Javier González Hernández

Jorge Lara Prado

ECUACIONES DIFERENCIALES

Aplicaciones y modelado de Biomatemática con Matlab y Simulink

Universidad Politécnica Salesiana

Carrera de Biotecnología

Ecuaciones diferenciales. Aplicaciones y modelado de Biomatemática con Matlab y Simulink es el primer libro de una serie diseñada que tiene como propósito fundamental enseñar a jóvenes de los primeros ciclos universitarios la estrecha relación e interacción entre las ciencias naturales y biológicas, por un lado, y las matemáticas, por el otro.

La interacción entre las Matemáticas y la Biología se modela con ecuaciones diferenciales cuyas soluciones se han implementado usando el software Matlab y Simulink para simular el comportamiento extraño de los modelos matemáticos y presentar las soluciones gráficas.

El libro contiene más de 120 ejercicios con sus respectivas soluciones teóricas y representaciones gráficas. Estos ejemplos prácticos se encuentran en áreas como Ciencias Naturales, Ingeniería y Biología, seleccionados por su relevancia en el aprendizaje de ecuaciones diferenciales, basándonos en la experiencia con estudiantes. Una herramienta útil también para el docente, tanto para la preparación como el desarrollo de clases.

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA SALESIANA ECUADOR
30 AÑOS TRANSFORMANDO VIDAS
ABYA YALA | UPS
ECUADOR SALESIANOS DON BOSCO

ISBN 978-9978-10-869-7
9 789978 108697

Javier González Hernández / Jorge Lara Prado

Ecuaciones diferenciales

Aplicaciones y modelado de Biomatemática con Matlab y Simulink

ABYA YALA | UPS

2023

Ecuaciones diferenciales
Aplicaciones y modelado de Biomatemática con Matlab y Simulink

1ra. edición:	© Universidad Politécnica Salesiana Av. Turuhuayco 3-69 y Calle Vieja Cuenca-Ecuador P.B.X. (+593 7) 2050000 e-mail: publicaciones@ups.edu.ec www.ups.edu.ec
	CARRERA DE BIOTECNOLOGÍA
Foto de portada:	Shutterstock
ISBN UPS:	978-9978-10-869-7
ISBN Digital:	978-9978-10-870-3
Diseño, diagramación e impresión:	Editorial Universitaria Abya-Yala Quito-Ecuador
Tiraje:	300 ejemplares
DOI:	https://doi.org/10.17163/abyaups.35

Impreso en Quito-Ecuador, noviembre de 2023

Publicación arbitrada de la Universidad Politécnica Salesiana

Índice general

Prefacio

La presente publicación tiene como objetivo introducir el estudio de Ecuaciones Diferenciales con énfasis en modelado de aplicaciones de Biomatemática. Es así que se da especial importancia al modelado de ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones a las ciencias naturales. Se hace énfasis también en el método del operador inverso para la resolución de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas. Por otra parte, dada la importancia del manejo de las TIC en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales, se ha incluido un diagrama de bloques desarrollados en Simulink que permiten simular el comportamiento de las soluciones del modelo matemático, así como los códigos para la resolución de ecuaciones diferenciales en Matlab y el uso de diagramadores como Winplot y dfield que permiten graficar los campos direccionales y curvas integrales de las ecuaciones diferenciales.

El objetivo principal de este texto es dotar de una guía didáctica a los estudiantes de las universidades ecuatorianas, guía que les ofrezca una introducción a la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias acompañada con la simulación del modelo matemático; explicar cómo, y el por qué del comportamiento de las soluciones de las ecuaciones diferenciales ayudado con el cómputo científico.

La mayoría de los ejemplos del texto presentan la solución teórica junto con el diagrama de bloques de Simulink que permiten ilustrar gráficamente las simulaciones. Además contiene códigos en MATLAB que permiten encontrar las soluciones exactas de las ecuaciones diferenciales, con modelos matemáticos que abarcan desde aplicaciones elementales a problemas de aplicación de diversas áreas de la ingeniería y las ciencias sociales; ejemplos que demuestran cómo las ecuaciones diferenciales son aplicadas en la vida real, situación que siempre se lamentan los estudiantes: en la vida profesional, ¿pará que sirven las ecuaciones diferenciales?

Esperamos mejorar paulatinamente esta publicación a partir de las experiencias adquiridas en el aula y de las valiosas aportaciones o sugerencias de los lectores para mejorar futuras ediciones del libro. Agradeceremos sus comentarios. Valoramos enormemente sus comentarios; les invitamos a enviarlos a las siguientes direcciones de correo electrónico: ggonzalez@ups.edu.ec, y gjgonzalez@uce.edu.ec.

Agradecimiento

A Dios, por todas las bendiciones diarias que llegan a mi vida.

A la Carrera de Biotecnología, en especial a la Dra. María Elena Maldonado por su gestión y apoyo inicial para la publicación de este libro.

Al Dr. Guillermo Albuja y al Magister Carlos Izurieta por sus valiosos aportes y sugerencias.

Dedicatoria

A Yarita, porque solo en las misteriosas ecuaciones del amor se puede encontrar la lógica o razón. Tú eres el infinito que me ayuda a crecer día a día, todos mis logros son tuyos.

A Jeremy, Joel y Yerlis. Mis dos hijos preciosos y mi princesa bonita, tres bendiciones que Dios me regaló.

A Gabriela, hermana sé que en la eternidad celebras mis logros.

A mis padres, por el ejemplo de constancia y perseverancia.

A mis demás familiares, que mi logro de publicar este libro, sea un ejemplo para que luchen por sus sueños.

Introducción

Este texto es un referente básico sobre los métodos de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias en el programa curricular semestral en las carreras de Ciencias e Ingeniería. En el libro de Jorge Lara se cubre los contenidos necesarios y es de gran importancia que los estudiantes complementen con los elementos que se presentan en esta obra.

Se utiliza MATLAB porque está especialmente orientado a la computación científica y es actualmente el software más utilizado por estudiantes y profesores universitarios. El texto introduce este lenguaje de programación mediante comandos que resuelven exactamente las ecuaciones diferenciales e incluye los diagramas de bloques de Simulink que permiten simular los modelos matemáticos, así como el funcionamiento de la función dfield8 que permite trazar campos direccionales. Estos diagramas y funciones están a disposición de los estudiantes en el CD que acompaña a este libro. En el futuro, estas funciones se incorporarán a un único núcleo mediante la interfaz gráfica de usuario GUI.

En el texto, al final de cada sección se proponen unas prácticas de laboratorio en MATLAB para realizar a lo largo de la asignatura. El orden de entrega de los contenidos en este texto se basa en el mismo orden de los textos clásicos, tratando de equilibrar los contenidos teóricos y las prácticas de simulación en MATLAB y Simulink.

Para el buen seguimiento del libro, se recomienda al lector revisar la teoría elemental sobre Ecuaciones Diferenciales Ordinarias en el libro de Jorge Lara.

El capítulo 1 contiene un breve repaso sobre generalidades acerca de las ecuaciones diferenciales, problemas de valores iniciales y problemas de valor en la frontera, solución de una ecuación diferencial (Soluciones particular y solución singular), ecuaciones diferenciales autónomas, teorema de existencia y unicidad. Se presenta una serie de ejercicios de ecuaciones diferenciales a variables separables, ecuaciones diferenciales homogeneas, ecuaciones diferenciales exactas y factores integrantes.

El capítulo 2 hace referencia a la modelización con ecuaciones diferenciales de primer orden, se estudian los siguientes modelos: temperatura de un cuerpo (Ley de enfriamiento de Newton), modelo de Malthus, modelo logístico, decaimiento radioactivo, mezclas de soluciones en tanques, movimiento de un cuerpo y las trayectorias ortogonales.

El capítulo 3 da una breve introducción de las ecuaciones diferenciales lineales de orden n, se pone especial interés en las aplicaciones de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden como son las: vibraciones mecánicas, Movimiento armónico simple, vibraciones amortiguadas libres, movimiento sobreamortiguado, problemas de valor en la frontera y sus aplicaciones a la deflexión de vigas, problemas de valor límite y aplicaciones de valores propios y autofunciones propias.

En el capítulo 4 describiremos los métodos operacionales, las aplicaciones del operador diferencial D y su operador inverso, se menciona la generalización a otras ecuaciones y se muestra la gran ventaja que tiene contra otros métodos de resolución como es el método del anulador y el de variación de parámetros.

Finalmente en el capítulo 5 tratamos aplicaciones de los sistemas bidimensionales y las simulaciones de sistemas de ecuaciones diferenciales entre las cuales está el sistema depredador presa, aplicaciones a sustancias radioactivas y aplicaciones biológicas en sistemas ecomarinos.

Capítulo 1

Ecuaciones diferenciales

1.1. Generalidades acerca de las ecuaciones diferenciales

Sea $y = f(x)$ una función real definida en un intervalo abierto I. Supongamos que f es derivable hasta el orden n al menos y que, en todo punto x de I, existe entre y y sus n primeras derivadas una relación de la forma

$$\Phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0. \tag{1.1}$$

La ecuación (1.1) en la cual la función $y = f(x)$ es considerada como la incógnita, es llamada *ecuación diferencial ordinaria de orden n*. Claro está que, la misma expresión se aplica a toda ecuación que puede reducirse a dicha forma.

Un caso particular importante es aquel en el cual la ecuación diferencial se escribe como

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \Psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right), \tag{1.2}$$

la cual se dice que está dada en *forma normal*.

Las siguientes ecuaciones son algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias que estudiaremos más adelante.

1. $m\dfrac{d^2x}{dt^2} + kx = F(t)$, es la ecuación diferencial que gobierna el movimiento de una masa m que está sujeta a un muelle helicoidal que suministra una fuerza de recuperación proporcional al desplazamiento x, con constante de proporcionalidad k.

2. $L\dfrac{d^2i}{dt^2} + \dfrac{1}{C}i = \dfrac{dE}{dt}$, ecuación diferencial que gobierna la corriente $i\,(t)$ en un circuito eléctrico compuesto por un inductor con inductancia L, un capacitor con capacitancia C y una fuente de voltaje $E\,(t)$, donde t es el tiempo.

3. $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{g}{L}\operatorname{sen}\theta = 0$, ecuación diferencial que gobierna el movimiento angular $\theta\,(t)$ de un péndulo de longitud L bajo la acción de la gravedad, donde g es la aceleración de la gravedad y t es el tiempo.

4. $\dfrac{dx}{dt} = cx$, ecuación diferencial que gobierna la población $x(t)$ de una sola especie, donde t es el tiempo y c es una tasa constante neta de natalidad / mortalidad.

5. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = C\sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$, ecuación diferencial que gobierna la forma de un cable o cuerda flexible, colgando bajo la acción de la gravedad, donde $y(x)$ es la deflexión y C es una constante que depende de la densidad de masa del cable y la tensión en el punto medio $x = 0$.

6. $EI\dfrac{d^4y}{dx^4} = -\omega\,(x)$, ecuación diferencial que gobierna la deflexión $y(x)$ de una viga sometida a una carga $\omega\,(x)$, donde E e I son constantes físicas del material de la viga y de la sección transversal, respectivamente.

Observación 1.1 *La ecuación diferencial (1.1), recibe el calificativo de ordinaria para indicar que la función incógnita es función de una sola variable. Si la función incógnita es función de varias variables, la ecuación diferencial se denomina en derivadas parciales.*

Algunas ecuaciones diferenciales parciales representativas e importantes son las siguientes:

1. $\alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, es la ecuación del calor, que rige la variación de la distribución de la temperatura en función del tiempo $u(x,t)$ en una varilla o placa de una dimensión; x localiza el punto bajo consideración dentro del material, t es el tiempo y α^2 es una propiedad del material llamada difusividad.

2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$, es la ecuación de Laplace, que gobierna la distribución de la temperatura de estado estacionario $u(x,y,z)$ dentro de un cuerpo tridimensional; x, y, z son las coordenadas del punto dentro del material.

3. $c^2 \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, es la ecuación de onda, que gobierna la deflección $u\,(x,y,z)$ de una membrana vibrante tal como una membrana de tambor.

4. $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0$, es la ecuación biharmónica, que gobierna la función de corriente $u(x,y)$ en el caso de un movimiento lento (de arrastre) de un fluido viscoso tal como una película de pintura húmeda.

5. $\dfrac{\partial v}{\partial s} + \dfrac{\partial v}{\partial t} = v$

6. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y}$

7. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

1.1.1. Problemas de valores iniciales y problemas de valor en la frontera

Además de satisfacer la ecuación diferencial, la función desconocida se somete a menudo a condiciones en uno o más puntos del intervalo considerado. Las condiciones especificadas en un punto único (a menudo el punto extremo izquierdo del intervalo), se llaman condiciones iniciales, y la ecuación diferencial junto con esas condiciones iniciales se llama un **problema de valor inicial**. Las condiciones especificadas en ambos extremos se denominan condiciones de contorno o de frontera, y las ecuaciones diferenciales junto con las condiciones de contorno se llaman problemas de valor límite. Para los problemas de valores iniciales, la variable independiente suele ser el tiempo, aunque no necesariamente, y para los problemas de valores límite la variable independiente suele ser una variable espacial.

Ejemplo 1.1 *Movimiento en línea recta de una masa. Consideremos el problema de predecir el movimiento en línea recta de un cuerpo de masa m sometido a una fuerza $F(t)$. De acuerdo con la segunda ley de movimiento de Newton, la ecuación diferencial que gobierna el desplazamiento $x(t)$ es $m\ x'' = F(t)$. Además de la ecuación diferencial, supongamos que queremos imponer las condiciones $x(0) = 0$ y $x'(0) = v_0$; es decir, el desplazamiento y la velocidad inicial son 0 y v_0, respectivamente. Entonces la formulación completa del problema es el problema de valor inicial*

$$\begin{cases} m\ x''(t) = F(t), & 0 \le t \le +\infty \\ x(0) = 0, & x'(0) = v_0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Esto es, $x(t)$ debe satisfacer la ecuación diferencial $m\ x''(t) = F(t)$, en el intervalo $0 \le t \le +\infty$ y las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $x'(0) = v_0$.

Ejemplo 1.2 *Deflexión de una viga en voladizo cargada. Consideremos la deflexión $y(x)$ de una viga en voladizo de longitud L, bajo una carga $\omega(x)\ \frac{N}{m^2}$. Usando la llamada teoría de la viga de Euler, se encuentra que el problema gobernante es el siguiente:*

$$\begin{cases} EI\ y''' = -\omega(x), & 0 \leq x \leq L \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(L) = 0, \quad y'''(L) = 0, \end{cases} \tag{1.4}$$

donde E e I son constantes físicas conocidas.

Las condiciones adjuntas son condiciones de contorno porque algunas se especifican en un extremo, y otras en el otro extremo, y (1.4) es por lo tanto un problema de valor límite. La significación física de las condiciones de contorno es la siguiente: $y(0) = 0$ es verdadera simplemente en virtud de nuestra ubicación elegida del origen del sistema de coordenadas x, y; $y'(0) = 0$, ya que la viga está en voladizo fuera de la pared, de modo que su pendiente en $x = 0$ es cero; $y''(L) = 0$ y $y'''(L) = 0$ porque el momento y la fuerza de cizallamiento, respectivamente, son cero al final (extremo) de la viga.

Nota. Una ecuación diferencial es una ecuación que implica derivadas. Al tratar un problema de aplicación, se debe empezar por etiquetar todas las cantidades y dibujar una figura o diagrama. También es necesario identificar las variables dependientes e independientes.

1.1.2. Solución de una ecuación diferencial

Consideraremos por simplicidad la ecuación diferencial de primer orden en su forma normal: $y' = f(x, y)$. Rara vez podemos encontrar su solución en forma explícita, es decir como $y = \varphi(x)$. Diremos que la ecuación $\Phi(x, y) = 0$, define una solución en forma implícita si $\Phi(x, y)$ es una función conocida.

¿Cómo saber que la ecuación $\Phi(x, y) = 0$ define una solución $y = \varphi(x)$ de la ecuación $y' = f(x, y)$? Asumiendo que se cumplen las condiciones del teorema de la función implícita, diferenciamos ambos miembros de la ecuación $\Phi(x, y) = 0$ con respecto a x :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y' = 0. \tag{1.5}$$

De la ecuación $y' = f(x, y)$ obtenemos:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} f(x, y) = 0. \tag{1.6}$$

Por lo tanto, si la función $y = \varphi(x)$ es una solución de $y' = f(x, y)$, entonces la función $\Phi(x, y) = y - \varphi(x)$ debe satisfacer (1.6). En efecto, en este caso, tenemos $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = -\varphi'(x)$ y $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = 1.$

Una ecuación diferencial ordinaria puede ser dada ya sea para un conjunto limitado de valores de la variable independiente o para todos los valores reales. Restricciones, si las hay, pueden ser impuestas de manera arbitraria o debido a las limitaciones relativas a la ecuación. Tales restricciones pueden ser causadas por condiciones impuestas a la ecuación o por el hecho de que las funciones que participan en la ecuación tienen dominios limitados. Por otra parte, si una ecuación diferencial ordinaria se declaró sin restricciones explícitas a la variable independiente, se supone que todos los valores de la variable independiente están permitidos con excepción de los valores para los que la ecuación no tiene sentido.

Ejemplo 1.3 *La relación*

$$\ln(y) + y^2 - \int_0^x e^{-u^2} du = 0, \ \ con\ y > 0,$$

es considerada una solución en forma implícita de la ecuación diferencial $\left(1 + 2y^2\right) y' - ye^{-x^2} = 0$,o también $y' = \frac{y}{1+2y^2} e^{-x^2}$.

Esto puede ser visto derivando la relación dada implícitamente con respecto a x. Esto conduce a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[\ln y + y^2 - \int_0^x e^{-u^2} du\right] &= 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{y} y' + 2yy' - e^{-x^2} = 0 \Longleftrightarrow \left(\frac{1 + 2y^2}{y}\right) y' = e^{-x^2} \\ &\Longrightarrow \ y' = \frac{y}{1 + 2y^2} e^{-x^2}. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.4 *La función $y(x)$ que está definida implícitamente por la ecuación $x^2 + 2y^2 = 4$ es una solución de la ecuación diferencial $x + 2yy' = 0$ en el intervalo $]-2, 2[$ sujeta a $y(\pm 2) = 0$.*

La relación implícita $x^2 + 2y^2 = 4$ contiene las dos soluciones explícitas

$$y(x) = \sqrt{2 - \frac{1}{2}x^2} \quad y \quad y(x) = -\sqrt{2 - \frac{1}{2}x^2} \text{ para } -2 < x < 2,$$

que corresponden gráficamente a dos semielipses. En efecto, si reescribimos la ecuación diferencial $x + 2yy' = 0$ en la forma normal $y' = -\dfrac{x}{2y}$, entonces deberíamos excluir $y = 0$ de la consideración. Puesto que $x = \pm 2$ corresponde a $y = 0$ en ambas soluciones, debemos excluir estos puntos del dominio de las soluciones explícitas. Note que la ecuación diferencial $x+2yy' = 0$ tiene infinitas soluciones: $x^2+2y^2 = C$, con $|x| \leq C$, donde C es una constante arbitraria positiva.

MATLAB dispone del módulo **Symbolic Math Toolbox,** que permite manejar el cálculo matemático simbólico con mucha facilidad. Por ejemplo, para graficar la función $y(x)$ en el intervalo $[-2, 2]$ use los comandos y la gráfica aparece en la figura 1.1.

```
>> f='(2-0.5*x^2)^0.5'
>> fplot(f,[-2,2])
>> grid on
```

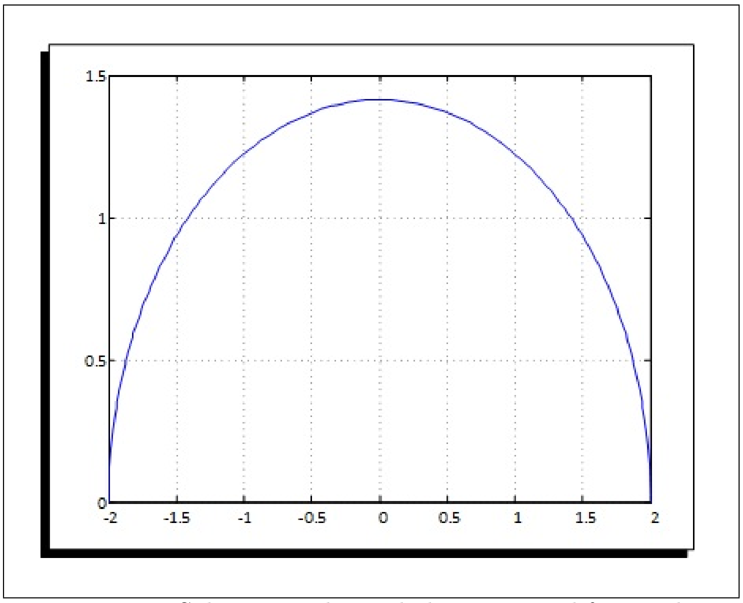

Figura 1.1. Solución explícita de la ecuación diferencial $x + 2yy' = 0$.

A continuación, se observa que una ecuación diferencial puede (y generalmente) tienen un número infinito de soluciones. Un conjunto de soluciones de $y' = f(x, y)$ que depende de una constante arbitraria C merece un nombre especial.

Criterion 1.2 *Una función $y = \varphi(x, C)$ es llamada la solución general de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ en algún dominio bidimensional Ω si para todo punto $(x, y) \in \Omega$ existe un valor de la constante C tal que la función $y = \varphi(x, C)$ satisface la ecuación $y' = f(x, y)$. Una solución de esta ecuación diferencial puede ser definida implícitamente:*

$$\Phi(x, y, C) = 0 \text{ o también } \psi(x, y) = C.$$

En este caso, $\Phi(x, y, C)$ es llamada la integral general, y $\psi(x, y)$ es referida como la función potencial de la ecuación dada $y' = f(x, y)$. A la constante C se puede dar cualquier valor en un intervalo adecuado. Puesto que C puede variar de un problema a otro, a menudo se llama un parámetro para distinguirla de las principales variables x e y. Por lo tanto, la ecuación $\Phi(x, y, C) = 0$ define una familia uniparamétrica de curvas sin intersecciones. Gráficamente, ella representa una familia de curvas solución en el plano xy, cada elemento de los cuales está asociado con un valor particular de C. La solución general corresponde a toda la familia de curvas que la ecuación define.

Como era de esperar, la afirmación inversa es verdadera: las curvas de una familia uniparamétrica son las integrales de alguna ecuación diferencial de primer orden. Antes bien, sea la familia de curvas define por la ecuación $\Phi(x, y, C) = 0$, con una función suave Φ. Diferenciando con respecto a x conduce a una relación de la forma $F(x.y.y', C) = 0$. Eliminando C de estas dos ecuaciones, obtenemos la correspondiente ecuación diferencial.

Ejemplo 1.5 *Consideremos la familia uniparamétrica de curvas $x^2 + y^2 + Cy = 0$ o también $C = -\dfrac{x^2+y^2}{y}$ (con $y \neq 0$).*

Diferenciando, tenemos $2x + 2yy' + Cy' = 0$. Remplazando $C = -\dfrac{x^2+y^2}{y}$ en la última ecuación, obtenemos la ecuación diferencial

$$2x + 2yy' - y'\left(\frac{x^2+y^2}{y}\right) = 0 \quad \textit{o también } y' = \frac{2xy}{x^2-y^2}.$$

Para graficar la familia uniparamétrica de curvas, se lo puede hacer con el simple comando **ezplot** de la siguiente forma:

```
>> syms x y
>> for C = -5:5
>>  f=x^2+y^2+C*y;
>>  ezplot(f);
>>  hold on
>> end
```

La grafica de la familia uniparamétrica de curvas la muestra la figura 1.2.

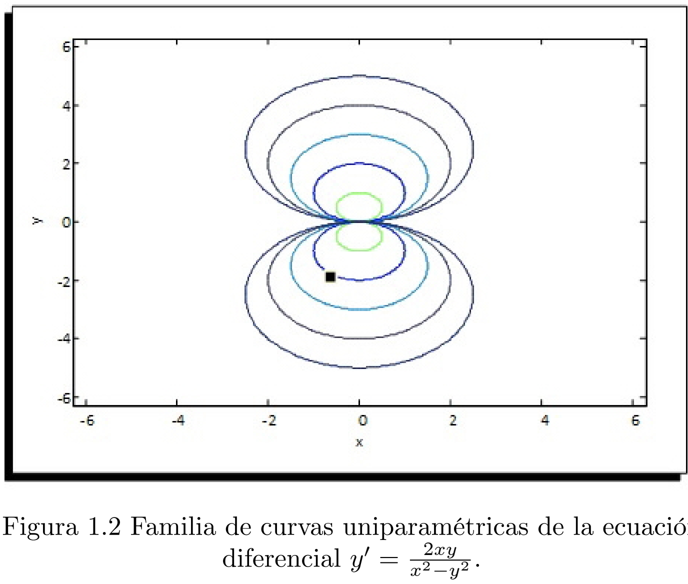

Figura 1.2 Familia de curvas uniparamétricas de la ecuación diferencial $y' = \frac{2xy}{x^2-y^2}$.

Ejemplo 1.6 *Para una constante arbitraria C, mostrar que la función $y = Cx + \dfrac{C}{\sqrt{1+C^2}}$ es la solución de la ecuación diferencial no lineal $y - xy' = \dfrac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}$.*

Tomando la derivada de y *vemos que* $y' = C$. *Sustituyendo* $y = Cx + \frac{C}{\sqrt{1+C^2}}$ *y* $y' = C$ *en la ecuación diferencial se obtiene*

$$Cx + \frac{C}{\sqrt{1+C^2}} - xC = \frac{C}{\sqrt{1+C^2}}.$$

Esta identidad prueba que la función es una solución de la ecuación diferencial dada. Dando a C cualquier valor, por ejemplo $C = 1$, obtenemos la solución particular $y = x + \frac{1}{\sqrt{2}}$.

A veces la integración de $y' = f(x, y)$ conduce a una familia de curvas integrales que dependen de una constante arbitraria C en forma paramétrica, a saber,

$$x = \mu(t, C), \quad y = \upsilon(t, C).$$

Esta familia de curvas integrales es llamada la solución general en forma paramétrica.

Ejemplo 1.7 *Mostrar que la función* $y = \varphi(x)$ *en forma paramétrica,* $y(t) = te^{-t}$, $x(t) = e^t$, *es una solución de la ecuación diferencial* $x^2 y' = 1 - xy$.

Solución. Las derivadas de x *y* y *con respecto a* t *son:*

$$\frac{dx}{dt} = e^t \qquad y \qquad \frac{dy}{dt} = e^{-t}\ (1-t)\,, \text{ respectivamente.}$$

Por tanto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^{-t}\ (1-t)}{e^t} = e^{-2t}\ (1-t) = e^{-2t} - te^{-2t} = \frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} = \frac{1-xy}{x^2},$$

puesto que $x^{-2} = e^{-2t}$ *y* $\frac{y}{x} = te^{-2t}$. *A continuación se muestra una solución de la ecuación diferencial* $x^2 y' = 1 - xy$.

Los siguientes comandos grafican la solución en el intervalo $[0, 2]$ y se muestra en la figura 1.3.

```
>> t = linspace(0,1,20);
>> x = t.*exp(-t);
>> y = t.*exp(t);
>> plot(x,y);
```

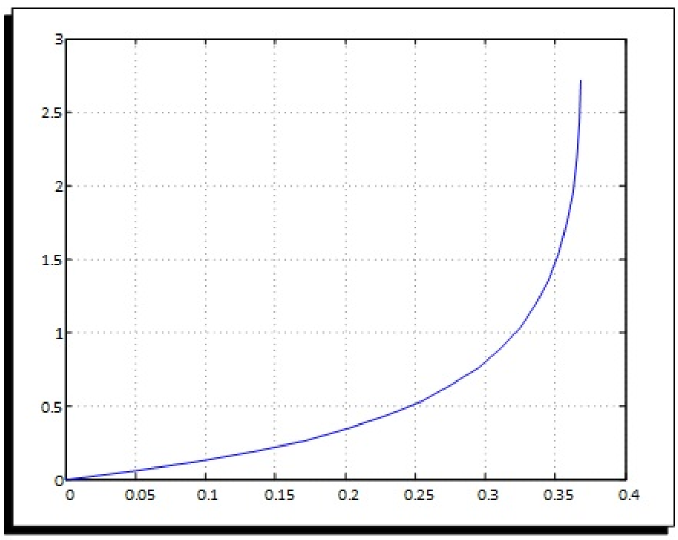

Figura 1.3 Gráfica de la solución paramétrica $y(t) = te^{-t}$,
$x(t) = e^t$.

En muchos casos, es más conveniente buscar una solución en forma paramétrica, especialmente cuando la función pendiente es una razón de dos funciones: $y' = \dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$. Entonces, introduciendo una nueva variable independiente t, podemos reescribir la ecuación simple como un sistema de dos ecuaciones:

$$\frac{dx}{dt} = Q(x,y), \qquad \frac{dy}{dt} = P(x,y).$$

Observación 1.3 *Encontrar soluciones de ecuaciones diferenciales es una tarea complicada la mayor parte de las veces. Verificar si una función es o no solución es, sin embargo, muy sencillo: basta derivar, sustituir en la ecuación y comprobar si se obtiene una identidad o no para todos los valores posibles de la variable independiente para los que la ecuación tiene sentido. Por ejemplo, considere la ecuación diferencial* $x'' - 2x' + x = 0$.

Comprobar si la función $x(t) = (C_1 + C_2 t)e^t$ es o no solución es muy sencillo. En efecto, calculamos las derivadas presentes en la ecuación $x'(t) = (3+2t)e^t$ y $x''(t) = (5+2t)e^t$, y sustituímos en la ecuación:

$$x''(t) - 2x'(t) + x(t) = (5+2t)e^t - 2(3+2t)e^t + (1+2t)e^t = [(5-6+1) + (2-4+2)t]e^t = 0,$$

para todo t. En consecuencia, la función $x(t) = (1+2t)e^t$ es solución de la ecuación dada.

Matlab permite encontrar las soluciones de una ecuación diferencial con la simple utilización de un comando, por ejemplo para encontrar la solución de la ecuación diferencial $x'' - 2x' + x = 0$ utilice los siguientes comandos:

```
>> dsolve('D2x-2*Dx+x=0')
>> ans =C1*exp(t) + C2*t*exp(t)
```

Con el siguiente código en MATLAB se grafica las curvas integrales de la ecuación diferencial que se muestra en la figura 1.4, esta es una solución explícita de la ecuación y la podemos escribir explícitamente en función de t.

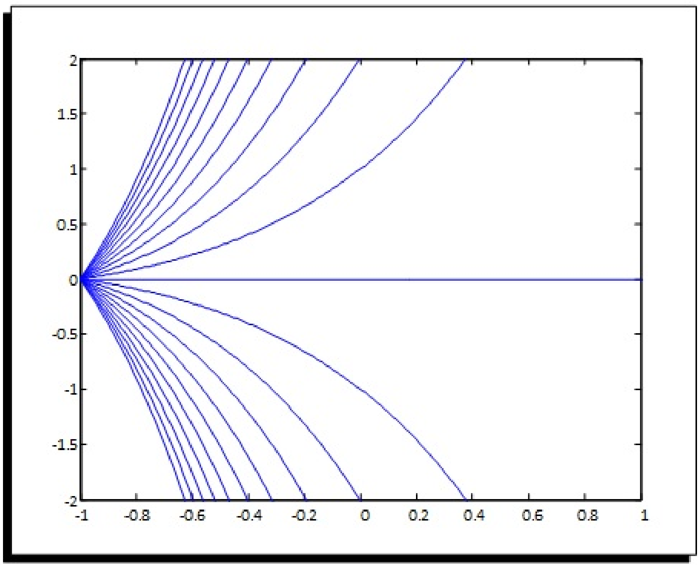

Figura 1.4 Curvas integrales de la ecuación diferencial $x'' - 2x' + x = 0$.

Hay soluciones en las que sin embargo esto es imposible. Consideremos, por ejemplo, la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{x^2+1}.$$

Resulta que cualquier función $x(t)$, que verifique $\ln|x(t)|+\dfrac{x^2(t)}{2}=t+C$, cualquiera sea la constante C es una solución de la ecuación. Para comprobarlo procedemos de la siguiente forma: Escribimos $g(t,x)=\ln|x(t)|+\dfrac{x^2(t)}{2}-t-C$, de modo que la ecuación $\ln|x(t)|+\dfrac{x^2(t)}{2}=t+C$ es equivalente a: $g(t,x(t))=0$.

Esto es una ecuación en t y x que bajo ciertas condiciones permite definir x como función de t en algún intervalo de la recta hay un teorema importante en matemáticas, el Teorema de la función implícita, que establece dichas condiciones e intervalos. Es como si pudiéramos despejar x como función de t para ciertos valores de t. En algunos casos, de hecho, se puede despejar x explícitamente. Por ejemplo, si $g(t,x)=x^2-t$ entonces la ecuación $g(t,x)=0$ define dos funciones de $t:x(t)=\sqrt{t}$ y $x(t)=-\sqrt{t}$. Nótese que $g(t,x)=x^2-t$ es continua y derivable de cualquier orden en todos los puntos del plano, pero las dos funciones que define la ecuación $x^2-t=0$ solo están definidas para $t\geq 0$ y son derivables para $t>0$. La mayoría de las veces, sin embargo, no es posible despejar x explícitamente. Se dice entonces que $g(t,x)=0$ define una función $x(t)$ implícitamente (y también, claro, una función $t(x)$ implícitamente. Los papeles de las variables t y x en $g(t,x)$ son intercambiables).

Aún cuando no podamos despejar explícitamente x como función de t en $g(t,x)=0$, podemos saber si la función o funciones $x(t)$ definidas implícitamete por esta ecuación son o no soluciones de una determinada ecuación. Basta, para ello, aplicar cualquiera de los dos siguientes métodos que son equivalentes:

1. Derivar implícitamente: Por ejemplo, en nuestro caso, derivar implícitamente en $g(t,x)=\ln|x(t)|+\dfrac{x^2(t)}{2}-t-C=0$ o derivar ambas partes de la ecuación $\ln|x(t)|+\dfrac{x^2(t)}{2}=t+C$ viendo x como una función de t. Así, derivando implícitamente en $\ln|x(t)|+\dfrac{x^2(t)}{2}=t+C$ obtenemos:

$$\frac{x'(t)}{x(t)}+x(t)x'(t)=1$$

y para todos los valores de t :

$$x'(t)+x^2(t)x'(t)=x(t))\Longrightarrow x'(t)\left[1+x^2(t)\right]=x(t))\Longrightarrow x'(t)=\frac{x(t)}{1+x^2(t)},$$

con lo que $x(t)$ verifica la ecuación diferencial.

2. Aplicar la regla de la cadena: Como $g(t,x)=0$ define una función $x(t)$ implícitamente, tenemos que $g(t,x(t))$ es una función de t, digamos $h(t)$. Así, la ecuación $g(t,x(t))=0$ es equivalente a $h(t)=0$, de modo que $h'(t)=0$. Pero, por la regla de la cadena

$$h'(t)=\frac{\partial g}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial g}{\partial t}=0.$$

En nuestro caso, $g(t,x)=\ln|x(t)|+\dfrac{x^2(t)}{2}-t-C=0$, de modo que

$$0=\frac{\partial g}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial g}{\partial t}=\left(\frac{1}{x}+x\right)x'-1\Longrightarrow\frac{1+x^2}{x}x'=1\Longrightarrow x'=\frac{x}{1+x^2},$$

y x verifica la ecuación diferencial.

Una observación adicional. Consideremos la siguiente ecuación diferencial:

$$y'=\left(\frac{x}{y}\right)^2.$$

Una solución implícita de esta ecuación es:

$$x^3-y^3(x)-1=0.$$

En efecto, derivando implícitamente en $x^3-y^3(x)-1=0$ tenemos $3x^2-3y^2(x)y'(x)=0\Longrightarrow y'(x)=\left(\dfrac{x}{y}\right)^2$ que es precisamente la ecuación diferencial dada. Sin embargo, esta solución implícita puede darse explícitamente: $y(x)=(x^3-1)^{1/3}$.

La observación es que siempre que una solución pueda darse explícitamente, debe hacerse.

Autoevaluación (Taller en grupo)

En los ejercicios del 1 al 4 verifique que la función dada es solución de la ecuación diferencial:

1. $xy'' = y' \ln(\frac{y'}{x})$ $\qquad y = e(c_1x - c_1^2)e^{\frac{x}{c_1}} + c_2$

2. $yy'' = (y')^2 + y'\sqrt{y^2 + (y')^2}$ $\qquad x = c_1 + \ln(\frac{y-c_2}{y+c_2})$

3. $y^2 = x^2(\frac{dy}{dx})^2 + 1$ $\qquad y = \frac{Cx}{2} + \frac{1}{2Cx}$

4. $\sqrt{x^4 + y^4}(xdy + ydx) + x^3dx + y^3dy = 0$ $\qquad x^4 + y^4 = (2xy + C)^2$

La solución de una ecuación diferencial ordinaria puede ser dada en forma explícita o implícita, en muy pocos ejemplos se puede expresar la solución en forma explícita. Los cálculos, incluso para ecuaciones que parecen muy simples, rápidamente se vuelven muy complicados y uno rápidamente comienza a comprender que las soluciones elementales no siempre serán posibles. Fue Liouville (1841) quien dio la primera prueba del hecho de que ciertas ecuaciones, como $y' = x^2 + y^2$ no puede ser resuelta en términos de funciones elementales.

Ejemplo 1.8 *La relación*

$$\ln y + y^2 - \int_0^x e^{-u^2} du = 0, \text{ con } y > 0,$$

es considerada una solución en forma implícita de la ecuación diferencial

$$\left(1 + 2y^2\right) y' - ye^{-x^2} = 0 \quad \text{o también} \quad y' = \frac{y}{1+2y^2} e^{-x^2}.$$

Esto puede ser visto derivando la relación dada implícitamente con respecto a x. Esto conduce a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[\ln y + y^2 - \int_0^x e^{-u^2} du\right] &= 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{y}y' + 2yy' - e^{-x^2} = 0 \Longleftrightarrow \left(\frac{1+2y^2}{y}\right) y' = e^{-x^2} \\ &\Longrightarrow \quad y' = \frac{y}{1+2y^2} e^{-x^2}. \end{aligned}$$

Observación 1.4 *Las soluciones a la mayoría de las ecuaciones diferenciales no se pueden expresar en términos finitos utilizando funciones elementales. A algunas soluciones de las ecuaciones diferenciales, debido a su importancia en las aplicaciones, se les dio etiquetas especiales (por lo general el nombre de un investigador de sus propiedades) y por lo tanto se refiere a las funciones especiales. Por ejemplo, hay dos integrales sinusoidales conocidas:*

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt, \quad \mathrm{si}(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt = \mathrm{Si}(x) - \frac{\pi}{2},$$

y tres integrales coseno:

$$\mathrm{Cin}(x) = \int_0^x \frac{1-\cos t}{t} dt, \quad \mathrm{ci}(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt \ y \quad \mathrm{ci}(x) = \gamma + \ln x + \int_0^x \frac{\cos t}{t} dt,$$

donde $\gamma \approx 0,5772$ es la constante de Euler.

Otro comando para graficar en MATLAB es **fplot**, las gráficas 1.5 y 1.6 se obtienen con los siguientes comandos:

```
>> syms t
>> f='sin(t)/t';
>> fplot(f,[-6*pi,6*pi]);
>> grid on
>> syms x;
>> g=int(f,t,0,x);
>> figure
>> ezplot(g,[-6*pi,6*pi]);
>> grid on
```

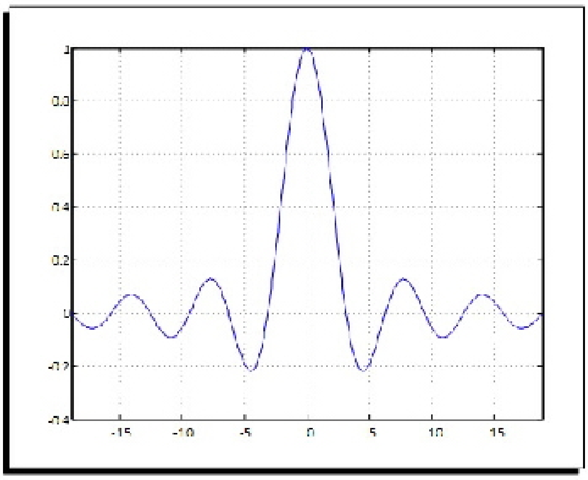

Figura 1.5 Gráfica de la función $\frac{\sin(t)}{t}$.

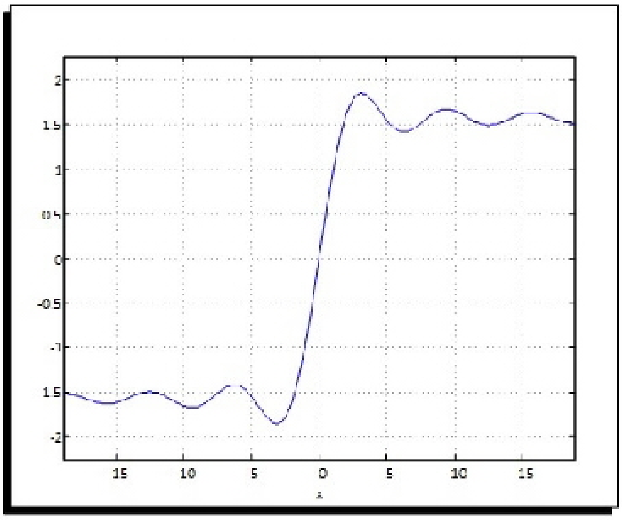

Figura 1.6 Gráfica de la función seno integral
$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt.$$

Ejemplo 1.9 *Use integral definida para encontrar una solución explícita al problema de valor inicial* $xy' = \operatorname{sen} x$, *sujeto a* $y(0) = 1$.

La ecuación diferencial se escribe $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin(x)}{x}$, *integrando y aplicando el primer teorema fundamental del cálculo se obtiene* $\int_0^x dy = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$, *o también* $y(x) - y(0) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$, *finalmente* $y(x) = 1 + \mathrm{Si}(x)$.

MATLAB incorpora estas funciones especiales, por ejemplo para utilizar la función seno integral, utilice los siguientes comandos:

```
>> sinint(pi)
>> ans = 1.8519
```

1.1.3. Soluciones particular y solución singular

Una solución de una ecuación diferencial es llamada solución particular, si ella no contiene cualquier constante arbitraria. Dando a C un cierto valor, obtenemos una solución particular de la ecuación diferen cial. Así que cada valor específico de C en la solución general identifica una solución o una curva particular. Otra forma de especificar una solución particular de $y' = f(x, y)$ es imponer una condición inicial:

$$y(x_0) = y_0,$$

que especifica una curva solución que pasa por el punto (x_0, y_0) en el plano. Sustituyendo en la solución general $y(x_0) = y_0$, determinamos el valor de la constante arbitraria.

A veces, por supuesto, no existe valor de la constante que satisfaga la condición dada $y(x_0) = y_0$, lo que indica que no hay una solución particular con la propiedad requerida entre toda la familia de curvas integrales de la solución general.

Definición 1.1 *Una ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ (o, en general, $F(x, y, y') = 0$) sujeta a la condición inicial $y(x_0) = y_0$, donde x_0 y y_0 son valores especificos, es llamado un* ***problema de valor inicial*** *o un* ***problema de Cauchy****.*

Ejemplo 1.10 *Mostrar que la función $y(x) = x\left[1 + \int_1^x \frac{\cos u}{u} du\right]$ es una solución del siguiente problema de valor inicial:*

$$xy' - y = x\cos x, \quad y(1) = 1.$$

La derivada de $y(x)$ es:

$$y'(x) = 1 + \int_1^x \frac{\cos u}{u} du + x\frac{\cos x}{x} = 1 + \cos x + \int_1^x \frac{\cos u}{u} du.$$

Luego,

$$xy' - y = x + x\cos x + x\int_1^x \frac{\cos u}{u} du - x\left[1 + \int_1^x \frac{\cos u}{u} du\right] = x\cos x.$$

La condición inicial también es satisfecha, pues,

$$y(1) = 1 \cdot \left[1 + \int_1^1 \frac{\cos u}{u} du\right] = 1.$$

Definición 1.2 *Una solución singular de $y' = f(x, y)$ es una función que no es un caso especial de la solución general y para la que la singularidad del problema de valor inicial ha fallado.*

No toda ecuación diferencial tiene una solución singular, pero si lo tiene, la solución singular no puede ser determinada de la solución general para algún valor particular de C, incluyendo $\pm\infty$, puesto que las curvas integrales de la solución general no tienen puntos comunes. Una ecuación diferencial puede tener una solución que no es ni singular ni miembro de la familia uniparamétrica de las curvas de la solución general. De acuerdo con la definición, una solución singular siempre tiene un punto en el plano donde se encuentra con otra solución. Dicho punto se refiere generalmente como un punto de ramificación. En ese punto, dos curvas integrales se tocan porque comparten la misma pendiente $y' = f(x, y)$, pero no pueden cruzarse entre sí. Por ejemplo, las funciones $y = x^2$ y $y = x^4$ tienen la misma pendiente en $x = 0$, ellas se tocan, pero no se cruzan.

