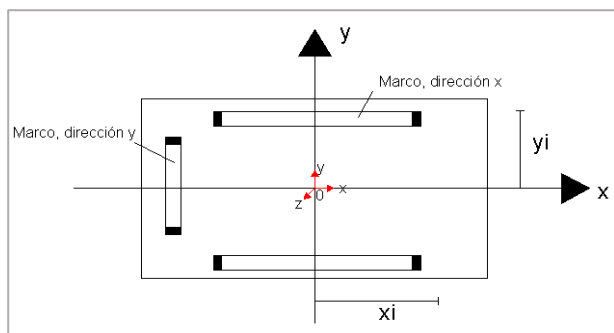


Figura 5: Esquemática del sistema en planta [7].

2.4.1 Rigidez del pórtico experimental

Para el análisis de rigidez se debe identificar los pórticos que actúan en la estructura tridimensional de estudio, como se muestra en la Figura 6.

La rigidez de cada pórtico $[Kl]$ en el modelo de estudio está dada por la ecuación (6). [9]

$$Kl = \begin{bmatrix} 4k & -2k \\ -2k & 2k \end{bmatrix} \quad (6)$$

Donde: el coeficiente de rigidez $k=12EI/l^3$, E: representa el módulo de elasticidad, I: es la inercia de la columna, l: es la longitud de entrepiso.

Cabe recalcar que en el modelo experimental los pórticos 3,4 que se muestran en la Figura 6, poseen diferente rigidez esto se debe a las características geométricas de las columnas, las cuales se pueden observar en la Tabla 1.

Las columnas tipo I están ubicadas en los ejes 4-1 y 4-2, las columnas tipo II están ubicadas en el eje 3-1 y 3-2 como se muestra en la Figura 6.

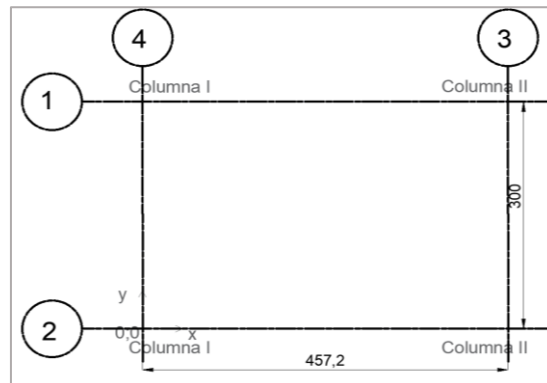


Figura 6: Representación en planta de los pórticos que se tienen en el modelo experimental, (dimensiones en mm).

Características en el Modelo Experimental

Sección columnas Tipo I(mm)	11x11x0.6
Sección columnas Tipo II(mm)	14x14x0.6
Inercia columnas Tipo I(mm^4)	153.47
Inercia columnas Tipo II (mm^4)	321.85
Módulo de Elasticidad (N/mm^2)	2.60E+5
Número de Niveles	2
Altura de entrepiso (mm)	75

Tabla 1: Características geométricas del modelo

En la Figura 7, se muestra el detalle de las secciones de las columnas Tipo I, II.

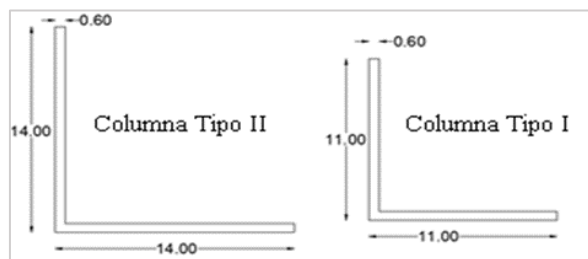


Figura 7: Columna Tipo I, II, (dimensiones en mm).

2.4.2. Matrices de rigidez en coordenadas de piso

Para determinar la matriz de rigidez de una estructura, se debe ensamblar de manera directa las matrices de rigidez en coordenadas globales de

cada pórtico. En cada piso se debe establecer el centro de masa y ubicar los grados de libertad correspondientes a la traslación x, traslación y y la rotación torsional rz. [9].

La hipótesis del modelo se da a partir de la relación entre el vector de cargas y el vector de desplazamiento p, que viene dado por la matriz de rigidez lateral [K] como se muestra en la ecuación (7).

$$Q_i = Kl * p \quad (7)$$

Donde: Q_i: Vector de cargas, [Kl]: representa la matriz de rigidez lateral del pórtico, p: traslación x y o la rotación torsional rz.

2.5. Centro de masa

Se denomina centro de masa CM al punto en el que se puede considerar concentrada la masa total de cada piso. [9].

Para el cálculo del centro de masas se consideran las ecuaciones (8) y (9), se debe dividir el momento de primer orden de las masas distribuidas en cada nivel para la masa total del nivel.

$$X_{CM} = \frac{m_i x_i + m_j x_j}{m_i + m_j} \quad (8)$$

$$Y_{CM} = \frac{m_j y_j + m_i y_i}{m_j + m_i} \quad (9)$$

Donde: m_i, m_j: masas parciales de cada piso, x_i, x_j: posición x desde el eje de referencia en cada piso, y_i, y_j: posición y desde el eje de referencia en cada piso.

2.5.1. Centro de Masa en el modelo experimental

En las Figuras 8 y 9, Pp1 y Pp2: representan el punto de concentración de masa de cada piso, M. adi1. y M. adi 2: representan la masa de los lingotes de acero, y CM1 y CM2: representan el centro de

masa por piso. Es importante mencionar que la configuración de masas mostrada en las Figuras 8,9 es única en esta investigación, la cual amplifica el efecto torsional más que cualquier otra combinación.

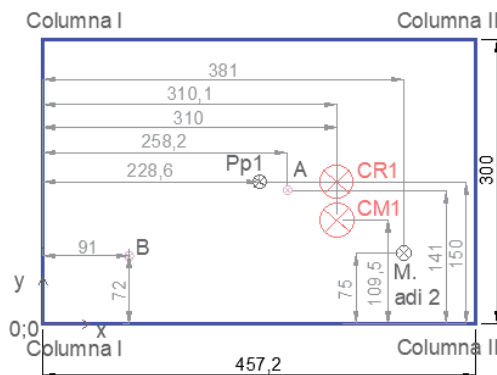


Figura 8: Centro de Masa N.+75, (dimensiones en mm).