Una solución singular de especial interés es la que consiste en su totalidad de los puntos de ramificación en cada punto que es tangente a otra curva integral. Una envolvente de una familia de curvas uniparamétrica es una curva en el plano xy tal que en cada punto es tangente a una de las curvas integrales. Puesto que no hay una definición universalmente aceptada de una solución singular, algunos autores definen una solución singular como una envolvente de la familia de curvas integrales obtenidas a partir de la solución general. Nuestra definición de una solución singular incluye no solo las envolventes sino también todas las soluciones que tienen puntos de ramificación. Esta definición más amplia es motivada por las aplicaciones prácticas de las ecuaciones diferenciales en el modelado de los problemas del mundo real. La existencia de una solución singular da una señal de aviso en el uso de la ecuación diferencial como modelo fiable.

Una condición necesaria para la existencia de una envolvente es que x, y, C satisfagan las ecuaciones:

$$\Phi\left(x,y,C\right)=0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial\Phi}{\partial C}=0,$$

donde $\Phi\left(x,y,C\right)=0$ es la ecuación de la solución general. Eliminando C podemos introducir una función que no es una solución de la ecuación diferencial dada. Por lo tanto, cualquier curva encontrada al resolver el sistema $\Phi\left(x,y,C\right)=0$ y $\dfrac{\partial\Phi}{\partial C}=0$, se debe comprobar si se trata una solución de la ecuación diferencial dada o no.

Ejemplo 1.11 *Consideremos la ecuación diferencial*

$$y'=2\sqrt{y}, \quad \text{con } y\geq 0,$$

donde la raíz toma el signo positivo. Supuesto que $y>0$, dividimos ambos miembros de la ecuación diferencial por $2\sqrt{y}$, lo que nos conduce a una ecuación a variables separables.

$$\frac{y'}{2\sqrt{y}}=1, \text{ o también } \frac{d}{dx}\left(\sqrt{y}\right)=1,$$

de la regla de la cadena, se sigue que:

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{y}\right)=\frac{1}{2}y^{-1/2}y'.$$

Por tanto, $\sqrt{y}=x+C$, donde $x>-C$. La solución general de la ecuación diferencial dada está formada por la familia uniparamétrica de semiparábolas $y(x)=\left(x+C\right)^2$, o también $C=\sqrt{y}-x$, con $x\geq C$.

Algunas soluciones de $y'=2\sqrt{y}$ y la solución singular $y=0$ se pueden ver en la figura 1.7. Esta se obtiene utilizando la función **dfield8** que permite graficar campos direccionales y que se la puede descargar de la pagina `http://math.rice.edu/~dfield/`.

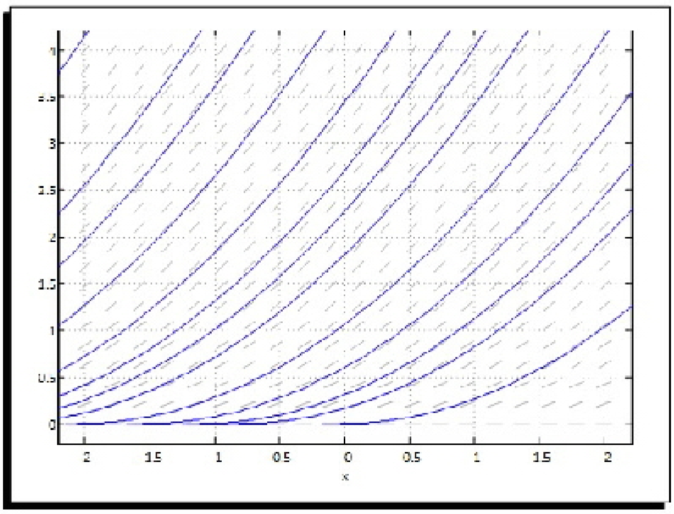

Figura 1.7 Curvas integrales de la ecuación diferencial $y'=2\sqrt{y}$.

La función potencial para una ecuación diferencial dada es $\psi\left(x,y\right)=\sqrt{y}-x$. La ecuación $y'=2\sqrt{y}$ tiene también una solución trivial $y=0$ que consiste de puntos de ramificación, llamada la envolvente. Esta función es una solución singular puesto que $y=0$ no es un miembro de la familia de soluciones $y(x)=\left(x+C\right)^2$ para cualquier elección de la constante C. La envolvente de la familia de curvas puede también ser encontrada del sistema $\Phi(x,y,C)=0$ y $\dfrac{\partial\Phi}{\partial C}=0$, resolviendo el sistema de ecuaciones: $(x+C)^2-y=0$ y $\dfrac{\partial\Phi}{\partial C}=2(x+C)=0$, donde $\Phi(x,y,C)=(x+C)^2-y$.

Podemos dibujar algunas soluciones junto con la solución singular $y=0$ como se indica en la gráfica de abajo.

En realidad, la ecuación dada tiene una infinidad de soluciones singulares que podrían ser construidas a partir de la singular envolvente $y=0$ y la solución general juntando partes de soluciones. Una envolvente no necesariamente vincula las curvas integrales de un lado. Por ejemplo, la solución general de la ecuación diferencial $y'=3y^{2/3}$ consiste de $y=(x+C)^3$ que llenan todo el plano xy. La envolvente es $y=0$.

Ejemplo 1.12 *La ecuación diferencial* $5y'=2y^{-3/2}$, $y\neq 0$, *tiene la familia uniparamétrica de soluciones* $y=(x-C)^{2/5}$, *que puede ser escrita en forma implícita* $\Phi(x,y,C)=0$, *con* $\Phi(x,y,C)=y^5-(x-C)^{2/5}$. *Derivando con respecto a* C *e igualando a cero, obtenemos* $y=0$, *que no es una solución. Este ejemplo muestra que las condiciones* $\Phi(x,y,C)=0$ *y* $\dfrac{\partial\Phi}{\partial C}=0$, *son solamente necesarias para la existencia de la envolvente.*

Ejemplo 1.13 *Pruebe que la función* $y(x)$ *definida implícitamente por la ecuación* $y=\arctan(x+y)+C$, *donde* C *es una constante, es la solución general de la ecuación diferencial* $(x+y)^2y'=1$.

La regla de la cadena muestra que

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+(x+y)^2}\left(1+\frac{dy}{dx}\right),$$

de donde

$$\frac{dy}{dx}+(x+y)^2\frac{dy}{dx}=1+\frac{dy}{dx}.$$

De donde se sigue que $(x+y)^2y'=1$.

A continuación se muestra como utilizar el comando **dfield8** en MATLAB para graficar las curvas integrales, al ejecutar el comando

```
>> dfield8
```

Aparecerá después de unos segundos la pantalla que se muestra en la figura 1.8, ingrese todos los valores correspondientes de la ecuación diferencial: la variable independiente, la variable dependiente, la ecuación diferencial, los límites inferiores y superiores de las variables y de un click en el botón *Proceed* y automáticamente aparece las curvas integrales de la ecuación diferencial que se indica en la figura 1.8.

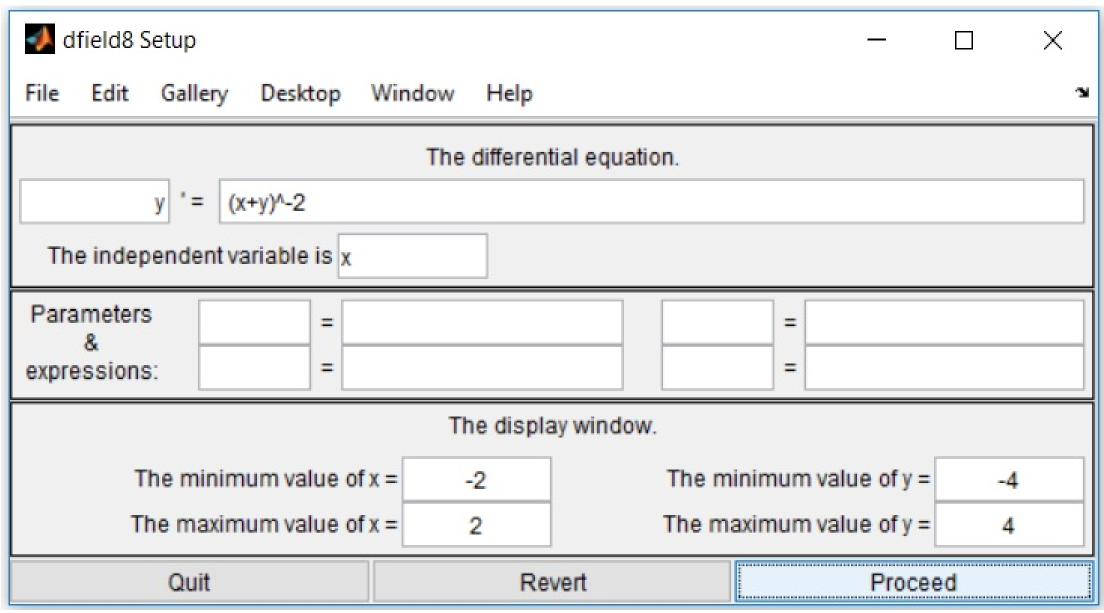

Figura 1.8 Pantalla principal al ejecutar el comando dfield8.

En la figura 1.9 se muestra las curvas integrales.

El siguiente ejemplo muestra cómo para una función que contiene una constante arbitraria como un parámetro podemos encontrar una ecuación diferencial relevante para la cual la función dada es su solución general.

Para una constante arbitraria C, mostrar que la función $y = \dfrac{C-x}{1+x^2}$ es la solución general de la ecuación diferencial

$$(1+2xy)\,dx + \left(1+x^2\right)dy = 0.$$

Pruebe que esta ecuación no tiene otras soluciones.

Solución. La ecuación diferencial de esta función es

$$dy = y'dx = \frac{-\left(1+x^2\right)-(C-x)\,2x}{\left(1+x^2\right)^2}dx = \frac{x^2-1-2Cx}{\left(1+x^2\right)^2}dx.$$

Multiplicando ambos miembros por $1+x^2$, tenemos

$$\left(1+x^2\right)dy = \frac{x^2-1-2Cx}{\left(1+x^2\right)}dx = \frac{-x^2-1+2x^2-2Cx}{1+x^2}dx = -\left(1+2x\frac{C-x}{1+x^2}\right)dx$$

y, puesto que $y = \dfrac{C-x}{1+x^2}$, obtenemos

$$-\left(1+x^2\right)dy = \frac{x^2-1-2Cx}{\left(1+x^2\right)}dx = (1+2xy)\,dx.$$

Vamos a probar ahora que no hay otra solución que $y = \dfrac{C-x}{1+x^2}$. Resolviendo para C, encontramos la función potencial $\varphi(x,y) = \left(1+x^2\right)y + x$. Suponiendo lo contrario, es decir que existe otra solución, sea $y = \phi(x)$ una tal solución. Sustituyendo $y = \phi(x)$ en la función potencial $\varphi(x,y)$, obtenemos una función que denotamos por $F(x)$, que es, $F(x) = \left(1+x^2\right)\phi(x) + x$. Derivando obtenemos

$$F'(x) = 2x\phi(x) + \left(1+x^2\right)\phi'(x) + 1.$$

Puesto que $\phi'(x) = -\dfrac{1+2x\phi(x)}{1+x^2}$, tenemos

$$F'(x) = 2x\phi(x) - (1+2x\phi(x)) + 1 = 0.$$

Por lo tanto, $F(x)$ es una constante, que denotamos por C. Esto es, $\phi(x) = \dfrac{C-x}{1+x^2}$.

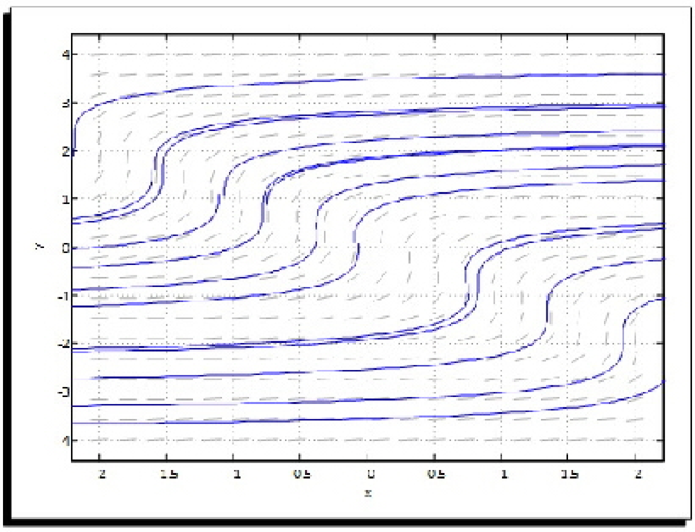

Figura 1.9 Curvas integrales de la ecuación diferencial $y' = \frac{1}{(x+y)^2}$.

Ejemplo 1.14 *Sea* $y' = f(x, y) = \sqrt{|y|}$ *para cada* $y \in \mathbb{R}$. *Como esta función es continua en todo el plano, entonces la ecuación diferencial tiene la forma* $y' = f(x, y)$. *Las siguientes funciones son todas soluciones:*

$$\varphi_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{4}(x-\alpha)^2, & si\ x \leq \alpha; \\ 0, & si\ \alpha \leq x \leq \beta; \\ \dfrac{1}{4}(x-\beta)^2, & si\ \beta \leq x \end{cases}$$

donde $\alpha \leq \beta$. Es posible que $\alpha = -\infty$ o bien $\beta = \infty$. Observamos que existe un conjunto infinito de soluciones que satisfacen $\varphi(0) = 0$.

La figura 1.10 muestra el campo de direcciones obtenido con el comando **dfield8,** y también las curvas integrales que se obtienen fácilmente al dar un click en la pantalla que sale el campo de direcciones.

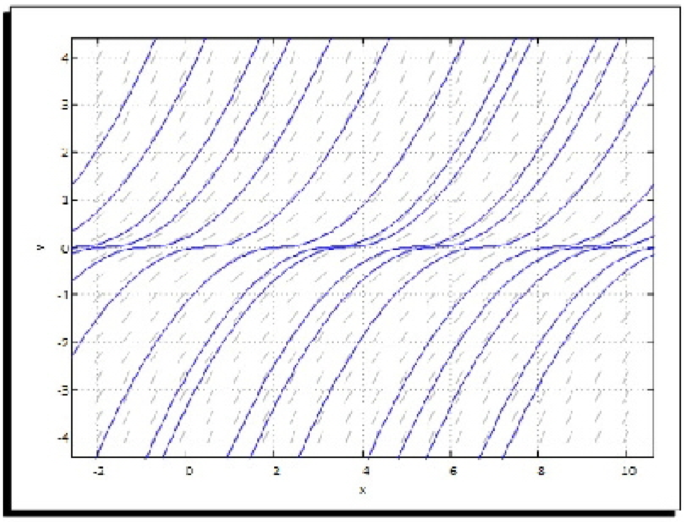

Figura 1.10 Campo de direcciones y curvas integrales obtenido con el comando **dfield.**

Ejemplo 1.15 *Sea* $x' = x - t$, *Para cada* $C \in \mathbb{R}$ *existe la solución dada por* $\varphi_C(t) = 1 + t + Ce^t$, $t \in \mathbb{R}$. *Estas son las únicas soluciones. La figura 1.11 de abajo muestra su gráfica. Las soluciones se separan entre sí al aumentar el tiempo, por lo que un pequeño cambio en las condiciones iniciales produce un error que va aumentando con el transcurso del tiempo.*

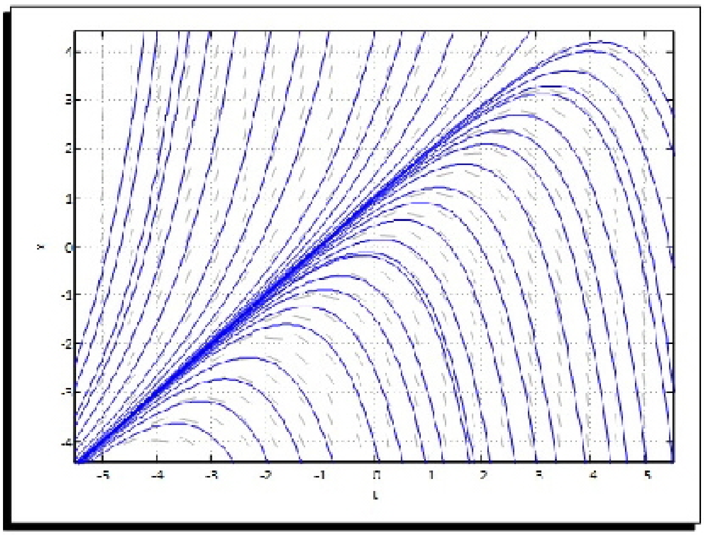

Figura 1.11 Campo de direcciones y curvas integrales
$x^{'} = x - t.$

Ejemplo 1.16 *Sea $x' = 2xt$. Las soluciones son $\varphi(t) = Ce^{t^2}$ donde $t \in \mathbb{R}$.*

Para encontrar la solución de la ecuación diferencial en MATLAB utilice el siguiente comando

```
>> dsolve('Dx-2*x*t=0')
>> ans =C5*exp(t^2)
```

Ejemplo 1.17 *Sea $x' = -\dfrac{x}{t}$. Las únicas soluciones son las ramas de las hipérbolas $\varphi(t) = \dfrac{C}{t}$ para $t \in I$, donde $I =]-\infty, 0[$ o bien $I =]0, \infty[$.*

Las únicas soluciones de la ecuación diferencial $x' = x^2$ son las ramas de las hipérbolas $\varphi(t) = \dfrac{1}{C - t}$ para todo $t \in I$, con $I =]-\infty, C[$ o bien $I =]C, +\infty[$.

Isoclinas

Cualquier miembro de la familia $f(x, y) = c$ se llama isoclina, que significa curva a lo largo de la cual la inclinación de las tangentes es igual. Al hacer variar el parámetro c, se obtiene un conjunto de isoclinas en que los elementos lineales se construyen adecuadamente. La totalidad de esos elementos lineales se denominan: campo de direcciones, campo direccional, campo de pendientes o campo de elementos lineales de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$.

Ejemplo 1.18 *Las isoclinas de la ecuación diferencial $y^{'} = y - x$ son $y - x = m$, que son rectas de pendiente 1 y ordenada en el origen m.*

Ejemplo 1.19 *Dada la ecuación diferencial $xy' + (1 - x)\, y = 0$, las isoclinas son ahora $\dfrac{(x-1)\, y}{x} = m$, o si despejamos y :*

$$y = \frac{mx}{x - 1}$$

curvas que pasan por $(0, 0)$ y tienen una asíntota vertical en el punto $x = 1$.

La pendiente en el origen no está definida. De la expresión obtenida en primer lugar, uno puede deducir que la recta $x = 1$ es una isoclina de pendiente igual a cero. Asímismo, $x = 0$ es una isoclina de la ecuación $(\dfrac{dx}{dy})$ con pendiente igual a cero (o si se quiere de la ecuación inicial con pendiente ∞). El dibujo de las isoclinas y soluciones se muestra en la figura 1.12.

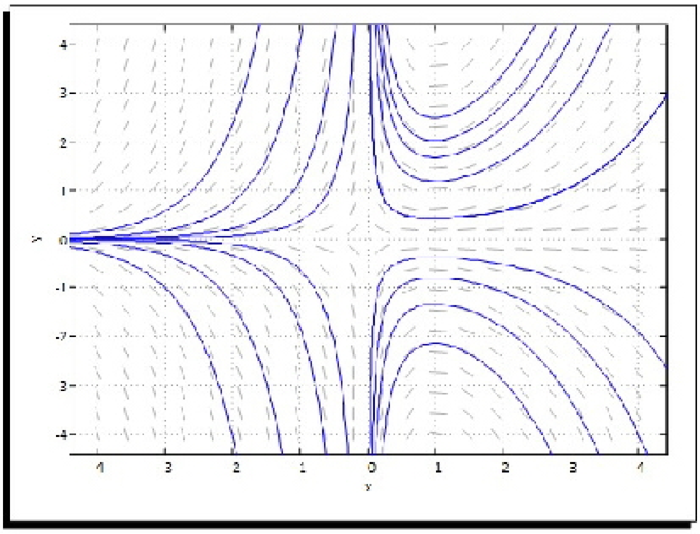

Figura 1.12 Isoclinas de la ecuación diferencial $y^{'} = \frac{(x-1)y}{x}$.

Ejemplo 1.20 *Otras características de las soluciones pueden obtenerse de la propia ecuación, Por ejemplo, el conjunto de puntos de inflexión está contenido en el conjunto de puntos que anulan a la segunda derivada y puede obtenerse de la ecuación sin más que derivar:*

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f\,(x, y) = 0.$$

Ejemplo 1.21 *Dada la ecuación diferencial $y' = y^2 - x$, las isoclinas de esta ecuación son las curvas $y^2 - x = m$, es decir parábolas con eje horizontal. La derivada segunda de una solución es:*

$$y'' = 2y'y - 1 = 2y\left(y^2 - x\right) - 1$$

y por tanto, la ecuación de los posibles puntos de inflexión es la expresión anterior igualada a cero, es decir;

$$x = y^2 - \frac{1}{2y}.$$

En la siguiente figura pueden verse las isoclinas, curva de puntos de inflexión y algunas soluciones.

Ejercicio 1.5 *Representar las isoclinas de la edo $y' = 2x - y$. ¿Qué tipo de curvas son dichas isoclinas? Representar las isoclinas correspondientes a $m = 0$ y $m = 2$.¿Qué particularidad tiene la correspondiente a $m = 2$?*

Ejercicio. Construir el campo de direcciones y las curvas de nivel de la edo $y' = \operatorname{sen}(x) + y$.

Ejemplo 1.22 *Dibujemos aproximadamente las soluciones de $y' = \dfrac{2x - y}{x - y}$.*

Solución. Trazamos algunas isoclinas $\dfrac{2x - y}{x - y} = C$, de donde $y = \dfrac{2 - C}{1 - C}x$ (rectas que pasan por el origen), para diferentes valores de C y sobre cada una de ellas dibujamos algunos segmentos de pendiente C.

$C = 0 \Longrightarrow y = 2x$ (segmentos horizontales: posibles máximos y mínimos de las soluciones)

$C = 1 \Longrightarrow x = 0$; $\quad C = -1 \Longrightarrow y = \dfrac{3}{2}x$; ...

Una vez que sabemos que las isoclinas son rectas $y = mx$ (es trivial ver que esto sucede en toda ecuación homogénea) es más cómodo dibujar la recta de pendiente m que uno quiera y trazar sobre ella segmentos de pendiente $C = f\,(x, mx) = \dfrac{2 - m}{1 - m}$:

$$m = 0 \Longrightarrow C = 2; \quad m = 1 \Longrightarrow K = +\infty; \quad m = -1 \Longrightarrow C = \frac{3}{2}$$

Las curvas tangentes a estos segmentos parecen ser cerradas (o tal vez espirales poco abiertas).Podemos resolver la ecuación y comprobar (el ejemplo es poco práctico). Hay dos formas de hacerlo: mirándola como ecuación homogénea o como exacta:

$$y' = \frac{2-\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}} \qquad o \qquad (2x-y)+(y-x)\,y' = 0.$$

Por los dos caminos se llega a $y^2 - 2xy + 2x^2 = C$ *con lo que las soluciones son elipses. Con más propiedad, cada una de ellas define de hecho dos soluciones en* $\left(-\sqrt{C},\sqrt{C}\right)$: $y = x+\sqrt{C-x^2}$, $y = x-\sqrt{C-x^2}$ *funciones definidas en* $\left[-\sqrt{C},\sqrt{C}\right]$ *no derivables en* $x = \pm\sqrt{C}$.

Dada la ecuación diferencial $y' = x - 2y$, *las isoclinas son* $y = \frac{1}{2}(x-C)$ *(rectas de pendiente*$\frac{1}{2}$*). Dibujamos las de* $C = -1,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1$ *y* $\frac{3}{2}$ *(que cortan respectivamente* $x = 0$ *en* $y = \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ 0,\ -\frac{1}{4},$ $-\frac{1}{2}$ *y* $-\frac{3}{4}$ *).*

Si $C = \frac{1}{2}$, *la recta y los segmentos trazados sobre ella tienen la misma pendiente y por tanto la isoclina es solución de la ecuación (por ser tangente al campo de direcciones).*

Podemos, también en este caso, resolver la ecuación (que es lineal) y comprobar. Bastará sumar la solución general de la homogénea a la particular ya encontrada: $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + Ce^{-2x}$ *(a lo mismo llegaríamos con la fórmula* $y = Ce^{-2x} + e^{-2x}\int xe^{2x}dx$*).*

Ejemplo 1.23

$$y' = \frac{3xy+2y^2}{x^2+xy}.$$

Es una ecuación homogénea (tanto el numerador como el denominador son homogéneos de grado 2), con

$$f(1,z) = \frac{3z+2z^2}{1+z} \Longrightarrow f(1,z) - z = \frac{z(z+2)}{z+1}.$$

Las soluciones lineales son por tanto $y = 0$ *y* $y = -2x$. *Las demás soluciones están dadas por*

$$\log|x| + C = \int \frac{z+1}{z(z+2)}dz = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z+2}\right)dz?\frac{1}{2}\log|z(z+2)|,$$

de donde

$$z(z+2) = Cx^2.$$

con $K = \pm e^{2C}$ *constante no nula. Resolviendo esta ecuación cuadrática en* z *y sustituyendo* $z = \frac{y}{x}$ *obtenemos finalmente*

$$y = -x \pm x\sqrt{1+Cx^2}.$$

Esta solución está definida para todo x *si* $C > 0$, *y para* $|x| < \frac{1}{\sqrt{|C|}}$ *si* $C < 0$. *En este caso* f *es singular en las rectas* $x = 0$ *y* $x + y = 0$, *por lo que el abierto* U *estará contenido enuna de las cuatro regiones abiertas determinadas por la intersección de estas rectas. En cada una de estas regiones el signo del radical en la fórmula anterior está bien determinado: por ejemplo, si* $x < 0$ *y* $x + y > 0$ *deberá tomarse el signo* $-$. *Finalmente, nótese que haciendo* $C = 0$ *en la fórmula obtenemos las dos soluciones lineales.*

Ejemplo 1.24 *Sin embargo esta estrategia no siempre produce los frutos deseados. Sin ir más lejos, el problema*

$$\begin{cases} y^2 + (y')^2 = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

no tiene solución y

$$\begin{cases} y' = 3y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

tiene al menos dos soluciones dadas por $y(x) = 0$ *y* $y(x) = x^3$. *Se verá más adelante bajo qué condiciones los problemas de existencia y unicidad tienen asociados una única solución.*

Autoevaluación (Taller en grupo)

En los siguientes ejercicios utilice el comando **dsolve** para resolver la ecuación diferencial:

1. $x^2y'' + xy' = 1$

2. $y' + \frac{1}{4}(y'')^2 = x(y'')$

3. En los siguientes ejercicios grafique el campo de direcciones con **dfield8**:

    a) $y^{'} = \cos y(\sin y - 2\cos y)/x$
    b) $y' = \frac{y}{x} + \sin(\frac{y}{x})$

    c) $y' = \frac{(ax^3-1)y}{x(x^3+1)}$
    d) $y'(y')^2 - 2xy' + y = 0$

Ejercicios

En cada uno de los siguientes ejercicios se presenta una ecuación diferencial y una función. Verificar que la función es solución de la ecuación diferencial. En cualquier caso, las C (con subíndice o sin él) que aparecen son constantes.

1. $xy' + y = \cos x; \quad y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}.$
2. $y' - (\tan x)\, y = 0; \quad y = \dfrac{C}{\cos x}.$
3. $yy' = x - 2x^3; \quad y = x\sqrt{1-x^2}.$
4. $y' = 3y^2; \quad y = -\dfrac{1}{3x+C}.$
5. $yy' = x - 2x^3; \quad y = x\sqrt{1-x^2}.$
6. $y' = 3y^2; \quad y = -\dfrac{1}{3x+C}.$
7. $x \operatorname{sen} x \dfrac{dy}{dx} + (\operatorname{sen} x + x\cos x)\, y = xe^x; \quad y = \dfrac{e^x\,(x-1)+C}{x \operatorname{sen} x}.$
8. $y' + y\cos x = \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x; \quad y = \operatorname{sen} x - 1 + Ce^{-\operatorname{sen} x}.$
9. $x\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1+\sqrt{1-x^2}\right) e^x; \quad y = \left(\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)(e^x + C).$
10. $y\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 2x\dfrac{dy}{dx} - y = 0; \quad y^2 = 2Cx + C^2.$
11. $y' = e^{(x-y)}; \quad y = \ln(C + e^x).$
12. $xy\left[1 - \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]) = \left(x^2 - y^2 - a^2\right)\dfrac{dy}{dx}; \quad y^2 = Cx^2 - \dfrac{a^2C}{1+C}.$
13. $\left(x^2+y^2\right) dx - 2xydy = 0; \quad y = \sqrt{x^2 - Cx}.$
14. $xy' = y\tan(\ln y); \quad y = e^{\operatorname{arcsen}(Cx)}.$
15. $\dfrac{d^3y}{dx^3} + \dfrac{3}{x}\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0; \quad y = C_1x + \dfrac{C_2}{x} + C_3.$
16. $y' - y = e^{x+x^2}; \quad y = e^x\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt + Ce^x.$
17. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+x^2}{1+y^2}; \quad x = \dfrac{y+C}{1-Cy}.$
18. $\left(xy^2\right)' = xy^3\left(x^2+1\right); \quad y = -\dfrac{5}{x^3+5x-C\sqrt{x}}.$
19. $L\dfrac{di}{dt} + Ri = E; \quad i = \dfrac{E}{R} + Ce^{-\frac{R}{L}t}$; donde $L \neq 0$; $R \neq 0$ y E son constantes dadas y C es una constante arbitraria.
20. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2k\dfrac{dy}{dx} + k^2y = e^x; \quad y = (C_1 + C_2x)\, e^{kx} + \dfrac{e^x}{(k-1)^2}$, con k una constante.
21. $\left(1-x^2\right)\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} - A^2y = 0; \quad y = C_1e^{A \operatorname{arcsen} x} + C_2e^{-A \operatorname{arcsen} x}$, donde A es una constante.

22. Una solución general de la ecuación diferencial $yy' - 4x = 0$ puede escribirse como $4x^2 - y^2 = C$. Determinar la solución particular que satisface a la condición $y(2) = \sqrt{7}$.

23. La ecuación diferencial $y'' + 4y = 0$ admite a $y = A\cos(2t) + B\operatorname{sen}(2t)$ como solución general. Determine la solución particular que cumple con $y(0) = 3$ y $y'' = 8$.

1.2. Ecuaciones diferenciales autónomas

1.2.1. Notas sobre ecuaciones diferenciales autónomas

Considérese una ecuación del tipo $x' = f(x)$, donde la incógnita es una función $x(t)$. Este tipo de ecuaciones se llaman autónomas porque la función f no depende de la variable independiente t. Observe que son ecuaciones de variables separables. Existe un método para resolverla, lo que no quiere decir que siempre se pueda resolver (es posible que las integrales que aparezcan no se puedan calcular). Por otro lado, el hecho de que la ecuación sea de variables separables implica que existe una única solución de la ecuación que satisface $x(t_0) = x_0$ si $f(x_0) \neq 0$.

Observación 1.6 *Si la ecuación diferencial de primer orden satisface la propiedad de existencia y unicidad de solución con dato inicial, entonces las curvas gráficas de dos soluciones diferentes, no se intersecan.*

Definición 1.3 *Un punto de equilibrio x_0 es estable si existe un entorno de x_0 tal que toda solución que en algún instante t caiga en ese entorno permanecerá dentro de él en el futuro y tenderá a x_0 cuando el tiempo t tiende a $+\infty$. En caso contrario, el punto de equilibrio se llamará inestable.*

Ahora, sería bueno saber cómo decidir si el punto de equilibrio es estable o no. Para esto volvamos a la argumentación de arriba: si la función f es positiva en x toda solución que en un cierto valor t sea igual a x tendrá que ser creciente en el instante t. Por lo tanto, si $f(x_0) = 0$ y $f(x)$ es positiva en un semientorno izquierdo de x_0, entonces para cualquier x en ese entorno, se tiene que la solución que pasa por x crece y por lo tanto se mantendrá en el entorno y tenderá a x_0. Si, en cambio, $f(x)$ es negativa en un semientorno izquierdo de x_0, entonces la solución que valga x decrecerá, alejándose así de x_0. El mismo tipo de consideraciones sirve para un entorno derecho de x_0.

Notar que, en particular, si en un entorno reducido de x_0 el signo de f es constante, entonces x_0 es inestable:

Concluimos los siguientes resultados de estabilidad:

Proposición 1.7 *Un punto de equilibrio x_0 es estable si $f(x)$ es positiva en un semientorno izquierdo de x_0 y negativa en uno derecho.*

Proposición 1.8 *Un punto de equilibrio x_0 es inestable si $f(x)$ es negativa en un semientorno izquierdo de x_0 o positiva en uno derecho.*

Si f es una función derivable, la condición de la Proposición 1 es verificada siempre que $f'(x_0) < 0$, y entonces se tiene el siguiente corolario:

Corolario 1.9 *Un punto de equilibrio x_0 es estable si $f'(x_0) < 0$.*

Idénticas consideraciones permiten afirmar también:

Corolario 1.10 *Un punto de equilibrio x_0 es inestable si $f'(x_0) > 0$.*

Finalmente, observamos que, aún cuando una ecuación autónoma no pueda resolverse por lo complicadas que puedan ser las integrales involucradas, de todos modos es posible calcular el límite de una solución cuando t tiende a $\pm\infty$. En efecto, supongamos que se tiene determinado el signo de la función f y que x es una solución cuyo valor en algún instante t pertenece a un intervalo $]a, b[$ donde f es positiva y que $f(b) = 0$. Entonces x es una función creciente, y solo dejaría de ser creciente si en algún momento $x(t)$ se pasa de b. Pero esto no es posible porque el punto b es de equilibrio, y si x alcanza alguna vez el valor b quiere decir que es b para todo t. Se concluye que la solución es creciente para todo $t > 0$, y resta ver hasta donde llega, es decir, queremos saber todavía cuánto vale el $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)$, que sabemos que existe porque la $x(t)$ es creciente. Afirmamos que el límite es precisamente b: en efecto, si fuera menor, sería algún $\alpha < b$ donde la f es positiva, y entonces $x'(t)$ es mayor que una constante positiva a partir de un cierto t, y eso es absurdo ya que implicaría que la $x(t)$ tiende a $+\infty$.

La conclusión es la siguiente:

Si $x(t_0)$ pertenece a un intervalo donde f es positiva, entonces $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = b$, donde b es la menor de las raíces de f mayores que $x(t_0)$. Si no hay raíces de f a la derecha de $x(t_0)$, entonces el $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$.

Idénticas consideraciones permiten afirmar que:

Si f es negativa en un intervalo que contiene a $x(t_0)$, entonces $x(t)$ es decreciente y tiende a la mayor raíz de f a la izquierda de $x(t_0)$. Como antes, si no hay raíces a la izquierda de $x(t_0)$, entonces el límite es $-\infty$.

Ejemplo 1.25 *El siguiente es un modelo para la temperatura de un fluido:* $x' = \left(x^2 - 3x + 2\right) e^{-x}$, *donde* $x(t)$ *indica la temperatura en el instante* t*. Si intentamos resolverla como las ecuaciones de variables separables, quedaría*

$$\frac{x'}{(x^2 - 3x + 2)\, e^{-x}} = 1 \text{ o sea } \int \frac{dx}{(x^2 - 3x + 2)\, e^{-x}} = \int dt$$

y la integral de la izquierda parece difícil de calcular. Puede ser que nuestro interés sea averiguar si la temperatura llegará a 0 *o no y cuáles son los estados de equilibrio estables del sistema.*

Para eso estudiamos el signo de la función $f(x) = (x^2 - 3x + 2)e^{-x}$:

Los puntos de equilibrio (o sea las raíces de f) son $x = 1$ y $x = 2$; se tiene que f es negativa entre 1 y 2 y positiva fuera del intervalo $[1, 2]$. Por lo tanto obtenemos las siguientes conclusiones:

1. Como f es positiva a la izquierda de 1 y negativa a su derecha, resulta que 1 es punto de equilibrio estable.

2. Como f es negativa a la izquierda de 2 y positiva a su derecha, resulta que 2 es punto de equilibrio inestable.

3. Si la condición inicial es $x_0 < 1$ entonces la solución tenderá al punto de equilibrio 1.

4. Si la condición inicial es $x_0 \in \,]1, 2[$ entonces la solución tenderá al punto de equilibrio estable 1.

5. Si la condición inicial es $x_0 > 2$ entonces la solución tenderá a $+\infty$.

6. Si la temperatura inicial es positiva, entonces se mantendrá positiva en el futuro.

Definición 1.4 *Una ecuación de primer orden en la forma* $\dfrac{dy}{dt} = f(y)$ *es llamada autónoma (la variable* t *no aparece explícitamente).*

Definición 1.5 *Los ceros de* f *son llamados puntos críticos o puntos de equilibrio. Las soluciones constantes son llamadas soluciones de equilibrio.*

Ejemplo 1.26 *Encontrar las soluciones de equilibrio de la ecuación diferencial* $\frac{dy}{dx} = 2y\,(1 - y)$.

Solución: *Las raíces de* $f(y) = 2y\,(1 - y)$ *son* $y = 0$ *y* $y = 1$*. Luego las soluciones de equilibrio son* $y(x) = 0$ *y* $y(x) = 1$*. El campo direccional y algunas soluciones se muestra en la figura 1.13.*

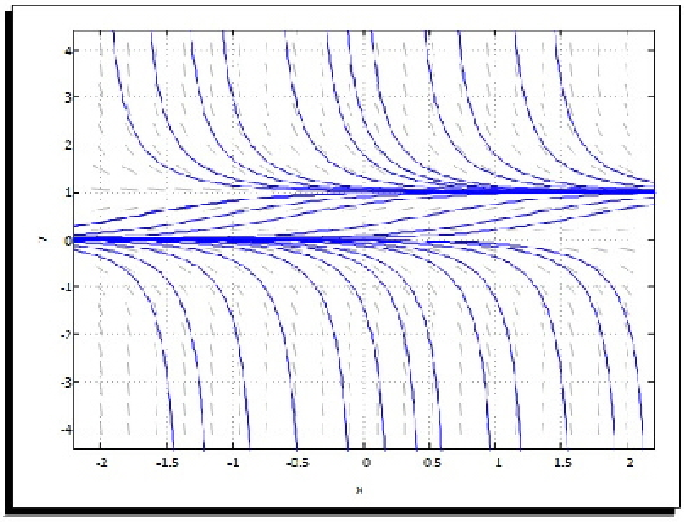

Figura 1.13 Soluciones de equilibrio de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = 2y\,(1-y)$

El campo de dirección de una ecuación diferencial dada indica que a medida que x aumenta sin límite, cada solución o bien se mueve hacia o se aleja de una solución de equilibrio. Si todas las soluciones cercanas se mueven hacia una solución de equilibrio determinada se llama asintóticamente estable, estable, o atractor. La solución $y = 1$ está atrayendo. Una solución de equilibrio se llama inestable o repelente cuando todas las soluciones cercanas se alejan de él. La solución $y = 0$ es repelente.

En los casos en los cuales las soluciones en un lado de una solución de equilibrio se mueven hacia la solución de equilibrio y en el otro lado de la solución de equilibrio se alejan de ella, la llamamos solución de equilibrio semi-estable.

Observación 1.11 *Soluciones de equilibrio pueden ser definidas para ecuaciones diferenciales no autónomas.*

Ejemplo 1.27 *Por ejemplo, la función* $y(x) = 1$ *es una solución de equilibrio de la ecuación diferencial* $y' = (1-y)\,x^2$.

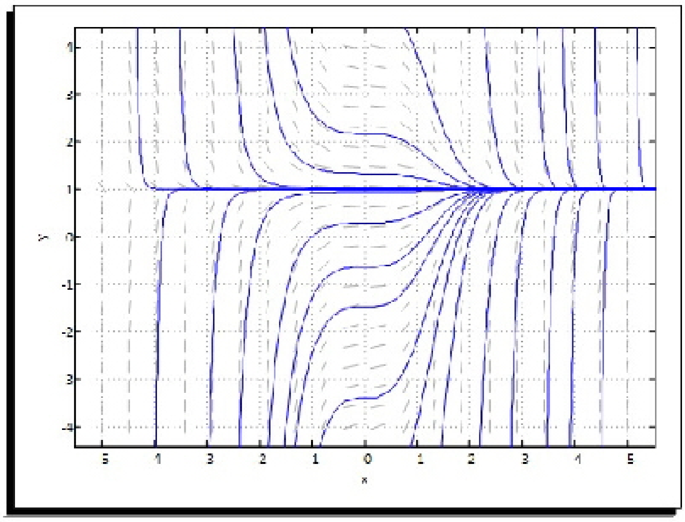

Figura 1.14 Campos de direcciones de la ecuación diferencial $y' = (1-y)\,x^2$.

Una solución de equilibrio no necesariamente tiene que atraer o repeler. El siguiente ejemplo ilustra esta situación.

Construir el campo direccional de la ecuación diferencial $y' = 4y\,(1-y)^2$. Mostrar que $y = 1$ no es ni estable ni inestable. El campo direccional se muestra en la figura 1.15.

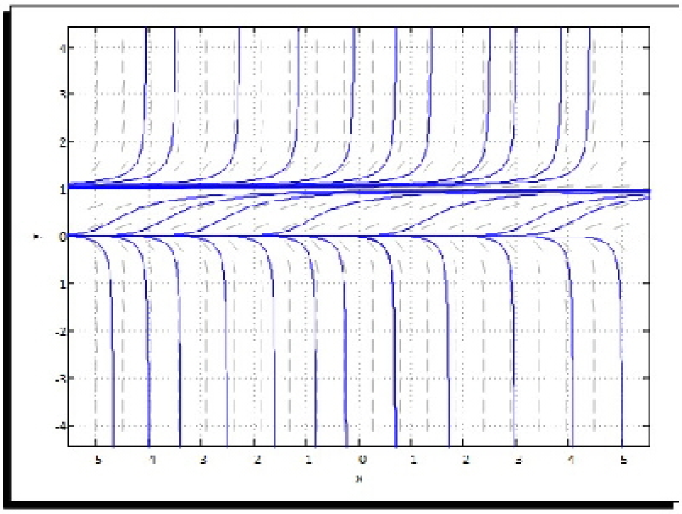

Figura 1.15 Campo direccional de la ecuación diferencial

Note que la solución de equilibrio $y(x) = 1$ no es ni estable ni inestable. Cerca de las soluciones que comienzan debajo de ella son atraídos hacia arriba, hacia él, pero las soluciones cercanas que comienzan por encima de ella son repelidos hacia arriba y lejos de ella. Otra representación cualitativa de una ecuación diferencial es el modo llamado línea de fase. Una línea de fase consta de puntos sólidos y flechas. Los puntos sólidos representan los puntos de equilibrio y las flechas indican las direcciones que las soluciones se mueven cuando t aumenta.

Ejercicios

1. Encontrar todas las soluciones de equilibrio de cada una de las ecuaciones diferenciales autónomas que se indican a continuación.

   a) $y' = (y-1)\,(y-2)$
   b) $y' = (y-1)\,(y-2)^2$
   c) $y' = (y-1)\,(y-2)\,(y-3)$
   d) $y' = y * \sin(y)$

2. Encontrar una ecuación diferencial autónoma con una solución de equilibrio en $y = 1$ y satisfaciendo $y' < 0$ para $-\infty < y < 1$ y $1 < y < +\infty$.

3. Dada la ecuación diferencial $y'(t) = y^2\left(y^2 - 4\right)$.

   a) Encontrar todas las soluciones $y =$ constante, de la ecuación diferencial.
   Mostrar que si $y(t)$ es solución al problema, $y\,(t - t_0)$ es también solución. Interprete el resultado geométricamente.
   b) ¿Para qué valores de y son las soluciones $y(t)$ crecientes? ¿decrecientes? Dibuje la línea fase para el problema.
   c) Describa el comportamiento de las soluciones cuando t tiende a infinito.
   d) Determinar la concavidad de las soluciones.

4. Encontrar una ecuación diferencial autónoma con una solución de equilibrio en $y = 1$ y satisfaciendo $y' < 0$ para $-\infty < y < 1$ y $1 < y < +\infty$.

5. Encontrar una ecuación diferencial autónoma que no tenga soluciones de equilibrio y que satisfaga $y' > 0$.

6. Encontrar una ecuación diferencial autónoma que no tenga soluciones de equilibrio y que satisfaga $y' > 0$.

1.3. Teorema de existencia y unicidad

Enunciaremos, sin demostración, una variante menos potente, pero que resulta de mayor utilidad práctica, ya que las condiciones suficientes son más fáciles de comprobar que otras menos restrictivas que pueden utilizarse en su lugar.

Teorema 1.12 ***(Existencia y unicidad).*** *Si la función f y su derivada $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en un dominio, el problema de condiciones iniciales*

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases},$$

tiene una única solución para cada condición inicial (x_0, y_0)en el dominio.

1.3.1. Observaciones

Una ecuación diferencial de primer orden $y' = f(x,y)$ no necesariamente tiene una solución que la satisfaga. Por lo tanto, la existencia de una solución es un problema importante tanto desde el punto de vista teórico como de las aplicaciones.

Algunos fenómenos son modelados por una ecuación diferencial, entonces la ecuación debe tener una solución. Si no lo tiene, entonces presumiblemente hay algo mal con la modelación matemática y la necesidad de simulación para mejorar. Por lo tanto, un ingeniero o un científico les gustaría saber si una ecuación diferencial tiene una solución antes de invertir tiempo, esfuerzo, y las aplicaciones informáticas en un vano intento de resolverlo.

Una aplicación de un paquete de software puede fallar para proporcionar una solución de una ecuación diferencial dada, pero esto no significa que la ecuación diferencial no tiene una solución.

Siempre que un problema de valor inicial se ha formulado, hay tres preguntas que pueden formularse antes de encontrar una solución:

1. ¿Existe una solución de la ecuación diferencial que satisface las condiciones dadas?

2. Si existe una solución que satisface las condiciones dadas, puede haber una solución diferente que también satisface las condiciones?

3. ¿Cuál es la razón para determinar si un problema de valor inicial tiene una solución única si no vamos a ser capaces de determinar de forma explícita?

Una respuesta afirmativa a la primera pregunta es nuestra licencia de caza para ir en busca de una solución. En la práctica, se desea encontrar la solución de una ecuación diferencial que satisface las condiciones dadas a menos de un número finito de cifras decimales. Por ejemplo, si queremos dibujar la solución, nuestros ojos no pueden distinguir dos funciones que tienen valores que difieren en menos del 1 %. Por lo tanto, para aplicaciones de impresión, el conocimiento de tres cifras significativas en la solución es exactitud admisible. Esto puede hacerse, por ejemplo, con la ayuda de paquetes de software disponibles.

En general, la existencia o unicidad de un problema de valor inicial no puede ser garantizada. Por ejemplo, el problema de valor inicial $y' = y^2$, $x < 1$, $y(1) = -1$ tiene una solución $y = -x^{-1}$, que no existe para $x = 0$. Por otra parte, el problema de valor incial $y' = 2\sqrt{y}$, muestra que el problema de valor inicial puede tener dos (o más) soluciones.

Para la mayoría de las ecuaciones diferenciales en este libro, hay soluciones únicas que satisfacen ciertas condiciones establecidas. Sin embargo, consideremos la ecuación diferencial $xy' - 5y = 0$. Supongamos que un científico ha dibujado una curva experimental como se muestra en la figura 1.16.

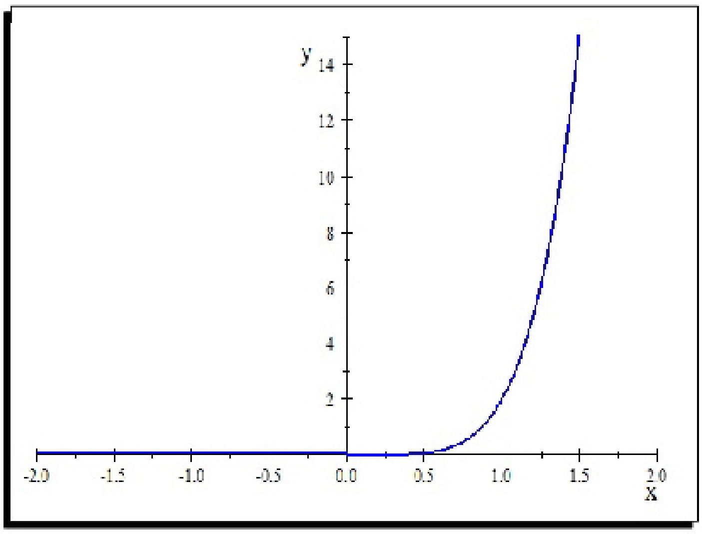

Figura 1.16 Curva experimental a la izquierda y solución modelada a la derecha.

La solución general de la ecuación diferencial es $y = Cx^5$ con una constante arbitraria C. De la condición inicial $y(1) = 2$, se sigue que $C = 2$ y por tanto $y = 2x^5$. Por lo tanto, los gráficos teóricos y experimentales estuvieron de acuerdo para $x > 0$, pero no están de acuerdo para $x < 0$.

Si el científico habría asumido erróneamente que existe una solución única, él puede decidir que la matemática era incorrecta. Sin embargo, puesto que la ecuación diferencial tiene un punto singular $x = 0$, su solución general contiene dos constantes arbitrarias, A y B, una para el dominio $x > 0$ y otra para $x < 0$. Así que

$$y(x) = \begin{cases} Ax^5, \text{ si } x \geq 0, \\ Bx^5, \text{ si } x \leq 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, el gráfico experimental corresponde al caso $A = 2$ y $B = 0$.

Ahora supongamos que para la misma ecuación diferencial $xy' = 5y$ tenemos la condición inicial en el origen $y(0) = 0$. Entonces cualquier función $y = Cx^5$ la satisface para cualquier valor de C y tenemos entonces una infinidad de soluciones al problema de valor incial dado.Por otra parte, si queremos resolver la ecuación dada con la condición inicial $y(0) = 1$, estamos fuera de suerte. Este problema de valor inicial no tiene solución.

A continuación, trataremos dos teoremas fundamentales para ecuaciones diferenciales de primer orden sujetas a condiciones iniciales que prueban la existencia y unicidad de sus soluciones. Estos teoremas establecen condiciones suficientes para la existencia y unicidad de una solución; esto es, si las condiciones se cumplen, entonces la unicidad y/o existencia están garantizadas. Sin embargo, las condiciones no son condiciones necesarias en absoluto; todavía puede haber una solución única si no se cumplen estas condiciones. El siguiente teorema garantiza la existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales lineales.

Teorema 1.13 *Consideremos el problema del valor inicial para la ecuación diferencial lineal*

$$\begin{cases} y' + a(x)y = f(x) \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

donde $a(x)$ y $f(x)$ son funciones conocidas y y_0 es un valor inicial arbitrario dado

Asumiendo que las funciones $a(x)$ y $f(x)$ son continuas en un intervalo abierto $\alpha < x < \beta$ que contiene el punto x_0. Entonces el problema de valor inicial $y' + a(x)y = f(x)$, $y(x_0) = y_0$, tiene una única solución $y = \phi(x)$ en el mismo intervalo $]\alpha, \beta[$.

Mostramos que si $y' + a(x)y = f(x)$ tiene una solución, entonces debe estar dada por la fórmula siguiente:

$$y(x) = \mu^{-1}(x) \left[\int \mu(x) f(x) dx + C \right], \quad \text{con } \mu(x) = \exp\left\{ \int a(x) dx \right\}.$$

Donde $\mu(x)$ es una función derivable no nula en el intervalo $]\alpha,\beta[$. Se tiene que

$$\frac{d}{dx}\left[\mu(x)y(x)\right]=\mu(x)f(x).$$

puesto que $\mu(x)$ y $f(x)$ son funciones continuas, su producto $\mu(x)f(x)$ es integrable y la ecuación $y(x)=\mu^{-1}(x)\left[\int\mu(x)f(x)dx+C\right]$, se sigue de esta última ecuación. Por tanto, la función $y(x)$ existe y es diferenciable en el intervalo $]\alpha,\beta[$. Sustituyendo la expresión para $y(x)$ en la ecuación diferencial, podemos verificar que esta expresión es una solución de la ecuación diferencial lineal. Finalmente, la condición inicial determina la constante C de manera única. Por sustitución directa

Si escogemos como límite inferior x_0 en todas las integrales en la expresión $y(x)=\frac{\int\mu(x)f(x)dx+C}{\mu(x)}$, entonces

$$y(x)=\frac{1}{\mu(x)}\left[\int_{x_0}^{x}\mu(s)f(s)ds+y_0\right],\quad \mu(x)=\exp\left\{\int_{x_0}^{x}a(s)ds\right\}$$

es la solución del problema de valor inicial $y'+a(x)y=f(x)$, $y(x_0)=y_0$.

En 1886, Giuseppe Peano da condiciones suficientes que solo garantizan la existencia de una solución para problemas de valor inicial.

Teorema 1.14 *(de Peano) Supongamos que la función $f(x,y)$ es continua en algún rectángulo:*

$$\Omega=\{(x,y):x_0-a\le x\le x_0+a,\quad y_0-b\le y\le y_0+b\ \}\text{. Sea } M=\max_{(x,y)\in\Omega}|f(x,y)|,\ h=\min\left\{a,\frac{b}{M}\right\}.$$

Entonces el problema de valor inicial $y'=f(x,y)$, $y(x_0)=y_0$, tiene una solución en el intervalo $[x_0-h,x_0+h]$.

En la mayoría de las presentaciones de hoy, el teorema de Peano se demuestra con la ayuda del principio de compacidad Arzela-Ascoli para una sucesión de funciones o el teorema del punto fijo de Banach, que están más allá del alcance de este libro.

El teorema de existencia de Peano puede ser mirado como una generalización del teorema fundamental del cálculo, que hace la misma afirmación para la ecuación de primer orden $y'=f(x)$. La intuición geométrica sugiere que se puede obtener una curva solución, si la hay, de la ecuación $y'=f(x,y)$ enhebrando los segmentos del campo de dirección.

Giuseppe Peano (1858-1932) fue un famoso matemático italiano que trabajó en la universidad de Turín. En 1890, Peano mostró que la solución de la ecuación diferencial no lineal $y'=3y^{2/3}$ sujeta a la condición inicial $y(0)=0$ no es única. Descubrió y publicó una método para resolver ecuaciones diferenciales lineales usando aproximaciones sucesivas. Sin embargo, Emile Picard había redescubierto de manera independiente este método y lo había aplicado para mostrar la existencia y singularidad de las soluciones a los problemas de valores iniciales de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Su resultado, conocido como el teorema de Picard, impone una condición más fuerte en $f(x,y)$ para evitar que la ecuación $y'=f(x,y)$ tenga soluciones singulares.

Conjectura 1.15 *Si la función continua $f(x,y)$ en el dominio $\Omega=\{(x,y):\alpha<x<\beta,\quad -\infty<y<+\infty\ \}$ satisface la desigualdad $|f(x,y)|\le a(x)\,|y|+b(x)$, donde $a(x)$ y $b(x)$ son funciones continuas positivas, entonces la solución al problema de valor inicial $y'=f(x,y)$, $y(x_0)=y_0$, existe en el intervalo $\alpha<x<\beta$.*

Teorema 1.16 *de Picard. Sea $f(x,y)$ una función continua en un dominio rectangular Ω que contenga el punto (x_0,y_0). Si $f(x,y)$ satisface la condición de Lipschitz*

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L\,|y_1-y_2|$$

para alguna constante positiva L (llamada constante de Lipschitz) y x, y_1, y y_2 de Ω, entonces el problema de valor inicial $y'=f(x,y)$, $y_0=y(x_0)$ tiene una solución única en algún intervalo $x_0-h\le x\le x_0+h$, donde h es definida por $h=\min\left\{a,\frac{b}{M}\right\}$, con $M=\max_{(x,y)\in\Omega}|f(x,y)|$.

El teorema de Picard impone una condición más fuerte sobre $f(x,y)$ para evitar que la ecuación $y'=f(x,y)$ tenga soluciones singulares.

Demostración. No podemos garantizar que la solución $y = \phi(x)$ del problema de valor inicial existe en el intervalo$]x_0 - a, x_0 + a[$ porque la curva integral $y = \phi(x)$ puede existir fuera del rectángulo Ω. Por ejemplo, si existe x_1 tal que $x_0 - a \leq x_1 \leq x_0 + a$ y $y_0 + b = \phi(x_1)$, entonces para $x > x_1$ (si $x_1 > x_0$) la solución $\phi(x)$ puede no estar definida.

Definitivamente sabemos que la solución $y = \phi(x)$ está en el rango $y_0 - b \leq \phi(x) \leq y_0 + b$ cuando $x_0 - h \leq x \leq x_0 + h$, con $h = \text{mín}\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\}$

Observaciones:

- En 1838, Joseph Liouville fue el primero en usar el método de aproximaciones sucesivas en un caso especial.
- Charles Emile Picard (1856-1941) fue uno de las más grandes matemáticos franceses del siglo diecinueve.
- Es llamada la condición de Lipschitz en honor al matemático alemán Rudolf Lipschitz (1832-1903), quien lo introdujo en 1876 al elaborar pruebas de existencia para ecuaciones diferenciales ordinarias.

Corolario 1.17 *Si las funciones* $f(x,y)$ *y* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *son continuas en un rectángulo*

$$\Omega = \{(x,y) : x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, \quad y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\},$$

entonces el problema de valor inicial $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$, *tiene una única solución en el intervalo* $|x - x_0| \leq h$, *donde* h *está definido por* $h = \text{mín}\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\}$ *con* $M = \text{máx}_{(x,y)\in\Omega} |f(x,y)|$ *y la constante de Lipschitz es* $L = \text{máx}\left|\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|$.

Corolario 1.18 *Si las funciones* $f(x,y)$ *y* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *son continuas en una vecindad del punto* (x_0, y_0) *y* $f(x_0, y_0) \neq 0$, *entonces el problema de valor inicial* $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$, *tiene una única solución.*

Ejemplo 1.28 *Consideremos nuevamente el problema de valor inicial* $y' = 2y^{1/2}$, $y(0) = 0$. *El teorema de Peano garantiza la existencia para el problema de valor inicial puesto que la función* $f(x,y) = 2y^{1/2}$ *es continua.El punto crítico* $y = 0$ *es obviamente una solución del problema de valor inicial. Podemos mostrar que* $f(x,y) = 2y^{1/2}$ *no es una función de Lipschitz asumiendo lo contrario. Existe entonces una constante positiva* L *tal que*

$$\left|y_1^{1/2} - y_2^{1/2}\right| \leq L\,|y_1 - y_2|\,.$$

Haciendo $y_2 = 0$, *tenemos*

$$\left|y_1^{1/2}\right| \leq L\,|y_1| \quad \text{o también} \quad 1 \leq L\left|y_1^{1/2}\right|.$$

La última desigualdad no se cumple para pequeños y_1; *por lo tanto,* $f(y) = 2y^{1/2}$ *no es función Lipschitz. En este caso no podemos aplicar el teorema de Picard, y el problema de valor inicial dado puede tener múltiples soluciones. Puesto que la integral*

$$\int_0^y \frac{du}{2\sqrt{u}}$$

converge, el problema de valor inicial no tiene solución única. Además, para $x_0 > 0$ *arbitrario, la función*

$$y = \varphi(x) \underset{def}{=} \begin{cases} 0, \ si \ -\infty < x \leq x_0, \\ (x - x_0)^2, \ si \ x > x_0, \end{cases}$$

es una solución singular del problema de Cauchy. Note que $y = 0$ *es la envolvente de la familia uniparamétrica de curvas,* $y = (x - C)^2$, *con* $x \geq C$, *correspondiente a la solución general.*

Ejemplo 1.29 *Consideremos la edo autónoma $y' = |y|$, la función pendiente $f(x,y) = |y|$ no es derivable en $x = 0$, pero es una función de Lipschitz, con $L = 1$. De acuerdo al teorema de Picard, el problema de valor inicial con la condición inicial $y(0) = y_0$ tiene solución única:*

$$y(x) = \begin{cases} y_0 e^x, \ si\ y_0 > 0, \\ 0, \ si\ y_0 = 0, \\ y_0 e^{-x}, \ si\ y_0 < 0. \end{cases}$$

Puesto que una función exponencial es siempre positiva, las curvas integrales nunca encuentran o cruzan la solución de equilibrio $y = 0$.

Ejemplo 1.30 *¿El problema de valor inicial*

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{3}{2}(y-x)^{1/3}, \quad y(0) = 0,$$

tiene una solución singular? Encontrar todas las soluciones de esta ecuación diferencial.

Solución. *Cambiando la variable dependiente a $y - x = u$, encontramos que la ecuación diferencial con respecto a u es $u' = \frac{3u^{1/3}}{2}$. La derivada de la función $f(x,u) = f(u) = \frac{3u^{1/3}}{2}$ es $f'(u) = \frac{1}{2}u^{-2/3}$, que no es acotada en $u = 0$. En este caso, el teorema de Picard no se puede aplicar y la ecuación diferencial $u' = \frac{3u^{1/3}}{2}$ puede tener una solución singular. dado que la ecuación para u es autónoma, podemos aplicar el teorema 1.41. La integral*

$$\int_0^u \frac{dz}{f(z)} = \frac{3}{2}\int_0^u z^{-1/3}dz = z^{2/3}\Big|_0^u = u^{2/3}$$

converge. Por lo tanto, hay otra solución además de la general, $y = \sigma(x+C)^{3/2}$, donde $\sigma = \pm 1$ y C es una constante arbitraria. Note que la solución general de esta ecuación diferencial no lineal depende a más de la constante de integración; también depende del parámetro discreto σ. Retornando a la variable y, obtenemos la solución singular $y = x$ (que corresponde a $u = 0$) y la solución general $y = x + \sigma(x-C)^{3/2}$, $x \geq C$.

1.4. Ecuaciones diferenciales a variables separables

1. Determine una familia de soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales, utilice el comando **dsolve** de MATLAB para encontrar la solución exacta y utilice el comando **dfield8** para graficar los campos direccionales

   a) $\frac{1}{y}y' = \frac{1}{x}\log(x)$;

   b) $\frac{1}{y^3+y}y' = \frac{1}{x}$;

   c) $\cos^2(t)\cot(y)y' = -\tan(t)\,\mathrm{sen}^2(t)$;

   d) $te^y y' = -\frac{t^2+1}{y}$;

   e) $\left(t^2y - y\right)y' = -\left(ty^2 + t\right)$;

   f) $\frac{dy}{dx} = \left(y^2+1\right)x$.

   g) $\frac{dy}{dx} = x\ e^{y+x^2}$.

   h) $\frac{dy}{dx} = 2x^5\sqrt{1+y}$.

   i) $\frac{dy}{dx} = \left(1+y^2\right)\cos 2x$.

   j) $(y\ln x)^{-1}\frac{dy}{dx} = \left(\frac{x}{y+1}\right)^2$.

   k) $\frac{d\theta}{dt} = (\cos t)\left(\cos 2\theta - \cos^2\theta\right)$.

   l) $\frac{ds}{dt} = \frac{\left(s^3-s\right)\left(4t^3-6t\right)}{(t^4-3t^2)(3s^2-1)}$

   m) $e^x y dy - \left(e^{-y} + e^{2x-y}\right)dx = 0$.

   n) $\frac{dt}{du} = \frac{tu+u+3t+3}{tu+2u-t-2}$.

   ñ) $\frac{1}{(y-1)^2}dx + \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}dy = 0$.

   o) $x^2y' = 1 - x^2 + y^2 - x^2y^2$.

   p) $\frac{dy}{dx} = \frac{xy+3x-y-3}{xy-2x+4y-8}$

   q) $\sec y\frac{dy}{dx} + \sin(x-y) = sen(x+y)$

   r) $(x+\sqrt{x})\frac{dy}{dx} = (y+\sqrt{y})$

2. Resuelva cada problema de valor inicial. Si es posible, encontrar soluciones explícitas. Determinar al menos aproximadamente el intervalo en el cual la solución está definida.

   a) $y' = \dfrac{x\left(x^2+2\right)}{4y^3}, \; y(0) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

   b) $y' = \dfrac{2x}{y + x^2 y}, \; y(0) = -2.$

   c) $ye^{-x}y' + x = 0, \quad y(0) = 1.$

   d) $\dfrac{2t-1}{t}dt + \dfrac{r-2r^2}{t^2-1}dt = 0,$ con $r\,(2) = 4.$

   e) $\dfrac{dT}{dt} = k\,(T - T_1),$ con $T\,(0) = T_0,$ donde k, T_0, T_1 son constantes.

3. Una población aislada, afectada de una enfermedad desconocida, va desapareciendo a ritmo inversamente proporcional a la población presente. Se sabe que la población que inicialmente es de 10 mil habitantes se reduce a 9 mil en 24 horas. Si $x(t)$ indica la población en el instante de tiempo t (medido en días), se pide:

   a) Completar la siguiente tabla

t	2	3	4	5
$x(t)$				

   indicando los valores de $x(t)$ mediante aproximaciones por defecto.

   b) Hallar el número de personas que permanece con vida transcurridas seis horas del sexto día.

   c) Hallar el número de personas que permanece con vida a las seis horas y quince minutos del sexto día.

   d) Calcular $\lim\limits_{t\to\left(\frac{100}{19}\right)^-} x(t)$ y explicar el significado de este resultado.

1.5. Ecuaciones diferenciales homogéneas

1. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas

   a) $y^{'} = \frac{(3x^2+y^2)y}{2x^3}$

   b) $\frac{x+yy^{'}}{x-yy^{'}} = \frac{x^2+y^2}{2(x^2-y^2)}$

   c) $z(\sqrt[4]{z} + 3\sqrt[4]{w})dw + w(3\sqrt[4]{z} + 4\sqrt[4]{w})dz = 0$

   d) $(xy - x\sqrt{x^2-y^2}\arcsin(\frac{y}{x}))dy - y^2dx = 0$

   e) $y' = \frac{x}{y}\sin(\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2})$

   f) $y^{'} = \log x - \log y$

   g) $y^{'} = \frac{y(x^2+xy+y^2)}{x(x^2+3xy+y^2)}$

   h) $y^{'} = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}$

2. Demuestre que la familia de curvas $x^n + y^n = Cx^m y^m$ siempre conduce a ecuaciones diferenciales homogéneas. ¿Que limitaciones hay para los valores de n y m?

3. Resolver el problema de valor inicial

   a) $4x^3ydy + \left(x^4 - 4x^2y^2 - y^4\right)dx = 0,$ con $y(-5) = 0$

   b) $y^{'} = \frac{y(1-\sqrt{x^2+y^2})}{x},$ con $y(0) = 4$

   c) $x^2y^{'} = xy - (x^2+y^2)\arctan(\frac{x}{y})$

4. Con la sustición $xy = \sin\theta$ o $xy = v$, resuelva la ecuación diferencial $y^{'} = \frac{(x^2y^2-2)\pm 2\sqrt{1-x^2y^2}}{x^3y}$

5. Resolver la ecuación diferencial $(1+y^2e^{2x})y^{'} + y = 0$ con el cambio de variable $y = ue^{mx}$ donde m es una constante y u es una nueva función incógnita.

1.6. Ecuaciones diferenciales exactas y factores integrantes

1. Resolver la ecuación diferencial

a) $ye^{xy} + x\ y'e^{xy} + 2x = 0.$
b) $\left(3x^2y + 2xy + y^3\right) dx + \left(x^2 + y^2\right) dy = 0.$
c) $y' - y\tan x = \operatorname{sen} x \cos x.$
d) $(e^y + 2xy\cosh x)y' + xy^2 \sinh x + y^2\cosh x = 0$
e) $(\sin y - y\sin x)dx + (\cos x + x\cos y - y)dy = 0$
f) $(2y - \frac{1}{x} + \cos 3x)\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x^2} - 4x^3 + 3y\sin 3x = 0$
g) $(1 - \frac{3}{x} + y)dx + (1 - \frac{3}{y} + x)dy = 0$
h) $(\tan x - \sin x \sin y)dx + \cos x \cos y dy = 0$
i) $\dfrac{dy}{dx} = e^x - \operatorname{sen} x.$
j) $x^2\dfrac{dy}{dx} + 2xy = e^x - \operatorname{sen} x.$
k) $y' + y = 1 + e^x.$

2. ¿Es la ecuación $(2xy + 3)\, dx + \left(x^2 - 1\right) dy = 0$, una ecuación diferencial exacta? Si la respuesta es afirmativa, resuélvala.

3. Resolver el problema de valor inicial

a) $(2x - y) + (2y - x)\, y' = 0$, con $y(1) = 3$.
b) $xy' - 2y = \sqrt{x}$, con $y(1) = 0$.
c) $ty' + (t + 1)\, y = t$, con $y(\ln 2) = 1$, $t > 0$.
d) $(x + y)^2dx + (2xy + x^2 - 1)dy = 0$, con $y(1) = 1$
e) $(x + y)^2dx + (2xy + x^2 - 1)dy = 0$, con $y(1) = 1$
f) $(\frac{3y^2 - x^2}{y^5})\frac{dy}{dx} + \frac{x}{2y^4} = 0$,con $y(1) = 1$

4. Encontrar el valor de y_0 para el cual la solución del problema de valor inicial $y' - y = 1 + 3\operatorname{sen} t$, con $y(0) = y_0$, permanece finita cuando $t \to +\infty$.

5. ¿Es la ecuación $x^2y^3 + x\left(1 + y^2\right) y' = 0$, una ecuación diferencial exacta? Multiplique la ecuación por el factor integrante $\mu\,(x, y) = \dfrac{1}{xy^3}$ y resolver la ecuación diferencial.

6. En los siguientes problemas determine el valor de k para que la ecuación diferencial correspondiente sea exacta

a) $(y^3 + kxy^4 - 2x)dx + (3xy^2 + 20x^2y^3)dy = 0$
b) $(2x - y\sin xy + ky^4)dx - (20xy^3 + x\sin xy)dy = 0$
c) $(2xy^2 + ye^x)dx + (2x^2y + ke^x - 1)dy = 0$
d) $(6xy^3 + \cos y)dx + (kx^2y^2 - x\sin y)dy = 0$

7. Deduzca una función $M(x, y)$ tal que la siguiente ecuación diferencial sea exacta

a) $M(x, y)dx + (xe^{xy} + 2xy + \frac{1}{x})dy = 0.$
b) $(y^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{x}{x^2+y})dx + M(x, y)dy = 0.$

8. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales comprobando que la función $\mu(x, y)$ es un factor integrante.

a) $6xydx + (4y + 9x^2)dy = 0$, $\quad \mu(x, y) = y^2$
b) $-y^2dx + (x^2 + xy)dy = 0$, $\quad \mu(x, y) = \frac{1}{x^2y}$
c) $(-xy\sin x + 2y\cos x)dx + 2x\cos xdy = 0$, $\quad \mu(x, y) = xy$
d) $y^2dx + (1 + xy)dy = 0$, $\quad \mu(x, y) = e^{xy}$

9. ¿Bajo qué condiciones son exactas las siguientes ecuaciones diferenciales?

a) $f(x)g(y)dx + h(x, y)dy = 0$
b) $(f(x) + g(y))dx + (h(x) + l(y))dy = 0$
c) $(x^3 + xy^2)dx + (ax^2y + bxy^2)dy = 0$

Autoevaluación (Taller en grupo)

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

1. $(2y\sin x\cos x - y + 2y^2e^{xy^2})dx = (x - \sin^2 x - 4xye^{xy^2})dy$

2. $(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{y}{x^2+y^2})dx + (ye^y + \frac{x}{x^2+y^2})dx$

3. En los siguientes ejercicios resuelva la ecuación diferencial sujeta a la condición indicada.

   a) $(y^2 \cos x - 3x^2 y - 2x)dx + (2y \sin x - x^3 + \ln y)dy = 0, \quad y(0) = e$

   b) $(\frac{1}{1+y^2} + \cos x - 2xy)\frac{dy}{dx} = y(y + \sin x), \;\; y(0) = 1.$

1.6.1. Ejercicios

1. Una ecuación diferencial de la forma $y' = f(t; y)$ se dice homogénea si $f(\lambda t; \lambda y) = f(t; y)$; para todo λ.

   a) Pruebe que si $y' = f(t; y)$ es una ecuación diferencial homogénea, es posible escribirla en la forma
   $$y' = g\left(\frac{y}{t}\right). \qquad (1)$$

   b) Pruebe que efectuando el cambio de variable dependiente $(y \to z)$ definido por $\dfrac{y}{t} = z$, la ecuación (1) se transforma en una ecuación de variables separables.

   c) Pruebe que las siguientes edos son homogéneas y determine sus soluciones generales.

   1) $2t^2 + y^2 - tyy' = 0$;
   2) $ty' = te^{-t/y} + y$.

2. Determine una famılia de soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales.

   a) Lineales de primer orden:

   b) $y' + \cos(t) \cdot y = 0$;

   c) $y' + \dfrac{2t}{1+t^2} y = \dfrac{1}{1+t^2}$;

   d) $y' + t^2 y = 1$.

3. Determine el comportamiento, cuando $t \to +\infty$, de todas las soluciones de la ecuación diferencial $y' + ay = 0$; donde a es una constante.

4. Determine una solución continua del problema de valor inicial $y' + y = g(t)$; $y(0) = 0$; donde $g(t) = \begin{cases} 2. \text{ si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0, \text{ si } t > 1, \end{cases}$.

5. Encontrar la solución general de la ecuación diferencial $\dfrac{y}{y'} = x + \sqrt{x^2 + y^2}$.

   Solución. La ecuación puede ser escrita en la forma
   $$y\frac{dx}{dy} = x + \sqrt{x^2 + y^2} \text{ o también, } \frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} + \sqrt{\frac{x^2}{y^2} + 1}.$$

   Usando la sustitución $\dfrac{x}{y} = u$ o también, $x = yu$, se tiene:
   $$\begin{aligned}
   \frac{dx}{dy} &= u + y\frac{du}{dy} \Longrightarrow u + y\frac{du}{dy} = u + \sqrt{u^2+1} \Longrightarrow \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} = \frac{dy}{y} \\
   &\Longrightarrow \int \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} = \int \frac{dy}{y} + \ln C \Longrightarrow \ln\left(u + \sqrt{u^2+1}\right) = \ln y + \ln C \\
   &\Longrightarrow u + \sqrt{u^2+1} = Cy \Longrightarrow \frac{x}{y} + \sqrt{\frac{x^2}{y^2} + 1} = Cy \Longrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = Cy^2 - x \\
   &\Longrightarrow x^2 + y^2 = C^2y^4 - 2Cxy^2 + x^2 \Longrightarrow C^2y^2 = 2Cx + 1 \text{ es la solución general.}
   \end{aligned}$$

6. (El problema del nadador que cruza un río). Un nadador parte de un punto P en el banco. Él quiere llegar al punto Q en el otro lado. La velocidad del río es constante e igual a $v_1 = k_1$ y la velocidad del nadador es $v_2 = k_2$ donde k_2 es constante. Encontrar la trayectoria descrita por el nadador, sabiendo que la velocidad del nadador siempre se dirige hacia Q.

Solución. Seleccionemos Q como el origen del sistema como se muestra en la figura. Consideremos que M es la posición del nadador en el tiempo t. Las componentes de la velocidad en los dos ejes Ox y Oy son

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k_1 - k_2 \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \dfrac{dy}{dt} = -k_2 \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases}$$

Dividiendo la relación previa resulta:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} - k\sqrt{\frac{x^2}{y^2}+1}, \quad \text{donde } k = \frac{k_1}{k_2}.$$

La siguiente sustitución es usada: $x = yu$ y $\dfrac{dx}{dy} = u + y\dfrac{du}{dy}$. La ecuación diferencial se transforma en

$$y\frac{du}{dy} = -k\sqrt{u^2+1} \quad \text{o también,} \quad \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} = -k\frac{dy}{y}.$$

Luego de integrar se tiene:

$$\ln\left(u+\sqrt{u^2+1}\right) = -k\ln y + \ln C, \text{ con } C > 0, \text{ o también, } \quad u+\sqrt{u^2+1} = Cy^{-k}.$$

De donde, $u = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{C}{y^k} - \dfrac{y^k}{C}\right)$. Retornando a las variables x y y, se obtiene, $x = \dfrac{y}{2}\left(\dfrac{C}{y^k} - \dfrac{y^k}{C}\right)$. De la condición de que la trayectoria pasa por el punto inicial $P(x_0, y_0)$ la constante C es $C = y_0^{k-1}\left(x_0 + \sqrt{x_0^2+y_0^2}\right)$. La condición que pase por Q es escrita como $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{y}{2}\left(\dfrac{C}{y^k} - \dfrac{y^k}{C}\right) = 0$ y ello es posible si $k < 1$. Para $k_1 = 0$, $k = 0$, la trayectoria tiene por ecuación $x = \frac{x_0}{y_0}y$; es decir, el segmento de recta entre P y Q.

7. Hallar todas las soluciones de $y^{'}\sin x + y\cos x = 1$ en el intervalo $(0, \pi)$. Demostrar que una exactamente de estas soluciones tiene límite finito cuando $x \to 0$, y otra lo tiene también finito cuando $x \to \pi$.

8. Hallar todas las soluciones de $x(x+1)y^{'} + y = x(x+1)^2 e^{-x^2}$ en el intervalo $(-1, 0)$. Probar que todas las soluciones tienden a 0 cuando $x \to 1$, y que tan solo una de ellas tiene límite finito cuando $x \to 0$.

9. La función f definida por la ecuación

$$f(x) = xe^{\frac{1-x^2}{2}} - xe^{-\frac{x^2}{2}}\int_1^x t^{-2}e^{\frac{t^2}{2}}\,dt$$

para $x > 0$ tiene las propiedades de que 1) es continua en el eje real positivo, y 2) satisface la ecuación

$$f(x) = 1 - x\int_1^x f(t)dt$$

para todo $x > 0$. Hallar todas las funciones con esas dos propiedades.

10. Dada una función f que satisface las relaciones

$$2f^{'}(x) = f(\frac{1}{x}), \text{ si } x > 0, \ f(1) = 2$$

a) Si $y = f(x)$, probar que y satisface una ecuación diferencial de la forma

$$x^2y^{''} + axy^{'} + by = 0,$$

donde a y b son constantes.

b) Encontrar una solución de la forma $f(x) = Cx^n$.

Capítulo 2

Modelado con ecuaciones diferenciales

La formulación matemática de problemas en ingeniería y ciencia suele conducir a ecuaciones que implican derivadas de una o más funciones desconocidas. Tales ecuaciones se llaman ecuaciones diferenciales.

Precisamente, para ilustrar el concepto de ecuación diferencial y su relación con distintas ramas de las ciencias, vamos a analizar una serie de problemas prácticos donde las ecuaciones diferenciales surgen de forma natural. Aprovecharemos para introducir algunas definiciones que formalizaremos más adelante.

Los modelos matemáticos asociados con las ecuaciones diferenciales en este libro serán simuladas con Simulink de MATLAB, en el apéndice 1 se indica la forma de utilizar Simulink para modelar las ecuaciones diferenciales.

2.1. Ecuaciones diferenciales de primer orden

En esta sección simulamos modelos matemáticos que conducen a ecuaciones diferenciales de primer orden, como la evolución de la temperatura de una barra metálica que ha sido calentada hasta una cierta temperatura, los del crecimiento demográfico, la desintegración radiactiva, el interés compuesto continuamente, las reacciones químicas, un líquido que sale por un agujero en un tanque, la velocidad de caída de un cuerpo, la rapidez de memorización y la corriente en un circuito en serie, son ecuaciones diferenciales de primer orden.

2.2. Temperatura de un cuerpo (Ley de enfriamiento de Newton)

Consideremos la ecuación diferencial que, aplicando la ley de enfriamiento de Newton, nos proporciona un modelo para estudiar la evolución de la temperatura de una barra metálica que ha sido calentada hasta una cierta temperatura, T_0, que llamaremos temperatura inicial, y que a continuación ha sido introducida en un habitáculo a temperatura constante $T = T_a$:

$$\frac{dT}{dt} = k\left(T(t) - T_a\right). \tag{2.1}$$

En primer lugar debemos considerar la temperatura inicial: la temperatura de la barra no evolucionará igual si la temperatura inicial de la barra es $50°C$ o si es $75°C$. Al problema de hallar la o las soluciones de la ecuación (2.1) sabiendo que $T(0) = T_0$ se le llama problema de condiciones iniciales para dicha ecuación, y lo escribimos de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = k\left(T(t) - T_a\right) \\ T(0) = T_0 \end{cases} \tag{2.2}$$

Análisis cualitativo

Nuestro objetivo es tener tanta información como sea posible de la solución (veremos más adelante en el curso que solo hay una) de este problema de condiciones iniciales. Es decir, conocer tanto como sea posible acerca de la función $T(t)$ que es solución de la ecuación (2.1) y cumple la condición (2.2). Lo ideal sería tener una expresión explícita de la función $T(t)$. Veremos más adelante que en este caso es posible, pero salvo que necesitemos saber con precisión extrema el valor de T en un instante concreto (digamos $T(60)$, que sería el valor de la temperatura de la barra después de 60 minutos) un simple análisis de la ecuación a partir del significado del concepto de derivada, es suficiente para obtener información muy valiosa sobre la solución.

Observamos en primer lugar que si $T(t) = T_a$ en todo instante, entonces $T(t) - T_a = 0$ y, al sustituir en la ecuación, $\dfrac{dT}{dt} = 0$ para todo t. Por lo tanto $T(t) = T_a$ es una solución de la ecuación. Este tipo especial de soluciones reciben el nombre de soluciones de equilibrio porque son constante para todo t. Su significado es claro y sencillo: la barra no cambia de temperatura si y solo si la temperatura de la barra y del medio ambiente es la misma siempre.

Si $T_0 = T(0) \neq T_a$ entonces en el momento inicial $t = 0$

$$\frac{dT}{dt}(0) = k\,(T_0 - T_a) \neq 0 \tag{2.3}$$

y en consecuencia hay variación de temperatura; es decir, la temperatura de la barra no se mantiene constante. Si $k > 0$ y $T(0) > T_a$ entonces $\dfrac{dT}{dt} > 0$ y la temperatura estaría creciendo. Esto no concuerda con lo que sucede en la realidad: si la temperatura de la barra es superior a la del medio ambiente, la temperatura de la barra decrece, es decir la barra se enfría. Así que conviene añadir a nuestra ecuación o bien que la constante k es negativa, o bien escribir la ecuación como

$$\frac{dT}{dt} = -k\,(T(t) - T_a)$$

siendo k una constante positiva, que es lo que se suele hacer habitualmete. Así pues escribiremos nuestro problema de condiciones iniciales de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = -k\,(T(t) - T_a) \\ T(0) = T_0 \end{cases}$$

Ahora, si $T(0) > T_a$ entonces $\dfrac{dT}{dt} < 0$ con lo que la temperatura de la barra decrecerá; es decir, para $t_1 > 0$ pero muy próximo a $t = 0$, $T(t_1) < T(0)$ y $T(t_1) - T_a < T(0) - T_a$. Por lo tanto,

$$\frac{dT}{dt}(t_1) = -k\,(T(t_1) - T_a) > -k\,(T(0) - T_a) = \frac{dT}{dt}(0)$$

Si t_1 está próximo a 0, la temperatura de la barra decrecerá, pero no lo suficiente como para que sea inferior a T_a. Así pues, $T(t_1) - T_a > 0$ y $0 > T'(t_1) > T'(0)$. Es decir, la derivada será negativa, por lo que la temperatura seguirá decreciendo. Así si $t_2 > t_1$ y es próximo a t_1 tendremos que $T(t_2) < T(t_1)$, y un análisis como el que hemos hecho para 0 y t_1 nos permitirá concluir que

$$\frac{dT}{dt}(t_2) = -k\,(T(t_2) - T_a) > -k\,(T(t_1) - T_a) = \frac{dT}{dt}(t_1)\,.$$

Podría pensarse que es posible que $T(t_2) < T_a$. La observación de la realidad nos dice que esto nunca ocurre. Ahora no podemos demostrarlo pero veremos más adelante en el curso que esto también se deduce de las propiedades de las ecuaciones diferenciales. Todavía no estamos preparados para hacerlo, pero vamos a seguir suponiendo que $T(t_2) > T_a$ de modo que $0 > T'(t_2) > T'(t_1)$. Y podríamos seguir el análisis con un $t_3 > t_2$ pero próximo a t_2.

En conclusión, la derivada $T'(t)$ siempre es negativa, cada vez mayor y, por lo tanto, cada vez más próxima a 0. Esto significa que la gráfica de $T(t)$ es una curva decreciente pero que este decrecimiento es cada menor a medida que el tiempo t aumenta. En definitiva, a medida que transcurre el tiempo el valor de la temperatura de la barra se acerca más y más, pero cada vez más lentamente, al valor de la temperatura del habitáculo. Esto concuerda completamente con lo que la observación de la realidad nos dice que sucede.

Si comenzamos con una condición inicial diferente obtendremos una función $T(t)$ diferente.

Podría ser, por ejemplo, que lo que suceda es que el habitáculo sea un horno que se mantiene a una temperatura constante T_a, y lo que se pretende es calentar la barra,

inicialmente más fría que la temperatura del horno. En este caso, la condición inicial es $T_0 = T(0) < T_a$. Haciendo un análisis como el de más arriba tenemos que $\frac{dT}{dt} > 0$ en $t = 0$ y la función temperatura es creciente. La diferencia $T_a - T(t)$ es cada vez más pequeña para $t > 0$ y previsiblemente la gráfica de la función temperatura será parecida a la de la Figura 2.1.

Este análisis de la manera en la que $T(t)$ evoluciona cuando t aumenta se llama análisis cualitativo de la ecuación diferencial. Si lo que nos interesa es tener una idea de cómo evoluciona la temperatura de la barra a medida que pasa el tiempo, este análisis es suficiente: predice que cualquiera que sea su temperatura inicial (la condición inicial del problema) la temperatura de la barra se aproxima más y más a la temperatura del medio ambiente a medida que trascurre el tiempo. Además, predice también que la rapidez con la que $T(t)$ se aproxima a T_a depende de la constante k. En efecto, como $k > 0$ la variación de T ; es decir, $\frac{dT}{dt}$ es tanto mayor (si $T(t) - T_a < 0$), o tanto menor (si $T(t) - T_a > 0$), cuanto mayor sea k.

Por lo tanto $T(t)$ se aproxima a T_a tanto más rápidamente cuanto mayor sea la constante k. Esta constante k depende de la materia de la que está hecha la barra y está relacionada con su calor específico.

Resolvemos la ecuación diferencial, que es claramente de variables separables:

$$\begin{aligned}
T'(t) &= k\left(T(t) - T_a\right) \Longrightarrow \frac{dT}{T(t) - T_a} = kdt \Longrightarrow \int \frac{dT}{T(t) - T_a} = kt + C_1 \\
&\Longrightarrow \ln\left|T(t) - T_a\right| = kt + C_1 \Longrightarrow \left|T(t) - T_a\right| = e^{kt + C_1} = Ce^{kt} \Longrightarrow \\
T(t) &= T_a + Ce^{kt}, \quad C \in \mathbb{R}^*.
\end{aligned}$$

que es la temperatura del cuerpo en el instante $t \geq 0$.

Para tener bien determinada la temperatura $T(t)$, son necesarias dos condiciones adicionales que permitan calcular valores únicos para las constantes C y k. Estas condiciones podrían ser las temperaturas del cuerpo en dos instantes cualesquiera y una de ellas podría ser la temperatura inicial T_0.

Ejemplo 2.1 *Un cuerpo que tiene una temperatura de $70°F$ es depositado (en el tiempo $t = 0$) en un lugar donde la temperatura se mantiene a $40°F$. Después de 3 minutos, la temperatura del cuerpo ha disminuido a $60°F$.*

¿Cúal es la temperatura del cuerpo después de 5 minutos?

Ejemplo 2.2 *¿Cuánto tiempo pasará para que el cuerpo tenga $50°F$?*

Solución Si $T(t)$ es la temperatura del cuerpo en $°F$ después de t minutos, entonces la ecuación diferencial que modela a $T(t)$ es

$$T'(t) = k\left(T(t) - T_a\right),$$

donde $T_a = 40°F$ es la temperatura fija del medio circundante. Las condiciones adicionales son $T(0) = 70$ y $T(3) = 60$.