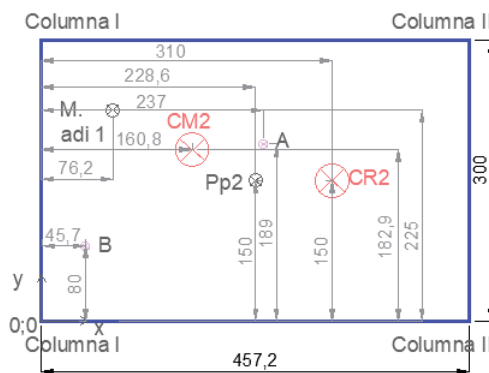


Figura 9: Centro de Masa N.+1.50, (dimensiones en mm).

2.6. Centro de rigidez

El centro de rigidez se define como el punto donde si se aplica una fuerza lateral a la estructura, se producirá traslación sin rotación. Para poder obtener el centro de rigidez de una planta, se toma en cuenta las rigideces de cada pórtico. [9].

2.6.1. Centro de rigidez en el modelo experimental

La ubicación del centro de rigidez en cada una de las plantas se puede observar en las Figuras 8,9 el cual está medido desde el eje de referencia.

2.7. Matriz de transformación de grados de libertad (GDL) a coordenadas de piso

Se debe establecer la matriz de colocación T_{pp} , la misma que relaciona los grados de libertad de cada piso con los de la estructura. La matriz T_{pp} está conformada por pórticos planos que tiene m filas y n columnas, siendo m el número de GDL del pórtico y n el número de cada GDL de la estructura tridimensional, el primer bloque $n \times n$ está conformado por el coseno del ángulo φ que forma el pórtico respecto del eje x , en el segundo bloque es el seno de dicho ángulo φ y en el tercer bloque representa la distancia d desde cada pórtico al centro de masa de cada piso, como se indica en la expresión (10). [10].

$$T_{pp}(i) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi & 0 & d & 0 \\ 0 & \cos \varphi & 0 & \sin \varphi & 0 & d \end{bmatrix} \quad (10)$$

Adicional se debe obtener la matriz de coordenadas de piso, como se muestra en la ecuación (11).

$$p^i = T_{pp}^i * q \quad (11)$$

Donde: p : son los grados de libertad del pórtico i , $[T_{pp}]$: matriz de colocación de grados de libertad de pórticos a grados de libertad de la estructura, q : grados de libertad de estructura.

Finalmente, se consigue la matriz de rigidez de la estructura con la ecuación (12). [10].

$$KE = \sum_{i=1}^{N \text{ portico}} T_{pp}^{(i)T} * K^{(i)} * T_{pp}^{(i)} \quad (12)$$

Donde: $[T_{pp}^{(i)}]$: Matriz de colocación, $[K^{(i)}]$: Matriz de rigidez lateral de cada pórtico.

2.8. Ecuación del movimiento

Con los componentes anteriormente mencionados la ecuación para un sistema amortiguado de múltiples grados de libertad (MGDL), sujeto a

excitación sísmica en la base está dada por la ecuación (13). [11].

$$[M][\ddot{u}] + [C][\dot{u}] + [K][u] = -[M][l] \ddot{x}_0 \quad (13)$$

Donde: $[M]$: Matriz de masa, $[\ddot{u}]$: vector de aceleración, $[C]$: Matriz de amortiguamiento, $[\dot{u}]$: vector de velocidad, $[K]$: matriz de rigidez, $[u]$: vector de desplazamiento, $[l]$: representa el vector de colocación, \ddot{x}_0 : aceleración de piso en cada instante de tiempo. Es importante tomar en cuenta que la coordenada u es de tipo relativa respecto de la base.

2.9. Frecuencia y modos de vibración

Para un sistema de múltiples grados de libertad (MGDL) se debe establecer las frecuencias naturales y formas modales se considera como un sistema sujeto a vibración libre y sin amortiguamiento, esto quiere decir que la ecuación (13), la aceleración de piso \ddot{u}_0 y el amortiguamiento ϕ se anulan obteniendo la ecuación (14). [7].

$$[M] * \{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = 0 \quad (14)$$

Donde: $[M]$: matriz de masa, $[K]$: matriz de rigidez, $\{u\}$: vector de desplazamiento, $\{\ddot{u}\}$: vector de aceleración de piso.

A partir de la ecuación diferencial (14), que corresponde a una solución no trivial del sistema de ecuaciones simultáneas, se puede encontrar los valores o modos propios, mediante la resolución de la ecuación (15). Por consiguiente, el determinante de la matriz de coeficientes es cero como se indica en la ecuación (16). [12].

$$[K]\{\phi\} - \omega^2[M]\{\phi\} = 0 \quad (15)$$

$$|[K] - \omega^2[M]| = 0 \quad (16)$$

Al expandir el determinante se obtiene un polinomio de $2n$, siendo n el número de modos de vibración, esta ecuación se conoce como ecuación de frecuencias, donde las respuestas se denominan

vectores propios y las raíces cuadradas son las frecuencias naturales ω , para resolver los modos de vibración o vectores propios ϕ se sustituye la frecuencia natural en la ecuación (15). [12].

2.10. Ortogonalidad de los modos

Una de las consecuencias de la ortogonalidad modal es que el trabajo realizado por las fuerzas inerciales del n-ésimo modo al pasar a través del desplazamiento del r-ésimo modo es igual a 0. A partir de dicho concepto se obtiene el sistema para resolver cada modo de vibración como un sistema desacoplado sin predominio de un modo respecto al otro. [7].

Una vez determinadas las ecuaciones anteriormente mencionadas se procede a la resolución numérica de cada sistema de un grado de libertad, el cual representa a cada modo de vibración, mediante el Método de Newmark.

2.11. Método de Newmark

N.M. Newmark desarrolló una familia de métodos al cual pertenece el método de aceleración lineal, es decir se supone que la respuesta en aceleración varía linealmente dentro del intervalo de tiempo [8], como se indica en la Figura 10.

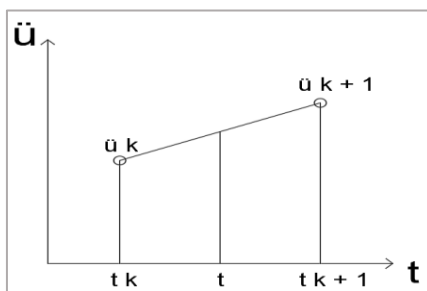


Figura 10: Respuesta de aceleración lineal [7].

La representación matricial del método aplicado para obtener respuestas de posición, velocidad y aceleración dinámica del sistema en el instante de tiempo $(k + 1)$, depende de las matrices de coeficientes para un sistema y registro dado en el instante k , como se muestra a la ecuación (17).

$$\begin{bmatrix} u_{k+1} \\ \dot{u}_{k+1} \\ \ddot{u}_{k+1} \end{bmatrix} = [x] \begin{bmatrix} u_k \\ \dot{u}_k \\ \ddot{u}_k \end{bmatrix} - [y] \ddot{x}_{b_{k+1}} \quad (17)$$

Donde: $\ddot{x}_{b_{k+1}}$: representa la aceleración de piso en el instante $k+1$, $[x]$, $[y]$: son matriz y vector de coeficientes constantes para un sistema y registro dado, $[u_k \dot{u}_k \ddot{u}_k]^T$: representa el vector de respuesta dinámica del instante k , $[u_{k+1} \dot{u}_{k+1} \ddot{u}_{k+1}]^T$: es el vector de respuesta dinámica del sistema en el instante $k+1$.

2.12. Estabilidad del método

Existen criterios de estabilidad que son adecuados para un análisis de un sistema MGD, en donde se debe cumplir la condición dada por la ecuación (18), para garantizar la estabilidad del método, en el caso de aceleración lineal, se considera el método condicionalmente estable esto significa que es dependiente del intervalo de tiempo escogido. [7].

$$\frac{\Delta t}{T_n} < 0.551 \quad (18)$$

Donde: Δt : representa el intervalo de tiempo, T_n : es el periodo más bajo del sistema.

2.13. Movimiento relativo

La definición de movimiento relativo es útil para determinar el movimiento de puntos situados en el mismo cuerpo rígido, conociendo el movimiento de otros puntos. [13].

Se podrá encontrar una posición de un punto respecto del otro como se indica la Figura 11. Se podrá obtener las posiciones relativas de B respecto de A, a partir de la ecuación **Error! Reference source not found.**

$$\vec{r}_{B/A} = \vec{r}_B - \vec{r}_A \quad (19)$$

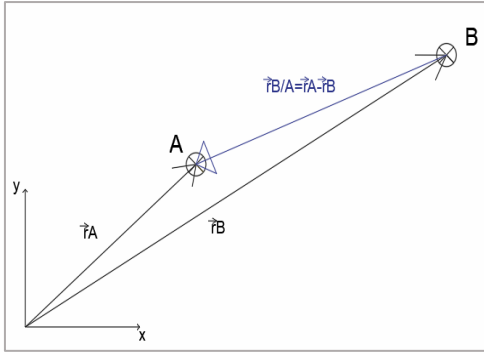


Figura 11: Posición relativa [13].

A partir de la primera derivada de la posición se puede obtener la velocidad relativa como se muestra en la ecuación (20), con la segunda derivada de la posición se puede determinar la ecuación de aceleración relativa (21). [13].

$$\vec{v}_{B/A} = \vec{v}_B - \vec{v}_A \quad (20)$$

$$\vec{a}_{B/A} = \vec{a}_B - \vec{a}_A \quad (21)$$

A partir de la ecuación (21) se puede establecer los componentes de la aceleración B respecto de la aceleración de A como se muestra en la ecuación (22).

$$a_{B/A(x)} = a_{B(x)} - a_{A(x)} \quad (22)$$

$$a_{B/A(y)} = a_{B(y)} - a_{A(y)}$$

El sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que se muestra en la expresión (23), es aplicado para la determinación de la respuesta dinámica en el centro de masa CM.

$$\begin{aligned} a_{B/A(x)} &= -\alpha * r_{B/A(y)} - va^2 * r_{B/A(x)} \\ a_{B/A(y)} &= \alpha * r_{B/A(x)} - va^2 * r_{B/A(y)} \end{aligned} \quad (23)$$

Donde: α : es la aceleración angular, va^2 : la velocidad angular al cuadrado, $r_{B/A(y)}$ y $r_{B/A(x)}$: son las coordenadas de la posición de B con respecto al punto A tanto en x, y.

A partir de los registros obtenidos del ensayo sísmico al que se sometió al modelo, en las pruebas experimentales se consideró el sismo de Manabí, ensayado en la dirección más larga del modelo es decir dirección x, la escala de amplitud de dicho sismo en el software de la mesa vibratoria es de 0.5 cm de desplazamiento.

Para poder obtener experimentalmente la respuesta dinámica del sistema es necesario colocar al menos dos acelerómetros en dos puntos cualquiera de cada losa en dirección x, y de esta manera se puede despejar la aceleración angular α y la velocidad angular al cuadrado ω^2 , en el modelo de estudio los dos puntos de análisis se denominan A, B como se muestran la Figura 12.

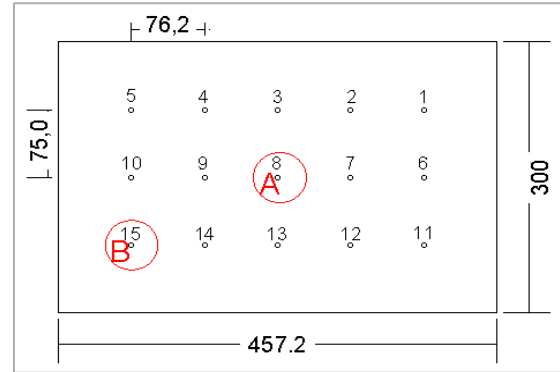


Figura 12: Puntos cualquiera para el análisis, (dimensiones en mm).

Una vez obtenida la aceleración angular y los registros de aceleración filtrado x, y en cada piso se procede aplicar la ecuación

(24), para obtener la aceleración absoluta en el centro de masa, se obtiene aceleraciones absolutas en dirección x, y, y la aceleración angular en cada piso, dichas aceleraciones obtenidas de manera experimental son comparadas con la aceleración teórica obtenida a través del modelo analítico.

$$\begin{aligned} a_x &= accelx + (-\alpha * r_{CM/A(y)}) + (-va^2 * r_{CM/A(x)}) \\ a_y &= acely + (-\alpha * r_{CM/A(x)}) + (-va^2 * r_{CM/A(y)}) \end{aligned}$$

(24)

Donde: a_x : es la respuesta de aceleración absoluta en el centro de masa en dirección x, a_y : respuesta de aceleración absoluta en el centro de masa en dirección y, $acelx$: registro de aceleración en dirección x en el punto de análisis A y B, $acely$: registro de aceleración en dirección y en el punto de análisis A y B, va^2 : velocidad angular al cuadrado, α : aceleración angular, r_{CM} : posición del centro de masa x, y, ra : la posición x, y del punto A.

2.14. Procesamiento de datos

Los datos obtenidos por los acelerómetros necesitan ser corregidos por línea base y filtro, por lo cual se utilizó el filtro Butterworth [14], para esta modelación se empleó una pasa banda con frecuencias de corte de 0.5 Hz y 16 Hz para el experimento I y una frecuencia de corte de 0.5 Hz y 32 Hz para el experimento II. Para la filtración de ambos experimentos se utilizó el programa ABsignal. [15].