La solución de este problema está dada por: $T(t) = T_a + Ce^{kt}$, con $T_a = 40$, es decir, $T(t) = 40 + Ce^{kt}$. Ahora,

$$T(0) = 70 \Longleftrightarrow 70 = 40 + Ce^{k\cdot 0} \Longleftrightarrow 70 = 40 + C \Longrightarrow C = 30,$$

por lo que, $T(t) = 40 + 30e^{kt}$. Se sigue entonces que:

$$\begin{aligned}
T(3) &= 60 \Longleftrightarrow 60 = 40 + 30e^{3k} \Longleftrightarrow 2 = 3e^{3k} \Longrightarrow e^{3k} = \frac{2}{3} \\
&\Longrightarrow 3k = \ln\left(\frac{2}{3}\right) \Longrightarrow k = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{2}{3}\right) \Longrightarrow k \approx -0,1352.
\end{aligned}$$

Luego,

$$T(t) = 40 + 30e^{-0,1352t}.$$

La temperatura del cuerpo después de 5 minutos es

$$T(5) = 40 + 30e^{(-0,1352)\cdot 5} = 55,2594 \Longrightarrow T(5) \approx 55,26°F.$$

El tiempo para que el cuerpo tenga $50°F$ *es*

$$\begin{aligned} T(t) &= 50 \Longleftrightarrow 50 = 40 + 30e^{-0,1352t} \Longrightarrow e^{-0,1352t} = \frac{1}{3} \Longrightarrow -0,1352t = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \\ &\Longrightarrow t = \frac{\ln 3}{0,1352} \Longrightarrow t = \frac{1,0986}{0,1352} \approx 8,1258 \ \textit{minutos}. \end{aligned}$$

Entonces el cuerpo tendrá una temperatura de $50°F$ *después de* $t = 8$ *minutos con* 8 *segundos.*

Estos resultados se pueden simular fácilmente utilizando Simulink de MATLAB, la figura 2.1 muestra un diagrama de bloques que modela la ecuación diferencial (2.2)

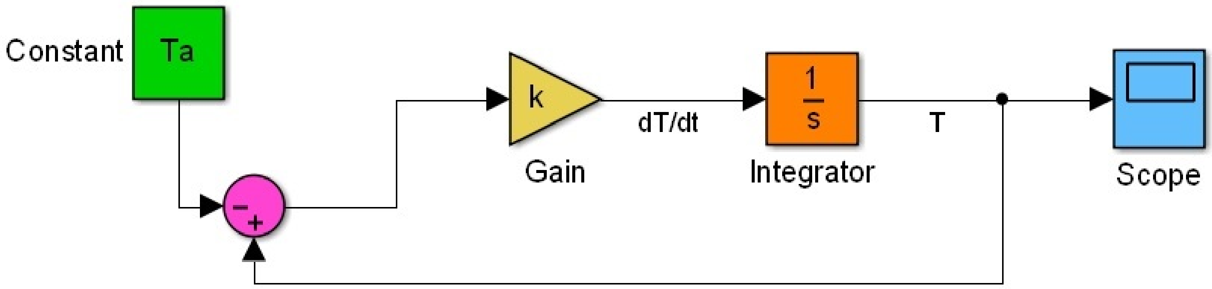

Figura 2.1 Diagrama de control que modela la ecuación de temperatura $\frac{dT}{dt} = k(T - T_a)$.

Revise el Apéndice 1 para ver como se puede ejecutar el modelo de Simulink en MATLAB, después de realizar la simulación se obtiene la figura 2.2.

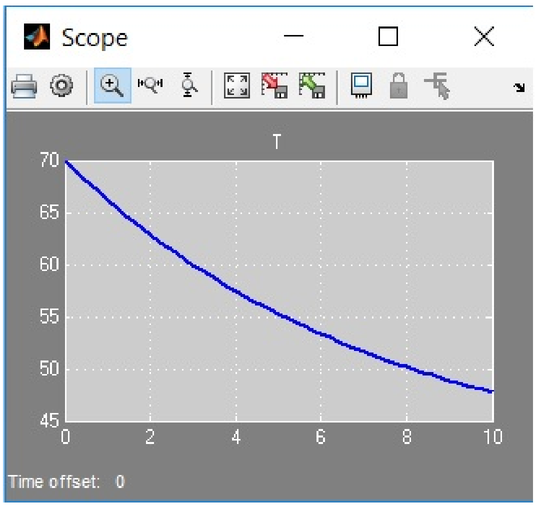

Figura 2.2 Simulación de la ecuación temperatura.

Como se puede observar en la figura 2.2 la temperatura disminuye a $T = 50°$ cuando el tiempo es $t = 8$ min. La ventaja de realizar una simulación en **Simulink** es que se puede cambiar fácilmente el valor de los parámetros y rápidamente obtener otra simulación, en los siguientes ejemplos se utiliza el mismo modelo (2.1) para encontrar las diferentes soluciones a los problemas planteados.

Ejemplo 2.3 *Un objeto que tiene una temperatura $50°F$ se coloca a las 10:00 horas en un horno que se mantiene a $375°F$. A las 11:15 horas su temperatura era $125°F$. ¿A qué hora estará el objeto a $150°F$?*

En este caso $T_a = 375°F$ es la temperatura constante del medio circundante. Puesto que de 10 am a 11:15 am transcurren 75 minutos, las condiciones adicionales son $T(0) = 50$ y $T(75) = 125$. Luego la temperatura $T(t)$ del objeto está dada por

$$T(t) = T_a + Ce^{kt} \Longrightarrow T(t) = 375 + Ce^{kt}$$

Ahora, usando la condición inicial:

$$T(0) = 50 \Longleftrightarrow 375 + Ce^{k\cdot 0} = 50 \Longrightarrow C = -325.$$

Por lo que, $T(t) = 375 - 325e^{kt}$.

Usando la segunda condición:

$$T(75) = 125 \Longleftrightarrow 375 - 325e^{75k} = 125 \Longrightarrow e^{75k} = \frac{10}{13} \Longrightarrow k = \frac{1}{75}\ln\left(\frac{10}{13}\right) \approx -0,0035.$$

Luego,

$$T(t) = 375 - 325e^{-0,0035t}.$$

El objeto alcanzará la temperatura de $T = 150°F$ cuando:

$$\begin{aligned} T(t) &= 150 \Longleftrightarrow 375 - 325e^{-0,0035t} = 150 \Longrightarrow e^{-0,0035t} = \frac{9}{13} \Longrightarrow -0,0035t = \ln\left(\frac{9}{13}\right) \\ \Longrightarrow \quad t &= -\frac{1}{0,0035}\ln\left(\frac{9}{13}\right) = \frac{0,367725}{0,0035} \approx 105,06\ min. \end{aligned}$$

Es decir, la temperatura del objeto será $T = 150°F$ después de $t = 105$ minutos, a partir de las 10 de la mañana. Por lo tanto, la temperatura será $150°F$ aproximadamente a las 11:45 horas, fiigura 2.3.

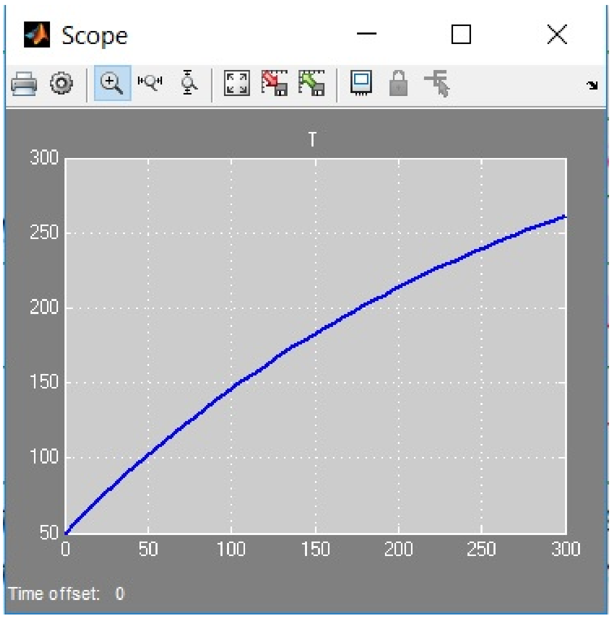

Figura 2.3 Simulación con $Ta = 375°$ y $T(0) = 50°$.

Ejemplo 2.4 *Una taza de café cuya temperatura es $190°F$ se coloca en un cuarto cuya temperatura es $65°F$. Dos minutos más tarde la temperatura del café es $175°F$. ¿Después de cuánto tiempo la temperatura del café será $150°F$?*

Solución. *Sea $T(t)$ la temperatura (en $°F$) del café en el instante $t \geq 0$ min. Observamos que $T(0) = 190$, $T_a = 65$ y $T(2) = 175$.*

La temperatura del café en cualquier instante $t \geq 0$ es

$$T(t) = T_a + Ce^{kt} \Longrightarrow T(t) = 65 + Ce^{kt}.$$

Usando la condición inicial, tenemos:

$$T(0) = 190 \Longleftrightarrow 65 + Ce^{k\cdot 0} = 190 \Longrightarrow C = 125 \Longrightarrow T(t) = 65 + 125e^{kt}.$$

Ahora usamos la segunda condición:

$$T(2) = 175 \Longleftrightarrow 65 + 125e^{2k} = 175 \Longrightarrow e^{2k} = \frac{22}{25} \Longrightarrow k = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{22}{25}\right) \Longrightarrow k \approx -0,0639$$

Entonces:

$$T(t) = 65 + 125e^{--0,0639t},$$

que es la temperatura (en $^\circ F$) del café en el minuto $t \geq 0$.

Sea t_1 el instante en que $T(t_1) = 150$. Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} T(t_1) &= 150 \Longleftrightarrow 65 + 125e^{-0,0639t_1} = 150 \Longrightarrow e^{-0,0639t_1} = \frac{85}{125} \\ &\Longrightarrow t_1 = -\frac{1}{0,0639}\ln\left(\frac{17}{25}\right) \approx 6,0354\ min. \end{aligned}$$

Por lo tanto deben transcurrir $t_1 = 6$ min, 2 s para que la temperatura del café sea de $150^\circ F$.

Otra forma de obtener una solución al problema de valor inicial es utilizando el comando **dsolve,** para nuestro ejemplo utilice los siguientes comandos:

```
>> syms T t k
>> dsolve('DT-k*(T-65)=0,T(0)=190')
>> ans = 125*exp(k*t) + 65
```

Observe que el resultado que devuelve MATLAB coincide con el resultado teórico del ejemplo.

Ejemplo 2.5 *Un termómetro en el que se lee $70^\circ F$ se coloca en un lugar donde la temperatura es $10^\circ F$. Cinco minutos más tarde el termómetro marca 40 $^\circ F$. ¿Qué tiempo debe transcurrir para que el termómetro marque medio grado más que la temperatura del medio ambiente?*

Solución. *Sea $T(t)$ la temperatura (en $^\circ F$) del termómetro en el instante $t \geq 0$ min. Observamos que $T(0) = 70$; $T_a = 10$ y $T(5) = 40$.*

El PVI por resolver es

$$\frac{d}{dt}T(t) = k(T(t) - 10), \quad con\ T(0) = 70 \quad y\ además\ T(5) = 40.$$

La solución es

$$T(t) = T_a + Ce^{kt} \Longrightarrow T(t) = 10 + Ce^{kt}.$$

Utilizamos la condición inicial:

$$T(0) = 70 \Longleftrightarrow 10 + Ce^{k\cdot 0} = 70 \Longrightarrow C = 60 \Longrightarrow T(t) = 10 + 60e^{kt}.$$

La segunda condición nos permite calcular k:

$$T(5) = 40 \Longleftrightarrow 10 + 60e^{5k} = 40 \Longrightarrow e^{5k} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2} \Longrightarrow k = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{1}{2}\right) \Longrightarrow k \approx -0,1386.$$

En conclusión:

$$T(t) = 10 + 60e^{-0,1386t}.$$

Sea t_1 el minuto en que $T(t_1) = 10,5^\circ F$.

$$\begin{aligned} T(t_1) &= 10,5 \Longleftrightarrow 10 + 60e^{-0,1386t_1} = 10,5 \Longrightarrow e^{-0,1386t_1} = \frac{0,5}{60} = \frac{1}{120} \\ &\Longrightarrow t_1 = -\frac{1}{0,1386}\ln\left(\frac{1}{120}\right) \approx 34,57\ min. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el tiempo que debe transcurrir para que el termómetro marque medio grado más que la temperatura ambiente es $t_1 = 34$ minutos, 34 segundos.

Ejemplo 2.6 *Un termómetro que está en el interior de una habitación se lleva al exterior donde la temperatura es $5°F$. Después de 1 min el termómetro marca $55°F$ y después de 5 minutos marca $30°F$. ¿Cuál era la temperatura del termómetro en la habitación?*

Solución. *Sea $T(t)$ la temperatura (en $°F$) del termómetro en el instante $t \geq 0$ minutos. Tenemos: $T_a = 5$; $T(1) = 55$; $T(5) = 30$ y $T(0) = T_0$, que es la temperatura a determinar.*

Al resolver la ED, resulta:

$$T(t) = T_a + Ce^{kt} \Longrightarrow T(t) = 5 + Ce^{kt}.$$

Usando la condición inicial:

$$T(0) = T_0 \Longleftrightarrow 5 + Ce^{k\cdot 0} = T_0 \Longrightarrow C = T_0 - 5 \Longrightarrow T(t) = 5 + (T_0 - 5)\,e^{kt}.$$

Usando ahora las dos condiciones dadas:

$$\begin{aligned} T(1) &= 55 \Longleftrightarrow 5 + (T_0 - 5)\,e^{k} = 55 \Longrightarrow (T_0 - 5)\,e^{k} = 50 \Longrightarrow T_0 - 5 = 50e^{-k}. && (*) \\ T(5) &= 30 \Longleftrightarrow 5 + (T_0 - 5)\,e^{5k} = 30 \Longrightarrow (T_0 - 5)\,e^{5k} = 25 \Longrightarrow T_0 - 5 = 25e^{-5k}. && (**) \end{aligned}$$

Las expresiones (*) y (**) conforman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (T_0 y k). Entonces,

$$T_0 - 5 = 50e^{-k} \quad y \quad T_0 - 5 = 25e^{-5k} \Longrightarrow 50e^{-k} = 25e^{-5k} \Longrightarrow e^{4t} = \frac{1}{2} \Longrightarrow t = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{2}\right) \approx -0,1733.$$

Utilizando el valor de k en (*):

$$T_0 - 5 = 50e^{-k} \Longrightarrow T_0 = 5 + 50e^{0,1733} \Longrightarrow T_0 \approx 64,46°F.$$

Es la temperatura que marcaba el termómetro en la habitación.

Ejemplo 2.7 *En una habitación la temperatura que marca un termómetro clínico es $20°C$. Para detectar si un paciente tiene fiebre (definida como temperatura corporal de $38°C$ o más) se coloca un termómetro en la axila del paciente. Si al cabo de un minuto el termómetro marca $27°C$ en una persona sana (con temperatura de $36°C$), ¿cuánto tiempo se debe dejar en una persona con fiebre para detectarla con un error no mayor que $0,2°C$?*

Solución. *Si $T(t)$ es la temperatura que marca el termómetro a los t minutos, entonces:*

$$T(0) = 20°C; \quad T(1) = 27°C \quad y \quad T_a = 36°C.$$

Con estos datos podemos obtener el valor de k, que en cierta forma mide la sensibilidad del termómetro.

El PVI es

$$\frac{d}{dt}T(t) = k\,(T(t) - 36)\,, \quad \text{con } T(0) = 20 \quad \text{y además } T(1) = 27.$$

Sabemos que

$$T(t) = T_a + Ce^{kt} \Longrightarrow T(t) = 36 + Ce^{kt}.$$

Usando la condición inicial:

$$T(0) = 20 \Longleftrightarrow 36 + Ce^{k\cdot 0} = 20 \Longrightarrow C = -16 \Longrightarrow T(t) = 36 - 16e^{kt}.$$

Usamos ahora la segunda condición:

$$T(1) = 27 \Longleftrightarrow 36 - 16e^{k} = 27 \Longrightarrow 16e^{k} = 9 \Longrightarrow e^{k} = \frac{9}{16} \Longrightarrow k = \ln\left(\frac{9}{16}\right) = -0,57536.$$

Como se dijo, este valor de k es una constante del termómetro. Si ese mismo termómetro se usa en un paciente que tal vez tenga fiebre ($T_a \geq 38°C$ ahora, con T_a no conocida), entonces resolvemos el PVI:

$$\frac{d}{dt}T(t) = -0,57536\,(T(t) - T_a)\,, \quad \text{con } T(0) = 20,$$

y hallamos el valor de t de modo que $T(t) \geq T_a - 0,2$. Tendremos $T(t) = T_a + Ce^{-0,57536t}$, pero aquí

$$T(0) = 20 \Longrightarrow T_a + C = 20 \Longrightarrow C = 20 - T_a,$$

así que la temperatura marcada por el termómetro para el tiempo $t \geq 0$ *es*

$$T(t) = T_a + (20 - T_a)\, e^{-0,57536t}.$$

Es preciso comparar esta expresión con $T_a - 0,2$ *y resolver para* t :

$$\begin{aligned} T(t) &= T_a + (20 - T_a)\, e^{-0,57536t} \geq T_a - 0,2 \Longrightarrow (T_a - 20)\, e^{-0,57536t} \leq 0,2 \Longrightarrow e^{-0,57536t} \leq \frac{0,2}{T_a - 20} \\ &\Longrightarrow -0,57536t \leq \ln\left(\frac{0,2}{T_a - 20}\right) \Longrightarrow t \geq -\frac{1}{0,57536}\ln\left(\frac{0,2}{T_a - 20}\right) \\ &\Longrightarrow t \geq \frac{\ln(0,2)}{-0,57536} - \frac{\ln(T_a - 20)}{-0,57536} = 2,7973 + \frac{\ln(T_a - 20)}{0,57536}. \end{aligned}$$

El último término está en función de la temperatura T_a *del paciente, que no se conoce en principio; sin embargo podemos hacer una estimación, pues en seres humanos* T_a *es cuando mucho* $42°C$ *en casos extremos.*

El valor del último término sería entonces cuando mucho $\dfrac{\ln(42-20)}{0,57536} = \dfrac{\ln(22)}{0,57536} = 5,3724$ *y esto sumado al primer término daría un total de* $t \geq 8,17$ *minutos, alrededor* 8 *minutos* 10 *segundos. Por lo tanto, para detectar una* $T_a = 38°C$ *se requerirían* $2,7973 + \dfrac{\ln(18)}{0,57536} = 7,82$ *minutos, o sea, alrededor de* 7 *minutos* 50 *segundos.*

Un caso de aplicación de la ley de Enfriamiento de Newton en medicina, relacionado con lo anterior, consiste en determinar la hora en que falleció una persona cuyo cadáver se encuentra en un medio ambiente frío. La homeostasis, o conjunto de funciones vitales de un individuo, regula su temperatura corporal (en condiciones normales, sin enfermedad) entre 36 y $36,5°C$; sin embargo al morir, el cadáver del individuo se comporta como un cuerpo caliente en un medio frío (puesto que su organismo ya no produce calor), como lo ilustra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.8 *Un ganadero salió una tarde a cazar un lobo solitario que estaba diezmando su rebaño. El cuerpo del ganadero fue encontrado sin vida por un campesino, en un cerro cerca del rancho junto al animal cazado, a las* 6:00 *h del día siguiente. Un médico forense llegó a las* 7:00 *y tomó la temperatura del cadáver, a esa hora anotó* $23°C$*; una hora más tarde, al darse cuenta de que en la noche, y aún a esas horas, la temperatura ambiente era aproximadamente de* $5°C$*, el médico volvió a medir la temperatura corporal del cadáver y observó que era de* $18,5°C$*. ¿A qué hora murió el ganadero aproximadamente?*

Solución. *Podemos suponer por la información proporcionada, que la temperatura ambiente se mantuvo casi constante* $T_a = 5°C$ *y también que hasta el instante de su muerte, cuyo momento desconocemos, la temperatura corporal del ganadero fue de* $36°C$.

Tiene mucho sentido que el forense haya tomado dos mediciones de la temperatura del cuerpo, para determinar el valor de k. *Podemos denotar por* $T(t)$ *la temperatura del cuerpo al tiempo* t*, medido en horas; por comodidad, hagamos* $t = 0$ *a las* 7:00 *h y* $t = 1$ *a las* 8:00 *h, así que tenemos el PVI:*

$$\frac{d}{dt}T(t) = k(T(t) - T_a), \quad \text{con } T(0) = 23°C \text{ y además } T(1) = 18,5°C,$$

con $T_a = 5°C$. *Se busca determinar el tiempo (negativo)* t_0 *en el que* $T(t_0) = 36°C$. *Al resolver la ED sabemos que:*

$$T(t) = T_a + Ce^{kt} \Longrightarrow T(t) = 5 + Ce^{kt} \Longrightarrow T(t) - 5 = Ce^{kt}.$$

Al usar las condiciones resulta

$$\begin{aligned} T(0) &= 23 \Leftrightarrow 18 = Ce^{k\cdot 0} \Longrightarrow C = 18 \Longrightarrow T(t) = 5 + 18e^{kt} \Longrightarrow T(t) - 5 = 18e^{kt}. \\ T(1) &= 18,5 \Longrightarrow 13,5 = 18e^{k} \Longrightarrow e^{k} = \frac{13,5}{18} \Longrightarrow k = \ln\left(\frac{13,5}{18}\right) = -0,2877. \end{aligned}$$

En síntesis, por lo anterior: $T(t) = 5 + 18e^{-0,2877t}$ *es la solución del PVI.*

Para determinar t_0, *consideramos* $T(t_0) = 36$ *y resolvemos:*

$$36 = 5 + 18e^{-0,2877t_0} \Longrightarrow e^{-0,2877t_0} = \frac{31}{18} \Longrightarrow t_0 = -\frac{1}{0,2877}\ln\left(\frac{31}{18}\right) = -1,8895 \approx 1 hora\ 53\ minutos.$$

Comprobamos que el deceso ocurrió aproximadamente 1 *h y* 53 *min antes de las* 7:00 *(hora de la primera toma de temperatura), esto es, alrededor de las* 5:07 *horas.*

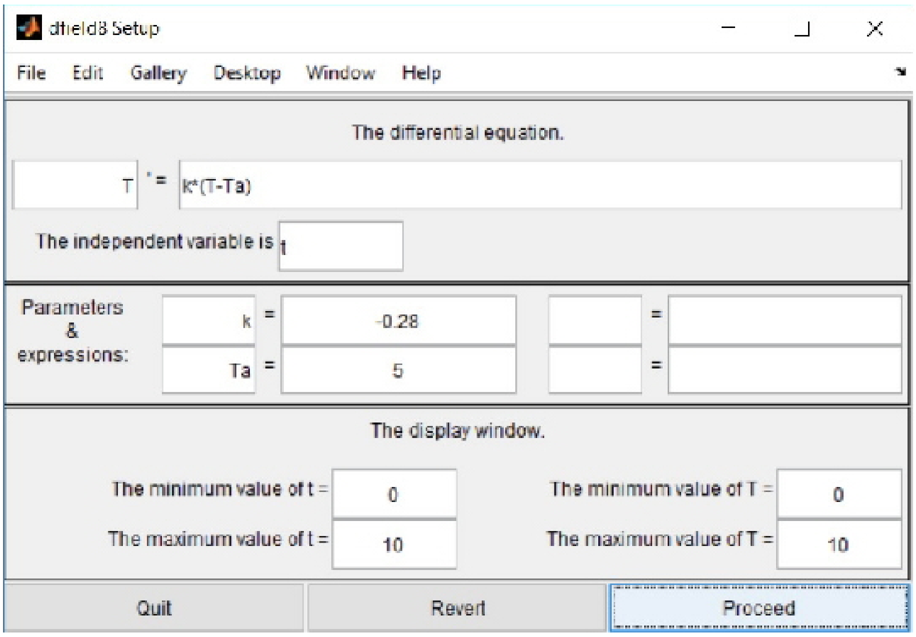

Figura 2.4 Ajustes de parámetros para dfield8.

La gráfica de la figura 2.4 muestra la configuración de los parámetros del comando **dfield8** que permite simular la ecuación diferencial y se puede observar figura 2.5 que todas las soluciones convergen a la temperatura del medio ambiente $T_a = 5°C$.

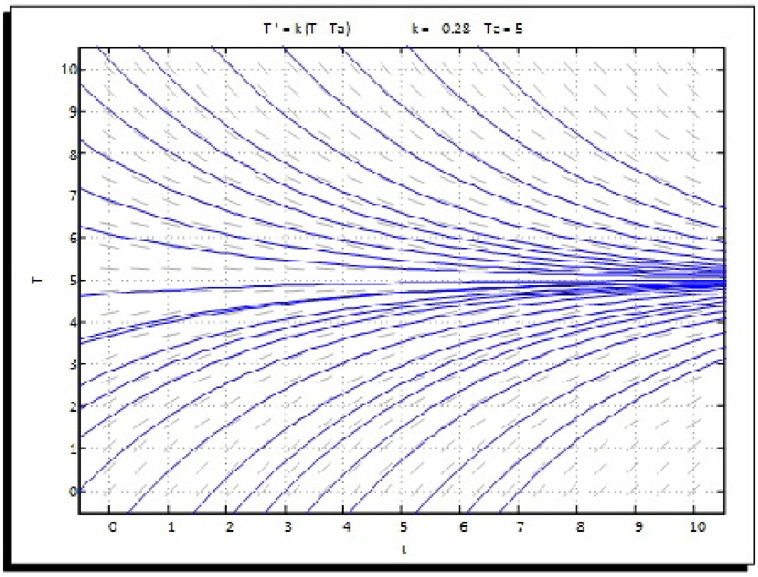

Figura 2.5 Campos direccionales de la edo
$\frac{d}{dt}T(t) = k(T(t) - T_a)$, con $k = -0.28$, $T_a = 5°C$

Autoevaluación (Taller en grupo)

Desarrolle el diagrama de bloques que permita encontrar la simulación de los siguientes problemas y compare con la solución exacta.

1. Un recipiente con agua a una temperatura de $100°C$ se coloca en una habitación que se mantiene a una temperatura constante de $25°C$. Después de 3 min la temperatura del agua es de $90°C$. Determinar la temperatura del agua después de 15 min. ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que la temperatura del agua sea de $40°C$? (Respuesta: $67°C$; 33 min, 44 s)

2. Un termómetro se saca de un recinto donde la temperatura del aire es $70°F$ y se lleva al exterior, donde la temperatura es $10°F$. Pasado $\frac{1}{2}$ minuto el termómetro indica $50°F$. ¿Cuál es la lectura cuando $t = 1\ min$? ¿Cuánto tiempo se necesita para que el termómetro llegue a $15°F$?

Ejercicios. Ley de Enfriamiento de Newton.

1. La temperatura de un motor en el momento en que se apaga es de $200°C$ y la temperatura del aire que lo rodea es de $30°C$. Después de 10 min la temperatura del motor ha bajado a $180°C$. ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que la temperatura del motor disminuya hasta $40°C$? (Respuesta: 3 h, 46 min, 18 s)

2. Un termómetro se saca de una habitación donde la temperatura del aire es de $70°F$ al exterior donde la temperatura es de $10°F$. Después de medio minuto el termómetro marca $50°F$. ¿Cuánto marca el termómetro cuando $t = 1$ min? ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que la temperatura marcada por el termómetro sea de $15°F$? (Respuesta: $36,7°F$; 3 min, 4 s)

3. Una taza de café caliente, inicialmente a $95°C$, al estar en una habitación que tiene una temperatura constante de $21°C$, se enfría hasta $80°C$ en 5 min. Determinar la temperatura del café después de 10 min. ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que el café tenga una temperatura de $50°C$? (Respuesta: $68°C$; 20 min, 41 s)

4. Una barra metálica, cuya temperatura inicial es de $20°C$, se deja caer en un recipiente que contiene agua hirviendo (a $100°C$) y su temperatura aumenta $2°C$ después de 1 s. Determinar la temperatura de la barra metálica después de 10 s. ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que la temperatura de la barra sea de $60°C$? (Respuesta: $37,9°C$; $27,38$ s)

5. Un termómetro que indica $70°F$ se coloca en un horno precalentado y mantenido a temperatura constante. A través de una ventana de vidrio del horno, un observador registra que la temperatura marcada por el termómetro es de $110°F$ después de medio minuto y de $145°F$ después de 1 min. ¿A qué temperatura está el horno? (Respuesta: $390°F$)

6. Un termómetro en el que se lee $80°F$ se lleva al exterior. Cinco minutos más tarde el termómetro indica $60°F$. Después de otros 5 min el termómetro señala $50°F$. ¿Cuál es la temperatura del exterior? (Respuesta: $40°F$)

7. Un material cerámico se saca en cierto momento de un horno cuya temperatura es de $750°C$, para llevarlo a una segunda etapa de un proceso que requiere que el material se encuentre a una temperatura de cuando mucho $200°C$. Suponga que la temperatura de una sala de enfriamiento donde se colocará este cerámico es de $5°C$ y que, después de 15 min, la temperatura del material es de $600°C$. (Respuesta: 1 h, 29 min, 22 s.) ¿En cuánto tiempo el material cerámico estará listo para entrar a la segunda etapa de su proceso?

8. A las 13:00 horas un termómetro que indica $10°F$ se retira de un congelador y se coloca en un cuarto cuya temperatura es de $66°F$. A las 13:05, el termómetro indica $25°F$. Más tarde, el termómetro se coloca nuevamente en el congelador. A las 13:30 el termómetro da una lectura de $32°F$. ¿Cuándo se regresó el termómetro al congelador?; ¿cuál era la lectura del termómetro en ese momento? (Respuesta: 13 h 20 min 19 segundos; $50,22°F$.)

9. Luis invitó a Blanca a tomar café en la mañana. Él sirvió dos tazas de café. Blanca le agregó crema suficiente como para bajar la temperatura de su café $1°F$. Después de 5 min, Luis agregó suficiente crema a su café como para disminuir su temperatura en $1°F$. Por fin, tanto Luis como Blanca empezaron a tomar su café. ¿Quién tenía el café más frío? (Respuesta: Luis)

2.3. Modelo de Malthus

Fue al parecer Euler quien desarrolló los primeros modelos de población, pero comúnmente se atribuye a Malthus 2 el desarrollo y análisis del primer modelo de evolución de $P(t)$, según el cual

$$P'(t) = kP(t). \tag{2.4}$$

Es decir, en cada instante la rapidez de cambio de la población es proporcional al total de la población presente. Por ejemplo, si $P(t) > 0$ y $P(t)$ creciente, esto implica que $k > 0$.

Thomas Malthus .(1776-1834) fue un economista inglés, considerado el fundador de la demografía. Es muy famoso por su publicación .En *sayo sobre el principio de la población (1798)"* en la cual concluía que la población humana crece de manera exponencial,mientras que la producción total de alimentos crece en forma lineal, pronosticando un futuro sombrío para la población. Afortunadamente su predicción no se ha cumplido. Sus ideas tuvieron alguna influencia en la teoría de la evolución de Darwin.

Resolvemos la ecuación diferencial (2.4): separando variables

$$\frac{dP}{dt} = kP(t) \Longrightarrow \frac{dP}{P} = Kdt, \tag{2.5}$$

integrando se tiene:

$$\int \frac{dP}{P} = k\int dt \Longrightarrow \ln P = kt + C_1 \Longrightarrow P = e^{kt+C_1} \Longrightarrow P = Ce^{kt} \Longrightarrow P(t) = Ce^{kt}. \tag{2.6}$$

Esta es la solución general de la ecuación diferencial (2.4).

Es común conocer la población inicial, $P(0) = P_0$. Con esto podemos calcular la constante C:

$$P(0) = P_0 = Ce^{k\cdot 0} \Longrightarrow C = P_0 \Longrightarrow P(t) = P_0e^{kt}. \tag{2.7}$$

Para calcular k es necesario conocer la cantidad de población existente en un tiempo $t_1 > t_0$, digamos $P(t_1) = P_1$. Luego

$$P(t_1) = P_1 = P_0e^{kt_1} \Longrightarrow e^{kt_1} = \frac{P_1}{P_0} \Longrightarrow t_1 = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right) \tag{2.8}$$

Observaciones:

1. Si t_d es el tiempo en el que la población se duplica, $P(t_d) = 2P_0$; entonces tenemos, de acuerdo con la ecuación previa:

   $$P(t_d) = 2P_0 \Longleftrightarrow P_0e^{kt_d} = 2P_0 \Longrightarrow e^{kt_d} = 2 \Longrightarrow t_d = \frac{1}{k}\ln 2$$

   Lo anterior indica que el tiempo para que una población se duplique no depende de la cantidad inicial de la misma.

2. Si se proporcionan $P(t_1) = P_1$ y $P(t_2) = P_2$ para dos tiempos $t_1 < t_2$, obtenemos los siguientes resultados:

   $$\begin{cases} P(t_1) = P_1 = P_0e^{kt_1} \\ P(t_2) = P_2 = P_0e^{kt_2} \end{cases}$$

   Para resolver este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, C y k, dividimos la segunda ecuación entre la primera y obtenemos:

   $$\frac{P_2}{P_1} = e^{k(t_2-t_1)},$$

   entonces:

   $$\frac{P_2}{P_1} = e^{k(t_2-t_1)} \Longrightarrow k = \frac{1}{t_2-t_1}\ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) \Longrightarrow k = \frac{\ln(P_2) - \ln(P_1)}{t_2-t_1}.$$

3. Tenemos también, usando (2.7) que $C = P_1e^{-kt_1}$. Como $P(t) = Ce^{kt}$:$P(t) = Ce^{kt} \Longrightarrow P(t) = P_1e^{-kt_1}e^{kt} \Longrightarrow P(t) = P_1e^{k(t-t_1)}$,con k dado por (2.8).

   Hemos mencionado que la derivada $\dfrac{dP}{dt}$ es la rapidez de cambio de la población $P(t)$. A esta derivada también se le denomina tasa de cambio de la población. De aquí surge una expresión frecuentemente usada en los problemas de población: tasa de crecimiento.

   La tasa de crecimiento de una población en cierto tiempo t se define como la razón $\dfrac{P'(t)}{P(t)}$ y se da comúnmente en términos porcentuales anuales. Es decir, la tasa de crecimiento de una población es precisamente la constante de proporcionalidad $k = \dfrac{P'(t)}{P(t)}$. Recuérdese que $P'(t) = k\ P(t)$.

4. Así como $P(t) = P_0e^{kt}$ nos sirve para calcular la población creciente de una comunidad, es posible utilizarla para calcular una población que disminuye al paso del tiempo. Solo debemos tener presente que:

a) Si la población $P(t)$ aumenta, entonces $\frac{d}{dt}P(t) = kP(t)$, con $k > 0$.

b) Si la población $P(t)$ disminuye, entonces $\frac{d}{dt}P(t) = kP(t)$, con $k < 0$.

Ejemplo 2.9 *En un cultivo de bacterias, se estimó que inicialmente había* 150 *bacterias y* 200 *después de una hora (h). Suponiendo una rapidez de crecimiento proporcional a la cantidad de bacterias presente, determinar:*

1. *La cantidad de bacterias después de t horas.*
2. *La cantidad de bacterias depués de* 2 *h.*
3. *El tiempo que debe transcurrir para que la población se triplique.*

Solución.

1. *Si $P(t)$ es la cantidad de bacterias presentes después de t horas, entonces $P(0) = P_0 = 150$ y $P(1) = P_1 = 200$. Luego, $P(t)$ está dada por la solución del PVI:*

$$P'(t) = k\ P(t), \quad con P(0) = 150 \ \ yademás \ \ P(1) = 200.$$

Puesto que $P(t) = Ce^{kt}$, se tiene:

$$\begin{aligned} P(0) &= 150 = Ce^{k\cdot 0} = C \Longrightarrow C = 150 \Longrightarrow P(t) = 150e^{kt}. \\ P(1) &= 200 \Longleftrightarrow 150e^{k\cdot 1} = 200 \Longrightarrow 150e^{k} = 200 \Longrightarrow e^{k} = \frac{4}{3} \Longrightarrow k = \ln\left(\frac{4}{3}\right) \approx 0,2877 \\ &\Longrightarrow P(t) = 150e^{0,2877t}; \end{aligned}$$

que es la solución del PVI y es la cantidad de bacterias depués de t horas.

2. *La cantidad de bacterias después de* 2 *h es*

$$P(2) = 150e^{(0,2877)(2)} \approx 266,6666 \Longrightarrow P(2) \approx 267 \ bacterias.$$

3. *Para que la población se triplique:*

$$P(t) = 3P_0 \Longrightarrow 3P_0 = 150e^{0,2877t} \Longrightarrow 3(150) = 150e^{0,2877t} \Longrightarrow e^{0,2877t} = 3 \Longrightarrow t = \frac{\ln(3)}{0,2877} \approx 3,8186$$

es decir que $t \approx 3$ horas, 49 *minutos,* 7 *segundos.*

Ejemplo 2.10 *Cierta población de bacterias tiene una rapidez de cambio proporcional a sí misma. Si en una* 1 *h tuvo un crecimiento del* 50 *por ciento:*
1. *¿Cuál es la población después de t horas?*
2. *¿En cuánto tiempo se duplicará la población?*
3. *¿Cuánto habrá aumentado la población en* 10 *h?*

Solución

1. *Sea $P(t)$ la población total de bacterias después de t horas. Como no se dice la población inicial, suponemos que esta es P_0 y, debido a que la población creció un* 50 % *en* 1 *hora, entonces:*

$$P(1) = P_0 + 0,5P_0 = 1,5P_0$$

Por lo tanto, $P(t)$ está dada por la solución del PVI:

$$P'(t) = kP(t), \ con\ P(0) = P_0 \ \ y\ además\ P(1) = 1,5P_0.$$

Sabemos que $P(t) = P_0e^{kt}$, entonces:$P(1) = 1,5P_0 \Longrightarrow P_0e^{k} = 1,5P_0 \Longrightarrow e^{k} = 1,5 \Longrightarrow k = \ln(1,5) \approx 0,4055 \Longrightarrow P(t) = P_0e^{0,4055t}$,que es la solución del PVI que da la población de bacterias después de t horas.

2. Para conocer cuándo se duplica la población:

$$P(t) = 2P_0 \Longrightarrow P_0 e^{0,4055t} = 2P_0 \Longrightarrow e^{0,4055t} = 2 \Longrightarrow t = \frac{\ln 2}{0,4055} \approx 1,7094 \text{ horas.}$$

Hallamos que la población se duplicará en $t = 1$ hora, 42 minutos, 33 segundos.
3. La población después de 10 horas es

$$P(10) = P_0 e^{(0,4055)(10)} = P_0 e^{4,055} \approx 57,685 P_0.$$

Por lo tanto, en 10 h la población habrá aumentado aproximadamente 58 veces la población inicial.

Ejemplo 2.11 *Si la población de cierta comunidad crece al 2 % anual ¿Cuántos años deben transcurrir para que la población se duplique?*

Solución. Aquí, el 2 % anual mencionado es precisamente la tasa de crecimiento de población. Se tiene entonces que $k = 2\,\% = 0,02$. Además, por la primera observación, el tiempo para que una población se duplique está dado por:

$$t_d = \frac{\ln 2}{k}.$$

Luego,

$$t_d = \frac{\ln 2}{k} = \frac{\ln 2}{0,02} \approx 34,6574 \text{ años;}$$

es decir que t_d = 34 años, 240 días.

Ejercicios. Modelo de Malthus

1. La población de una comunidad aumenta con una rapidez proporcional a sí misma. Si la población inicial es de 2000 y aumenta 10 % en 5 años:

   a) ¿Cuál será la población en t años? (Respuesta: $P(t) = 2000e^{0,01906t}$)

   b) ¿Qué porcentaje habrá aumentado en 10 años? (Respuesta: 21 %)

   c) ¿Cuántos años deben transcurrir para que la población sea de 20000 personas? (Respuesta: $t \approx 120$ años, 295 días)

2. La población de una comunidad aumenta con una rapidez proporcional a sí misma. Si la población se duplicó en 20 años, ¿en cuántos años se triplicará? (Respuesta: $t \approx 31$ años, 254 días)

3. La población de cierta especie de animales aumenta 5 % anual. ¿En cuánto tiempo se duplica la población? (Respuesta: $t \approx 13$ años, 315 días)

4. La población de cierta especie de animales aumenta 10 % anual. ¿En cuánto tiempo se triplica la población ? (Respuesta: $t \approx 10$ años, 360 días.)

5. Experimentalmente se sabe que la población de cierta bacteria se duplica cada 30 h. ¿Cuál es la tasa de crecimiento por día? (Respuesta: $k = 55,45$ % diario)

2.4. Modelo logístico

El modelo de Malthus tiene muchas limitaciones. Por ejemplo, predice que una población crecerá exponencialmente con el tiempo, que no ocurre en la realidad. Si la especie considerada dispone de todos los medios para vivir, como espacio, aire, alimento, entonces su crecimiento será de tipo exponencial; pero si los recursos escasean, entonces habrá competencia para acceder a ellos (peleas, guerras a veces, supervivencia de los más fuertes...) y la razón de crecimiento no será la misma. Por esta razón al modelo de Malthus se le llama de crecimiento irrestricto, mientras que el modelo presentado a continuación se denomina modelo de crecimiento con restricciones.

El modelo llamado de crecimiento logístico, fue introducido por Pierre François Verhulst en 1838 y supone que la razón de crecimiento es proporcional conjuntamente tanto a la población misma como a la cantidad faltante para llegar a la máxima población sustentable. Escribiremos dicho modelo como

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right) \tag{2.9}$$

En este modelo el número r se conoce como la razón de crecimiento intrínseco, y K es la capacidad sustentable que es el máximo valor que puede tener P. El valor de r depende solo de la especie considerada, mientras que K depende tanto de la especie como del ambiente en donde se desarrolla ésta y es el máximo valor posible en ese ambiente.

Advierta que, si el valor de P es muy pequeño comparado con K, entonces $1 - \dfrac{P}{K} \approx 1$ y la ED (2.9) es semejante a la de Malthus. Por otro lado, si P se aproxima a K entonces $1 - \dfrac{P}{K} \approx 0$ y esto haría que $\dfrac{dP}{dt} \approx 0$; en consecuencia la población $P(t)$ sería casi constante.

Resolvamos la ED. Observemos que es separable:

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right) \Longrightarrow \frac{dP}{P\left(1 - \frac{P}{K}\right)} = rdt \Longrightarrow \int \frac{dP}{P\left(1 - \frac{P}{K}\right)} = rt + C.$$

La integral del primer miembro se resuelve mediante fracciones parciales:

$$\begin{aligned} \frac{1}{P\left(1 - \frac{P}{K}\right)} &= \frac{A}{P} + \frac{B}{1 - \frac{P}{K}} \Longrightarrow A\left(1 - \frac{P}{K}\right) + BP = 1 \Longrightarrow \left(B - \frac{A}{K}\right)P + A = 1 \\ &\Longrightarrow A = 1 \text{ y } B - \frac{A}{K} = 0 \Longrightarrow A = 1 \text{ y } B - \frac{1}{K} = 0 \Longrightarrow A = 1 \text{ y } B = \frac{1}{K}. \end{aligned}$$

Luego

$$\int \frac{dP}{P\left(1 - \frac{P}{K}\right)} = \int \left[\frac{1}{P} + \frac{\frac{1}{K}}{1 - \frac{P}{K}}\right] dP = \ln P + \frac{1}{K}\int \frac{1}{1 - \frac{P}{K}} dP = \ln P - \ln|K - P|.$$

Ahora, si se toma en consideración que $P < K$, se tiene que $|K - P| = K - P$, por lo cual:

$$\ln\left(\frac{P}{K - P}\right) = rt + C \Longrightarrow \frac{P}{K - P} = Ce^{rt}.$$

Antes de despejar P, usemos la condición inicial $P(0) = P_0$, para determinar C:

$$\frac{P_0}{K - P_0} = Ce^0 = C \Longrightarrow \frac{P}{K - P} = \frac{P_0}{K - P_0}e^{rt}.$$

Ahora despejamos P, denotando por comodidad $\dfrac{P_0}{K - P_0} = C$:

$$\frac{P}{K - P} = Ce^{rt} \Longrightarrow P = CKe^{rt} - PCe^{rt} \Longrightarrow P\left(1 + Ce^{rt}\right) = CKe^{rt} \Longrightarrow P = \frac{CKe^{rt}}{1 + Ce^{rt}}.$$

Para simplificar esta fórmula, dividimos numerador y denominador entre Ce^{rt} para obtener finalmente:

$$P(t) = \frac{K}{\frac{1}{Ce^{rt}} + 1} = \frac{K}{1 + \left(\frac{K - P_0}{P_0}\right)e^{-rt}}. \tag{2}$$

El diagrama de bloques que permite simular la ecuación diferencial logística se muestra en la figura (2.4).