2.14.1. Instrumentación

Para obtener resultados de propiedades modales y dinámicas como desplazamiento, velocidad y aceleración, se utilizaron acelerómetros que son dispositivos que permiten registrar en 3 ejes ortogonales, la adquisición de datos de este proyecto se ejecutó a través de acelerómetros PBC Piezotronics [16], los cuales tienen parámetros determinados de sensibilidad y frecuencia como se muestra en la Tabla 2.

2.14.2. Mesa Vibratoria (Shake Table II)

Shake Table II es un dispositivo que tiene las siguientes características, las dimensiones de la placa inferior son 610 mm x 457.2 mm, el área de la mesa vibratoria 457.2 x 457.2 mm² donde se ancla el modelo cuya masa no puede ser mayor a

27.2 kg, un motor DC con una potencia de 400W, que permite un movimiento de ± 7.6 cm con una aceleración máxima de 2.5 g [5].

Tipo de Acelerómetro	Frecuencia	Sensibilidad (m V/g)
A. Miniatura	0.7 Hz - 4 KHz	99.9
A. Normal	2 Hz - 5KHz	97.8
A. Normal	2 Hz - 5 KHz	100.3
A. Normal	0.5Hz - 4.5 KHz	99.1
A. Normal	1Hz - 5 KHz	9.77
A. Miniatura	0.7Hz - 4 KHz	97.7
A. Normal	0.5Hz - 4.5 KHz	99.4
A. Normal	1Hz - 5 KHz	9.61
A. Miniatura	2 Hz - 7 KHz	98.8

Tabla 2: Características de los acelerómetros

2.14.3. Materiales

Los modelos experimentales están conformados por pisos de acrílico y columnas de acero inoxidable, se especifican las características principales como la masa de las columnas, la masa de los pisos de acrílico, la masa de los lingotes de acero que permiten tener una combinación de posibilidades para generar torsión en la estructura, como se muestra en la Figura (12).

En las tablas 3,4,5 se detallan las características de cada uno de los componentes del modelo.

Masas de cada piso		
Nivel	Material	Masa (kg)
N+75	Acrílico	3.55
N+150	Acrílico	3.50

Tabla 3: Masa de cada piso

Masas de las columnas		
Columnas	Material	Masa (kg)
Columna Tipo I	Acero Inox.	0.18-0.19
Columna Tipo II	Acero Inox.	0.22-0.23

Tabla 4: Masa de las columnas.

Masa adicional		
Nivel	Material	Masa (kg)
Nivel+75	Lingotes de Acero	5.16
Nivel+150	Lingote de Acero	3.15

Tabla 5: Masa adicional lingotes de acero

En la Figura 13 se presenta a detalle las características de los componentes del modelo.

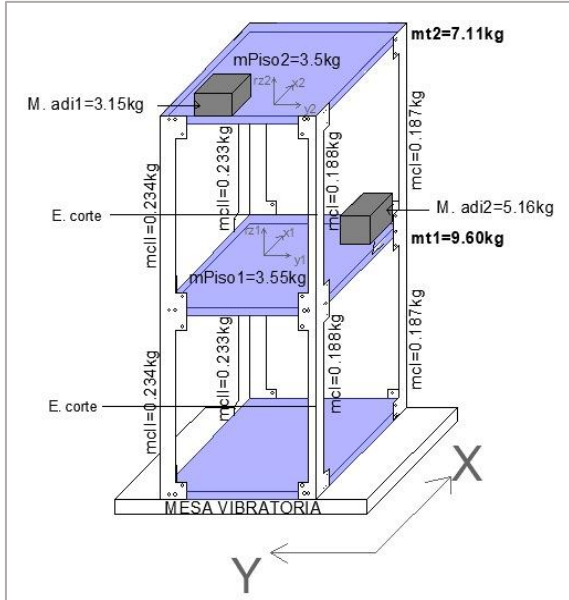


Figura 13: Características de los componentes del modelo.

En la Figura 14, se presenta la vista frontal y lateral del modelo experimental.

Con las características mencionadas en las tablas anteriores se presenta en la Figura 15 una fotografía del modelo construido.

3. Resultados y Discusión

En este capítulo se detallan los cálculos realizados como: frecuencia, amortiguamiento, aceleraciones absolutas de los modelos experimentales y la comparación con los resultados obtenidos a través de la programación en MatLab.

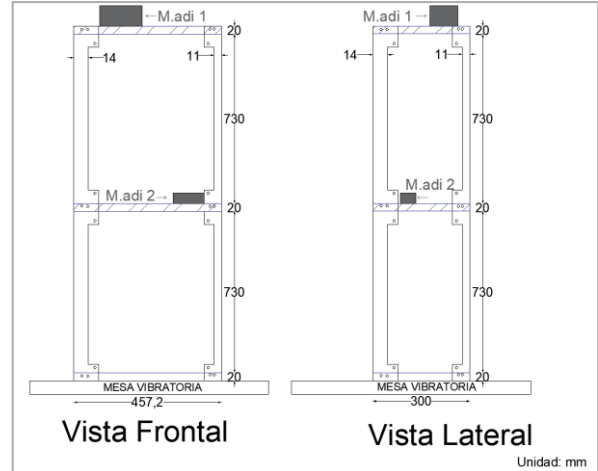


Figura 14: Vista Frontal y Lateral del modelo experimental, (dimensiones en mm).

3.1. Experimento 1. Obtención de frecuencias y factores de amortiguamiento para el modelo experimental

Para poder obtener la respuesta de frecuencia y amortiguamiento de manera experimental se utilizó el equipo de la Mesa Vibratoria Shake Table II, en el que se llevó a cabo ensayos de barrido de frecuencias (sweep).

Una vez obtenido el registro del barrido de frecuencias se realizó la filtración y corrección por línea base, a través del programa ABsignal [15]. A partir del registro corregido se emplea la Transformada de Fourier y de esta manera generar las gráficas de transmisibilidad vs frecuencia, como se muestra en las Figuras 16 a la 23 donde cada pico de frecuencia corresponde al valor de la frecuencia real de cada modo, adicionalmente se puede tener el factor de amortiguamiento aplicación lo detallado en el capítulo 2.3.



Figura 15: Modelo construido.

El error porcentual que se obtiene al comparar la frecuencia calculada con la experimental se puede observar en la Tabla 6, además de los amortiguamientos calculados con el Método del Ancho de Banda. El sexto modo de vibración no es detectable con base a una excitación armónica en vista que supera la capacidad de la mesa. (10 Hz).

Las gráficas 16-23, demuestran los valores de frecuencia obtenidos en cada piso y en cada dirección (traslación x, y y la rotación torsional rz).

Frecuencia y Ancho de Banda, Piso 1-x-Nodo A

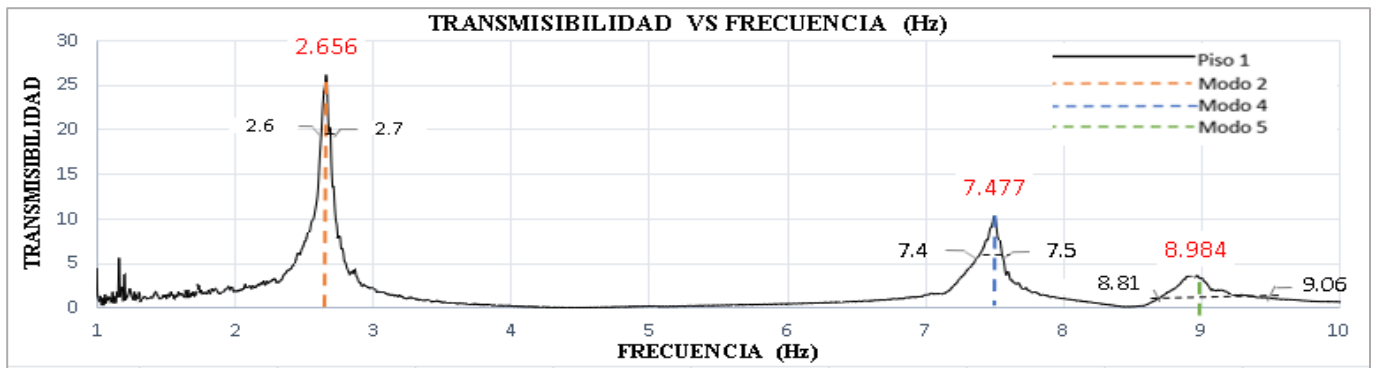


Figura 16: Transmisibilidad para la aceleración en dirección x del nodo A en el piso 1

Frecuencia y Ancho de Banda, Piso 2-x-Nodo A

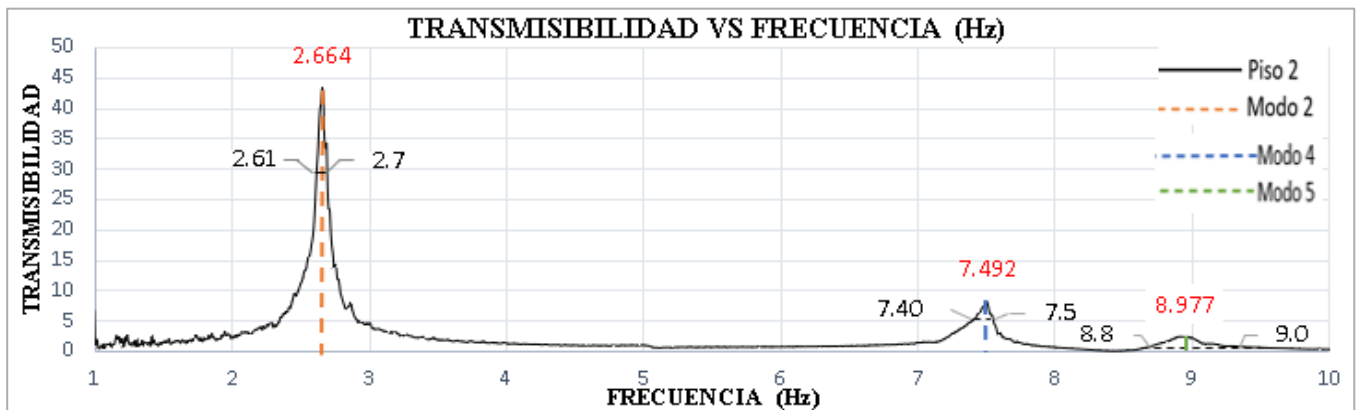


Figura 17: Transmisibilidad para la aceleración en dirección x del nodo A en el piso 2

Frecuencia y Ancho de Banda, Piso 1-y-Nodo A

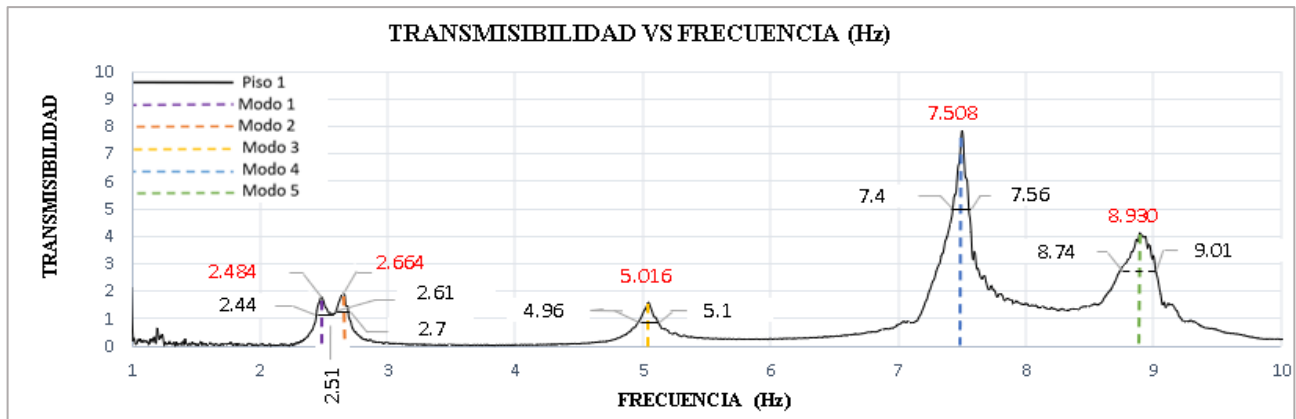


Figura 18: Transmisibilidad para la aceleración en dirección y del nodo A en el piso 1