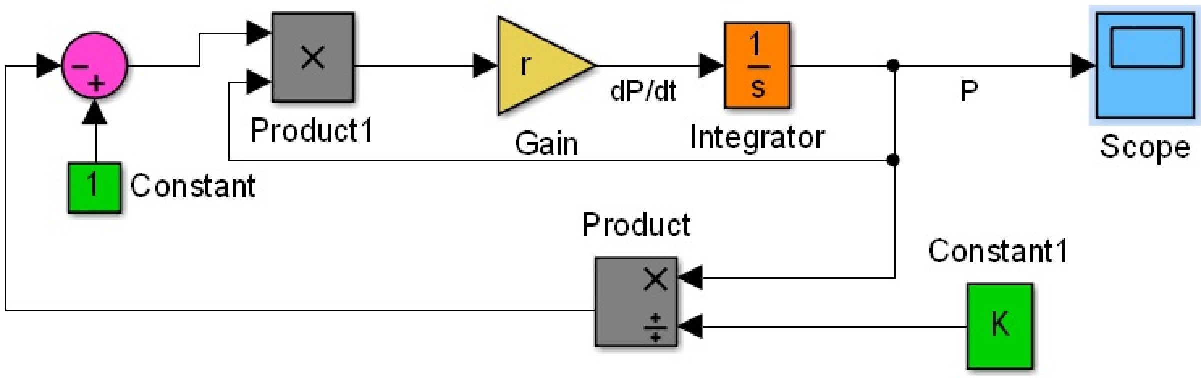

Figura 2.4 Diagrama de bloques que representa la ecuación logística $\frac{dP}{dt} = rP(1 - \frac{P}{K})$.

Los siguientes ejemplos muestran las simulaciones del crecimiento poblacional, en los diferentes ejemplos se utiliza el modelo (2.4) y solo se cambian el valor de los parámetros para las diferentes simulaciones.

Ejemplos.

1. Utilizando un modelo logístico con capacidad sustentable $K = 100 \times 10^9$, una población mundial (humana) de 5×10^9 en 1986 y una razón de crecimiento de $2\,\%$ anual, hacer una predicción de la población mundial para el año 2010. ¿Cuándo será esta población de 32×10^9? Los datos provistos son aproximaciones de los datos observados en la realidad.

   Solución. En este ejemplo tenemos $K = 100$; $P_0 = 5$ (en miles de millones de habitantes del planeta) en 1986 y $r = 0,02$. La solución de la ecuación logística $\dfrac{dP}{dt} = rP\left(1 - \dfrac{P}{K}\right)$ es, de acuerdo con la ecuación (2), como sigue:

$$P(t) = \frac{K}{1 + \left(\dfrac{K - P_0}{P_0}\right) e^{-rt}} = \frac{100}{1 + \left(\dfrac{100 - 5}{5}\right) e^{-0{,}02t}} = \frac{100}{1 + 19e^{-0{,}02t}}$$

   En el año 2010 tendremos $t = 24$, entonces:

$$P\,(24) = \frac{100}{1 + 19e^{-(0{,}02)(24)}} = \frac{100}{1 + 19e^{-0{,}48}} \approx 7838904588 \text{ habitantes.}$$

   en miles de millones de habitantes.

   La gráfica 2.5 presenta el resultado de la simulación.

2. La población será de 32×10^9 en el tiempo t_1 que determinamos como sigue:

$$P(t_1) = \tfrac{100}{1+19e^{-0{,}02t_1}} = 32 \Longrightarrow 100 = 32 + 608e^{-0{,}02t_1} \Longrightarrow 608e^{-0{,}02t_1} = 68$$
$$\Longrightarrow e^{-0{,}02t_1} = \tfrac{17}{152} \Longrightarrow t_1 = -\tfrac{\ln\left(\frac{17}{152}\right)}{0{,}02} \approx 109,5334 \text{ años.}$$

   Esto es, a mediados del año 2095. Esto, claro está, si las tendencias se mantienen; afortunadamente, la razón de crecimiento $r = 0,02$ no es una constante y, con el tiempo, en muchos países ha estado disminuyendo; entre otros aspectos gracias a la planificación familiar.

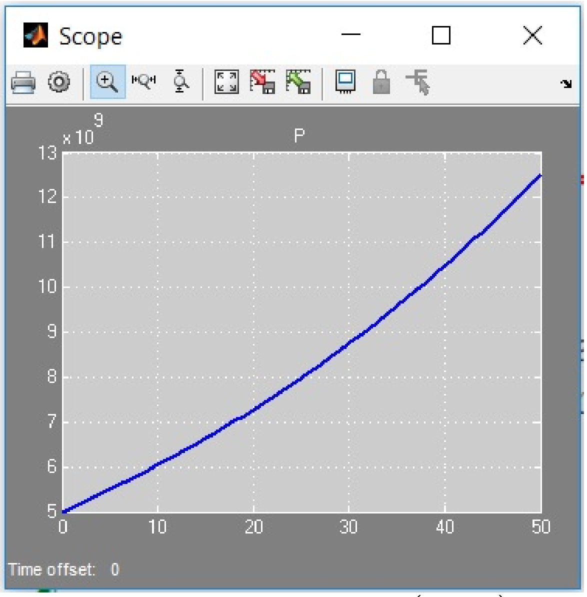

Figura 2.5 Solución de $\dfrac{dP}{dt} = rP\left(1 - \dfrac{P}{K}\right)$ con $K = 100 * 10^9$ y $P(0) = 5 * 10^9$.

3. Las reservas pesqueras del halibut (especie de gran tamaño, parecida al lenguado) en el Pacífico se modelan con la ED logística con capacidad sustentable de $80,5 \times 10^6$, medida en kg (biomasa), y razón de crecimiento intrínseco por año. Si la biomasa inicial es la cuarta parte de la capacidad sustentable, encontrar la biomasa $0,71$ después de un año y el tiempo que debe pasar para que la biomasa inicial se duplique, es decir, que llegue a la mitad de la capacidad sustentable.

   Solución. El PVI por resolver es

$$\tfrac{dP}{dt} = rP\left(1 - \tfrac{P}{K}\right), \text{ con } r = 0,71; \quad K = 80,5 \times 10^6 \; kg \text{ de biomasa}, \;\; P_0 = \tfrac{K}{4}.$$

   Observe que ahora $P(t)$ no es el número de habitantes de la población sino la biomasa al tiempo t, es decir, la masa total de los peces de la especie halibut en el Pacífico. No repetiremos el proceso de resolución de la ED, sino que escribiremos directamente su solución:

$$P(t) = \frac{K}{1+\left(\dfrac{K-P_0}{P_0}\right)e^{-rt}} = \frac{K}{1+\left(\dfrac{K-\dfrac{K}{4}}{\dfrac{K}{4}}\right)e^{-rt}} = \frac{K}{1+3e^{-rt}} = \frac{80,5\times10^6}{1+3e^{-0,71t}}.$$

   Al cabo de un año la biomasa será

$$P(t) = \frac{80,5\times10^6}{1+3e^{(-0,71)\cdot 1}} = \frac{80,5\times10^6}{1+3e^{-0,71}} = 32526138,39 \; kg.$$

   El tiempo necesario para duplicar la biomasa inicial se determina de la siguiente manera:

$$P(t_d) = \tfrac{K}{2} \iff \tfrac{K}{1+3e^{-0,71t_d}} = \tfrac{K}{2} \Longrightarrow \tfrac{1}{1+3e^{-0,71t_d}} = \tfrac{1}{2} \Longrightarrow 1+3e^{-0,71t_d} = 2 \Longrightarrow e^{-0,71t_d} = \tfrac{1}{3}$$
$$\Longrightarrow -0,71t_d = \ln\left(\tfrac{1}{3}\right) \Longrightarrow t_d = \tfrac{\ln 3}{0,71} \approx 1,54734 \text{ años},$$

   o sea, 1 año, 6 meses y 17 días aproximadamente.

Observaciones. Finalizamos esta sección con algunas observaciones sobre la solución de la ecuación logística. Primero hay que subrayar que en las situaciones de interés se tiene $P_0 < K$, pues no es muy realista suponer que la población inicial sea mayor que la capacidad sustentable. En el caso extremo $P_0 > K$, se tiene que

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

es negativa, es decir, la población decrece hasta llegar (asintóticamente), según el modelo, a K.

En la situación más común en que $P_0 < K$, la derivada $\dfrac{dP}{dt} = rP\left(1 - \dfrac{P}{K}\right)$ es positiva, o sea que, la función $P(t)$ será siempre creciente y tenderá asintóticamente hacia K cuando $t \to \infty$:

La forma típica de la curva solución, llamada curva logística, es la de una letra S alargada, como se ilustra en la figura de arriba. Es interesante observar que hay un cambio en la curvatura de $P(t)$, que es justamente un punto de inflexión. Demostraremos a continuación que la inflexión ocurre precisamente cuando $P(t) = \dfrac{K}{2}$.

Para ello, solo tenemos que encontrar la segunda derivada e igualar a cero:

$$\begin{aligned}\tfrac{d^2P}{dt^2} &= \tfrac{d}{dt}\left[rP\left(1-\tfrac{P}{K}\right)\right] = rP'\left(1-\tfrac{P}{K}\right) - \tfrac{r}{K}P'P = rP' - rP'\tfrac{P}{K} - \tfrac{r}{K}P'P \\ &= rP' - 2rP'\tfrac{P}{K} = rP'\left(1-\tfrac{2P}{K}\right). \\ \tfrac{d^2P}{dt^2} &= 0 \Longrightarrow rP'\left(1-\tfrac{2P}{K}\right) = 0 \Longrightarrow rP' = 0 \text{ o bien } 1-\tfrac{2P}{K} = 0;\end{aligned}$$

pero $rP' = 0$ no puede ser, pues ya hemos visto que $P' = \dfrac{dP}{dt} > 0$ siempre, así que debe darse la segunda opción: $1 - \dfrac{2P}{K} = 0$, de donde se sigue que $P = \dfrac{K}{2}$. El tiempo t_1 en que ocurre el punto de inflexión dependerá de los parámetros P_0 y r, pero la coordenada vertical es siempre la misma $\dfrac{K}{2}$.

Se puede comprobar también que, en el punto de inflexión, la razón de crecimiento $\dfrac{dP}{dt}$ es máxima (ver los ejercicios).

Los modelos presentados y discutidos en esta sección son los que han demostrado ser de mayor utilidad por dar predicciones con una aproximación bastante razonable en la práctica. Sin embargo es pertinente aclarar que las predicciones obtenidas con ellos pueden contener errores por no tomar en cuenta todas las variables que afectan al proceso. Así sucedió con Malthus, quien, con el modelo de crecimiento exponencial, predijo en 1798 una catástrofe que en realidad nunca sucedió, porque no tuvo en cuenta los adelantos en la tecnología agropecuaria y alimenticia que han permitido a la población humana seguir viviendo, sin problemas, casi dos siglos más de lo que predijo.

Ejercicios. Modelo logístico.

1. Supongamos que una población satisface a un modelo logístico con $K = 500$, que la población inicial es 100 y que a los 10 años llegó a 200. Determine la razón de crecimiento intrínseco r. (Respuesta: $r = 0,09808$.)

2. La población mundial en 1939 era aproximadamente $2,3 \times 10^9$ habitantes y, en 2009, se estimó en $6,7 \times 10^9$ habitantes. Algunos especialistas consideran que la capacidad sustentable del planeta es de 11×10^9 habitantes, en condiciones de bienestar (es decir, sin desnutrición ni padecimientos por falta de recursos). Considere $t = 0$ en 1939, $P(0) = 2,3 \times 10^9$ y una capacidad sustentable de 11×10^9. Encuentre una fórmula para $P(t)$ con $t \geq 0$, determine P en el año 2020 y el tiempo t_1 en el que habrá 10×10^9 habitantes.

   a) Suponiendo que la población crece a una razón de cambio proporcional a la diferencia entre la población límite máxima L y la población al tiempo t.

   b) Suponiendo un crecimiento logístico de la población.
   (Respuesta: a) $P(t) = 11 - 8,7e^{-0,01t} \times 10^9$, $P(81) = 7,15 \times 10^9$, $t_1 \approx 215$ años, es decir, en 2154;
   b) $P(t) = \dfrac{11}{1 + 3,7826e^{-0,0255t}}$; $P(81) \approx 7,4136 \times 10^9$, $t_1 \approx 143$ años, es decir, en 2082.)

3. Compruebe que, para la población que satisface el modelo logístico, la máxima razón de crecimiento de la población es $\dfrac{rK}{4}$, y se alcanza cuando el tamaño de la población es $\dfrac{K}{2}$. (Respuesta: En $P = \dfrac{K}{2}$ hay máximo con valor $\dfrac{rK}{4}$.

Autoevaluación (Taller en grupo)

Desarrolle el diagrama de bloques que permita encontrar la simulación de los siguientes problemas, de diferentes valores para r; P_0 y K.

1. Para una población que cumple el modelo logístico con r; P_0 y K dados, encuentre el tiempo t_1 para el cual $P(t)$ tiene un punto de inflexión.

   (Respuesta: $t_1 = \dfrac{\ln(K - P_0)}{r} - \dfrac{\ln P_0}{r}$).

2. Si se sacan o cosechan h animales por unidad de tiempo (h constante), el modelo demográfico $P(t)$ de los animales en cualquier momento t es

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP) - h, \quad P(0) = P_0,$$

   en donde a, b, h y P_0 son constantes positivas.

   a) Desarrolle un diagrama de bloques en **Simulink** que simule el comportamiento demográfico de $P(t)$ con $a = 5$, $b = 1$ y $h = 4$.

   b) Use el programa para determinar el comportamiento a largo plazo de la población en la parte a) cuando $P_0 > 4$, $1 < P_0 < 4$ y $0 < P_0 < 1$.

2.5. Decaimiento radioactivo

Si observamos cierta cantidad inicial de sustancia o material radioactivo, al paso del tiempo se puede verificar un cambio en la cantidad de dicho material; la cantidad M del material es una función del tiempo t, esto es $M = M(t)$. Aún más, dadas las características de los materiales radioactivos, al paso del tiempo ocurre una desintegración o decaimiento del material. Esto no quiere decir que el material desaparezca, sino que la configuración interna de sus átomos cambia y dejan de ser radioactivos.

Experimentalmente se ha llegado al conocimiento de que, en cualquier tiempo $t \geq 0$, la rapidez de cambio de la cantidad $M(t)$ de material radioactivo es directamente proporcional a la cantidad de material presente.

Simbólicamente esto se expresa así:

$$\frac{d}{dt}M(t) \propto M(t),$$

donde $\frac{d}{dt}M(t)$ es la rapidez de cambio de $M(t)$ y el símbolo $\propto$ denota la proporcionalidad existente entre la cantidad presente $M(t)$ del material radioactivo y su rapidez de cambio.

Se afirma entonces que

$$\frac{d}{dt}M(t) = k\ M(t), \qquad (1)$$

donde k es la llamada constante de proporcionalidad. Debido a la desintegración, la cantidad $M(t)$ de material radioactivo va disminuyendo (decreciendo) al paso del tiempo t, por lo tanto se tiene que $\frac{d}{dt}M(t) < 0$, lo que nos permite concluir que $k < 0$ ya que $M(t) \geq 0$.

Esta ecuación diferencial (1) representa el modelo matemático por resolver y es de variables separables. En efecto:

$$\frac{dM}{dt} = k\ M \Longrightarrow \frac{dM}{M} = k\ dt.$$

Integrando se tiene:

$$\frac{dM}{M} = k\ dt \Longrightarrow \int \frac{dM}{M} = kt + C_1 \Longrightarrow \ln M = kt + C_1 \Longrightarrow M = Ce^{kt}.$$

Entonces la solución general de la ecuación diferencial (1) es $M(t) = Ce^{kt}$.

Es común conocer la cantidad (inicial) de material existente en $t = 0$, lo que se expresa por $M(0) = M_0$.

Con esto podemos calcular la constante C:

$$M(0) = M_0 = Ce^{k\cdot 0} = C \Longrightarrow C = M_0.$$

Entonces se tiene:

$$M(t) = M_0 e^{kt}.$$

De esta última expresión observemos que se puede calcular k si se conoce la cantidad de material existente en un tiempo $t_1 > 0$, digamos $M(t_1) = M_1 < M_0$:

$$M(t_1) = M_1 = M_0 e^{kt_1} \Longrightarrow e^{kt_1} = \tfrac{M_1}{M_0} \Longrightarrow t_1 = \tfrac{1}{k}\ln\left(\tfrac{M_1}{M_0}\right) \Longrightarrow t_1 = \tfrac{\ln(M_1)-\ln(M_0)}{k}.$$

Así concluimos que

$$k = \frac{\ln(M_1) - \ln(M_0)}{t_1}.$$

Observaciones:

1. Un caso particular ocurre cuando $M(t_1) = \dfrac{M_0}{2}$. Esto es, se conoce el tiempo que transcurre para que la cantidad de material inicial decaiga la mitad. Este tiempo se conoce como la *vida media* del material radioactivo. Denotaremos con t_m a este tiempo. En este caso:

$$M(t_m) = \frac{M_0}{2} \Longrightarrow M_0 e^{kt_m} = \frac{M_0}{2} \Longrightarrow e^{kt_m} = \frac{1}{2} \Longrightarrow kt_m = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Longrightarrow kt_m = -\ln(2).$$

Entonces $kt_m = -\ln(2)$, de donde podemos despejar por igual:

$$k = -\frac{\ln(2)}{t_m} \qquad \text{y} \qquad t_m = -\frac{\ln(2)}{k} \tag{2}$$

Además, en vista de lo anterior podemos afirmar que la vida media de un material no depende de la cantidad inicial del mismo.

2. Si se proporcionan $M(t_1) = M_1$ y $M(t_2) = M_2$ para dos tiempos $t_1 < t_2$, obtenemos los siguientes resultados:

$$\begin{cases} M(t_1) = M_1 = Ce^{kt_1} \\ M(t_2) = M_2 = Ce^{kt_2} \end{cases} \tag{3}$$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incognitas, C y k. Para resolverlo podemos dividir la segunda ecuación entre la primera y así obtenemos:

$$\tfrac{M_2}{M_1} = \tfrac{Ce^{kt_2}}{Ce^{kt_1}} = e^{k(t_2-t_1)} \Longrightarrow e^{k(t_2-t_1)} = \tfrac{M_2}{M_1} \Longrightarrow k(t_2-t_1) = \ln\left(\tfrac{M_2}{M_1}\right) \Longrightarrow k = \tfrac{\ln(M_2)-\ln(M_1)}{t_2-t_1}.$$

Es decir,

$$k = \frac{\ln(M_2) - \ln(M_1)}{t_2 - t_1} \tag{4}$$

Además, tenemos también de (3):

$$M_1 = Ce^{kt_1} \Longrightarrow C = M_1 e^{-kt_1}.$$

Por lo tanto, al sustituir en $M(t) = Ce^{kt}$:

$$M(t) = M_1 e^{-kt_1} e^{kt} \Longrightarrow M(t) = M_1 e^{k(t-t_1)};$$

en donce k es el valor obtenido en (4).

Ejemplos.

1. Se sabe que un material radioactivo se desintegra con una rapidez proporcional a la cantidad presente en cualquier instante. Si inicialmente hay 100 mg de material y, después de dos años, se observa que el 5 % de la masa original se desintegró, determinar:

   a) Una expresión para la masa al momento t.

   b) El tiempo necesario para que se desintegre el 10 % de la masa original.

   Solución. Si $M(t)$ es la cantidad presente (en miligramos) de material radioactivo al cabo de t años, entonces $M(t)$ está dada por la solución del PVI

   $$M'(t) = kM(t);\ \text{con } M(0) = 100 \ \text{ y además } M(2) = 95.$$

   a) Tenemos que $M_0 = 100\ mg$. Por otro lado, considerando que $M(t) = M_0 e^{kt} = 100e^{kt}$ se tiene, para $t = 2$:

   $$M(2) = 100 - 5 = 95 = 100e^{2k} \Longrightarrow e^{2k} = 0,95 \Longrightarrow 2k = \ln(0,95) \Longrightarrow k = \tfrac{\ln(0,95)}{2} = -0,02564.$$

   Entonces la expresión solicitada es

   $$M(t) = 100e^{-0,02564t}$$

   b) Cuando se desintegra el 10 % de la masa quedan 90 mg de la misma, entonces:

   $$90 = 100e^{-0,02564t} \Longrightarrow e^{-0,02564t} = 0,9 \Longrightarrow t = -\frac{\ln(0,9)}{0,02564} = 4,1076 \ \text{ años},$$

   representa el tiempo para que se desintegre el 10 % de la masa original.

2. Un material radioactivo se desintegra dos tercios en 1000 años. Determinar su vida media.

   Solución. Suponemos que se cumple con el modelo de desintegración de esta sección y por lo tanto $M(t) = M_0 e^{kt}$.

   Si pierde dos tercios de material en 1000 años, entonces:

$$M(1000) = \tfrac{M_0}{3} \Longleftrightarrow M_0 e^{1000k} = \tfrac{M_0}{3} \Longrightarrow k = \tfrac{1}{1000} \ln\left(\tfrac{1}{3}\right) = -\tfrac{\ln 3}{1000} = -0,0010986.$$

   Podemos calcular ya la vida media, usando (3.2):

$$t_m = -\frac{\ln 2}{k} \Longrightarrow t_m = -\frac{\ln 2}{-0,0010986} = 630,92 \quad \text{años.}$$

3. Se ha detectado que el 0.5 % de una sustancia radioactiva desaparece en 12 años.

   a) ¿Qué porcentaje desaparecerá en 1000 años?

   b) ¿Cuál es la vida media de dicha sustancia?

   Solución. La cantidad de sustancia al cabo de t años está dada por $M(t) = M_0 e^{kt}$, donde M_0 es la cantidad inicial de sustancia. Además:

$$M(12) = 0,995 M_0 \Longleftrightarrow M_0 e^{12k} = 0,995 M_0 \Longrightarrow e^{12k} = 0,995 \Longrightarrow k = \tfrac{\ln(0,995)}{12} = -0,0004177.$$

   a) Sea p el porcentaje que queda de la sustancia radioactiva después de 1000 años. Entonces:

$$M(1000) = pM_0 \Longleftrightarrow M_0 e^{1000k} = pM_0 \Longrightarrow e^{1000k} = p \Longrightarrow p = e^{1000(-0,0004177)} = 0,65856.$$

   Este resultado indica que a los 1000 años quedará el $65,856$ % de la sustancia radioactiva original, es decir, desaparecerá $34,144$ % de dicha sustancia.

   b) Para hallar la vida media usamos el valor de k previamente calculado:

$$t_m = \frac{\ln 2}{k} \Longrightarrow t_m = \frac{\ln 2}{-0,0004177} \Longrightarrow t_m = 1659,44 \text{ años } = 1660 \text{ años.}$$

   En el siguiente ejemplo se muestra una aplicación importante de las ED en arqueología.

   El elemento carbono, presente en todos los compuestos orgánicos, tiene un isótopo radioactivo, llamado carbono 14 (^{14}C). El porcentaje de ^{14}C con respecto al carbono en los organismos vivos permanece constante y, cuando este muere, el ^{14}C decae en la forma que hemos visto. Así que, si sabemos cuánto ^{14}C ha perdido una parte de un organismo, podremos encontrar el tiempo transcurrido a partir de su muerte. Para ello solo basta saber que el ^{14}C radiactivo tiene una vida media aproximada de 5600 años.

4. Se encontraron huesos fósiles de un animal. Se analizaron y se detectó que cada hueso contenía una centésima parte del ^{14}C radioactivo. Determinar la antigüedad aproximada de los huesos encontrados.

   Solución. Supongamos que $M(t)$ es la cantidad presente de ^{14}C en cada hueso al cabo de t años y que M_0 es la cantidad original (inicial) de dicha sustancia radioactiva en cada hueso. $M(t)$ está determinada por la solución del PVI:

$$M'(t) = kM(t), \text{ con } M(0) = M_0 \text{ y además } M(5600) = \frac{M_0}{2}.$$

   La solución general de la ecuación diferencial es $M(t) = Ce^{kt}$, donde $C = M_0$. Ahora,

$$M(5600) = \tfrac{M_0}{2} \Longleftrightarrow M_0 e^{5600k} = \tfrac{M_0}{2} \Longrightarrow e^{5600k} = \tfrac{1}{2} \Longrightarrow k = \tfrac{1}{5600} \ln\left(\tfrac{1}{2}\right) \Longrightarrow k = -0,000123776.$$

   Por lo que

$$k = -(1,23776) \times 10^{-4}.$$

   En consecuencia

$$M(t) = M_0 e^{-(1,23776)\times 10^{-4} t}$$

Ahora bien, considerando que cada hueso contenía una centésima parte del ^{14}C radioactivo original, se tiene que

$$M(t) = \tfrac{1}{100}M_0 \Longrightarrow M_0 e^{-(1{,}23776)\times 10^{-4}t}\tfrac{1}{100}M_0 \Longrightarrow e^{-(1{,}23776)\times 10^{-4}t} = \tfrac{1}{100} \Longrightarrow$$
$$(-1{,}23776)\times 10^{-4}t = \ln\left(\tfrac{1}{100}\right) \Longrightarrow t = \tfrac{-\ln(100)}{-(1{,}23776)\times 10^{-4}} \Longrightarrow t = \tfrac{10^4\ln(100)}{(1{,}23776)} = 37205{,}6795.$$

Por lo tanto, la antigüedad (edad) aproximada de los huesos es $t = 37206$ años.

Ejercicios

En los ejercicios siguientes suponga que la rapidez de de crecimiento es directamente proporcional a la cantidad presente de sustancia radioactiva.

1. Si el 5 % de una sustancia radioactiva se descompone en 50 años:

   a) ¿Qué porcentaje habrá al final de 500 años?

   b) ¿Y después de 1000 años?

   c) ¿Cuál es la vida media de esta sustancia?
   (Respuestas: a) $59,9$ %; b) $35,8$ %; c) 675 años, 212 días)

2. Si la vida media de una sustancia radiactiva es de 1800 años:

   a) ¿Qué porcentaje estará presente al final de 100 años?

   b) ¿En cuántos años quedará el 10 % de la sustancia?
   (Respuestas: a) $96,22$ %; b) 5980 años, 270 días.)

3. Un año después de la producción de cierta sustancia radioactiva, se tenían 100 gramos de esta y dos años después 75 gramos; ¿cuánto se produjo inicialmente?; ¿cuál es la vida media de la sustancia? (Respuesta: a) $M_0 = 133,333\ g$; b) 2 años, 150 días)

4. Una muestra extraída de un cráneo antiguo contenía solamente una sexta parte del ^{14}C original. ¿Cuál es la antigüedad del cráneo? (Respuesta: 14 475 años)

5. Calcular la vida media de una sustancia radioactiva que en 10 años decae un 25 %. (Respuesta: $t_m \approx 24$ años, 34 días)

6. Un análisis de restos fósiles de un animal demostró que éstos contenían solo el $6,24$ % del ^{14}C original. Determinar la antigüedad aproximada de la muerte del animal. (Respuesta: 22412 años, 126 días.)

7. Los neutrones en una pila atómica crecen a una razón proporcional al número de neutrones presente en cualquier instante (debido a la fisión nuclear). Si inicialmente hay N_0 neutrones y luego se tienen N_1 y N_2 neutrones presentes en los instantes t_1 y t_2, respectivamente, demostrar que:
$$\left(\frac{N_2}{N_1}\right)^{t_1} = \left(\frac{N_1}{N_0}\right)^{t_2}.$$

8. El uranio se desintegra a una rapidez proporcional a la cantidad presente en cualquier instante. Si M_1 y M_2 gramos están presentes en los instantes t_1 y t_2, respectivamente, mostrar que la vida media del uranio es
$$t_m = \frac{(t_2 - t_1)\ln 2}{\ln(M_1) - \ln(M_2)}.$$

2.6. Mezclas

Si disolvemos 500 g de azúcar en 20 litros de agua, obtenemos una solución dulce con una concentración $C = \dfrac{500}{20} = 25$ g/litro de azúcar (se lee 25 gramos por litro y significa 25 gramos de azúcar por cada litro de solución).

Cuando disolvemos 10 lb de sal en 50 gal de agua, obtenemos una solución salina o salmuera con una concentración $C = \dfrac{10}{50} = 0,2$ lb/gal de sal (léase 0, 2 libras por galón).

En general, si disolvemos Q kg (o cualquier unidad de masa) de un soluto en V litros' (o alguna otra unidad de volumen) de un solvente, obtenemos una solución con una concentración $C = \dfrac{Q}{V}$ kg/litro del soluto (leído C kilogramos por litro y entendido como C kilogramos de soluto por cada litro de solución).

Ahora supongamos que inicialmente (en $t = 0$) tenemos en un tanque una cantidad V_0 de solución donde hay disuelta una cantidad Q_0 de un soluto. Supongamos también que, a partir de $t = 0$, se deja entrar otra solución al tanque con una rapidez R_e (flujo de entrada) y con una concentración C_e (concentración de entrada) del mismo soluto y que, al mismo tiempo, se deja salir del tanque la nueva solución (considerada uniforme por mezclado) con una rapidez R_s (flujo de salida) y una concentración C_s (concentración de salida) del mismo soluto.

Observamos lo siguiente:

1. Si $R_e = R_s$, entonces la cantidad V_0 de solución se mantiene constante al paso del tiempo t.

2. Si $R_e \neq R_s$, entonces la cantidad V de solución será función del tiempo t; es decir, $V = V(t)$. Aún más, si $R_e > R_s$, entonces $V(t) > V_0$ (además es creciente); mientras que, si $R_e < R_s$, entonces $V(t) < V_0$ (además es decreciente).

3. En general, la cantidad Q de soluto en el tanque será función del tiempo t; es decir, $Q = Q(t)$.

4. Igualmente, la concentración C del soluto en el tanque será función del tiempo t; y variará según que $R_e = R_s$ o que $R_e \neq R_s$, esto es,
$$C(t) = \frac{Q(t)}{V_0} \text{ o bien } \frac{Q(t)}{V(t)}.$$

5. Un problema que es de interés en esta clase de procesos consiste en determinar la cantidad $Q(t)$ de soluto en el tanque en cualquier instante $t \geq 0$.

Para resolver este problema procedemos como sigue:

Consideremos primero la rapidez con que cambia la cantidad de soluto $Q(t)$ en el tanque, la cual está dada por la rapidez con que entra el soluto menos la rapidez con la que sale. Esto es,
$$\frac{dQ(t)}{dt} = (\text{rapidez con que entra el soluto}) - (\text{rapidez con que sale el soluto})$$

Si tomamos en cuenta que:
la rapidez con que entra el soluto es R_eC_e ;
la rapidez con que sale el soluto es $R_sC_s = R_sC(t)$.
El modelo de este proceso queda como el PVI:
$$\frac{dQ(t)}{dt} = R_eC_e - R_sC(t), \text{ con } Q(0) = Q_0. \tag{2.10}$$

El método de solución de este PVI dependerá de las condiciones del problema.
Ejemplos

1. En un tanque que contiene 1000 litros de agua, inicialmente se disuelven 5 kg de sal. Luego se bombea salmuera al tanque a razón de 20 litros/min y la solución uniformemente mezclada se bombea hacia afuera del tanque a la misma razón. Considerando que la concentración de la solución que entra es de 0, 01 kg/litro, determinar:

   a) La cantidad de sal que hay en el tanque en cualquier instante $t \geq 0$.

b) La cantidad de sal en el tanque después de 30 min.

c) La cantidad de sal en el tanque después de mucho tiempo.

d) El tiempo que debe transcurrir para que haya 8 kg de sal en el tanque.

Solución. Sea $Q(t)$ la cantidad (en kg) de sal en el tanque después de t min. Como inicialmente se tienen 5 kg de sal, entonces $Q(0) = 5$.

La rapidez de cambio de la cantidad $Q(t)$ de sal en el tanque en el instante t es

$$\frac{dQ(t)}{dt} = (\text{rapidez con que entra la sal}) - (\text{rapidez con que sale la sal})$$

¿Con qué rapidez entra la sal al tanque?

Ya que la solución entra con una rapidez $R_e = 20\ litros/min$ y con una concentración $C_e = 0,01$ kg/litro, entonces la rapidez con que entra la sal al tanque es

$$R_eC_e = (20\ litros/\text{min})\,(0,01\ kg/litro) = 0,2\ kg/\text{min}.$$

¿Con qué rapidez sale la sal del tanque?

La rapidez con que sale la solución del tanque es $R_s = 20\ litros/min$. Sin embargo, la concentración de sal a la salida se debe hallar a partir de estas consideraciones:

- Ya que entra solución a razón de 20 $litros/min$ y sale solución a la misma razón, es claro que el volumen V de solución en el tanque es constante: $V =$ volumen inicial $= 1000\ litros$.
- Después de t minutos hay $Q(t)$ kilogramos de sal disueltos en 1000 litros de solución, por lo que la concentración de sal en la solución que sale es $C_s = \dfrac{Q(t)}{V} = \dfrac{Q(t)}{1000}\dfrac{kg}{litro}$.

Entonces la rapidez con que sale la sal del tanque es

$$R_sC_s = (20\ litros/min)\left(\frac{Q(t)}{1000}\frac{kg}{litro}\right) = \frac{Q(t)}{50}\frac{kg}{\text{mín}}.$$

Por lo tanto, la rapidez de cambio de la cantidad $Q(t)$ de sal en el tanque, después de t minutos es

$$\frac{d}{dt}Q(t) = R_eC_e - R_sC(t) = 0,2 - \frac{Q(t)}{50} \Longrightarrow Q'(t) + \frac{Q(t)}{50} = 0,2.$$

La cantidad de sal en el tanque $Q(t)$ está dada por la solución del PVI:

$$Q'(t) + \frac{Q(t)}{50} = 0,2,\ \text{con}\ Q(0) = 5.$$

a) Resolvemos la ecuación diferencial: $Q'(t) + \dfrac{Q(t)}{50} = 0,2$, la cual es una ED lineal no homogénea y tiene por factor integrante a $e^{t/50}$, por lo que

$$\begin{aligned} e^{\frac{t}{50}}\left(Q'(t) + \frac{Q(t)}{50}\right) = 0,2ee^{\frac{t}{50}} &\Longrightarrow \tfrac{d}{dt}\left(e^{\frac{t}{50}}Q(t)\right) = 0,2e^{\frac{t}{50}} \Longrightarrow e^{\frac{t}{50}}Q(t) = C + 0,2\textstyle\int e^{\frac{t}{50}}dt \\ &\Longrightarrow e^{\frac{t}{50}}Q(t) = C + (0,2)(50)\,e^{\frac{t}{50}} \Longrightarrow e^{\frac{t}{50}}Q(t) = C + 10e^{\frac{t}{50}} \\ &\Longrightarrow Q(t) = Ce^{-\frac{t}{50}} + 10 \Longrightarrow Q(t) = 10 + Ce^{-\frac{t}{50}}. \end{aligned}$$

Ahora bien, considerando la condición inicial,

$$Q(0) = 5 \Longrightarrow 10 + Ce^0 = 5 \Longrightarrow C = -5,$$

encontramos que

$$Q(t) = 10 - 5e^{-\frac{t}{50}},$$

es la cantidad de sal (en kg) que hay en el tanque después de t minutos.

b) La cantidad de sal que hay después de 30 min:

$$Q\,(30) = 10 - 5e^{-\frac{30}{50}} = 10 - 5e^{-0{,}6} \approx 7{,}25594182 \Longrightarrow Q\,(30) \approx 7{,}256\ kg.$$

c) La cantidad de sal que hay después de mucho tiempo la podemos denotar y calcular como sigue:

$$Q_{\text{lím}} = \lim_{t\to+\infty} Q\,(t) = \lim_{t\to+\infty} \left(10 - 5e^{-\frac{t}{50}}\right) = \lim_{t\to+\infty} \left(10 - \frac{5}{e^{t/50}}\right) = 10 \Longrightarrow Q_{\text{lím}} = 10\ kg.$$

d) ¿Qué tiempo debe transcurrir para que haya 8 kg de sal en el tanque?

$$Q\,(t) = 8 \Longleftrightarrow 10 - 5e^{-\frac{t}{50}} = 8 \Longrightarrow e^{-\frac{t}{50}} = \frac{2}{5} \Longrightarrow t = -50 \ln(0,4) \approx 45{,}81453659\ min.$$

Es decir, $t \approx 45$ minutos, 49 segundos.

La figura 2.8 muestra el diagrama de bloques que permite simular la concentración de sal en el tanque con respecto al tiempo

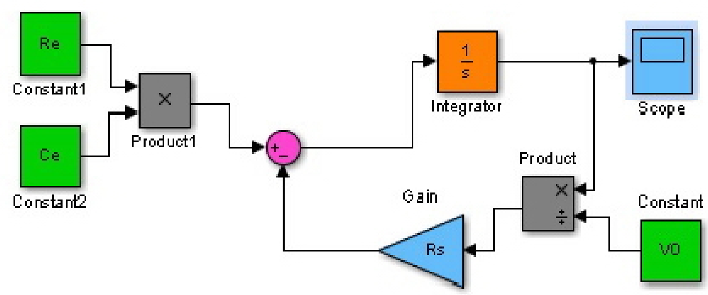

Figura 2.8 Diagrama de bloques de la ecuación $\frac{dQ(t)}{dt} = R_eC_e - R_s\frac{Q(t)}{V0}$

La figura (2.9) comprueba los resultados teóricos, se puede comprobar que la concentración está tendiendo a 10 kg y que en aproximadamente en $t = 45.8$ min hay 8 kg de sal.

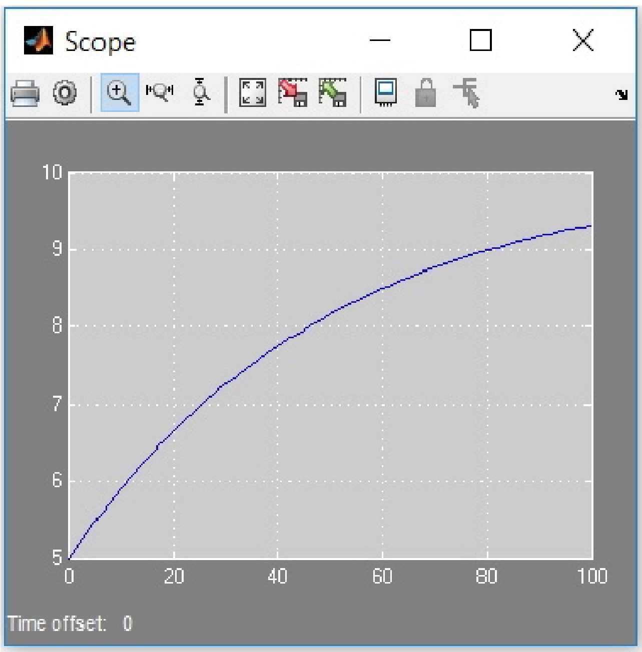

Figura 2.9 Concentración de sal en el tanque de 1000 lt.

1. Un tanque que tiene capacidad para 2000 litros, contiene inicialmente 1000 litros de agua con 8 kg de sal disuelta. Se bombea salmuera al tanque a razón de 20 litros/min y la solución uniformemente mezclada se bombea hacia afuera a razón de 15 litros/min. Considerando que la concentración de la solución que entra es de $0,01$ kg/litro, determinar:

   a) La cantidad de sal que hay en el tanque después de t minutos.

   b) La cantidad de sal que hay en el tanque después de 1 h.

   c) La concentración de sal en el tanque cuando éste se llena.

   Solución.

   a) Sea $Q(t)$ la cantidad (en kg) de sal en el tanque después de t minutos.

   Como inicialmente se tienen 8 kg de sal, entonces $Q(0) = 8$.

   La rapidez de cambio de la cantidad $Q(t)$ de sal en el tanque en el instante t es

$$\frac{dQ(t)}{dt} = (\text{rapidez con que entra la sal}) - (\text{rapidez con que sale la sal})$$

   ¿Con qué rapidez entra la sal al tanque?

   Ya que la solución entra con una rapidez $R_e = 20$ litros/min y con una concentración $C_e = 0,01kg/litro$, entonces la rapidez con que entra la sal al tanque es

$$R_eC_e = (20litros/min)(0,01kg/litro) = 0,2\ kg/min.$$

   La rapidez con que sale la solución del tanque es $R_s = 15\ litros/min$. Pero ¿con qué concentración de sal?

   Ya que entra solución a razón de 20 $litros/min$ y sale solución a razón de 15 $litros/min$, entonces quedan en el tanque 5 litros de solución en cada minuto que transcurre. Después de t minutos habrán quedado almacenados en el tanque $5t$ litros de solución, los cuales se sumarán a los 1000 litros de solución iniciales. Es decir, después de t minutos habrá en el tanque .$(1000 + 5t)$ litros de solución en los que estarán disueltos $Q(t)$ kg de sal, por lo cual la concentración de sal en la solución que sale es

$$C_s = \frac{Q(t)}{1000 + 5t} kg/litro.$$

   Entonces la rapidez con que sale la sal del tanque es

$$R_sC_s = (15litros/min)\left(\frac{Q(t)}{1000 + 5t} kg/litro\right) = \frac{15Q(t)}{1000 + 5t} kg/min.$$

   Por lo tanto, la rapidez de cambio de la cantidad $Q(t)$ de sal en el tanque, después de t minutos es

$$\frac{d}{dt}Q(t) = R_eC_e - R_sC_s = 0,2 - \frac{15Q(t)}{1000 + 5t},$$

   o sea,

$$Q'(t) + \frac{15}{1000 + 5t}Q(t) = 0,2.$$

   Luego, la cantidad $Q(t)$ está dada por la solución del PVI:

$$Q'(t) + \frac{3}{200 + t}Q(t) = 0,2; \quad \text{con} \quad Q(0) = 8,$$

   la cual es una ED lineal no homogénea y tiene por factor integrante lo siguiente:

$$e^{\int \frac{3}{200+t}dt} = e^{3\int \frac{1}{200+t}dt} = e^{3\ln(200+t)} = e^{\ln(200+t)^3} = (200 + t)^3,$$

por lo que:

$$\begin{gathered}\left(Q'(t)+\tfrac{3}{200+t}Q(t)\right)(200+t)^3=(0,2)(200+t)^3\\ \Longrightarrow \tfrac{d}{dt}\left[Q(t)(200+t)^3\right]=(0,2)(200+t)^3\\ \Longrightarrow Q(t)(200+t)^3=(0,2)\int(200+t)^3\,dt\\ \Longrightarrow Q(t)(200+t)^3=\tfrac{(0,2)}{4}(200+t)^4+C\\ \Longrightarrow Q(t)=(0,05)(200+t)+\tfrac{C}{(200+t)^3}.\end{gathered}$$

Ahora bien, considerando la condición inicial,

$$Q(0)=8\Longrightarrow(0,05)(200+0)+\frac{C}{(200+0)^3}=8\Longrightarrow 10+\frac{C}{(200)^3}=8\Longrightarrow C=-2(200)^3,$$

por lo que,

$$Q(t)=(0,05)(200+t)-\frac{2(200)^3}{(200+t)^3}\Longrightarrow Q(t)=(0,05)(200+t)-2\left(\frac{200}{200+t}\right)^3,$$

es la cantidad (en kg) de sal que hay en el tanque después de t minutos.

b) La cantidad de sal que hay en el tanque después de una hora (60 min) es

$$\begin{aligned}Q(60)&=(0,05)(200+60)-2\left(\frac{200}{200+60}\right)^3\\ &=(0,05)(260)-2\left(\frac{200}{260}\right)^3=13-2\left(\frac{10}{13}\right)^3\\ &=13-0,91=12,09;\end{aligned}$$

luego $Q(60)=12,09\ kg$.

c) ¿Cuál es la concentración de sal en el tanque cuando este se llena?

Primero veamos que el tanque se llena cuando el volumen variable $V(t)=(1000+5t)$ se iguala con la capacidad del tanque de 2000 litros. Esto sucede cuando

$$V(t)=2000\Longrightarrow 1000+5t=2000\Longrightarrow t=200.$$

Es decir, el tanque se llena cuando han transcurrido $t=200$ minutos.

La cantidad de sal que hay en el tanque en dicho instante es

$$\begin{aligned}Q(200)&=(0,05)(200+200)-2\left(\frac{200}{200+200}\right)^3=(0,05)(400)-2\left(\frac{1}{2}\right)^3\\ &=20-\frac{1}{4}=\frac{79}{4}=19,75\ kg.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la concentración de sal en el tanque en este instante es

$$C(200)=\tfrac{Q(200)}{2000}\tfrac{kg}{litro}=\tfrac{19,75}{2000}\tfrac{kg}{litro}\Longrightarrow C(200)=0,009875\ kg/litro\Longrightarrow C(200)\approx 0,01\ kg/litro$$

La figura 2.10 muestra el diagrama de bloques, observe que se utiliza el bloque **clock,** bloque que simula el tiempo t que transcurre al iniciar nuestra simulación.

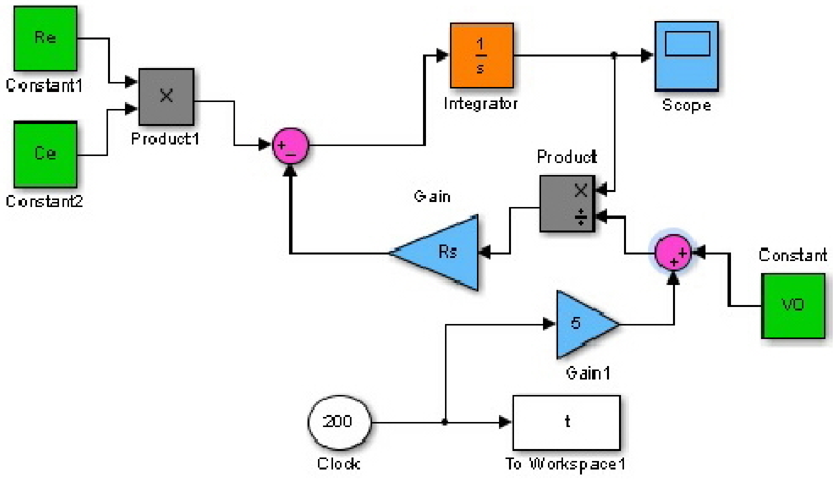

Figura 2.10 Diagrama de bloques para $Q'(t) + \frac{15}{1000+5t}Q(t) = 0,2$.