Frecuencia y Ancho de Banda, Piso 1-x-Nodo B

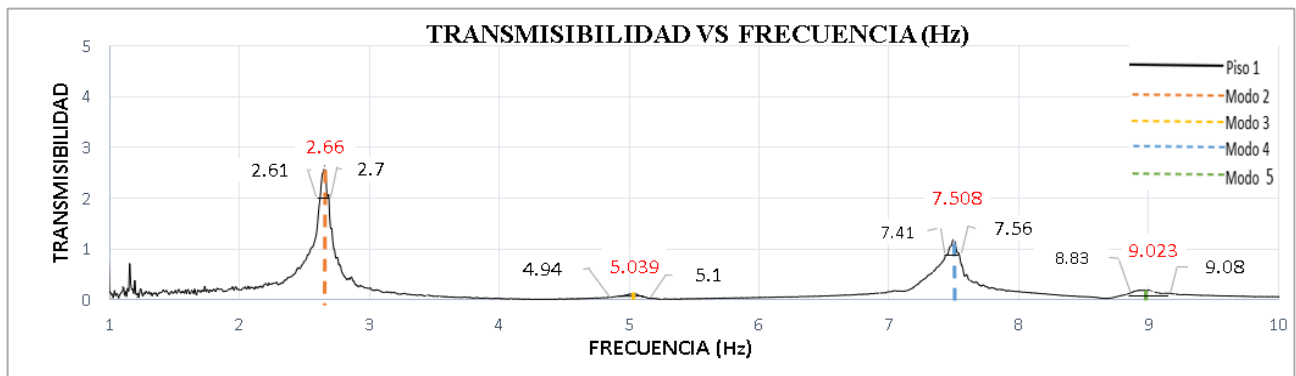


Figura 19: Transmisibilidad para la aceleración en dirección x del nodo B en el piso 1

Frecuencia y Ancho de Banda, Piso 2-x-Nodo B

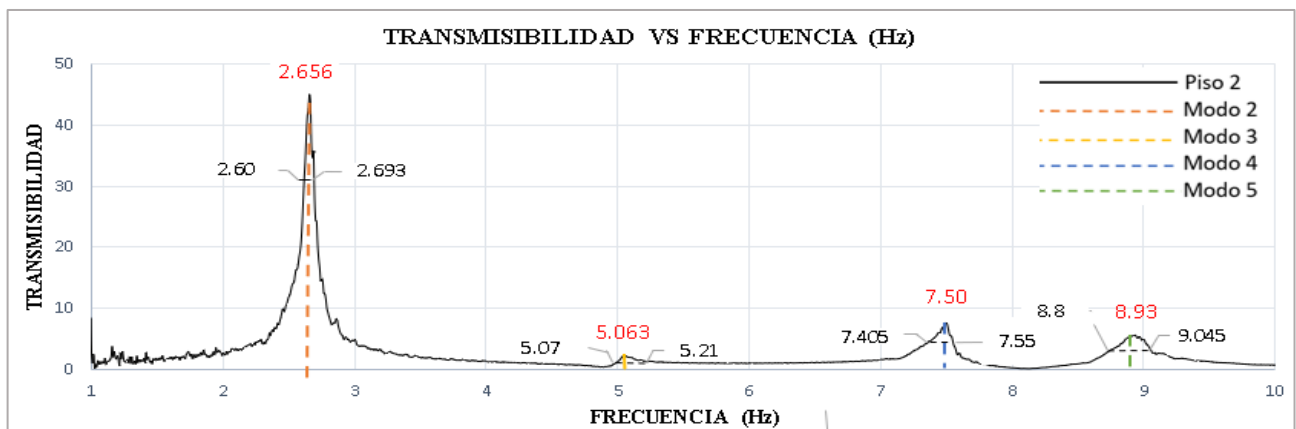


Figura 20: Transmisibilidad para la aceleración en dirección x del nodo B en el piso 2

Frecuencia y Ancho de Banda, Piso 2-y-Nodo A

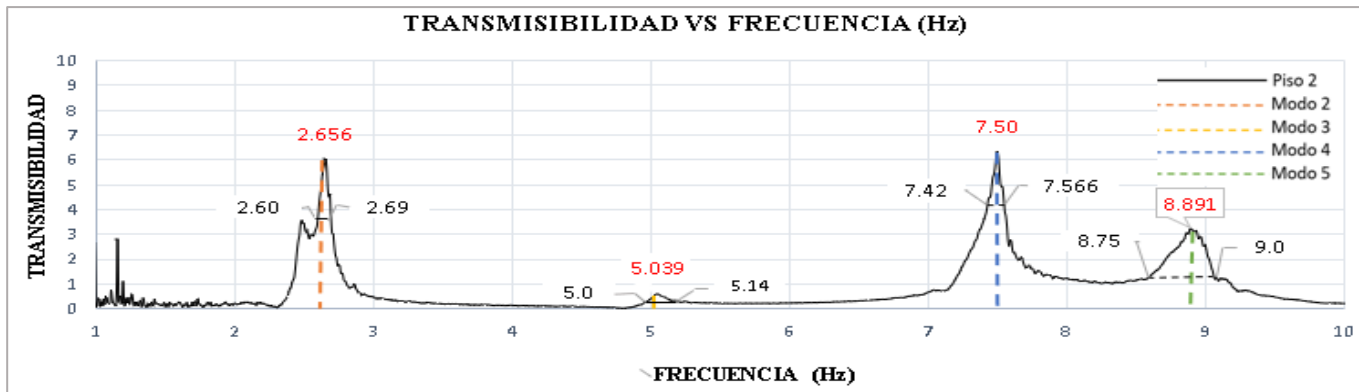


Figura 21: Transmisibilidad para la aceleración en dirección y del nodo A en el piso 2

Frecuencia y Ancho de Banda, Piso 1-y-Nodo B

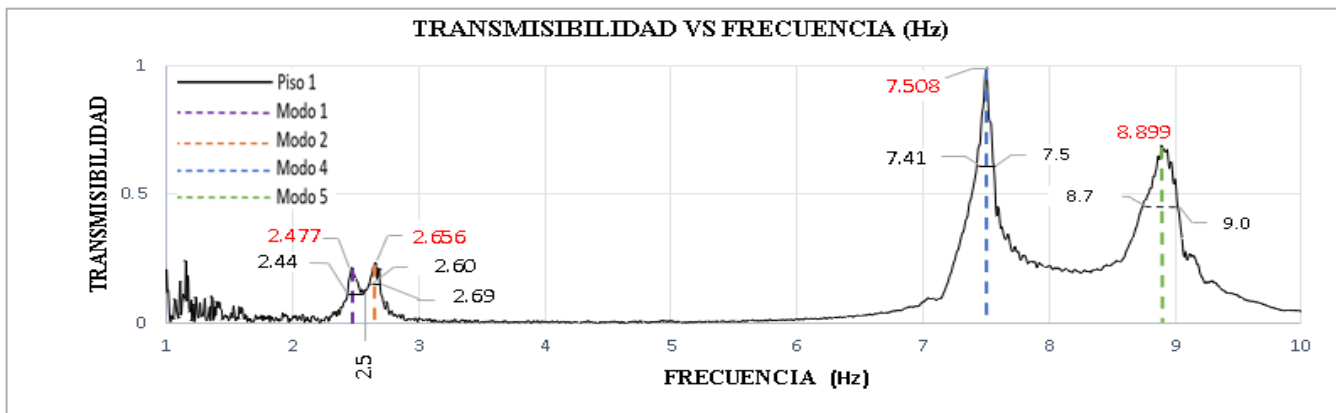


Figura 22: Transmisibilidad para la aceleración en dirección y del nodo B en el piso 1

Frecuencia y Ancho de Banda, Piso 2-y-Nodo B

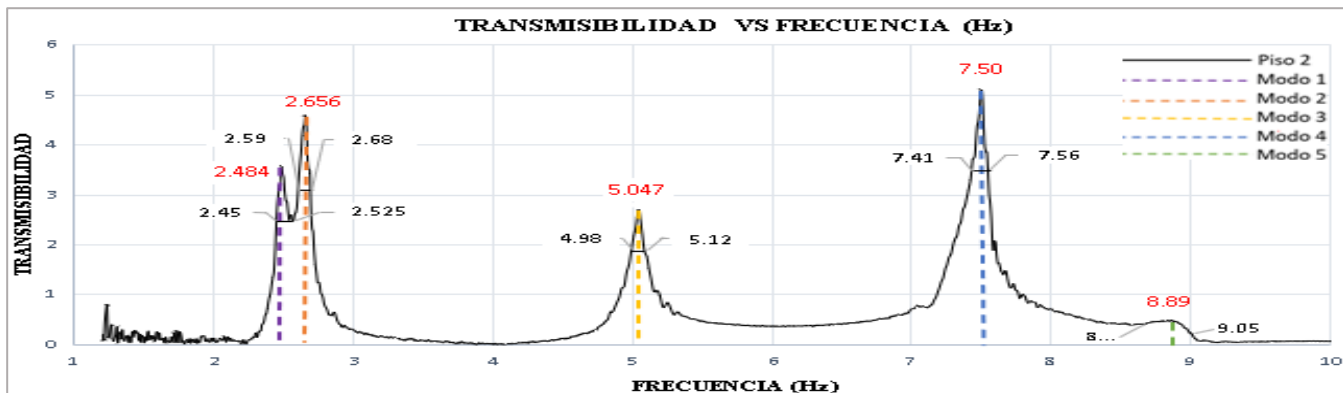


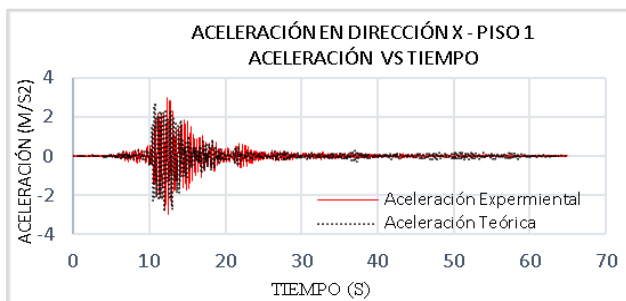
Figura 23: Transmisibilidad para la aceleración en dirección y del nodo B en el piso 2

Tabla 6: Resultados de frecuencia y valores de amortiguamiento del modelo

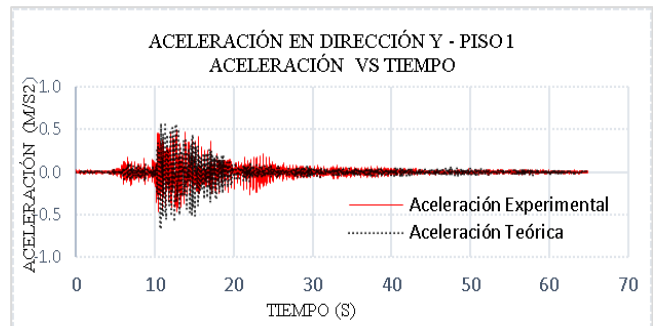
Modo	Descripción del Modo	Modelo Teórico	Modelo Experimental	Amortiguamiento		% de Masa Modal Efectiva
		F (Hz)	F (Hz)	% error	ξ (%)	%
1	Traslación en y	2.66	2.48	7.3	1.51	0.5
2	Traslación en x	2.95	2.66	10.9	1.69	95.0
3	Torsión	4.53	5.05	10.2	1.39	0.6
4	Traslación x	7.2	7.5	4	1	3.0
5	Traslación en y	8.48	8.98	5.6	1.39	0.9

3.2. Experimento 2. Evaluación de la respuesta del modelo frente a un registro sísmico

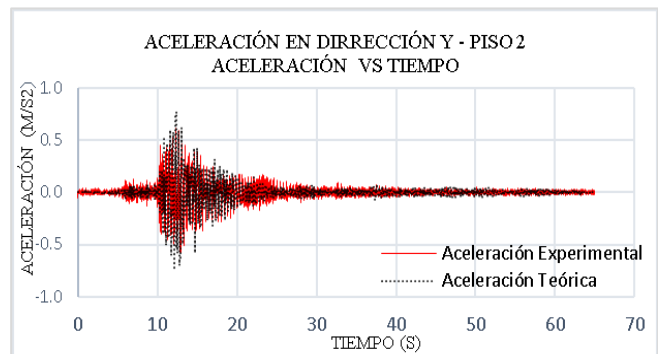
La respuesta dinámica de manera experimental, consistió en someter al modelo estructural a registros sísmicos, el registro sísmico que se utilizó corresponde a un generado por el Sismo de Manabí del 2016, y su escalamiento mediante la Shake Table II, fue a un factor de escala de 0.5 cm en desplazamiento máximo. Los resultados que se presentan en la Figura (24) son de aceleraciones absolutas en el centro de masa.



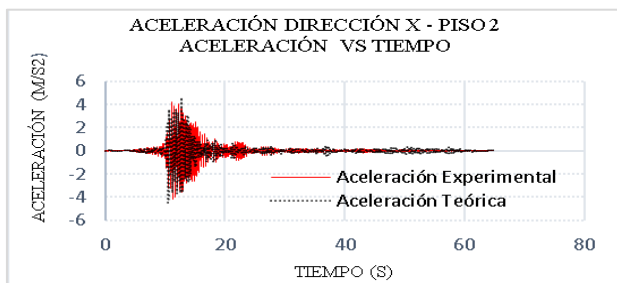
(a)



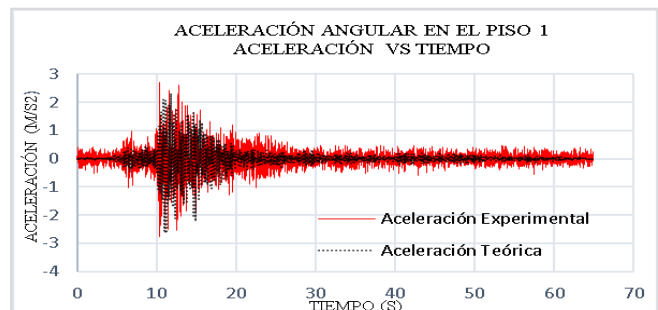
(b)