Efectivamente, los resultados teóricos concuerdan con los resultados simulados que se muestran en la figura 2.11.

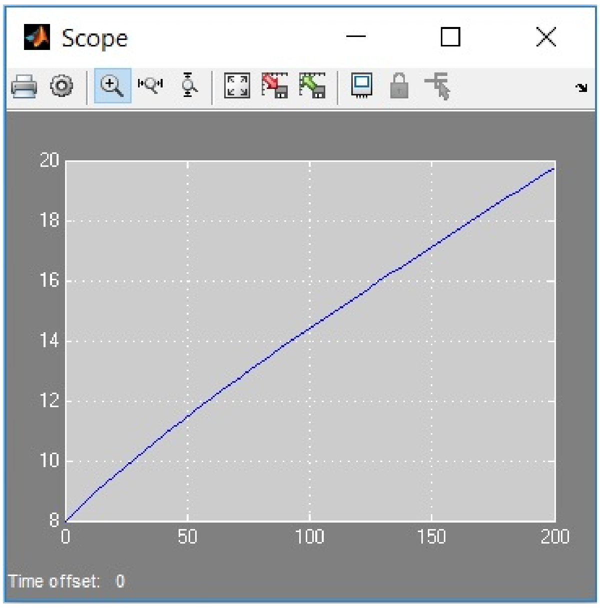

Figura 2.11 Concentración de sal en el tanque.

2. En un tanque que contiene 500 galones de agua, inicialmente se disuelven 10 libras de sal. Luego se bombea salmuera al tanque a razón de 4 gal/min y la solución uniformemente mezclada se bombea hacia afuera del tanque a razón de 5 gal/min. Considerando que la solución que entra tiene sal con una concentración de 0, 1 lb/gal, determinar:

   a) La cantidad de sal que hay en el tanque después de t minutos.

   b) La cantidad de sal en el tanque después de media hora.

   c) La concentración de sal en el tanque cuando quedan 100 gal de solución.

   Solución. Sea $Q(t)$ la cantidad (en lb) de sal en el tanque después de t minutos.

   Como inicialmente se tienen 10 libras de sal, entonces $Q(0) = 10$.

La rapidez de cambio de la cantidad $Q(t)$ de sal en el tanque en el instante t es

$$\frac{d}{dt}Q(t) = (\text{rapidez con que entra la sal}) - (\text{rapidez con que sale la sal})$$

¿Con qué rapidez entra la sal al tanque?

Ya que la solución entra con una rapidez $R_e = 4$ gal/min y con una concentración $C_e = 0,1$ lb/gal, entonces la rapidez con que entra la sal al tanque es

$$R_eC_e = (4\ gal/min)(0,1\ libras/gal) = 0,4\frac{libras}{\text{mín}}$$

¿Con qué rapidez sale la sal del tanque?

La rapidez con que la solución sale del tanque es $R_s = 5$ gal/min. Pero ¿con qué concentración de sal?

Ya que la salmuera entra a razón de 4 gal/min y la solución mezclada sale a razón de 5 gal/min, entonces el tanque pierde 1 gal de solución en cada minuto que transcurre. Después de t minutos se habrán perdido t galones de solución de los 500 galones iniciales. Es decir, después de t minutos quedarán en el tanque $(500 - t)$ galones de solución, en los que estarán disueltas $Q(t)$ lb de sal, por lo que la concentración de sal en la solución que sale será

$$C_s = \frac{Q(t)}{500 - t}\ lb/gal.$$

Entonces la rapidez con que sale la sal del tanque es

$$R_sC_s = (5gal/min)\left(\frac{Q(t)}{500-t}\ lb/gal\right) = \frac{5Q(t)}{500-t}\ libras/min.$$

Por lo tanto, la rapidez de cambio de la cantidad $Q(t)$ de sal en el tanque, después de t minutos es

$$\frac{d}{dt}Q(t) = R_eC_e - R_sC_s = 0,4 - \frac{5Q(t)}{500-t}$$

o sea,

$$Q'(t) + \frac{5}{500-t}Q(t) = 0,4.$$

Luego, la cantidad $Q(t)$ está dada por la solución del PVI:

$$Q'(t) + \frac{5}{500-t}Q(t) = 0,4; \quad \text{con} \quad Q(0) = 10.$$

a) Resolvemos la ecuación diferencial: $Q'(t) + \dfrac{5}{500-t}Q(t) = 0,4$. Ésta es una ED lineal no homogénea y tiene por factor integrante lo siguiente:

$$e^{\int \frac{5}{500-t}dt} = e^{5\int \frac{1}{500-t}dt} = e^{-5\ln(500-t)} = e^{\ln(500-t)^{-5}} = (500-t)^{-5},$$

por lo cual:

$$\begin{aligned}(500-t)^{-5}\left[Q'(t) + \tfrac{5}{500-t}Q(t)\right] = (0,4)(500-t)^{-5} &\Longrightarrow \tfrac{d}{dt}\left[(500-t)^{-5}Q(t)\right] = \tfrac{0,4}{(500-t)^5}\\
&\Longrightarrow (500-t)^{-5}Q(t) = (0,4)\textstyle\int(500-t)^{-5}dt + C\\
&\Longrightarrow (500-t)^{-5}Q(t) = \tfrac{(0,4)}{4}(500-t)^{-4} + C\\
&\Longrightarrow Q(t) = (0,1)(500-t) + C(500-t)^5.\end{aligned}$$

Ahora bien, considerando la condición inicial:

$$\begin{aligned}Q(0) = 10 \Longleftrightarrow (0,1)(500-0) + C(500-0)^5 = 10 &\Longrightarrow 50 + C(500)^5 = 10\\
\Longrightarrow C(500)^5 = -40 &\Longrightarrow C = -\tfrac{40}{(500)^5},\end{aligned}$$

por lo que

$$Q(t) = (0,1)(500-t) - \tfrac{40}{(500)^5}(500-t)^5 \Longrightarrow Q(t) = (0,1)(500-t) - 40\left(\tfrac{500-t}{500}\right)^5,$$

es la cantidad (en libras) de sal que hay en el tanque después de t minutos.

b) La cantidad de sal que hay en el tanque después de media hora (30 min) es

$$\begin{aligned} Q\,(30) &= (0,1)\,(500-30) - 40\left(\frac{500-30}{500}\right)^5 \\ &= (0,1)\,(470) - 40\left(\frac{47}{50}\right)^5 = 47 - 29,3562 = 17,6438. \\ Q\,(30) &= 17,6438 \text{ libras.} \end{aligned}$$

c) ¿Cuál es la concentración de sal en el tanque cuando quedan 100 galoles de solución?

Después de t minutos hay en el tanque $500-t$ galones de solución y éstos serán 100 galones cuando: $500-t=100$, o sea $t=400$. Es decir, en el tanque hay 100 gal de solución cuando han transcurrido $t=400$ minutos.

La cantidad de sal en dicho instante es

$$\begin{aligned} Q\,(400) &= (0,1)\,(500-400) - 40\left(\frac{500-400}{500}\right)^5 = (0,1)\,(100) - 40\left(\frac{1}{5}\right)^5 \\ &= 10 - 40\left(\frac{1}{5}\right)^5 = 10 - 0,0128 \\ &\Longrightarrow Q\,(400) = 9,9872 \text{ libras;} \end{aligned}$$

por lo tanto, la concentración de sal en el tanque en este instante es

$$C\,(400) = \tfrac{Q(400)}{100}\,\tfrac{lib}{gal} = \tfrac{9,9872}{100}\,\tfrac{lib}{gal} \Longrightarrow C\,(400) = \tfrac{9,9872}{100}\,\tfrac{lib}{gal} = 0,099872\;\tfrac{lib}{gal}$$
$$\Longrightarrow C\,(400) \approx 0,1\;\tfrac{lib}{gal}$$

3. Un estanque contiene 100 m^3 de agua contaminada. Con el propósito de descontaminarlo se introduce agua limpia a razón de 2 m^3/min y el agua contaminada (uniformemente mezclada) se deja salir del estanque a la misma razón.

a) ¿Qué porcentaje de contaminantes se habrá eliminado después de 1 h?

b) ¿Qué tiempo debe transcurrir para que los contaminantes disminuyan en un 90 %?

Solución: Sea Q_0 la cantidad inicial (en $t=0$) de contaminantes en el estanque y sea $Q\,(t)$ la cantidad de contaminantes después de t minutos.

La rapidez de cambio de la cantidad $Q\,(t)$ de contaminantes en el estanque, en el minuto $t \geq 0$ es

$$\frac{d}{dt}Q\,(t) = (\text{rapidez con que entran los contaminantes}) - (\text{rapidez con que salen contaminantes})$$

Como entra agua limpia al estanque, entonces nada entra de contaminante.

Como entra y sale agua del estanque a la misma razón (2 m^3/min), entonces la cantidad de agua en el estanque es siempre la misma (100 m^3), por lo cual la concentración de contaminantes en cada m^3 de agua que sale del estanque es $\dfrac{Q\,(t)}{100}$.

Luego,

$$\frac{d}{dt}Q\,(t) = 2\,(0) - 2\left(\frac{Q\,(t)}{100}\right) \Longrightarrow Q'\,(t) = -\frac{Q\,(t)}{50}.$$

Por lo tanto, la cantidad $Q\,(t)$ de contaminantes en el estanque, después de t minutos, está dada por la solución del PVI:

$$Q'\,(t) + \frac{1}{50}Q\,(t) = 0, \quad \text{con } Q\,(0) = Q_0.$$

Se observa que se trata de una ED lineal homogénea, que podemos resolver separando variables.

a) ¿Qué porcentaje de contaminantes se habrá eliminado después de una hora?

$$\begin{aligned} Q'(t)+\frac{1}{50}Q(t) &= 0 \Longrightarrow \frac{Q'(t)}{Q(t)} = -\frac{1}{50} \Longrightarrow \int \frac{Q'(t)}{Q(t)}dt = -\frac{1}{50}\int dt \\ &\Longrightarrow \ln Q(t) = -\frac{1}{50}t + C \Longrightarrow Q(t) = Ce^{-t/50}, \end{aligned}$$

que es la solución general de la ED. Ahora bien,

$$C = Q(0) = Q_0 = Ce^0 = C \Longrightarrow C = Q_0.$$

Por lo que,

$$Q(t) = Q_0e^{-t/50}.$$

Entonces, la cantidad de contaminantes después de 60 minutos (1 hora), en el estanque, es

$$Q(60) = Q_0e^{-60/50} \Longrightarrow Q(60) = Q_0e^{-6/5} \Longrightarrow Q(60) = Q_0e^{-1,2}.$$

Así, la cantidad de contaminantes que se han eliminado del estanque, en 60 min, es

$$Q_0 - Q(60) = Q_0 - Q_0e^{-1,2} = Q_0\left(1-e^{-1,2}\right).$$

¿Y qué porcentaje es esta cantidad de Q_0?

$$\frac{Q_0 - Q(60)}{Q_0}(100) = \frac{Q_0\left(1-e^{-1,2}\right)}{Q_0}(100) = 100\left(1-e^{-1,2}\right) = 69,88.$$

Por lo tanto, después de 1 h se habrá eliminado el 69,88 % de los contaminantes del estanque.

b) ¿Qué tiempo debe transcurrir para que los contaminantes disminuyan en un 90 %?
Si después de $t = t_1$ minutos los contaminantes han disminuido en un 90 %, entonces:

$$Q(t_1) = 10\ \% \text{ de } Q_0 = (0,1)\,Q_0.$$

Luego,

$$\begin{aligned} Q(t_1) &= (0,1)\,Q_0 \Longrightarrow Q_0e^{-t/50} = (0,1)\,Q_0 \Longrightarrow e^{-t/50} = 0,1 \\ &\Longrightarrow t = -50\ln(0,1) \approx 115,13 \text{ minutos.} \end{aligned}$$

Por lo tanto, para que los contaminantes en el estanque hayan disminuido en un 90 % deben transcurrir aproximadamente 115 minutos, 8 segundos.

4. Consideremos un depósito que contiene 50 litros de agua con 75 gramos de sal disueltos. En un determinado instante comienza a entrar agua salada a razón de 2 litros/minuto, con una concentración de 3 gramos/litro de sal, mientras que el agua, perfectamente mezclada, sale del depósito a razón de 2 litros/minuto. Queremos determinar en qué instante la cantidad de sal en el depósito será de 125 g. En la figura se presenta un esquema de la situación.

5. Llamemos $S(t)$ a la cantidad de sal en el depósito en el instante t. Notemos que el volumen de agua en el depósito es siempre de 50 litros, ya que en cada instante entran dos litros y salen otros dos. Por tanto, la concentración de sal en cada instante será de $\frac{S(t)}{50}\frac{g}{l}$. La velocidad de variación de la concentración de sal viene dada por $S'(t)$, que se expresa en gramos/minuto.

   Por un lado, el aporte de sal por minuto al depósito será de: $2\ \frac{\text{litros}}{\text{minuto}} \times 3\ \frac{\text{gramos}}{\text{litro}} = 6\ \frac{\text{gramos}}{\text{minuto}}$, mientras que la tasa de pérdida de sal es de

$$2\frac{\text{litros}}{\text{minuto}} \times \frac{S(t)}{50}\frac{\text{gramos}}{\text{litro}} = \frac{S(t)}{25}\frac{\text{gramos}}{\text{minuto}}$$

   La variación total de la concentración de sal viene dada por la diferencia entre el aporte y la pérdida de sal. Obtenemos así la siguiente ecuación diferencial

$$S'(t) = 6 - \frac{S(t)}{25}.$$

La condición inicial es $S(0) = 75$, ya que inicialmente hay 75 gramos de sal en el depósito.

La ecuación diferencial es de variables separadas, aunque también es una ecuación lineal. La solución del problema de valor inicial es $S(t) = 150 - 75e^{-t/25}$.

Nótese que la función $S(t)$ es creciente, ya que $S'(t) = 3e^{-t/25} > 0$. Esto significa que la cantidad de sal en el depósito aumenta al avanzar el tiempo.

Para determinar cuándo la cantidad de sal en el depósito será de 125 gramos por ejemplo, basta con resolver la ecuación $S(t) = 125$:

$$S(t) = 125 \Longrightarrow 150 - 75e^{-t/25} = 125 \Longrightarrow t = -25 \ln\left(\frac{1}{3}\right) = 25 \ln 3 \approx 27,4653 \text{ minutos.}$$

6. Supongamos que un tanque mezclador grande contiene 300 galones de agua, en donde se ha disuelto sal. Otra solución de salmuera se bombea al tanque a una tasa de 3 galones por minuto. El contenido se agita perfectamente y es desalojado a la misma tasa. Si la concentración de la solución que entra es 2 libras/galón, hay que armar un modelo de la cantidad de sal en el tanque en cualquier momento.

   Solución. Sea $A(t)$ la cantidad de sal (en libras) en el tanque en cualquier momento t. En este caso, la rapidez con que cambia $A(t)$ es la tasa neta:

   $$\frac{dA}{dt} = (\text{tasa de entrada de la sustancia}) - (\text{tasa de salida de la sustancia}) = R_1 - R_2 \qquad (*)$$

   Ahora bien, la razón, R_1, con la que entra la sal al tanque, en lb/min, es

   $$R_1 = (3\frac{gal}{min})(2\frac{lb}{gal}) = 6\frac{lb}{\text{mín}}.$$

   Mientras que la razón, R_2, con que sale la sal es

   $$R_2 = (3\frac{gal}{min})(\frac{A}{300}\frac{lb}{gal}) = \frac{A}{100}\frac{lb}{\text{mín}}.$$

   Entonces, la ecuación (*) se transforma en

   $$\frac{dA}{dt} = 6 - \frac{A}{100} \qquad (**)$$

7. El tanque de la Figura contiene inicialmente 100 galones de agua pura. En el tiempo $t = 0$, una solución que contiene 2 libras de sal por galón comienza a entrar en el tanque a una velocidad de 3 galones por minuto. Al mismo tiempo se abre un drenaje en la parte inferior del tanque para que el volumen de solución en el tanque permanezca constante. ¿Cuánta sal está en el tanque después de 60 min?

   Solución. Comencemos por designar $x(t)$ el número de libras de sal en el tanque después de t min. En consecuencia, la derivada dx/dt es la representación matemática de la velocidad a la cual la cantidad de sal está cambiando con respecto al tiempo. El proceso de modelado consiste en calcular una representación física de la tasa de cambio y establecerla igual. El resultado final es una ecuación diferencial para la función $x(t)$.

   Es muy útil en el proceso de modelado realizar un seguimiento de las unidades utilizadas. Por ejemplo, puesto que estamos midiendo x en libras y tiempo en minutos, la derivada dx/dt se mide en libras por minuto $(\frac{lb}{\text{mín}})$. En la declaración del problema se nos dan las tasas de flujo dentro y fuera del tanque. Estas son las velocidades de volumen, medidas en galones por minuto (gal/min). Además, se nos da la concentración de la solución que entra en el tanque, y esto se mide en libras por galón $(\frac{lb}{gal})$.

   La representación física de la tasa de cambio se divide naturalmente en dos partes ya que hay un flujo en el tanque y otro hacia fuera. Así podemos escribir

   $$\text{Tasa de cambio} = \text{tasa de entrada} - \text{tasa de salida.}$$

Esta útil separación de efectos se denomina a veces ley de equilibrio. Dado que la tasa de cambio se mide en $\frac{lb}{\text{mín}}$, lo mismo debe ser verdad para la tasa de entrada y la tasa de salida.

Examinemos la velocidad: La solución entra en el tanque a una velocidad de volumen de 3 $\frac{gal}{\text{mín}}$. La concentración de sal en esta solución es de $2\frac{lb}{gal}$. Por consiguiente,

$$\text{tasa de entrada} = \text{tasa de volumen } \times \text{concentración} = 3\frac{gal}{\text{mín}} \times 2\frac{lb}{gal} = 6\ \frac{lb}{\text{mín}}.$$

La velocidad a la que sale sal del tanque es un poco más complicada. Tenemos:

$$\text{Tasa de salida} = \text{tasa de volumen } \times \text{concentración}.$$

Dado que el volumen se mantiene constante, sabemos que la solución sale por el desagüe en la parte inferior del tanque con una tasa de volumen de 3 $\frac{gal}{\text{mín}}$, pero ¿cuál es la concentración de sal en el agua que sale del tanque? Asumiremos que la mezcla en el tanque se mezcla instantáneamente en todo momento para que la concentración de la sal no cambie de punto a punto. Es cierto que esto probablemente no sea una suposición precisa, pero es un buen punto de partida y nos permite completar el modelo usando ecuaciones diferenciales ordinarias. Sin esta hipótesis todavía podemos modelar el sistema, pero la concentración dependería de la posición dentro del tanque, y el modelo sería una ecuación diferencial parcial. Con nuestro supuesto de mezcla perfecta, la concentración de sal en el tanque en cualquier momento t se calcula dividiendo la cantidad de sal en el tanque en el instante t por el volumen de solución en el tanque. La concentración en el tiempo t, $c(t)$, viene dada por

$$C(t) = \frac{x(t)}{100} lb/gal.$$

Ahora podemos determinar la velocidad a la que sal sale del tanque:

$$\text{Tasa de salida} = 3\frac{gal}{\text{mín}} \times \frac{x(t)}{100}\frac{lb}{gal} = \frac{3}{100}\frac{lb}{\text{mín}}$$

Nuestra discusión nos ha llevado a la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = \text{tasa de cambio} = \text{Tasa entrada} - \text{tasa de salida } = 6 - \frac{3x}{100}.$$

Esta ecuación tiene la forma $\frac{dx}{dt} = a\,(t)\,x + f\,(t)$, por lo que es lineal, y para encontrar su solución, primero, reescribimos la ecuación como

$$\frac{dx}{dt} + \frac{3x}{100} = 6.$$

A continuación se calcula el factor de integración, $\mu\,(t) = e^{\int \frac{3}{100}dt} = e^{\frac{3t}{100}}$.

Cuando multiplicamos ambos lados de la ecuación $\frac{dx}{dt} + \frac{3x}{100} = 6$ por $\mu\,(t)$, observamos que

$$\left[e^{3t/100}x\right]' = e^{3t/100}\left(\frac{dx}{dt} + \frac{3x}{100}\right) = 6e^{3t/100}.$$

Integramos ambos lados de esta ecuación para obtener:

$$e^{3t/100}x = \int 6e^{3t/100}dt = \frac{600}{3}e^{3t/100} + C.$$

Finalmente, obtenemos la solución general resolviendo para x:

$$x\,(t) = 200 + Ce^{-3t/100}.$$

Dado que no había sal presente en el tanque inicialmente, la condición inicial es $x\,(0) = 0$. Por lo tanto

$$0 = x\,(0) = 200 + Ce^{-3(0)/100} \Longrightarrow C = -200.$$

En consecuencia, $C = -200$ y nuestra solución es

$$x(t) = 200 - 200e^{-3t/100}.$$

Se deja como ejercicio graficar la solución. La cantidad de sal presente en el tanque después de 60 minutos es

$$x(60) = 200 - 200e^{-3(60)/100} \approx 167 \; lb.$$

Ejercicios Mezclas.

1. Un tanque contiene 100 litros de agua salada en el cual hay 2 kg de sal disueltos. Agua salada con $0,25$ kg de sal por litro entra al tanque a razón de 16 litros/min y la mezcla bien agitada sale a la misma razón.

   a) Obtener la cantidad de sal en el tanque después de t minutos.
   b) Determinar la cantidad de sal después de 10 min.
   c) Determinar la concentración de sal después de media hora.
   d) ¿Cuánta sal hay después de un tiempo largo?
   (Respuesta: a) $Q(t) = 25 - 23e^{-4t/25}$; b) $Q(10) \approx 20$ kg, 356 g; c) $C_{30} = 0,2481$ kg/litro; d) $Q_{lim} = 25$ kg.)

2. Un tanque contiene 50 gal de agua pura. Una solución de agua salada con 1 lb de sal por galón entra al tanque a razón de 2 gal/min y la mezcla bien agitada sale a la misma razón.

   a) ¿Cuánta sal hay en el tanque después de t minutos?
   b) ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que la mezcla del tanque tenga una concentración de $0,5$ libras de sal por galón?
   c) ¿Cuál es la concentración de sal después de un tiempo largo?
   Respuesta: a) $Q(t) = 50\left(1 - e^{-t/25}\right)$ lb; b) $t \approx 17$ min, 20 s; c) $C_{lim} = 1$ lb/gal.

3. Un tanque contiene 100 gal de agua salada con 10 libras de sal disuelta. Agua salada con $1,5$ libras de sal por galón entra al tanque a razón de 3 gal/min y la mezcla bien agitada sale a razón de 4 gal/min.

   a) Obtener la cantidad de sal en el tanque en cualquier tiempo $t \geq 0$.
   b) Determinar la cantidad de sal en el tanque después de 10 min.
   c) Calcular la concentración de sal en el tanque después de 20 min.
   d) Determinar la concentración de sal en el tanque, cuando hay solamente 10 gal de solución.
   Respuesta: a) $Q(t) = (1,5)(100 - t) - 140\left(\frac{100 - t}{100}\right)^4$ lb; b) $Q(10) = 43,146$ lb; c) $C_{20} = 0,7832$ lb/gal; d) $C_{90} = 1,4986$ lb/gal.

4. Un tanque con capacidad para 500 gal contiene inicialmente 10 lb de sal disueltas en 200 gal de agua. Se bombea al tanque salmuera que contiene 2 lb/gal a razón de 4 gal/min y se permite que la mezcla salga del tanque a razón de 3 gal/min.

   a) ¿Qué cantidad de sal hay en el tanque después de t minutos?
   b) ¿Cuál es la concentración de sal después de una hora?
   c) ¿Cuánta sal contiene el tanque cuando se llena?
   d) ¿Cuál es la concentración de sal en el tanque cuando se llena?
   Respuesta: a) $X(t) = 2(200 + t) - 390\left(\frac{200}{200 + t}\right)^3$ lb; b) $C_{60} = 1,31725$ lb/gal; c) $X(300) \approx 975$ lb; d) $C_{300} = 1,95$ lb/gal.

5. Un tanque contiene inicialmente 60 gal de agua pura. A razón de 2 gal/min entra al tanque salmuera que contiene 1 libra de sal por galón y la solución uniformemente mezclada sale del tanque a razón de 3 gal/min.

   a) Obtener la cantidad de sal en el tanque después de t minutos.

   b) Calcular la concentración de sal en el tanque después de media hora.

   c) Determinar la concentración de sal en el tanque cuando hay solamente 10 gal de solución.

   d) ¿Cuál es la máxima cantidad de sal que llega a tener el tanque?

   Respuesta: a) $A(t) = (60-t) - 60\left(\dfrac{60-t}{60}\right)^3$ lb; b) $C_{30} = 0{,}75$ lb/gal; c) $C_{50} = 0{,}972$ lb/gal; d) $A_{máx} = 23{,}094$ lb, en $t = 25{,}38$ min.

6. Un depósito contiene 100 gal de salmuera en la que hay disueltas 40 lb de sal. Se desea reducir la concentración de sal hasta $0{,}1$ lb/gal vertiendo agua pura en el depósito a razón de 5 gal/min y permitiendo que salga a la misma razón. La mezcla se mantiene uniforme. ¿Cuánto tiempo pasará hasta que se logre lo deseado? (Respuesta: $t = 27$ min, 44 s)

7. Un gran tanque está parcialmente lleno con 100 galones de agua en los cuales hay 10 lb de sal disuelta. Una salmuera que contiene 12 lb de sal por galón se bombea al tanque con una rapidez de 6 gal/min. La solución adecuadamente mezclada se bombea hacia afuera del tanque con una rapidez de 4 gal/min. Calcular el número de libras de sal que hay en el tanque después de 30 min. (Respuesta: $Q(30) = 64{,}375$ lb)

8. Se bombea cerveza con un contenido de 8 % de alcohol por galón a un tanque que inicialmente contiene 500 galones de cerveza con 6 % de alcohol. La cerveza se bombea hacia el interior a razón de 5 gal/min en tanto que el líquido mezclado se extrae del tanque a razón de 6 gal/min.

   a) ¿Qué cantidad de alcohol hay en el tanque después de t minutos?

   b) ¿Cuál es el porcentaje de alcohol en el tanque después de 1 h?

   (Respuesta: a) $A(t) = (0{,}08)(500-t) - 10\left(\dfrac{500-t}{500}\right)^6$ gal; b) 6,94 %)

9. Un tanque de 100 galones contiene inicialmente agua pura. Una solución de colorante al 30 % fluye hacia el tanque a una tasa de 5 gal/min y la mezcla resultante sale a la misma tasa. Después de 15 minutos el proceso se detiene y se hace fluir agua pura al tanque a una tasa de 5 gal/min (la mezcla sale a la misma tasa). Encuentre la cantidad de colorante en el tanque después de 30 minutos. (Respuesta: 7,477 gal.)

10. Un tanque de 100 galones se llena inicialmente con 40 % de solución colorante. Una solución colorante al 20 % fluye hacia el tanque a una tasa de 5 gal/min. La mezcla sale del tanque a la misma tasa y pasa a otro tanque de 100 galones que se había llenado inicialmente con agua pura. La mezcla resultante sale del segundo tanque a una tasa de 5 gal/min. Obtener una expresión para la cantidad de colorante en el segundo tanque. ¿Cuál es la concentración de colorante en el segundo tanque después de 30 minutos? (Respuesta: $20 + (t-20)\,e^{-t/20}$; 22,23 %)

2.7. Movimiento de un cuerpo

Un paracaidista salta de un avión y cae libremente durante 30 segundos. Durante este tiempo la resistencia del aire es despreciada. Cuando su paracaídas se abre, la resistencia del aire es proporcional a su velocidad. Encuentre la velocidad del paracaidista a partir del instante en que el paracaídas se abrió.

Solución: Suponga que el paracaidista tiene masa m. Entonces, antes de que el paracaídas se abra tenemos:

$$m\frac{dv}{dt} = mg \Longleftrightarrow \frac{dv}{dt} = g,$$

de donde se obtiene $v = gt + C$, donde g es la constante gravitacional. Como la velocidad inicial $v(0) = 0$, entonces, $v = gt$, y así, $v(30) = 30g$, que es la condición inicial del problema cuando el paracaídas se abre.

En este caso, como las fuerzas actuantes son el peso del paracaidista, mg, y la fuerza de resistencia, kv, se tiene:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv \Longleftrightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g$$

Observe que la resistencia del aire, kv, tiene signo negativo, pues ésta siempre reduce la velocidad. Se resuelve esta ecuación diferencial utilizando el factor integrante $\mu = e^{kt/m}$. Se obtiene

$$v(t) = \frac{m}{k}g + Ce^{-kt/m}.$$

Con la condición inicial $v(30) = 30g$, se obtiene

$$v(t) = \frac{m}{k}g + \left(30g - \frac{mg}{k}\right)e^{-kt/m}.$$

Observe que cuando $t \to +\infty$, $v(t) \to \dfrac{mg}{k}$, que es llamada velocidad límite.

El diagrama de bloques de simulink que modela la velocidad del paracaidista se muestra en la figura 2.12.

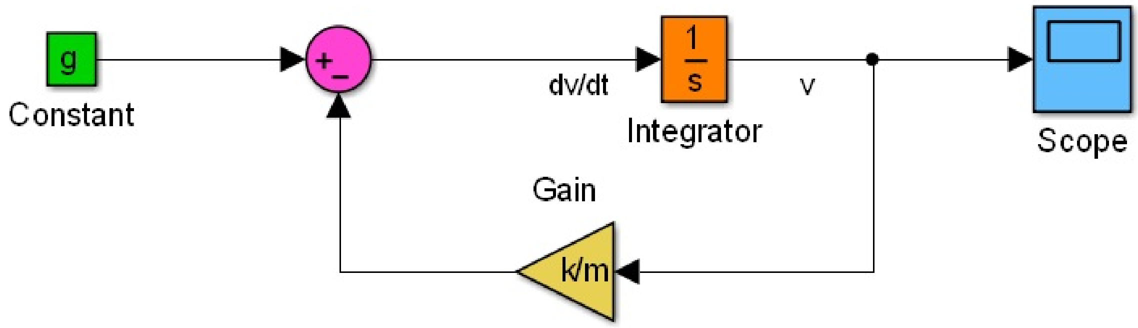

Figura 2.12 Diagrama de bloques para $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g$.

2.8. Trayectorias ortogonales

Si consideramos la familia de curvas $x^2 + y^2 = c$; con $c > 0$; podemos decir que esta familia es el conjunto de las circunferencias de radio $r = \sqrt{c}$ con centro en el origen.

Ésta es una familia de curvas de la forma:

$$F(x; y) = c, \text{ donde } F(x; y) = x^2 + y^2.$$

Una ecuación diferencial asociada a esta familia de curvas es:

$$y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}.$$

En un punto arbitrario del plano $(x; y)$, la curva de la familia que pasa por ese punto tiene recta tangente con pendien te $-\dfrac{x}{y}$. Por ejemplo, por el punto .$(2; 3)$ pasa la circunferencia de radio $\sqrt{13}$ y su recta tangente en dicho punto tiene pendiente $m_1 = -\dfrac{2}{3}$.

Ahora bien, se sabe que dos rectas que se intersecan son perpendiculares, si sus pendientes satisfacen: $m_1 m_2 = -1$ o bien $m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$ o bien $m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$. Es decir, la pendiente de una recta es el negativo del inverso multiplicativo de la pendiente de la otra.

Existen curvas que pasan por el punto $(2;3)$ y que tienen como pendiente de la tangente $m_2=\dfrac{3}{2}$. Por ejemplo, $y=\dfrac{1}{8}x^3+2$ pasa por el punto $(2;3)$ y la pendiente de su tangente en ese punto es $m_2=\dfrac{3}{2}$.

Decimos entonces que, en el punto $(2;3)$, las curvas $x^2+y^2=13$ y $y=\dfrac{1}{8}x^3+2$ son ortogonales puesto que sus tangentes son ortogonales. Cumplen que $m_1m_2=-1$. Ahora, si tomamos un punto arbitrario del plano $(x;y)$ por donde pasa una circunferencia de radio $r=\sqrt{x^2+y^2}$ cuya tangente tiene pendiente $m_1=-\dfrac{x}{y}$ podemos generar entonces una ecuación diferencial con la igualdad $m_2=-\dfrac{1}{m_1}$. Esta es

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}. \tag{3.1}$$

La anterior ED tiene soluciones tales que, cuando una curva solución pasa por el punto $(x;y)$, su recta tangente es ortogonal a la tangente de la circunferencia que pasa por ese punto.

Vamos a resolver la ecuación diferencial anterior (3.1) por separación de variables:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\Longrightarrow\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}\Longrightarrow\int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x}\Longrightarrow\ln y=\ln x+C_1\Longrightarrow y=Cx.$$

La solución general de esta ecuación diferencial representa a la familia de rectas que pasa por el origen.

Como vemos, cada recta de la familia $y=Cx$ interseca ortogonalmente a cada una de las circunferencias de la familia $x^2+y^2=c$. Así, con el método indicado, hallamos una familia de curvas (y no una única curva) tal que cada uno de sus miembros es ortogonal a cada una de las curvas de la familia $x^2+y^2=c$.

Esto se ve en la siguiente figura:

Supongamos que tenemos dos familias de curvas (las cuales llamaremos C_1 y C_2), cuando cada curva de una familia C_1 es ortogonal a cada una de las curvas de otra familia C_2, se dice que C_1 y C_2 son familias ortogonales de curvas o bien que C_1 y C_2 son familias de trayectorias ortogonales.

¿Cómo encontrar la familia ortogonal a una familia dada?

Si tenemos una familia de curvas de la forma

$$F(x;y)=c$$

Se calcula la ecuación diferencial asociada a dicha familia, es decir:

$$y'=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Se afirma entonces que la ecuación diferencial asociada a la familia ortogonal es

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}}$$

Resolvemos esta ecuación diferencial y su solución general es la familia ortogonal a la familia dada.

Ejemplos

1. Obtener la familia ortogonal a la familia: $y=cx^2$.

   Solución. Esta familia es el conjunto de las parábolas con vértice en el origen. Calculamos la ecuación diferencial asociada a esta familia de curvas. Escribimos $y=cx^2$ como $\dfrac{y}{x^2}=c$ donde

$$F(x;y)=\frac{y}{x^2}\Longrightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=-\dfrac{2y}{x^3},\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{1}{x^2}\end{cases}$$

Entonces la ecuación diferencial asociada a la familia de parábolas es

$$y' = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{-\dfrac{2y}{x^3}}{\dfrac{1}{x^2}} \Longrightarrow y' = \frac{2y}{x}.$$

Por lo tanto la ecuación diferencial asociada a la familia ortogonal es

$$y' = -\frac{x}{2y}.$$

Resolvemos esta ED por variables separables:

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{x}{2y} \Longrightarrow 2ydy = -xdx \Longrightarrow 2\int ydy = -\int xdx + C \Longrightarrow y^2 = -\frac{x^2}{2} + C \\ &\Longrightarrow \frac{x^2}{2} + y^2 = C \Longrightarrow \frac{x^2}{2C} + \frac{y^2}{C} = 1; \end{aligned}$$

esta última ecuación es la familia ortogonal y representa una familia de elipses con centro en el origen.

2. Determinar las trayectorias ortogonales de la familia de curvas $2x^2 + y^2 = 4cx$; con c constante.

   Solución. Obtenemos la ED asociada a esta familia:

$$2x^2 + y^2 = 4cx \Longrightarrow \tfrac{2x^2+y^2}{4x} = c \Longrightarrow F(x;y) = \tfrac{2x^2+y^2}{4x} \Longrightarrow$$

$$F(x;y) = \tfrac{x}{2} + \tfrac{y^2}{4x} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{y^2}{4x^2}, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{y}{2x} \end{cases}$$

Luego, la ED asociada es

$$y' = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{\dfrac{1}{2} - \dfrac{y^2}{4x^2}}{\dfrac{y}{2x}} \Longrightarrow y' = -\frac{\dfrac{2x^2 - y^2}{4x^2}}{\dfrac{y}{2x}} \Longrightarrow y' = \frac{\dfrac{y^2 - 2x^2}{4x^2}}{\dfrac{y}{2x}} \Longrightarrow y' = -\frac{2x^2 - y^2}{2xy}.$$

Por lo tanto, la ED asociada a las trayectorias ortogonales es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial x}} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{2x^2 - y^2}.$$

Como se observa, esta ED es homogénea y la resolvemos como tal

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{2x^2 - y^2} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2\dfrac{y}{x}}{2 - \dfrac{y^2}{x^2}} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2\left(\dfrac{y}{x}\right)}{2 - \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}.$$

Haciendo la sustitución $z = \dfrac{y}{x}$, tenemos: $y = xz$ y por tanto $\dfrac{dy}{dx} = z + x\dfrac{dz}{dx}$. Luego:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{2\left(\dfrac{y}{x}\right)}{2 - \left(\dfrac{y}{x}\right)^2} \Longrightarrow z + x\frac{dz}{dx} = \frac{2z}{2 - z^2} \Longrightarrow x\frac{dz}{dx} = \frac{2z}{2 - z^2} - z \Longrightarrow x\frac{dz}{dx} = \frac{2z - 2z + z^3}{2 - z^2} \\ &\Longrightarrow x\frac{dz}{dx} = \frac{z^3}{2 - z^2} \Longrightarrow \frac{\left(2 - z^2\right)dz}{z^3} = \frac{dx}{x} \Longrightarrow \left(\frac{2}{z^3} - \frac{1}{z}\right)dz = \frac{dx}{x} \\ &\Longrightarrow \left(2z^{-3} - \frac{1}{z}\right)dz = \frac{dx}{x} \Longrightarrow \int \left(2z^{-3} - \frac{1}{z}\right)dz = \int \frac{dx}{x} + C \Longrightarrow -\frac{1}{z^2} - \ln z = \ln x + C \\ &\Longrightarrow \ln x + \ln z + \frac{1}{z^2} = C. \end{aligned}$$

Y debido a que $z = \dfrac{y}{x}$, al sustituir en la ED se tiene que:

$$\ln x + \ln\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{x^2}{y^2} = C \Longrightarrow \ln x + \ln y - \ln x + \frac{x^2}{y^2} = C \Longrightarrow \ln y + \frac{x^2}{y^2} = C \Longrightarrow x^2 + y^2 \ln y = Cy^2.$$

Por lo tanto, las trayectorias ortogonales están dadas por la familia de curvas:

$$x^2 + y^2 \ln y = Cy^2, \text{ donde } C \text{ es constante.}$$

3. Calcular las trayectorias ortogonales de la familia de curvas $\cos y = ce^{-x}$, con c constante.

   Solución. Obtenemos la ED asociada a esta familia de curvas:

$$\cos y = ce^{-x} \Longrightarrow e^x \cos y = c \Longrightarrow F(x;y) = e^x \cos y \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = e^x \cos y, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = -e^x \operatorname{sen} y \end{cases}$$

   Luego, la ED asociada es

$$y' = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} \Longrightarrow y' = -\frac{e^x \cos y}{-e^x \operatorname{sen} y} \Longrightarrow y' = \frac{\cos y}{\operatorname{sen} y}.$$

   Por lo que, la ED asociada a las trayectorias ortogonales es

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\operatorname{sen} y}{\cos y},$$

   que resolvemos por variables separables.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{\operatorname{sen} y}{\cos y} \Longrightarrow \frac{\cos y}{\operatorname{sen} y} dy = -dx \Longrightarrow \int \frac{\cos y}{\operatorname{sen} y} dy = -\int dx + C_1 \\ &\Longrightarrow \ln(\operatorname{sen} y) = C_1 - x \Longrightarrow \operatorname{sen} y = e^{C_1 - x} \\ &\Longrightarrow \operatorname{sen} y = Ce^{-x}. \end{aligned}$$

   Por lo tanto, las trayectorias ortogonales están dadas por:

$$\operatorname{sen} y = Ce^{-x}, \text{ con } C \text{ constante.}$$

4. Halle las trayectorias ortogonales a la familia de curvas $y_c = cx^5$. Suponga que y es una curva ortogonal a todas las curvas y_c.

   Solución. Primero que todo, si y y y_c se intersecan en x entonces $y_c(x) = y(x)$, por lo que $c = \dfrac{y(x)}{x^5}$.

   Por otro lado, $y_c'(x) = 5cx^4$, y como para encontrar la familia de trayectorias ortogonales a la familia $y_c(x)$ se resuelve la ecuación

$$y' = -\frac{1}{y_c'(x)},$$

   la ecuación diferencial por resolver es

$$y' = -\frac{1}{5cx^4}, \text{ con } x \neq 0.$$

   Observe que antes de resolver la ecuación hay que sustituir el valor de $c = \dfrac{y(x)}{x^5}$, puesto que el parámetro c va variando y por lo tanto no se puede tratar como constante.

   Por lo tanto hay que resolver

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \quad \text{con } x \neq 0, \quad y \neq 0.$$

Esta ecuación se puede escribir como

$$5y\ dy = -x\ dx$$

y nuevamente puede integrarse a ambos lados para obtener

$$\frac{5}{2}y^2 = -\frac{x^2}{2} + C \quad \text{o también,} \quad \frac{x^2}{2} + \frac{5}{2}y^2 = C, \quad \text{con } x \neq 0, \quad y \neq 0,$$

por lo que las curvas son una familia de elipses. En el caso de que $x = y = 0$ la curva que es perpendicular a la familia y_c es el eje y.

5. Halle las trayectorias ortogonales a la familia de curvas dadas por la ecuación $x\left(y^2+1\right) + xy^2 = C$.

   Solución. La única diferencia con respecto al problema anterior es que hay que derivar implícitamente. Aquí cabe mencionar que es usual eliminar el índice c en y_c por lo que derivando la familia de curvas

   $$y^2 + 1 + x\left(2yy'\right) + y^2 + x\left(2yy'\right) = 0$$

   o bien

   $$y' = -\frac{2y^2+1}{4xy}, \quad \text{con } x \neq 0, \quad y \neq 0.$$

   Luego, se tiene que resolver la ecuación

   $$y' = \frac{4xy}{2y^2+1}$$

   O bien

   $$\frac{2y^2+1}{y}dy = 4xdx,$$

   e integrando a ambos lados se tiene: $y^2 + \ln y = 2x^2 + C$.

2.9. Ejercicios trayectorias ortogonales.

Encontrar la familia de curvas ortogonales a cada una de las siguientes familias.

1. $y^2 = 2Cx$. (Respuesta: $2x^2 + y^2 = C$.)
2. $y = Ce^x$. (Respuesta: $y^2 + 2x = C$.)
3. $y^2 - 2x^2 = C$. (Respuesta: $xy^2 = C$.)
4. $Cx^2 + y^2 = 1$. (Respuesta: $x^2 + y^2 - \ln y^2 = C$.)
5. $y = Cx^2$. (Respuesta: $x^2 + 2y^2 = C$.
6. $x^2 + y^2 = 2ay$. (Respuesta: $x^2 + y^2 = Cx$.)
7. $y^2 = 2p\left(x-a\right)$; $p \neq 0$ es un número conocido. (Respuesta: $y = Ce^{-x/p}$)
8. $x^2 - y^2 = a$. (Respuesta: $y = \frac{C}{x}$)
9. $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$. (Respuesta: $\left(x^2+y^2\right)^2 = K\left(2x^2+y^2\right)$.)
10. $\left(x^2+y^2\right)^2 = a^2\left(x^2-y^2\right)$. (Respuesta: $\left(x^2+y^2\right)^2 = Kxy$.)

2.10. Modelización con ecuaciones diferenciales de primer orden

1. Un tanque con capacidad de 500 galones originalmente contiene 200 galones de agua con 100 libras de sal en solución. Agua conteniendo una libra de sal por galón está entrando a una tasa de 3 gal/min, y se permite que la mezcla salga del tanque a una tasa de 2 gal/min.

   a) Encontrar la cantidad de sal en el tanque en cualquier instante antes de que la solución comienza a desbordar.

   b) Encontrar la concentración (en libras por galón) de sal en el tanque cuando está en el punto de desbordamiento.

   c) Compare esta concentración con la concentración teórica limitante si el tanque tuviera capacidad infinita.