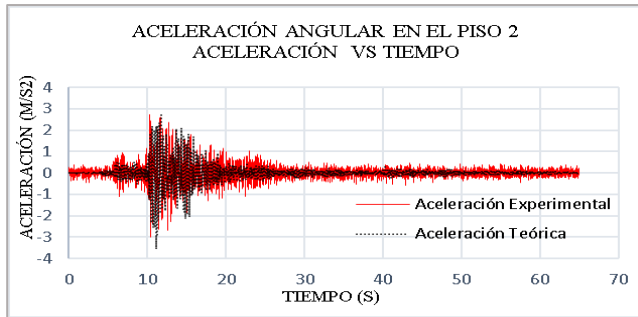
(c)



(b)



(d)



(e)

Figura 24: Comparación entre aceleraciones experimentales y analíticas en el centro de masa. a) Aceleración en dirección x piso 1. b) Aceleración en dirección x piso 2. c) Aceleración en dirección y piso 1 d) Aceleración en dirección y piso 2. e) Aceleración angular piso 1. f) Aceleración angular piso 2.

A manera de resumen se presentan en la Tabla 7, los valores de aceleraciones máximas del modelo.

Aceleraciones Máximas del Modelo			
Descripción	Acel. Experimental (m/s ²)	Acel. Teórica (m/s ²)	% Error
A. dirección x - piso 1	3.00	2.71	9.7
A. dirección y - piso 1	0.50	0.58	16.0
A. angular rz - piso 1	2.72	2.32	14.6
A. dirección x - piso 2	4.23	4.57	7.9
A. dirección y- piso 2	0.61	0.77	25.3
A. angular rz - piso 1	2.73	2.71	0.7

Tabla 7: Aceleraciones Máximas del Modelo

Al comparar de manera gráfica el modelo, se observa que la aceleración experimental obtenida en la mesa y vibratoria con base en los acelerómetros es similar a la aceleración teórica en magnitud y forma.

4. Conclusiones

Los resultados obtenidos de la respuesta dinámica del modelo físico experimental de dos niveles construidos en acero inoxidable con pisos de acrílico, resultan ser similares a los resultados experimentales obtenidos con el modelo analítico, lo que permite validar la adopción de la metodología aplicada, esto implica que los equipos arrojan resultados coherentes y confiables versus los resultados obtenidos respecto a la respuesta dinámica de la estructura analizada.

El factor de amortiguamiento, obtenido mediante el método de ancho de banda es coherente en cuanto a los valores obtenidos para cada modo, ya que al ser utilizados en la modelación teórica la respuesta analítica es similar a la respuesta experimental.

La modelación experimental permite verificar el comportamiento a torsión de este modelo físico tridimensional a través de ensayos de frecuencias sinusoidales y registros sísmicos escalados, y con la posibilidad de cambiar la ubicación de las masas a cualquier punto donde se necesite. Lo cual se puede verificar con base en los porcentajes de masa modal efectiva de la Tabla 6.

Para obtener resultados de aceleración en el sentido x, y, aceleración relativa de rotación rz se debe colocar al menos 2 acelerómetros en cada planta de este puede ser obtenida en el centro de masa y a su vez comparar estos resultados con la respuesta de aceleración teórica.

Referencias

- [1] INEC, «Reconstruyendo las cifras luego del sismo memorias,» *Evaluación de los Costos de Reconstrucción*, Abril 2016.
- [2] D. T. J. C. Rodríguez, «Sismos ciencia y comunidad en la gestión de riesgos naturales una responsabilidad compartida.,» *Fortalecimiento de la capacidad de gestión para la reducción de riesgo sísmico en la provincia Santiago de Cuba.*, p. 6, 2013.
- [3] . Á. D. Henao, J. Botero Palacio y D. Muriá Vila, «Identificación de Propiedades Dinámicas de un Modelo Estructural sometido a Vibración Ambiental y Vibración Forzada empleando Mesa Vibradora,» *Ingeniería Sísmica*, vol. 91, pp. 54-73, 2014.

- [4] A. Tapia Andrade y W. Torres Berni, «Construcción y Evaluación de las Propiedades Dinámicas de un Modelo Experimental Aporticado Plano de Múltiples Grados de Libertad para la Mesa Vibratoria de la Universidad Politécnica Salesiana,» *Ingenius*, vol. 26, p. 49, 2021.
- [5] Q. I. EDUCATE, «Quanser Shake Table II,» 2021. [En línea]. Available: <https://www.quanser.com/products/shake-table-ii/#overview>.
- [6] D. Gutiérrez Calzada, «Sistema de múltiples grados de libertad, Análisis modal espectral,» *Universidad Autónoma del Estado de México*.
- [7] A. Chopra K., «Dinámica de Estructuras,» *Pearson Educación*, vol. 8, pp. 354-357, 383-384, 404-410, 2014.
- [8] F. H. P. B Rubén Boroschek K, «CORRECCIÓN DE SOBRESTIMACIÓN DEL AMORTIGUAMIENTO EN EL ANCHO DE BANDA DEL ESPECTRO DE POTENCIA,» *ongreso Chileno De Sismologia E Ingenieria Antisísmica*, pp. 2-4, 2010.
- [9] A. F. Roberto, Análisis Sísmico de Edificios, Sangolqui-Ecuador: Centro de Investigaciones Científicas, Escuela Politécnica del Ejército, 2008.
- [10] R. Aguiar, «Dinámica de estructuras con Matlab,» pp. 1-2, 2006.
- [11] A. Chopra, «Dynamics of Structures. Theory and Applications to Earthquake Engineering,» Third ed., New Jersey, 2007.
- [12] L. García, Dinámica Estructural aplicada al diseño sísmico, Bogota: Universidad de los Andes, 1998, p. 389.
- [13] R. C. Hibbeler, «Ingeniería Mecánica - Dinámica,» 12th ed., Monterrey, Campus Estado de México: Prentice Hall , 2010, pp. 87-89.
- [14] Matlab, *Software matemático, Desarrollado por MathWorks.*, 2020.
- [15] B. E. A. Vargas, «Desarrollo del software de procesamiento, corrección y generación de espectros de respuesta de registros sísmicos AB signal,» Tesis pregado, Facultad de Ingeniería Civil, Universidad Politécnica Salesiana, Ecuador-Quito, 2020.
- [16] DataLights, «Soluciones de Control e Iluminación, National Instruments,» Copyright© 1990-2021 DataLights, [En línea]. Available: <https://www.datalights.com.ec/medcon/mercados/servicios-regulacion-id/>.