2. Una bola de masa $0,15\ kg$ se lanza hacia arriba con una velocidad inicial de $20\ m/s$ desde el techo de un edificio de $30\ m$ de altura. Hay una fuerza debida a la resistencia del aire de $\frac{|v|}{30}$, donde la velocidad v es medida en m/s.

   a) Encuentra la máxima altura por encima de la base que la pelota alcanza.

   b) Encontrar el tiempo en que la pelota toca el suelo.

   c) Dibuje el gráfico de la velocidad y posición en función del tiempo..

3. Encontrar la ecuación de una curva cuya pendiente es igual al doble de la abscisa en todo punto (x, y) de la curva.

   Solución: Se tiene que $y' = 2x$, de donde $y = x^2 + C$, es la ecuación de la familia de curvas que verifican la condición dada.

4. Encontrar una curva que tiene su pendiente igual a la mitad de la abscisa y que pasa por el punto $(0, -3)$.

   Solución: Como $y' = \frac{1}{2}x$, se sigue que $y = \frac{1}{4}x^2 + C$. Puesto que tiene que pasar por el punto $(0, -3)$, de $y(0) = -3$, se sigue que $C = -3$ y por tanto la curva buscada tiene por ecuación $y = \frac{1}{4}x^2 - 3$.

5. Encontrar la ecuación de la curva que es perpendicular a la recta que une cualquier punto de la curva con el punto $(3, 4)$, si la curva pasa también por el origen.

   Solución: Notemos con $P_1 = (3, 4)$ y $P = (x, y)$ cualquier punto de la curva. La pendiente de la tangente a la curva en P es inversa negativa de la recta P_1P, cuyo valor es $\frac{y-4}{x-3}$. En consecuencia $y' = -\frac{x-3}{y-4}$. Separando las variables e integrando se obtiene que la familia de curvas está dada por:

   $$\frac{y^2}{2} - 4y = 3x - \frac{x^2}{2} + C.$$

   Como la curva debe pasar por el origen, entonces al hacer $x = 0$, $y = 0$, se encuentra que $C = 0$; luego la curva buscada tiene como solución $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$, que es la ecuación de un círculo de centro $(3, 4)$ y radio 5.

6. Se sabe que cierto material radiactivo se desintegra a una razón de cambio proporcional a la cantidad presente. Si inicialmente hay 100 miligramos de material presente y después de dos horas se observa que el material ha perdido el 10 % de su masa original, hallar:

   a) Una expresión para la masa de material restante en un momento t,

   b) la masa de material después de cuatro horas, y

   c) el tiempo al cabo del cual el material sa ha desintegrado en la mitad de su masa inicial.

Solución: Llamemos y a la cantidad de material presente en un momento t. Se tiene entonces que la razón de desintegración está dada por $\dfrac{dy}{dt} = ky$, ecuación que tiene como solución general $y(t) = Ce^{kt}$.Para $t = 0$, se tiene que $y = 100$, luego de $y(t) = Ce^{kt}$ se deduce que $C = 100$ y por tanto $y(t) = 100e^{kt}$.

Por otra parte para $t = 2$, la masa original de 100 mg se ha desintegrado en 10 % es decir, 10 mg. Luego, $y(2) = 100 - 10 = 90\,\text{mg}$ y de $90 = 100e^{2k}$ se sigue que $k = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{9}{10} = -0.05268\ldots$. Sustituyendo el valor de k, se tiene que la cantidad de masa presente en un momento t está dada por $y(t) = 100e^{-0{,}05268t}$.

7. El dinero depositado en cierto banco aumenta a una razón que es proporcional al saldo existente. Demostrar que el banco capitaliza el interés continuamente. ¿Cuál es la relación entre la constante de proporcionalidad y la tasa de interés anual?

   Solución: Notemos por $S(t)$ el saldo existente en la cuenta después de t años y k la constante de proporcionalidad.

   Se tiene entonces que $\dfrac{dS}{dt} = kS(t)$, cuya solución es $S(t) = e^C e^{kt}$. De esta expresión se sigue que $S(0) = e^C$, es decir que e^C es el depósito o capital inicial, al mismo que lo notaremos S_0. Luego, $S(t) = S_0 e^{kt}$, que es precisamente la fórmula para el saldo cuando el interés se capitaliza continuamente a una tasa de 100 por ciento al año.

8. La ecuación que rige la cantidad de corriente I (en amperios) en un circuito RL consistente en una resistencia R (en ohmios), un condensador L (en henrios), y una fuerza electromotriz (abreviada fem) E (en voltios) es
$$LI'(t) + RI(t) = E(t).$$

   Agreguemos la condición inicial $I(0) = 0$, para indicar con ello que antes de cerrarse el circuito no circulaba corriente alguna.

   La ecuación diferencial $LI'(t) + RI(t) = E(t)$, se transforma en $I'(t) + \dfrac{R}{L}I(t) = \dfrac{1}{L}E(t)$, que es una ecuación diferencial lineal y cuya solución general es
$$I(t) = \frac{1}{L}e^{-Rt/L}\int_0^t e^{Ru/L}E(u)du + Ke^{-Rt/L},$$

   y como $I(0) = 0$, se sigue que $K = 0$ y por tanto
$$I(t) = \frac{1}{L}e^{-Rt/L}\int_0^t e^{Ru/L}E(u)du.$$

   Si la fuerza electromotriz tuviese un valor constante E_0, se tendría que
$$I(t) = \frac{E_0}{R} - \frac{E_0}{R}e^{-Rt/L}.$$

9. Un torpedo de masa $m = 1$ es lanzado horizontalmente, debajo del agua, con velocidad inicial $v_0\ m/s$. La resistencia del agua es proporcional a la velocidad del torpedo al cuadrado con constante de proporcionalidad $k = 10^{-3}$. Si el torpedo debe impactar al objetivo con al menos la mitad de su velocidad inicial para causar daño, ¿Cuál es la distancia máxima a la que el disparo seguirá teniendo efecto?

   Solución: Como la única fuerza actuante es la resistencia del agua, se tiene la ecuación:
$$\frac{dv}{dt} = 10^{-3}v^2,$$

que resolviendo por separación de variables se obtiene

$$\int \frac{dv}{v^2} = 10^{-3} \int dt + C \Longleftrightarrow v = \frac{1}{10^{-3}t + C}.$$

Como su velocidad inicial $v(0) = v_0$, entonces, $C = \frac{1}{v_0}$, y por tanto su velocidad es

$$v(t) = \frac{v_0}{10^{-3}v_0 t + 1}.$$

Así, suponiendo que su posición inicial está dada por $x(0) = 0$, su posición en cada instante está dada por

$$x(t) = 10^3 \ln\left(10^{-3}v_0 t + 1\right).$$

Ahora, para calcular la distancia máxima para que el tiro tenga efecto, debemos calcular el momento en que se alcanza la velocidad inicial, esto es, para qué valor de t se tiene $v(t) = \frac{v_0}{2}$.

$$\frac{v_0}{10^{-3}v_0 t + 1} = \frac{v_0}{2} \Longrightarrow 10^{-3}v_0 t + 1 = 2 \Longrightarrow t = \frac{10^3}{v_0}.$$

Calculando la distancia con ese tiempo, se obtiene:

$$x\left(\frac{10^3}{v_0}\right) = 10^3 \ln(2) = 693,14 \text{ metros}.$$

10. Ecuación de Torricelli

La ecuación de Torricelli describe la velocidad a la que el nivel de un fluido cae de un tanque con fugas. Más específicamente, si un tanque tiene un orificio con el área a en su fondo y si $A(y)$ denota el área de sección transversal horizontal $A(y)$ del tanque a profundidad y, entonces la velocidad $\frac{dy}{dt}$ en la que el líquido desciende es dado por la ecuación de Torricelli:

$$A(y)\frac{dy}{dt} = -a\sqrt{2gy}$$

Donde g es la aceleración debida a la gravedad. Véase la figura 2.14.

11. **Drenaje de agua de un tanque hemisférico** Un tanque hemisférico como se muestra en la figura 2.13 con un radio de R está inicialmente llena de agua. Una fuga se forma cuando un se perfora un orificio circular de radio r_0 en la parte inferior del tanque.

a) Muestre que la ecuación diferencial que describe la altura y del agua en la El tanque es

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\pi\, r_0^2\sqrt{2gy}}{\pi x^2}$$

b) A partir de la relación $x^2 = R^2 - (y - R)^2 = 2yR - y^2$, se muestra que la solución implícita de esta ecuación se puede encontrar separando las variables.

$$\frac{4}{3}Ry^{3/2} - \frac{2}{5}y^{5/2} = -\, r_0^2\sqrt{2gt} + C$$

c) Utilice la condición $y = R$ cuando $t = 0$ para encontrar la constante de integración C.

d) Ponga $y = 0$ y resuelva para t en la ecuación encontrada en la parte (b) para determinar el tiempo que toma para drenar toda el agua del tanque para ser

$$t = \frac{14}{15}\frac{R^{5/2}}{r_0^2\sqrt{2g}}$$

e) ¿Cuánto tiempo se tarda en drenar un tanque semiesférico de radio 1 pie si un agujero de 1 pulgada se pincha en el fondo?

12. Construye tu propia Clepsydra. Carolina está haciendo un reloj de agua o çlepsydra", como era conocida en la antigüedad. El objetivo es construir un tanque para que el agua caiga a tasa constante. Demuestre que el área de sección transversal $A(h)$ del tanque deseado a la altura h Por encima del fondo del tanque debe ser proporcional a $\sqrt{h}$. Utilice este hecho para determinar la forma exacta $y = f(x)$ del reloj de agua de Carolina con las dimensiones correctas. Investigue en el Internet la gráfica de un Clepsydra.

13. Supongamos que un tanque que contiene líquido tiene un orificio de ventilación en la parte superior y una salida en la parte inferior a través del cual el líquido drena. La ley de Torricelli establece que si, en el momento t segundos después de la apertura de la toma de corriente, la profundidad del líquido es $k\ m$ y el área superficial del líquido es $A\ m^2$, entonces:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{-k\sqrt{h}}{A}, \text{ donde } K > 0$$

(k en realidad depende de factores tales como la viscosidad del líquido y el área de sección transversal de la salida).

Utilice la ley de Torricelli para un tanque cilíndrico que es, en un principio por completo, y que tiene una altura de $1,6\ m$ y un radio de longitud $0,4\ m$. Utilice $k = 0,025$. Construir la ecuación diferencial apropiada, resolverla y encontrar el número de segundos que tomará que el tanque se vacíe.

Solución. Un diagrama debe ser dibujado. Ahora

$$\frac{dh}{dt} = \frac{-0,025\sqrt{h}}{\pi \times (0,4)^2}$$

puesto que el área de la superficie es un círculo con área constante $\pi \times (0,4)^2$. Se tiene

$$\frac{dh}{dt} = \frac{-0,025\sqrt{h}}{0,16\pi} \Longrightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{-5\sqrt{h}}{32\pi},$$

es la ecuación diferencial apropiada. Ahora:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \frac{-5\sqrt{h}}{32\pi} \Longrightarrow \frac{dt}{dh} = -\frac{32\pi\ h^{-1/2}}{5} \Longrightarrow dt = -\frac{32\pi\ h^{-1/2}}{5}dh \\ &\Longrightarrow t = -\frac{32\pi}{5}\int h^{-1/2}dh + C \Longrightarrow t = -\frac{64\pi}{5}\sqrt{h} + C. \end{aligned}$$

Usando la condición de que el tanque inicialmente está repleto; es decir, cuando $t = 0$, $h = 1,6$. Por sustitución se tiene:

$$0 = -\frac{64\pi}{5}\sqrt{1,6} + C \Longrightarrow C = \frac{64\pi}{5}\sqrt{1,6}$$

La solución particular para este problema diferencial es

$$t = \frac{64\pi}{5}\sqrt{1,6} - \frac{64\pi}{5}\sqrt{h} \Longrightarrow t = \frac{64\pi}{5}\left[\sqrt{1,6} - \sqrt{h}\right]$$

Ahora, para que el tanque esté vacío

$$h = 0 \Longrightarrow t = \frac{64\pi}{5}\sqrt{1,6} \Longrightarrow t \approx 50,9.$$

Se llevará aproximadamente 51 segundos para vaciar este tanque.

14. Un tanque esférico con un radio de 4 ft está lleno de gasolina cuando se abre un orificio con un radio de 1 pulgada en la parte inferior, ¿cuánto tiempo se requerirá para que toda la gasolina salga del tanque?

Solución:Representamos el radio en función de y, en cualquier sección horizontal del tanque. Por Pitágoras tenemos que:

$$\begin{aligned} (4-y)^2 + r^2 &= 16 \\ r^2(y) &= 8y - y^2 \qquad (1) \end{aligned}$$

r es el radio del tanque en la altura y.

$$\begin{aligned} A(y) &= \pi\, r^2(y) \\ A(y) &= \pi\, \left(8y - y^2\right) \qquad (2) \end{aligned}$$

$A(y)$ es el área transversal horizontal del tanque esférico a la altura y. Por Torricelli tenemos que

$$A(y)\frac{dy}{dt} = a\sqrt{2gy}, \qquad (3)$$

a : Area del orificio del tanque por donde cae la gasolina.

$g : 9,8\frac{m}{s^2} = 32\frac{ft}{s^2}$

y : Altura del agua en el tiempo t.

Reemplazando los valores dados en (3) tenemos:

$$\begin{aligned} \pi\, \left(8y - y^2\right)\frac{dy}{dt} &= -a\sqrt{64y} \Longrightarrow \pi\, \left(8y - y^2\right)\frac{dy}{dt} = -8a\sqrt{y} \\ &\Longrightarrow \frac{\pi\, \left(8y - y^2\right)}{\sqrt{y}}dy = -8a dt \Longrightarrow \int \frac{\pi\, \left(8y - y^2\right)}{\sqrt{y}}dy = \int (-8a)\, dt \\ &\Longrightarrow -\frac{2}{15}y^{3/2}\pi(-40 + 3y) = -8at + C. \qquad (4) \end{aligned}$$

Sabemos que cuando el tanque está lleno la altura es 8 ft, y eso ocurre en $t = 0$, reemplazamos estos valores en (4) y despejamos C :

$$-\frac{2}{15} \cdot 8^{3/2}\pi(-40 + 3 \cdot 8) = -8a \cdot 0 + C \Longrightarrow C = \frac{256}{15}\sqrt{8}\pi$$

Ahora, la ecuación (4) se transforma en

$$-\frac{2}{15}y^{3/2}\pi(-40 + 3y) = -8at + \frac{256}{15}\sqrt{8}\pi. \qquad (5)$$

En el problema se nos pide determinar en cuánto tiempo el tanque se vacía. El tanque se vacía cuando la altura y del agua es igual a 0. Entonces de la ecuación (5) despejamos t cuando $y = 0$, esto es:

$$-\frac{2}{15}(0)^{3/2}\pi(-40 + 3 \cdot 0) = -8at + \frac{256}{15}\sqrt{8}\pi,$$

de donde

$$0 = -8at + \frac{256}{15}\sqrt{8}\pi \Longrightarrow t = \frac{64}{15}\frac{\pi\sqrt{2}}{a}, \qquad (6)$$

a es el área del orificio por donde cae la gasolina. Por el enunciado del problema sabemos que el radio de a es 1 pulgada $= \frac{1}{12}ft$. Entonces a es:

$$a = \pi\left(\frac{1}{12}\right)^2 \Longrightarrow a = \frac{\pi}{144}. \qquad (7)$$

Reemplazamos a en (6) para obtener:

$$t = \frac{64}{15}\frac{\pi\sqrt{2}}{\frac{\pi}{144}} \Longrightarrow t = \frac{3072}{5}\sqrt{2} \Longrightarrow t \approx 868,8928125 \text{ segundos.}$$

15. (El vaciado de un depósito) Un depósito tiene la forma de una superficie de revolución alrededor de un eje vertical con un agujero en la parte inferior. El agujero tiene área A. Encontrar y resolver las ecuaciones de movimiento del líquido situado en el depósito. Los siguientes casos particulares se consideran para el depósito (reservorio):

   a) forma esférica de radio R;

   b) tronco de cono con el radio más pequeño, R_1, como radio de la base; el mayor radio, R_2, como radio superior, y la altura es H;

   c) tronco de cono con el radio más grande, R_2, como radio de la base; el menor radio, R_1, como radio superior, y la altura es H;

   d) cono recto con el vértice en la parte inferior;

   e) forma cilíndrica.

   Solución:

   De hidrodinámica se conoce la expresión de la velocidad de fuga de un fluido a través de un orificio: $v = k\sqrt{h}$, donde h es la altura de la superficie libre del fluido. La ecuación del radio mediano del depósito es de la forma $r = r(h)$. El volumen de líquido que se escapa durante el tiempo elemental dt se evalúa de la siguiente manera. A través del agujero se fuga un volumen de líquido que es un cilindro con base A y altura vdt,

$$dV = Avdt = ak\sqrt{h}dt.$$

   Por otro lado, el diferencial de volumen que se escapa es $dV = -\pi r^2\ dh$. La siguiente expresión es obtenida;

$$Ak\sqrt{h}dt = -\pi r^2\ dh.$$

   Se obtiene entonces una ecuación diferencial a variables separables

$$dt = -\frac{\pi r^2(h)}{Ak\sqrt{h}}dh.$$

   Resolviendo la integral se encuentra:

$$t = -\frac{\pi}{Ak}\int \frac{r^2(h)}{\sqrt{h}}dh + C.$$

   De la condición inicial $h(0) = H$ se determina el valor de la constante C.

   a) En el caso de la forma esférica el radio mediano puede ser escrito como $r^2 = h\,(2R - h)$,.ver figura 2.13. Entonces,

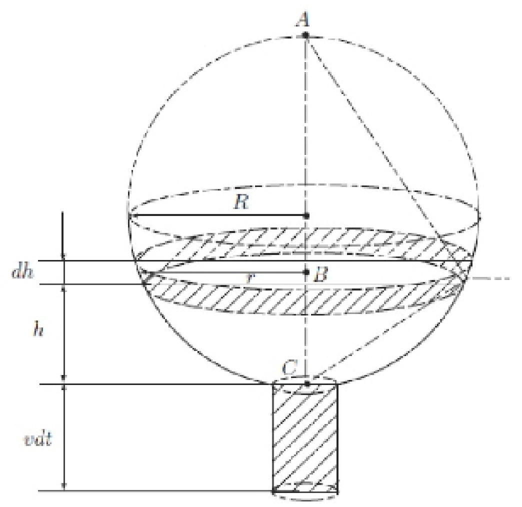

Figura 2.13. Reservorio esférico

$$t = -\frac{\pi}{Ak}\int \frac{h(2R-h)}{\sqrt{h}}dh + C,$$

o también,

$$\begin{aligned} t &= -\frac{\pi}{Ak}\left[2R\int\sqrt{h}dh - \int h^{3/2}\,dh\right] + C \\ &= -\frac{\pi}{Ak}\left[\frac{4}{3}Rh^{3/2} - \frac{2}{5}h^{5/2}\right] + C. \end{aligned}$$

Usando la condición $h(0) = H$ se obtiene que $C = \dfrac{\pi}{Ak}\left[\frac{4}{3}Rh^{3/2} - \frac{2}{5}h^{5/2}\right]$ y por tanto

$$t = \frac{\pi}{Ak}\left[\frac{4}{3}R\left(H^{3/2} - h^{3/2}\right) - \frac{2}{5}\left(H^{5/2} - h^{5/2}\right)\right].$$

Tiempo T para el cual $h(T) = 0$ es $T = \dfrac{\pi}{Ak}H^{3/2}\left[\dfrac{4}{3}R - \dfrac{2}{5}H\right]$. Para $H = R$ (la esfera está completamente llena) resulta $T = \left(\dfrac{14}{15}\right)\dfrac{\pi R^{5/2}}{Ak}$.

b) De la geometría del tronco de cono se tiene: $\dfrac{r - R_1}{h} = \dfrac{R_2 - R_1}{H}$, y $r = R_1 + \dfrac{R_2 - R_1}{H}h$. Ver figura 2.14. Entonces,

$$\frac{r^2}{\sqrt{h}} = \frac{R_1^2}{\sqrt{h}} + \frac{2R_1\left(R_2 - R_1\right)}{H}\sqrt{h} + \left(\frac{R_2 - R_1}{H}\right)h^{3/2}.$$

Sustituyendo en la expresión de t, después de calcular la integral se tiene:

$$t = -\frac{\pi}{Ak}\left[2R_1^2\sqrt{h} + \left(\frac{4}{3}\right)\frac{R_1\left(R_2 - R_1\right)}{H}h^{3/2} + \left(\frac{2}{5}\right)\frac{\left(R_2 - R_1\right)^2}{H}h^{5/2}\right] + C.$$

Usando la condición $h(0) = H$, se encuentra que

$$C = \frac{\pi}{Ak}\left[2R_1^2\sqrt{H} + \left(\frac{4}{3}\right)\frac{R_1\left(R_2 - R_1\right)}{H}H^{3/2} + \left(\frac{2}{5}\right)\frac{\left(R_2 - R_1\right)^2}{H}H^{5/2}\right],$$

y por tanto,

$$t = -\frac{\pi}{Ak}\left[2R_1^2\left(\sqrt{H} - \sqrt{h}\right) + \frac{4R_1\left(R_2 - R_1\right)}{3H}\left(H^{3/2} - h^{3/2}\right) + \frac{2\left(R_2 - R_1\right)^2}{5H}\left(H^{5/2} - h^{5/2}\right)\right].$$

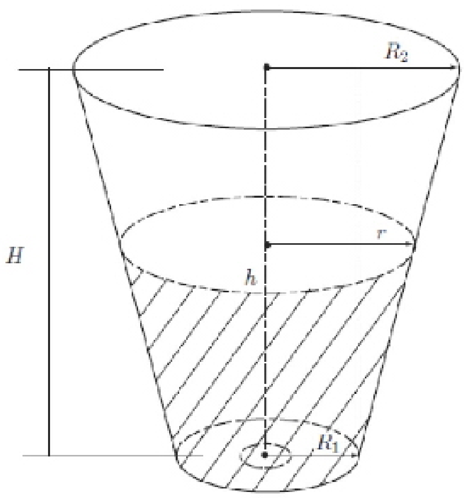

Figura 2.14 Cono truncado con radio mayor como radio base

La condición $h(T) = 0$ implica

$$T = \frac{\pi\sqrt{H}}{Ak}\left[2R_1^2 + \frac{4}{3}R_1\left(R_2 - R_1\right) + \frac{2}{5}\frac{\left(R_2 - R_1\right)^2}{H}\right].$$

c) De la figura se sigue que, $\dfrac{r - R_1}{H - h} = \dfrac{R_2 - R_1}{H}$, de donde $r = R_2 + \dfrac{R_1 - R_2}{H}h$.
Si en la expresión de r del caso b), R_1 es remplazado por R_2, se puede encontrar la expresión de r del caso c). Consecuentemente, las expresiones de t y T para el caso c) pueden ser obtenidas de las expresiones correspondientes obtenidas en b), en las cuales R_1 debe ser remplazado por R_2 y R_2 por R_1,

$$\begin{aligned} t &= \frac{\pi}{Ak}\left[2R_1^2\left(\sqrt{H} - \sqrt{h}\right) + \frac{4R_2\left(R_1 - R_2\right)}{3H}\left(H^{3/2} - h^{3/2}\right) + \frac{5}{2}\frac{\left(R_1 - R_2\right)^2}{H}\left(H^{5/2} - h^{5/2}\right)\right], \\ T &= \frac{\pi\sqrt{H}}{Ak}\left[2R_2^2 + \frac{4}{3}R_2\left(R_1 - R_2\right) + \frac{5}{2}\left(R_1 - R_2\right)^2\right]. \end{aligned}$$

Comparando las expresiones de T para los casos b) y c) y denotando por T' la expresión en el caso c) resulta:

$$\begin{aligned} T' - T &= \frac{\pi\sqrt{H}}{Ak}\left[2\left(R_2^2 - R_1^2\right) + \frac{4}{3}R_2R_1 - \frac{4}{3}R_2^2 - \frac{4}{3}R_1R_2 + \frac{4}{3}R_1^2 + \frac{2}{5}\left(R_1 - R_2\right)^2 - \frac{2}{5}\left(R_2 - R_1\right)^2\right] \\ &= \frac{2}{3}\frac{\pi\sqrt{H}}{Ak}\left(R_2^2 - R_1^2\right), \quad \text{o también} \\ T' &= T + \frac{2}{3}\frac{\pi\sqrt{H}}{Ak}\left(R_2^2 - R_1^2\right). \end{aligned}$$

d) Es obtenido del caso b), tomando $R_1 = 0$, $R_2 = R$. Por tanto,

$$t = \frac{2\pi R^2}{5AkH^2}\left(H^{5/2} - h^{5/2}\right) \qquad \text{y} \qquad T = \frac{2\pi R^2}{5Ak}\sqrt{H}.$$

e) Es obtenido del caso b), tomando $R_1 = R_2 = R$. Por tanto,

$$\begin{aligned} t &= \frac{2\pi R^2}{Ak}\left(\sqrt{H} - \sqrt{h}\right) \\ T &= \frac{2\pi R^2\sqrt{H}}{Ak}. \end{aligned}$$

16. Considere la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = y - x$.

    a) ¿Cuál es la pendiente del gráfico de la solución en $(0, 1)$, en el punto $(1, 1)$, en el punto $(3, 0)$, en el punto $(0, 0)$ y en el punto (x_0, y_0)?

    b) Encontrar todos los puntos donde las tangentes a la curva solución son horizontales.

    c) Describa la naturaleza de los puntos críticos.

17. Una cierta droga empieza a administrarse intravenosamente a un paciente en el hospital. El fluido conteniendo 5 mg/cm^3 de droga entra a la sangre del paciente a una tasa de 100 cm^3/h. La droga es absorbida por los tejidos del cuerpo o de otra manera llega al torrente sanguíneo a una tasa proporcional a la cantidad presente, con una tasa constante de $0,4$ cm^3/h.

    a) Asumiendo que la droga es siempre distribuida uniformemente a través de la sangre, escriba una ecuación diferencial para la cantidad de droga que está presente en la sangre en cualquier tiempo.

    b) ¿Qué cantidad de fármaco está presente en el torrente sanguíneo después de un largo tiempo?

18. Describa el campo direccional a la ecuación diferencial.

    a) $y' = y - 2$
    b) $y' = 2 - y$
    c) $y' = 2 + y$
    d) $y' = -2 - y$
    e) $y' = (y - 2)^2$
    f) $y' = (y + 2)^2$

19. Grafique el campo direccional para la ecuación diferencial $x'(t) = \dfrac{2t\ x(t)}{1 + x(t)}$. Construya el gráfico de las soluciones al problema de valor inicial dado.

    a) $x(0) = 1$
    b) $x(0) = -2$
    c) $x(0) = -0,5$

20. La tasa instantánea de cambio de la temperatura T del café en el tiempo t es proporcional a la diferencia entre la temperatura M del aire y la temperatura T en el tiempo t.

    a) Encontrar el modelo matemático para el problema.
    b) Dado que la temperatura de la habitación es $75°F$ y $k = 0,08$, encontrar la solución de la ecuación diferencial.
    c) La temperatura inicial del café es $200°F$. Encontrar la solución a este problema.

21. Una piscina que contiene 60 000 galones de agua ha sido contaminada por 5 kg de un colorante no tóxico que deja la piel de un nadador un verde poco atractivo. El sistema de filtrado de la piscina puede tomar el agua de la piscina, quitar el tinte, y devolver el agua a la piscina a una velocidad de flujo de 200 gal/min.

    a) Escriba abajo el problema de valor inicial para el proceso de filtrado; sea $q(t)$ la cantidad de colorante en cualquier tiempo t.
    b) Resuelva el problema.
    c) Se ha invitado a varias docenas de amigos a una fiesta en la piscina que está programado para comenzar en 4 horas. También se ha determinado que el efecto del tinte es imperceptible si su concentración es inferior a $0,02$ $gramos/galón$. ¿Es el sistema de filtrado capaz de reducir la concentración de colorante a este nivel dentro de las 4 horas?
    d) Encontrar el tiempo T en el cual la concentración de colorante primero alcanza el valor $0,02$ $gramos/galón$.
    e) Encontrar la tasa de flujo que es suficiente para lograr la concentración de $0,02$ $gramos/galón$. dentro de 4 horas.

22. Dada la siguiente ecuación diferencial, clasifique cada una como una ecuación diferencial ordinaria, ecuación diferencial parcial, dar el orden. Si la ecuación es una ecuación diferencial ordinaria, diga si la ecuación es lineal o no lineal.

    a) $\dfrac{dy}{dx} = 3y + x^2$.
    Respuesta:
    b) $8\dfrac{d^4y}{dx^4} = x\,(x - 1)$.
    Respuesta:
    c) $\dfrac{\partial N}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 N}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial N}{\partial r} + kN$.
    Respuesta:

d) $\dfrac{dx}{dt} = x^2 - t.$
Respuesta:

e) $\left(1+y^2\right) y'' + ty' + y = e^t.$
Respuesta:

f) $\dfrac{dy}{dx} + xy^2 = 0.$
Respuesta:

23. Determine si la función $y(t) = \dfrac{t}{3} + e^{-t}$ es solución de la ecuación diferencial $y^{(4)} + 4y^{(3)} + 3y = t.$

24. Verifique que las funciones dadas son soluciones de la ecuación diferencial.

 a) $2t^2y'' + 3ty' - y = 0,\ t > 0,\ \ y_1(t) = \sqrt{t},\ \ y_2(t) = t^{-1}.$
 b) $t^2y'' + 5ty' + 4y = 0,\ t > 0,\ \ y_1(t) = t^{-2},\ \ y_2(t) = t^{-2}\ln t.$

25. ¿Para qué valores de r la función $(x-1)\,e^{-rx}$ es solución de la ecuación diferencial $y'' - 6y' + 9y = 0$?

26. Determine para qué valores de r la función t^r es solución de la ecuación diferencial $t^2y'' - 4ty' + 4y = 0.$

27. Determine los valores de r para los cuales la ecuación diferencial $y''' - 3y'' + 2y' = 0$ tiene soluciones de la forma $y = e^{rt}$.

28. Considere la ecuación diferencial $y' = x + \operatorname{sen} y.$

 a) Una curva solución pasa por el punto $\left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$. ¿Cuál es la pendiente de la solución en este punto?
 b) Argumenta que toda curva solución es creciente para $x > 1$.
 c) ¿Cuál es el límite de la solución cuando x tiende a infinito?

29. ¿Cuál es la velocidad de un proyectil a una altitud de 8000 metros después de haber sido lanzado directamente hacia arriba con una velocidad inicial de 1000 m/ s?

30. Un cuerpo de masa m se lanza verticalmente hacia arriba, en el aire, con una velocidad inicial v_0. Suponemos que el cuerpo no encuentra resistencia del aire. Hallar:

 a) la ecuación del movimiento;
 b) una expresión para la velocidad del cuerpo en un momento t.
 c) el instante t_m en el cual llega el cuerpo a su altura máxima;
 d) una expresión para la posición del cuerpo en un instante t,
 e) la altura máxima alcanzada por el cuerpo.

31. Un cuerpo de masa m es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad v_0. Si la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad, encontrar la ecuación del movimiento del cuerpo.

32. Un banco paga interés a una tasa anual de 4 % capitalizada continuamente. Si se abre una cuenta con \$5000, ¿cuál será el saldo al final de 5 años?

33. El número de bacterias de cierto cultivo crece a una razón proporcional al número de bacterias presentes. Si inicialmente se encuentran presentes en el cultivo 10 000 bacterias y 10 minutos más tarde se encuentran 13 000 bacterias, ¿cuántas bacterias estarán presentes después de una hora?

34. En el movimiento de un objeto a través de un cierto medio (aire a ciertas presiones por ejemplo), el medio efectúa una fuerza de resistencia proporcional al cuadrado de la velocidad del objeto móvil. Supóngase que el cuerpo cae por la acción de la gravedad a través de tal medio. Si t representa el tiempo y v la velocidad hacia abajo, y g es la aceleración de la gravedad y w el peso del cuerpo, usando la ley de Newton, fuerza igual a masa por aceleración, deducir que la ecuación diferencial del movimiento es $\frac{w}{g}\frac{dv}{dt} = w - kv^2$, donde kv^2 es la fuerza de resistencia del medio. Resolver este problema con la condición inicial de que $v = v_0$ cuando $t = 0$. (Introducir además la constante $a^2 = \frac{w}{k}$).

35. Una sustancia radiactiva se desintegra a una razón proporcional a la cantidad presente. Su vida media se define como el tiempo necesario para que el 50 % de una cantidad dada se desintegre. Deducir una fórmula en términos del tiempo para la cantidad de la sustancia que queda, la cantidad original y la vida media de la sustancia.

36. Un circuito RC tiene una fem de 5 *voltios*, una resistencia de 10 *ohmios, una capacitancia de* 10^{-2} *faradios* y una carga inicial de 5 *culombios* en el condensador. Hallar:

    a) la corriente transitiva;

    b) la corriente en condiciones estables.

37. Cuando un rayo vertical de luz pasa a través de una sustancia transparente, la rapidez con que su intensidad I disminuye es proporcional a $I(t)$, donde t representa el espesor del medio, expresado en pies. En agua de mar límpida, la intensidad a 3 pies bajo la superficie es un 25 % de la intensidad inicial I_0 del rayo incidente. ¿Cuál es la intensidad del rayo a 15 pies bajo la superficie?

38. A un circuito en serie, en el cual la inductancia es de 0.1 henrios y la resistencia es de 50 ohmios, se le aplica una fuerza electromotriz de 30 voltios. Encontrar la corriente $I(t)$ si $I(0) = 0$. Determinar el comportamiento de la corriente para valores grandes del tiempo.

39. Una barra metálica a una temperatura de 100 °C se pone en un cuarto que está a una temperatura de 32 °C. Si después de 30 minutos la temperatura de la barra es de 50 °C, hallar:

    a) el tiempo que transcurrirá para que la temperatura en la barra sea de 20 °C.

    b) la temperatura de la barra después de 10 minutos.

    Nota. La ley de Newton sobre el enfriamiento establece que la razón de cambio respecto al tiempo de la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y el medio ambiente.

40. Una esfera de masa m cae en un muelle vertical como se muestra en la Figura 7. La esfera hace contacto con el resorte y el resorte se comprime. La fase de compresión termina cuando la velocidad de la esfera es cero. La siguiente fase es la fase de restitución cuando el resorte está en expansión y la esfera se mueve hacia arriba. Al final de la fase de restitución no es la separación de la esfera. Encontrar y resolver la ecuación de movimiento para la esfera en contacto con el resorte.

    Solución

    El eje x seleccionado hacia abajo como se muestra en la figura. En el momento $t = 0$ se supone que la esfera se pone en contacto con el resorte y tiene la velocidad $v(t = 0) = v(0) = v_0$?. Usando la segunda ley de Newton, la ecuación de movimiento de la esfera en contacto con el resorte es:

    $$ma = G + F_e \quad \text{o} \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - kx$$

    La aceleración de la esfera es $a = \frac{d^2x}{dt^2}$, donde x es el desplazamiento lineal.

    El peso de la esfera es $G = mg$, Donde g es la aceleración de la gravedad.

    La fuerza elástica de contacto es $F_e = kx$, donde k es la constante elástica del resorte. Las condiciones iniciales son:$x(0) = 0$ y $\frac{dx}{dt} = v_0$.

Con la notación $\dfrac{k}{m} = \omega^2$, $\omega > 0$, la ecuación $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = mg - kx$ se transforma en $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = g$. Asumamos que la solución de dicha ecuación tiene la forma

$$x = a\cos(\omega t - \varphi_0) + b.$$

Entonces

$$\frac{dx}{dt} = -a\omega \operatorname{sen}(\omega t - \varphi_0) \quad \text{y} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -a\omega^2 \cos(\omega t - \varphi_0).$$

Sustituyendo en $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = g$ se sigue que

$$-a\omega^2 \cos(\omega t - \varphi_0) + \omega^2 \left[a\cos(\omega t - \varphi_0) + b\right] = g,$$

la constante b es entonces obtenida: $b = \dfrac{g}{\omega^2}$.

Usando las condiciones iniciales ($x(0) = 0$ y $\dfrac{dx}{dt} = v_0$) las siguientes expresiones son obtenidas:

$$\begin{aligned} x(0) &= a\cos(-\varphi_0) + b = a\cos(\varphi_0) + b = 0, \\ \frac{dx}{dt}(0) &= -a\omega \operatorname{sen}(-\varphi_0) = a\omega \operatorname{sen}(\varphi_0) = v_0, \end{aligned}$$

o también:

$$a\cos(\varphi_0) = -b = -\frac{g}{\omega^2} \quad \text{y} \quad a\operatorname{sen}(\varphi_0) = \frac{v_0}{\omega}.$$

Se obtiene:

$$a^2\cos^2(\varphi_0) + a^2\operatorname{sen}^2(\varphi_0) = a^2\left(\cos^2(\varphi_0) + \operatorname{sen}^2(\varphi_0)\right) = a^2 = \frac{g^2}{\omega^4} + \frac{v_0^2}{\omega^2},$$

por tanto $a = \sqrt{\dfrac{g^2}{\omega^4} + \dfrac{v_0^2}{\omega^2}}$ y $\tan\varphi_0 = -\dfrac{v_0\omega}{g}$ o también $\varphi_0 = -\arctan\left(\dfrac{v_0\omega}{g}\right)$.

La ecuación para el desplazamiento de la esfera es:

$$x - \frac{g}{\omega^2} = \left(\sqrt{\frac{g^2}{\omega^4} + \frac{v_0^2}{\omega^2}}\right)\cos\left(\omega t + \arctan\left(\frac{v_0\omega}{g}\right)\right).$$

Si la esfera puede ser conectada al resorte, él puede oscilar alrededor de la posición $x = \dfrac{g}{\omega^2}$.

La esfera alcanza la máxima posición en el eje x en el instante $t = t_1$ cuando la velocidad es cero; es decir, $\dfrac{dx}{dt}(t_1) = 0$

$$\frac{dx}{dt}(t_1) = -a\omega \operatorname{sen}(\omega t_1 - \varphi_0) = 0 \Longrightarrow \omega t_1 - \varphi_0 = \pi$$

o también

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega} + \frac{1}{\omega}\varphi_0 = \frac{\pi}{\omega} - \frac{1}{\omega}\arctan\left(\frac{v_0\omega}{g}\right)$$

En el momento $t = t_2 = 2t_1$, la esfera alcanza de nuevo la referencia O. En este momento, la esfera se separa y se mueve hacia arriba, y el muelle se comprime. La velocidad de la esfera en $t = t_2$ es

$$\frac{dx}{dt}(t_2) = a\omega \operatorname{sen}(\omega t_2 - \varphi_0) = -v_0.$$

El tiempo de contacto entre la esfera y el resorte es:

$$t_2 = 2t_1 = \frac{2\pi}{\omega} - \frac{2}{\omega}\arctan\left(\frac{v_0\omega}{g}\right).$$

La variación de la velocidad es:

$$\Delta v = \frac{dx}{dt}(0) - \frac{dx}{dt}(t_2) = v_0 - (-v_0) = 2v_0.$$

El desplazamiento en t_1

$$x(t_1) = a\cos(\omega t_1 - \varphi_0) + b = a + b = \sqrt{\frac{g^2}{\omega^4} + \frac{v_0^2}{\omega^2}} + \frac{g}{\omega^2},$$

y el desplazamiento relativo es:

$$\lambda = x(0) - x(t_1) = 0 - x(t_1) = -\left(\frac{g}{\omega^2} + \sqrt{\frac{g^2}{\omega^4} + \frac{v_0^2}{\omega^2}}\right).$$

41. Problema

    a) Para cada constante k considere la curva definida por $x^2 - y^2 = k$. Encuentre la familia de curvas ortogonales a la familia anterior. Bosqueje la situación.

    b) Haga lo mismo que en [a)] para la familia definida por $xy = k$; y por $y = e^{kx}$.

    c) Encuentre la familia de curvas ortogonales a la familia de elipses $x^2 + 2y^2 = y + b$ donde b es constante.

    d) Determine la constante k de modo que las parábolas $y = ax^2 + k$ sean las trayectorias ortogonales de la familia de elipses $x^2 + 2y^2 = y + b$; a y b son parámetros.

    e) Dada una familia de curvas que pasan por el punto $(1, 2)$ y cuyas pendientes son inversamente proporcionales a la abscisa del punto (factor de proporcionalidad), encuentre la familia de curvas ortogonales a la dada. En particular calcule y determine la curva que pasa por el punto $(1, 2)$.

42. Suponga que la tasa de crecimiento de una especie de bacteria es constante. Si en un inicio se estima que hay 1500 bacterias, y luego en una hora existen 2000. ¿Cuántas habrá luego de seis horas? ¿En cuántas horas la población se triplicará?

43. Una población inicial de bacterias tiene tasa de crecimiento igual a una constante k_1. Luego de T horas las bacterias se colocan en un cultivo diferente de modo que la población crece ahora a una tasa constante k_2. Determine la población para cualquier tiempo t.

44. (Curva de persecución). Determinar la curva de persecución de un barco A que persigue a un barco B. Suponga que este útimo lo hace en línea recta. Suponga, además conocidas la distancia inicial entre los barcos A y B y sus respectivas velocidades iniciales.

45. La ley de enfriamiento de Newton establece que en un cuerpo que se está enfriando, la rapidez con que cambia la temperatura $T(t)$ es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura del medio que lo rodea (que asumiremos constante, aunque no necesariamente).

    La temperatura de un motor en el momento en que se apaga es de $200°C$. Después de 10 minutos, la temperatura de la superficie del motor es de $180°C$. Suponga que la la temperatura ambiente es de $30°C$ y que la temperatura del motor viene dada por la de su superficie.

    a) ¿Cuánto tiempo tomará que la temperatura de la superficie del motor baje a $40°C$? Respuesta: $\dfrac{10\ln(17)}{\ln(17) - \ln(15)}$ min.

    b) Para una temperatura dada T entre $200°C$ y $30°C$, sea $t(T)$ el tiempo necesario para que el motor se enfríe de $200°C$ a T. Encuentre una fórmula para $t(T)$ en términos de T y grafique la función.

    c) ¿En cuánto tiempo la temperatura del motor se iguala a la temperatura ambiente ?

46. La sala de un restaurant tiene un volumen de 800 ft^3. El aire de la sala contiene cloro a una concentración de $0.1g/ft^3$. Por un toma aire adecuado está entrando a la sala aire fresco a una tasa de 8 ft^3/min. Con ventiladores apropiados, el aire de la sala está bien mezclado (no hay espacios para no fumadores) y fluye hacia afuera por un conducto a la misma tasa con que entra el aire fresco.

    a) Determine la concentración de cloro en la sala como función del tiempo.

    b) Suponga que la tasa de flujo de aire fresco se puede ajustar. Determine la tasa de entrada requerida para reducir la concentración de cloro a $10^{-3}g/ft^3$ en 20 minutos.

47. Un recipiente contiene 10 litros de agua pura. Salmuera (agua con sal) que contiene 10 gramos de sal por litro entra a una tasa de 2 litros/hora. El agua bien mezclada se saca a una tasa de 1 litro./hora, y adicionalmente se evapora 1 litro/hora (vapor de agua sin sal). Determine la cantidad de sal en el recipiente en función del tiempo. Repita todo el problema suponiendo que no hay evaporación y sabiendo que el recipiente se llena a las 10 horas (encuentre la cantidad de sal para antes y después de los 10 primeros minutos).

48. Un laguna con buena circulación contiene 1000 KL de agua contaminada a una concentración de 2KG/KL. Residuos de una fábrica entran al lago a una tasa de 5 KL/h con una concentración de 7 KG/KL de contaminante, el agua fluye por una tubería de salida (al mar !) a una tasa de 2 KL/h. Determine la cantidad y la concentración de contaminante como una función del tiempo. Además, si el ecosistema se satura (casi irreversiblemente) cuando la concentración llega a 1000 KG/KL, indique el momento en que eso sucede. ¿Cuál es la variación de volumen en el proceso hasta ese instante? ¿ Cómo son las ecuaciones si al problema agregamos una evaporación (solo agua) de 0.5 KL/h?

49. En un tanque hay 384 litros de agua con 15 kg de sal bien mezclados. Al mismo se le agrega una disolución de agua y sal con una concentración de 2 kilogramos por litro a una tasa (o velocidad) de 17 litros por minuto. A su vez, una válvula permite que salga la mezcla a un flujo (o velocidad) de 5 litros por minuto.

    a) Determine el volumen del tanque si el mismo comienza a derramarse a los 15 minutos.

    b) Determine la cantidad de sal y de la concentración de la sal antes que se derrame la mezcla.

    c) Determine la cantidad de sal y de la concentración de la sal después de los primeros 15 minutos.

Capítulo 3

Ecuaciones diferenciales lineales de orden n

En este capítulo presentaremos un método general para resolver ED lineales de orden n cuya forma es

$$a_n(x)\,y^{(n)} + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_2(x)\,y'' + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = h(x)$$

Estas ecuaciones se caracterizan por las dos propiedades siguientes:

1. La variable dependiente y así como sus derivadas tienen exponente igual a 1, o bien 0, exclusivamente.

2. Los coeficientes $a_n(x)$, a_{n-1}, $\ldots$, $a_1(x), a_0(x)$ y la función $h(x)$ son funciones que solo dependen de x, o son funciones constantes. Es decir, no dependen de la variable dependiente y.

Cabe mencionar que no existen métodos, ni generales ni sencillos que permitan resolver ecuaciones diferenciales no lineales de orden n. ¿Qué hace la diferencia? La respuesta es simple: poder usar o no el bagaje del álgebra lineal. Ésta es una rama muy útil de las matemáticas donde encontramos las definiciones, conceptos y resultados que nos permitirán resolver el problema general. Así, nuestro estudio pasará obligadamente por algunas de las ideas más importantes de este tema que se presentan a continuación.

Una colección de funciones $f_1, \ldots, f_n$ definidas en un intervalo I se dice que es linealmente independiente si:

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \cdots + \alpha_n f_n(x) = \overrightarrow{0}, \text{ para todo } x \in I, \text{ implica que } \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Si la combinación lineal anterior se cumple para al menos un $\alpha_i \neq 0$, diremos que la colección es linealmente dependiente.

Para el caso particular de dos funciones, la definición anterior equivale a lo siguiente:

$\{f_1, f_2\}$ es un conjunto linealmente dependiente de funciones, si y solo si $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = k$, para toda $x \in I$ y alguna constante k.

Ejemplo. Las funciones definidas por $f_1(x) = e^x \cos 2x$ y $f_2(x) = e^x \operatorname{sen} 2x$ conforman un conjunto linealmente independiente de funciones. La razón es muy simple:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{e^x \cos 2x}{e^x \operatorname{sen} 2x} = \cot(2x) \longleftarrow \text{ no es una constante.}$$

Entonces:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \neq k, \text{ para } k \text{ constante.}$$

Ejemplo. Determine si el conjunto $\{f_1(x) = \operatorname{arcsen} x,\ \ f_2(x) = \arccos x,\ f_3(x) = 1\}$ es linealmente independiente o bien linealmente dependiente.

Como $\operatorname{arcsen} x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$ entonces

$$\operatorname{arcsen} x = \frac{\pi}{2}(1) + (-1)\arccos x \Longrightarrow f_1(x) = \frac{\pi}{2} f_1(x) + (-1)\, f_2(x),$$

deducimos que la información de la función $f_1(x) = \operatorname{arcsen} x$ puede recuperarse (vía una combinación lineal) de las otras dos funciones $f_2(x) = \arccos x$ y $f_3(x) = 1$.

En consecuencia, el conjunto $\{f_1(x) = \operatorname{arcsen} x,\ \ f_2(x) = \arccos x,\ f_3(x) = 1\}$ es linealmente dependiente.

Sean $\{f_1,\ \ f_2\}$ soluciones de la ecuación diferencial lineal de segundo orden $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$; con $a_1(x)$ y $a_0(x)$ funciones continuas en un intervalo I. Entonces, tenemos dos casos:

1. Si $\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$ para algún $x \in I$, entonces el conjunto $\{f_1, f_2\}$ es linealmente independiente.
2. Si $\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} = 0$ para algún $x \in I$, entonces el conjunto $\{f_1, f_2\}$ es linealmente dependiente.

En efecto, puesto que f_1 y f_2 son soluciones de la ED, tenemos que

$$\begin{aligned} f_1''(x) + a_1(x)f_1'(x) + a_0(x)f_1(x) &= 0 \\ f_2''(x) + a_1(x)f_2'(x) + a_0(x)f_2(x) &= 0 \end{aligned}$$

Si multiplicamos la primera de las ecuaciones anteriores por $f_2(x)$, la segunda por $f_1(x)$ y restamos la primera de la segunda, hallamos:

$$\begin{aligned} &\left\{ \begin{array}{l} f_2(x) f_1''(x) + a_1(x)f_2(x) f_1'(x) + a_0(x)f_2(x) f_1(x) = 0 \\ f_1(x) f_2''(x) + a_1(x)f_1(x) f_2'(x) + a_0(x)f_1(x) f_2(x) = 0 \end{array} \right. \\ \Longrightarrow\ & f_1(x) f_2''(x) - f_2(x) f_1''(x) + a_1(x)\left[f_1(x) f_2'(x) - f_2(x) f_1'(x)\right] = 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Deseamos resaltar la expresión $\left[f_1(x) f_2'(x) - f_2(x) f_1'(x)\right]$. Su estudio se atribuye al matemático polaco Hoëne Wronski. Si la expresamos por medio de $W(x) = W(f_1(x), f_2(x))$, observamos que

$$W(f_1(x), f_2(x)) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} = f_1(x) f_2'(x) - f_2(x) f_1'(x).$$

y además que

$$\frac{d}{dx}W(f_1(x), f_2(x)) = f_1'(x) f_2'(x) + f_1(x) f_2''(x) - f_2'(x) f_1'(x) - f_2(x) f_1''(x) = f_1(x) f_2''(x) - f_2(x) f_1''(x).$$

Por lo que la ecuación (3.1) se expresa como

$$W'(x) + a_1(x) W(x) = 0$$

que es un EDO de variables separables:

$$\frac{dW(x)}{dx} = -a_1(x) W(x) \Longrightarrow \frac{dW}{W} = -a_1(x)\, dx$$

Por lo tanto, al integrar:

$$\ln W(x) = -\int a_1(x)\, dx + C,$$

deducimos que

$$W(x) = e^{-\int a_1(x)dx + C}$$

Así obtenemos como solución:

$$W(x) = Ce^{-\int a_1(x)dx}$$

Y como la función exponencial nunca se anula, tenemos que

1. Si $C \neq 0$, entonces $W(x) \neq 0$, para toda $x \in I$.
2. Si $C = 0$, entonces $W(x) = 0$, para toda $x \in I$.

Ahora, si consideramos la combinación lineal

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = 0 \Longrightarrow \alpha_1 f_1' + \alpha_2 f_2' = 0$$

tenemos el sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = 0 \\ \alpha_1 f_1' + \alpha_2 f_2' = 0 \end{cases} \text{(donde } \alpha_1 \text{ y } \alpha_2 \text{ son las incógnitas);}$$

deducimos que, en caso de que $W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$ para alguna $x \in I$, la solución del sistema será únicamente la solución trivial $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, de lo cual se desprende que el conjunto $\{f_1,\ f_2\}$ es linealmente independiente; mientras que, si $W(x) = 0$, se puede garantizar una solución no trivial para α_1 y para α_2, por lo cual $\{f_1,\ f_2\}$ resultará un conjunto linealmente dependiente.

Ejemplo. Las funciones $f_1(x) = x$ y $f_2(x) = x^2$, con $x \neq 0$, son soluciones de la EDO lineal $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$, además son linealmente independientes.

En efecto:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x \Longrightarrow f_1'(x) = 1 \Longrightarrow f_1''(x) = 0 \\ f_2(x) &= x^2 \Longrightarrow f_2'(x) = 2x \Longrightarrow f_2''(x) = 2 \end{aligned}$$

Luego entonces:

$$\begin{aligned} x^2 f_1''(x) - 2x f_1'(x) + 2 f_1(x) &= x^2(0) - 2x(1) + 2(x) = 0 \\ x^2 f_2''(x) - 2x f_2'(x) + 2 f_2(x) &= x^2(2) - 2x(2x) + 2x^2 = 0 \end{aligned}$$

Esto es, $f_1(x) = x$ y $f_2(x) = x^2$ son soluciones de la EDO. Además:

$$W(f_1, f_2) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} = f_1(x) f_2'(x) - f_2(x) f_1'(x) = (x)(2x) - (1)\left(x^2\right) = 2x^2 - x^2 = x^2 \neq 0.$$

Por lo tanto, $f_1(x) = x$ y $f_2(x) = x^2$ son soluciones linealmente independientes. La solución general de la EDO es

$$y(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) = C_1 x + C_2 x^2.$$

Ejemplo. Las funciones $f_1(x) = 3xe^{-2x}$ y $f_2(x) = -5xe^{-2x}$, con $x \neq 0$, son soluciones de la EDO lineal $y'' + 4y' + 4y = 0$, además son linealmente dependientes.

En efecto:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 3xe^{-2x} \Longrightarrow f_1'(x) = (-6x + 3)e^{-2x} \Longrightarrow f_1''(x) = (12x - 12)e^{-2x} \\ f_2(x) &= -5xe^{-2x} \Longrightarrow f_2'(x) = (10x - 5)e^{-2x} \Longrightarrow f_2''(x) = (-20x + 20)e^{-2x}. \end{aligned}$$

Luego entonces:

$$\begin{aligned} f_1''(x) + 4f_1'(x) + 4f_1(x) &= [(12x - 12) + 4(-6x + 3) + 4(3x)]e^{-2x} = (0)e^{-2x} = 0. \\ f_2''(x) + 4f_2'(x) + 4f_2(x) &= [(-20x + 20) + 4(10x - 5) + 4(-5x)]e^{-2x} = (0)e^{-2x} = 0. \end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned} W(f_1, f_2)(x) &= \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} \\ &= f_1(x) f_2'(x) - f_2(x) f_1'(x) = \left(3xe^{-2x}\right)(10x - 5)e^{-2x} - (-6x + 3)e^{-2x}\left(-5xe^{-2x}\right) \\ &= \left(30x^2 - 15x - 30x^2 + 15x\right)e^{-4x} = (0)e^{-4x} = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f_1(x) = 3xe^{-2x}$ y $f_2(x) = -5xe^{-2x}$ son soluciones linealmente dependientes.

3.1. Ecuaciones diferenciales de orden n

Aplicaremos los aspectos teóricos anteriores a la discusión de nuestro interés principal: las ecuaciones diferenciales lineales. Centraremos nuestra presentación para EDOS de orden $n = 2$, no sin antes señalar que todo lo que desarrollaremos será igualmente válido para el caso general de cualquier orden n. Consideraremos la ecuación diferencial

$$A_2(x) y'' + A_1(x) y' + A_0(x) y = Q(x), \tag{3.2}$$

en un intervalo I en el cual $A_2(x) \neq 0$ para toda $x \in I$. De esta manera, podemos dividir (3.2) entre $A_2(x)$ para obtener una ecuación normalizada de la forma:

$$y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y = q(x), \tag{3.3}$$

De aquí en adelante supondremos que las funciones $a_1(x)$, $a_0(x)$ y $q(x)$ son continuas en un intervalo I que es el conjuntomás grande posible donde todas ellas son continuas. Por ejemplo, la ecuación diferencial lineal

$$y'' - x^2 y' + y = \ln x;$$

tiene como intervalo I al intervalo $]0; +\infty[$. Es en ese intervalo donde buscaremos la solución de la EDO.

Al igual que para las EDOS de primer orden, es conveniente tener un resultado que garantice que una EDO como las que estamos considerando posea soluciones y que provea condiciones bajo las cuales un PVI tiene solución única. Para ese efecto, enunciamos el siguiente resultado fundamental:

Teorema de Existencia y Unicidad. Supongamos que $a_1(x)$, $a_0(x)$ y $q(x)$ son funciones continuas en el intervalo I. Entonces la EDO:

$$y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y = q(x), \tag{3.4}$$

tiene solución definida en el intervalo mI. Más aún para un punto $x_0 \in I$ fijo y números reales y_0; y_1 proporcionados, el PVI formado por la EDO (3.4), con $y(x_0) = y_0$ y $y'(x_0) = y_1$; presenta una única solución.

La ED lineal (3.3), con $q(x) \neq 0$, para algún $x \in I$, se dice que es no homogénea.

La ED lineal (3.3), con $q(x) = 0$, para toda $x \in I$, se dice que es homogénea. Es la EDO homogénea asociada a la ED no homogénea anterior.

Consideremos la ED lineal homogénea asociada a (3.4):

$$y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y = 0. \tag{3.5}$$

Sea V el conjunto de soluciones de (3.5).

Advierta que la función nula $y = 0$ satisface a la ecuación (3.5), es decir, la función $y = 0 \in V$.

Ahora, si y_1 y y_2 están en V, entonces:

$$y_1'' + a_1(x) y_1' + a_0(x) y_1 = 0 \qquad \text{y} \quad y_2'' + a_1(x) y_2' + a_0(x) y_2 = 0.$$

Si tomamos una combinación lineal de estas dos soluciones, hallamos que

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \Longrightarrow y' = c_1 y_1' + c_2 y_2' \Longrightarrow y'' = c_1 y_1'' + c_2 y_2''$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y &= c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + a_1(x)(c_1 y_1' + c_2 y_2') + c_1 y_1 + c_2 y_2 \\ &= c_1 y_1'' + c_1 a_1(x) y_1' + c_1 y_1 + c_2 y_2'' + c_2 a_1(x) y_2' + c_2 y_2 \\ &= c_1 [y_1'' + a_1(x) y_1' + y_1] + c_2 [y_2'' + a_1(x) y_2' + y_2] \\ &= c_1 [0] + c_2 [0] = 0. \end{aligned}$$

Esto significa que V es un espacio vectorial y, por lo tanto, es posible aplicar la teoría que hemos discutido previamente sobre el tema. Particularmente nos interesa determinar la dimensión de este espacio vectorial para saber el número de funciones que se requieren para describirlo, es decir, escribir cualquier solución de (3.5) mediante una combinación lineal de algunas soluciones (suponiendo que el espacio resulta de dimensión finita).

Sea y_0 una solución de (3.5) que satisfaga las condiciones:

$$y(x_0) = a \quad \text{y} \quad y'(x_0) = b. \tag{3.6}$$

Sabemos ya que $c_1y_1 + c_2y_2$ es solución general de (3.5), pero nos preguntamos si podremos encontrar valores únicos de las constantes c_1 y c_2 tales que la expresión $c_1y_1 + c_2y_2$ satisfaga las condiciones (3.6), es decir, tales que

$$\begin{aligned} c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) &= a \\ c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) &= b \end{aligned}$$

Esto será cierto si $\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$. Esta es precisamente la condición para independencia lineal. Luego, concluimos que, si el conjunto $\{y_1; y_2\}$ es linealmente independiente, podremos satisfacer con la combinación lineal $c_1y_1 + c_2y_2$ las condiciones (4.8). Como consecuencia del teorema de Existencia y Unicidad enunciado anteriormente, concluimos que $y = c_1y_1 + c_2y_2$. Esto significa que $\{y_1,\ y_2\}$ constituye una base del espacio de soluciones de la ecuación diferencial lo que nos permitirá expresar cualquier solución en términos de y_1 y y_2.

Resumimos nuestras ideas en el siguiente teorema.

Teorema. Sea V el conjunto de todas las funciones que son solución de la ecuación diferencial:

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

1. Entonces V es un espacio vectorial.
2. Si y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes, entonces $\{y_1,\ y_2\}$ constituye una base de V por lo cual todo elemento de V, es decir, cualquier solución de la ecuación diferencial puede ser escrita como una combinación lineal de y_1 y y_2; en símbolos, para cualquier $y \in V,\ y = c_1y_1 + c_2y_2$.
3. La afirmación anterior establece que la dimensión de V es 2 y que $y = c_1y_1 + c_2y_2$ es la solución general de la EDO lineal homogénea.
4. Al conjunto $\{y_1,\ y_2\}$ se le llama *conjunto fundamental de soluciones* de la ecuación diferencial lineal homogénea.

Ejemplo. Verifique que las funciones $y_1 = e^x \cos 2x$; $y_2 = e^x \operatorname{sen} 2x$ forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial $y'' - 2y' + 5y = 0$. Después forme la solución general de la EDO y, posteriormente, halle la solución particular que satisface las condiciones iniciales $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$.

En primer lugar verificaremos que y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación diferencial; como la verificación es similar, solo probaremos nuestra afirmación para y_1. Tenemos:

$$y_1 = e^x \cos 2x \Longrightarrow y_1' = -2e^x \operatorname{sen} 2x + e^x \cos 2x \Longrightarrow y_1'' = -3e^x \cos 2x - 4e^x \operatorname{sen} 2x.$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial, hallamos:

$$\begin{aligned} y_1'' - 2y_1' + 5y_1 &= -3e^x \cos 2x - 4e^x \operatorname{sen} 2x - 2\left[-2e^x \operatorname{sen} 2x + e^x \cos 2x\right] + 5\left[e^x \cos 2x\right] \\ &= -3e^x \cos 2x - 4e^x \operatorname{sen} 2x + 4e^x \operatorname{sen} 2x - 2e^x \cos 2x + 5e^x \cos 2x = 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Esto demuestra que $y_1 = e^x \cos 2x$ es solución de la EDO.

En segundo lugar, requerimos mostrar que el conjunto $\{y_1,\ y_2\}$ es un conjunto linealmente independiente. Para ello, tenemos dos estrategias, la primera consiste en determinar la naturaleza del cociente $\dfrac{y_1}{y_2}$:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^x \cos 2x}{e^x \operatorname{sen} 2x} = \cot 2x \neq c \text{ (constante)}$$

De esto se deduce que $\{y_1,\ y_2\}$ es un conjunto linealmente independiente y, en consecuencia, un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial.

Sin embargo, con el propósito de ilustrar lo que discutimos sobre el wronskiano, mostraremos la independencia lineal de las funciones por medio de este concepto; para ello, consideramos:

$$W(x) = W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x \cos 2x & e^x \operatorname{sen} 2x \\ -2e^x \operatorname{sen} 2x + e^x \cos 2x & 2e^x \cos 2x + e^x \operatorname{sen} 2x \end{vmatrix}.$$

Ahora bien, dado que y_1 y y_2 son soluciones de la EDO, su wronskiano se anula idénticamente o bien es diferente de cero para todo $x \in \mathbb{R}$; en consecuencia, no requerimos hacer el cálculo del anterior determinante para todo x: bastará tomar un valor particular; por ejemplo, si $x = 0$:

$$\begin{aligned} W(0) &= \begin{vmatrix} e^0 \cos(2 \cdot 0) & e^0 \operatorname{sen}(2 \cdot 0) \\ -2e^0 \operatorname{sen}(2 \cdot 0) + e^0 \cos(2 \cdot 0) & 2e^0 \cos 2x + e^0 \operatorname{sen}(2 \cdot 0) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0. \end{aligned}$$

De este resultado concluimos que el conjunto de soluciones $\{y_1,\ y_2\}$ es linealmente independiente, y en consecuencia podemos decir que éste es un conjunto fundamental de soluciones para la EDO. Así, con base en lo discutido en la teoría preliminar, la solución general de la EDO está expresada por:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 e^x \cos 2x + C_2 e^x \operatorname{sen} 2x.$$

Finalmente, para hallar la solución particular consideramos las condiciones iniciales.

En primer lugar tenemos:

$$y(0) = 0 \Longrightarrow C_1 e^0 \cos 0 + C_2 e^0 \operatorname{sen} 0 = 0 \Longrightarrow C_1 = 0$$

De esta forma, la solución se reduce a $y(x) = C_2 e^x \operatorname{sen} 2x$. Ahora, de $y'(0) = 1$ deducimos que

$$y'(x) = C_2 (2e^x \cos 2x + e^x \operatorname{sen} 2x) \quad \text{y} \quad y'(0) = 1 \Longrightarrow 1 = C_2 \left(2e^0 \cos 0 + e^0 \operatorname{sen} 0\right) = 2C_2 \Longrightarrow C_2 = \frac{1}{2}.$$

Concluimos que la solución buscada es $y(x) = \frac{1}{2} e^x \operatorname{sen} 2x$.

Para cerrar esta sección, discutiremos un resultado asociado al teorema anterior.

Suponiendo que y_p sea una solución conocida de la EDO lineal no homogénea

$$y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y = q(x), \tag{3.7}$$

que $\overline{y}$ sea cualquier solución de (3.7) y que $\{y_1,\ y_2\}$ sea así mismo un conjunto fundamental de soluciones de la EDO lineal homogénea $y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y = 0$; se puede afirmar que cualquier solución de la EDO (4.9) puede ser escrita en la forma:

$$\overline{y} = y_p + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

Nuestra primera observación es que $\overline{y} - y_p$ es una solución de la EDO homogénea asociada; en efecto:

$$\begin{aligned} (\overline{y} - y_p)'' + a_1(x)(\overline{y} - y_p)' + a_0(x)(\overline{y} - y_p) &= \left(\overline{y}'' + a_1(x)\overline{y}' + a_0(x)\overline{y}\right) - \left(y_p'' + a_1(x) y_p' + a_0(x) y_p\right) \\ &= q(x) - q(x) = 0. \end{aligned}$$

Ahora, ya que $\overline{y} - y_p$ es una solución de la EDO homogénea asociada, ésta puede ser escrita como una combinación lineal de y_1 y y_2, esto es:

$$\overline{y} - y_p = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

Es decir:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_p$$

En conclusión, toda solución de (4.9) puede ser escrita como la suma de la solución general de la EDO homogénea asociada y una solución conocida y_p de (4.9). Denominamos solución particular de (4.9) a la solución conocida y_p.

3.1.1. Ejercicios. Ecuaciones diferenciales lineales de orden n.

1. Mostrar que tanto $\{y_1 = e^x;\ y_2 = e^{-x}\}$ como $\{y_3 = \operatorname{senh} x;\ y_4 = \cosh x\}$ son conjuntos fundamentales de soluciones para la ecuación diferencial $y'' - y' = 0$.

2. Resolver:

   a) Verificar que $y_1 = x^2$ y $y_2 = x^{-1}$ son soluciones de la ecuación diferencial $x^2y'' - 2y = 0$. ¿La combinación lineal $y = C_1y_1 + C_2y_2$ es solución de la ecuación?

   b) Verificar que $y_1 = 1$ y $y_2 = x^{1/2}$ son soluciones de la ecuación diferencial $yy'' + (y')^2 = 0$. ¿La combinación lineal $y = C_1y_1 + C_2y_2$ es solución de la ecuación (en general)?

   Si hay alguna diferencia entre a) y b), ¿en qué radica esta diferencia?

3. Resolver:

   a) Sea $y_1(x)$ una solución de la ecuación diferencial $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$. ¿Es $y_2(x) = Cy_1(x)$ solución de la ecuación diferencial?

   b) Si V representa el conjunto de todas las soluciones de la anterior ecuación diferencial, ¿es V un espacio vectorial?

4. Calcular el wronskiano de cada uno de los siguientes pares de funciones:

   a) $y_1 = \operatorname{sen} x$ y $y_2 = \cos x$.

   b) $y_1 = e^{-2x}\operatorname{sen} x$ y $y_2 = e^{-2x}\cos x$.

   c) $y_1 = \operatorname{senh} 3x$ y $y_2 = 4\left(e^{3x} - e^{-3x}\right)$.

   d) $y_1 = x \operatorname{sen} 2x$ y $y_2 = \operatorname{sen} 2x$.

5. Resolver:

   a) Extender la definición de wronskiano para el caso de tres funciones.

   b) Calcular el wronskiano de cada una de las siguientes ternas de funciones:

      1) $y_1 = e^x;\ y_2 = xe^x$ y $y_3 = x^2e^x$.

      2) $y_1 = \cos x;\ y_2 = \operatorname{sen} x$ y $y_3 = 1$.

      3) $y_1 = \cos x + \operatorname{sen} x$; $y_2 = \cos x - \operatorname{sen} x$ y $y_3 = \cos x$.

   En cada uno de los siguientes ejercicios, verificar que el conjunto dado es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación proporcionada; después encontrar la solución particular que satisface las condiciones iniciales dadas.

6. $y'' + y' - 2y = 0;\ \left\{y_1 = e^x,\ y_2 = e^{-2x}\right\}$, con $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

7. $y'' + 4y = 0;\ \{y_1 = \cos 2x,\ y_2 = \operatorname{sen} 2x\}$, con $y(0) = 1,\ y'(0) = 4$.

8. $y''' - 2y'' + 5y' = 0;\ \{y_1 = 1;\ y_2 = e^x\cos 2x,\ y_3 = e^x \operatorname{sen} 2x\}$, con $y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = -1$.

9. $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0;\ \left\{y_1 = x^2;\ y_2 = x^{-3}\right\}$, con $y(2) = 1,\ y'(2) = 0$.

10. $xy'' + y' = 0;\ \{y_1 = 1;\ y_2 = \ln x\}$, con $y(1) = 2,\ y'(1) = 3$.

11. Determinar la dependencia o independencia lineal de cada uno de los siguientes conjuntos de funciones:

    a) $\{e^x;\ e^{-x}; 2\}$.

    b) $\{\operatorname{arcsen}(x), \arccos(x), \pi\}$

    c) $\left\{e^{4x}; e^{-4x}; \cosh 4x\right\}$

    d) $\left\{e^x\cos 2x;\ e^x \operatorname{sen} 2x; e^{-4x}\right\}$.

12. Suponga que y_1 sea una solución no nula de la ecuación $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$.

a) Verifique que, si y_2 es una segunda solución tal que $\{y_1; y_2\}$ sea linealmente independiente, entonces

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{W(y_1,\ \ y_2)}{y_1^2}.$$

b) Verifique que $y_1 = x$ sea una solución de $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$; use a) para determinar la solución general de la ecuación diferencial.

13. Resolver:

    a) Muestre que $y_1 = 3x^2 - 1$ satisface a la ecuación .$\left(1-x^2\right)y'' - 2xy' + 6y = 0$ y tiene un mínimo en $x = 0$.

    b) Verifique ahora que cualquier otra solución y_2 no podrá tener mínimo en $x = 0$, si $\{y_1; y_2\}$ es linealmente independiente.

14. Demuestre que $y = x^3$ es una solución de $yy'' = 6x^4$, pero que, si $c^2 \neq 1$, entonces $y = cx^3$ no es una solución de la ecuación diferencial. ¿Por qué este hecho no contradice la teoría discutida en esta sección?

15. Compruebe que $y_1 = 1$ y $y_2 = x^{1/2}$ son soluciones de $yy'' + (y')^2 = 0$, pero que la suma $y = y_1 + y_2$ no es solución. ¿Por qué este hecho no contradice la teoría discutida en esta sección?

16. Resolver:

    a) Determine si el conjunto de funciones $\left\{y_1 = \operatorname{sen} x^2;\ y_2 = \cos x^2\right\}$ es linealmente dependiente o independiente.

    b) Calcule $W(y_1;\ y_2)$.

    c) ¿Existe una ecuación de la forma $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ (en la que p y q sean funciones continuas) tal que y_1 y y_2 sean soluciones de la ecuación diferencial?

En los siguientes ejercicios se proporciona una ecuación diferencial no homogénea, una solución particular, condiciones iniciales y un conjunto fundamental de soluciones para la ecuación diferencial homogénea asociada. En cada caso encuentre la solución particular del PVI.

17. $y'' + y = 3x;\quad y_p = 3x$; con $y(0) = 2$; $y'(0) = -2$; $\{\cos x;\ \operatorname{sen} x\}$.

18. $y'' - 2y' - 3y = 6;\quad y_p = -2$; con $y(0) = 3$; $y'(0) = 11$; $\left\{e^{-x};\ e^{3x}\right\}$.

19. $y'' - 4y = \operatorname{senh} x;\quad y_p = -\frac{1}{3}\operatorname{senh} x$; con $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$; $\left\{e^{2x};\ e^{-2x}\right\}$.

Respuestas: Ejercicios 3.1.1 Ecuaciones diferenciales lineales de orden n.

1. Demostrar.
2. a. Sí; b. no; c. en la linealidad; la EDO en a) es lineal, en b) no lo es.
3. No, para ambas preguntas.
4. a. -1; b. -e^{-4x}; c. 0; d. $-\operatorname{sen}^2 2x$.
5. a). $W(y_1,\ y_2,\ y_3)(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}$. b) i) $2e^{3x}$; ii) 1; iii) 0.
6. $y = \frac{2}{3}e^{x} + \frac{1}{3}e^{-2x}$
7. $y = \cos 2x + 2\operatorname{sen} 2x$.
8. $y = \frac{1}{5}\left[-3 + 3e^x\cos 2x + e^x \operatorname{sen} 2x\right]$

9. $y = \dfrac{3}{20}x^2 + \dfrac{16}{5}x^{-3}$.
10. $y = 2 + 3\ln x$.
11. a) Linealmente independiente. b. Linealmente dependiente. c. Linealmente dependiente. d. Linealmente independiente.
12. a) Verificar. b) $y = c_1 x + c_2 x^{-2}$.
13. a. Demostrar. b. Verificar.
14. Porque la EDO no es lineal.
15. Porque la EDO no es lineal.
16. a. El conjunto es linealmente independiente; b. $W(y_1,\ y_2)(x) = 0$; c. no.
17. $y = 2\cos x - 5\operatorname{sen} x + 3x$.
18. $y = e^{-x} + 4e^{3x} - 2$.
19. $y = \dfrac{2}{3}\operatorname{senh} 2x - \dfrac{1}{3}\operatorname{senh} x$.
20. Hallar la solución general de la ecuación diferencial $x^2y^{''} - xy' + y = 4x\ln x$, $0 < x < +\infty$, dado que $y_H = c_1x + c_2x\ln x$ es la solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea asociada.

    Solución. $x^2y'' - xy' + y = 0$

    $y_H'(x) = c_1 + c_2 + c_2\ln x$; $y_H''(x) = \dfrac{c_2}{x}$. Veamos que y_H satisface la ecuación diferencial homogénea asociada a la no homogénea $x^2y^{''} - xy' + y = 0$

$$\begin{aligned} x^2y_H^{''} - xy_H' + y_H &= x^2\left(\frac{c_2}{x}\right) - xc_1 - xc_2 - c_2x\ln x + c_1x + c_2x\ln x \\ &= c_2x - c_1x - c_2x\ln x - c_2x + c_1x + c_2x\ln x = 0. \end{aligned}$$

Por otra parte la ecuación diferencial no homogénea se puede escribir como $y'' - \dfrac{1}{x}y' + \dfrac{y}{x^2} = \dfrac{4}{x}\ln x$. De acuerdo al método de variación de parámetros, una solución particular está dada por: $y_p(x) = v_1(x)x + v_2(x)x\ln x$; donde $v_1(x)x$ y $v_2(x)$ satisfacen el sistema:

$$\begin{cases} v_1'(x)x + v_2'(x)x\ln x = 0 \\ v_1'(x) + v_2'(x)\left[\ln x + 1\right] = \dfrac{4}{x}\ln x \end{cases}$$

El determinante del sistema es igual a:

$$\begin{vmatrix} x & x\ln x \\ 1 & \ln x + 1 \end{vmatrix} = x\ln x + x - x\ln x = x.$$

Aplicando las reglas de Cramer se tiene:

$$v_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x\ln x \\ \dfrac{4}{3}\ln x & \ln x + 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{4\ln^2 x}{x}$$

De donde:

$$\begin{aligned} v_1(x) &= -4\int \frac{\ln^2 x}{x}dx; \qquad u = \ln x \qquad du = \frac{1}{x}dx \\ &= -4\int u^2 du = -\frac{4u^3}{3} = -\frac{4}{3}(\ln x)^3 \end{aligned}$$

De manera similar:

$$v_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & \dfrac{4}{x}\ln x \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{4\ln x}{x} \Longrightarrow v_2(x) = 2\ln^2 x$$

En consecuencia:

$$y_p(x) = -\frac{4x}{3}(\ln x)^3 + 2\ln^2 x(x\ln x) = 2x(\ln x)^3 - \frac{4}{3}x(\ln x)^3 = \frac{2}{3}x(\ln x)^3$$

Por lo tanto la solución general de la ecuación diferencial no homogénea está dada por:

$$y_G(x) = c_1 x + c_2 x\ln x + \frac{2}{3}x(\ln x)^3.$$

21. Hallar la solución general de la ecuación diferencial $xy'' - (1+2x^2)y' = x^5 e^{x^2}$, dado que $y_H = c_1 + c_2 e^{x^2}$ es la solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea asociada.

Solución:

Veamos que $\{1, e^{x^2}\}$ es una base del espacio solución de la ecuación diferencial lineal homogénea asociada a la no homogénea; es decir de la ecuación diferencial.

$$xy'' - (1+2x^2)y' = 0 \tag{3.8}$$

Que $y_1(x) = 1$ es una solución de (3.8) es inmediato puesto que $y_1'(x) = 0$ y $y''(x) = 0$.

Verifiquemos que $y_2(x) = e^{x^2}$ es también solución de (3.8). En efecto, $y_2'(x) = 2xe^{x^2}$ y $y_2''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2}$. Luego:

$$\begin{aligned} xy_2''(x) - (1+2x^2)y_2'(x) &= x\left[2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2}\right] - (1+2x^2)(2xe^{x^2}) \\ &= 2xe^{x^2} + 4x^3e^{x^2} - 2xe^{x^2} - 4x^3e^{x^2} = 0. \end{aligned}$$

Por otra parte, es obvio que las funciones $y_1(x) = 1$ y $y_2(x) = e^{x^2}$ son linealmente independientes pues no existe una constante que multiplicada por una de ellas nos dé la otra.

Por lo tanto, el conjunto $\{1, e^{x^2}\}$ es una base del espacio nulo.

Hallemos ahora una solución particular de la ecuación diferencial

$$y'' - \frac{(1+2x^2)}{x}y' = x^4e^{x^2},$$

utilizando el método de variación de parámetros, buscamos una solución particular y_p de la forma: $y_p(x) = v_1(x) + v_2(x)e^{x^2}$ donde $v_1(x)$ y $v_2(x)$ verifican el siguiente sistema:

$$\begin{cases} v_1'(x) + v_2'(x)e^{x^2} = 0 \\ v_1'(x)\times 0 + 2xe^{x^2}v_2'(x) = x^4e^{x^2}. \end{cases}$$

Calculemos el determinante del sistema:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & ex^2 \\ 0 & 2xe^{x^2} \end{vmatrix} = 2xe^{x^2}.$$

De acuerdo a las reglas de Cramer se sigue que:

$$\begin{aligned} v_1'(x) &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & ex^2 \\ x^4e^{x^2} & 2xe^{x^2} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{x^4e^{x^2}e^{x^2}}{2xe^{x^2}} = \frac{1}{2}x^3e^{x^2}. \\ &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^4e^{x^2} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{x^4e^{x^2}}{2xe^{x^2}} = \frac{1}{2}x^3. \end{aligned}$$

Integrando se sigue que

$$v_2(x) = \frac{1}{8}x^4 \quad \text{ y } \quad v_1(x) = \frac{1}{2}\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{4}\int x^2(2xex^2)dx$$

Haciendo $u = x^2$ y $dv = 2xe^{x^2}dx$ en la última integral, se sigue que $du = 2xdx$ y $v = e^{x^2}$, y por tanto:

$$\begin{aligned} v_1(x) &= \frac{1}{4}\left[x^2e^{x^2} - \int 2xe^{x^2}dx\right] = \frac{1}{4}\left[x^2e^{x^2} - e^{x^2}\right] \\ v_1(x) &= \frac{1}{4}(x^2-1)e^{x^2} \end{aligned}$$

Luego una solución particular es

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \frac{1}{4}(x^2-1)e^{x^2} + \frac{1}{8}x^4ex^2 \\ &= \frac{1}{8}\left[x^4 + 2x^2 - 2\right]e^{x^2} \end{aligned}$$

En consecuencia la solución general de la ecuación diferencial $xy'' - (1+2x^2)y' = x^5e^{x^2}$ es $y(x) = c_1 + c_2e^{x^2} + \frac{1}{8}\left[x^4 + 2x^2 - 2\right]e^{x^2}$

22. Escribir el operador diferencial lineal $L = (xD^3 - x^2)(xD^2)$ en la forma

$$L = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x).$$

Solución

$$\begin{aligned} L(f(x)) &= (xD^3 - x^2)(xD^2)(f(x)) \\ &= (xD^2 - x^2)\left[xf''(x)\right] \\ &= xD^2(xf''(x)) - x^3f''(x) \\ &= xD(f''(x) + xf^{'''}(x)) - x^3f''(x) \\ &= x(f'''(x)) + f'''(x) + xf^{(4)}(x) - x^3f''(x) \\ &= x^2f^{(4)}(x) + 2xf'''(x) - x^3f''(x) \\ &= (x^2D^4 + 2xD^3 - x^3D^2)(f(x)) \end{aligned}$$

Es decir que

$$L = (xD^3 - x^2)(xD^2) = x^2D^4 + 2xD^3 - x^3D^2.$$

23. Hallar un operador diferencial lineal L que anule a la función

$$f(x) = (1-x)^4e^{x/2}\cos(3x) + \cos(2-x)$$

Solución

Como $f(x) = (1-x)^4\ e^{x/2}\cos(3x) + \cos 2\cos x + \operatorname{sen} 2\operatorname{sen} x$ se sigue que $(D^2 + D + \frac{37}{4})^5$ anula a $(1-x)^4e^{1/2x}\cos(3x)$ y el operador D^2+1 anula a $\cos 2\cos x + \operatorname{sen} 2\operatorname{sen} x$.

En consecuencia, el anulador de $f(x)$ es

$$L = \left(D^2 + D + \frac{37}{4}\right)^5\left(D^2+1\right).$$

24. Hallar una ecuación diferencial lineal de segundo orden a coeficientes constantes cuya solución general sea
$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \operatorname{sen} x$$

Solución

Como la solución general tiene la estructura de $y = y_H(x) + y_p(x)$, con $y_H(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ y $y_p(x) = \operatorname{sen} x$, se sigue que la ecuación diferencial buscada es no homogénea; es decir de la forma $L(Y) = h(x)$, donde $L = (D-1)(D+1)$ puesto que la solución de la ecuación diferencial lineal no homogénea asociada a la no homogénea es $Y_H(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

Se sigue entonces que $L(Y) = h(x) \Leftrightarrow (D-1)(D+1)y = h(x)$.

Para encontrar $h(x)$ utilizamos el hecho de que $Y_p(x)$ es una solución particular de $L(y) = h(x)$; es decir, se verifica que:

$$\begin{aligned} L(Y_p) &= h(x) \Leftrightarrow (D-1)(D+1)(\operatorname{sen} x) = h(x) \\ &\Leftrightarrow (D^2-1)(\operatorname{sen} x) = h(x) \\ &\Leftrightarrow -\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x = h(x) \\ &\Leftrightarrow h(x) = -2\operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

Finalmente, la ecuación diferencial buscada es:

$$(D-1)(D+1)y = 2\operatorname{sen} x \Leftrightarrow y'' - y = 2\operatorname{sen} x.$$

25. Resolver el problema de valor inicial
$$\begin{cases} y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases}$$

Solución

$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0 \Leftrightarrow (D^2 - 3D + 2)y = 0 \Leftrightarrow (D-2)(D-1)y = 0$. Luego la solución general es $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^x$.

Busquemos ahora la solución que satisface las condiciones iniciales:

$$y(0) = 1 \Leftrightarrow c_1 + c_2 = 1$$

Como $y(x) = 2c_1 c^{2x} + c_2 e^x$ se sigue que

$$y'(0) = 0 \Leftrightarrow 2c_1 + c_2 = 0$$

Resolviendo el sistema:
$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 2c_1 + c_2 = 0 \end{cases}$$

se sigue que: $c_1 = -1$ y $c_2 = 2$.

En consecuencia la solución del problema de valor inicial,
$$\begin{cases} y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0 \end{cases}$$
es $y(x) = -e^{2x} + 2e^x$.

26. Hallar la solución general de $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$

Solución

Como
$$\begin{aligned} y^{(4)} + 2y'' + y = 0 &\Leftrightarrow (D^4 + 2D^2 + 1)y = 0 \\ &\Leftrightarrow (D^2+1)^2 y = 0 \end{aligned}$$

se sigue entonces que la solución general es:

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + c_3 x \cos + c_4 x \operatorname{sen} x.$$

27. Resolver la ecuación diferencial

$$(\operatorname{sen} 4x)y'' - 4(\cos^2(2x))y' = \tan x,$$

dado que $Y_H = c_1 + c_2 \cos 2x$.

Solución

Verifiquemos que las funciones $y_1(x) = 1$ y $y_2(x) = \cos 2x$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial lineal homogénea asociada a la no homogénea; es decir que son soluciones de: $(\operatorname{sen} 4x)\, y'' - 4(\cos^2 2x)y' = 0$.

En efecto, es evidente que $y_1(x)) = 1$ es una solución puesto que $y_1'(x) = 0$ y $y_2''(x) = 0$.

Veamos si $y_2(x) = \cos 2x$ es una solución.

De $y_2(x) = \cos 2x$ se sigue que $y_2'(x) = 2\operatorname{sen}(2x)$ y $y_2''(x) = -4\cos(2x)$. Luego:

$$\begin{aligned}
(\operatorname{sen} 4x)y_2''(x) - 4(\cos^2 2x)y_2'(x) &= (\operatorname{sen} 4x)(-4\cos(2x)) - 4(\cos^2 2x)(-2\operatorname{sen} 2x) \\
&= -4\operatorname{sen} 4x \cos 2x + 8\cos^2 2x \operatorname{sen} 2x \\
&= -4(2\operatorname{sen} 2x \cos 2x \cos 2x) + 8\cos^2 2x \operatorname{sen} 2x \\
&= -8\operatorname{sen} 2x \cos^2 2x + 8\cos^2 2x \operatorname{sen} 2x = 0.
\end{aligned}$$

Es decir que $y_1(x) = 1$ y $y_2(x) = \cos 2x$ son soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea. Por tanto constituyen una base del espacio solución, pues es evidente que dichas funciones son linealmente independientes.

Busquemos ahora una solución particular de

$$y'' - 4\frac{\cos^2 2x}{\operatorname{sen} 4x}y^2 = \frac{\tan x}{\operatorname{sen} 4x}$$

utilizando el método de variación de parámetros. Es decir, busquemos una solución particular de la forma

$$y_p(x) = v_1(x) + v_2(x)\cos 2x$$

donde $v_1(x)$ y $v_2(x)$ satisfacen el sistema:

$$\begin{cases} v_1'(x) + v_2'(x)\cos 2x = 0 \\ v_1'(x)_x 0 2 v_2'(x)\operatorname{sen} 2x = \dfrac{\tan x}{\operatorname{sen} 4x} \end{cases}$$

El determinante de dicho sistema es:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \cos 2x \\ 0 & -2\operatorname{sen} 2x \end{vmatrix} = -2\operatorname{sen} 2x$$

De acuerdo a las reglas de Cramer:

$$\begin{aligned}
v_1'(x) &= \frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\tan x}{\operatorname{sen} 4x} & -2\operatorname{sen} 2x \end{vmatrix}}{\Delta} = -\frac{\dfrac{\tan x}{\operatorname{sen} 4x}\cos 2x}{-2\operatorname{sen} 2x} = \frac{\tan x \cos 2x}{2\operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 4x} \\
&= \frac{\tan x \cos 2x}{4\operatorname{sen}^2 2x \cos 2x} = \frac{\tan x}{4\operatorname{sen}^2(2x)} \\
v_2'(x) &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{\tan x}{\operatorname{sen} 4x} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\dfrac{\tan x}{\operatorname{sen} 4x}}{-2\operatorname{sen} 2x} = -\frac{\tan x}{2\operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 4x} \\
v_2'(x) &= -\frac{\tan x}{8\operatorname{sen}^2 2x \cos 2x}
\end{aligned}$$

$$v_1(x) = \frac{1}{4}\int \frac{\tan x}{\operatorname{sen}^2(2x)}dx,\ v_2(x) = -\frac{1}{8}\int \frac{bx}{\operatorname{sen}^2(2x)\cos 2x}$$

Por tanto:
$y_p(x) = \frac{1}{4}\int \frac{\tan x}{\operatorname{sen}^2(2x)}dx - \frac{\cos^2 x}{8}\int \frac{\tan x}{\operatorname{sen}^2 2x \cos 2x}dx$
En consecuencia la solución general de la ecuación diferencial dada es

$$y(x) = c_1 + c_2\cos 2x + \frac{1}{4}\int \frac{\tan x}{\operatorname{sen}^2(2x)}dx - \frac{\cos 2x}{8}\int \frac{\tan x}{\operatorname{sen}^2(2x)\cos(2x)}dx.$$

28. Resolver la ecuación diferencial

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = x^{3/2},\ 0 < x < +\infty,$$

dado que $y_H(x) = C_1x^{-1/2}\cos x + C_2x^{-1/2}\operatorname{sen} x$ es la solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea asociada a la no homogénea.

Solución

Veamos que $\{x^{1/2}\cos x, x^{-1/2}\operatorname{sen} x\}$ es una base del espacio solución de la ecuación diferencial.

$$x^2y'' + xy'' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0.$$

En efecto, de $y_H(x) = C_1x^{1/2}\cos x + C_2x^{-1/2}\operatorname{sen} x$ se sigue que

$$\begin{aligned} y_H'(x) &= -\frac{1}{2}C_1x^{-3/2}\cos xC_1x^{-1/2}\operatorname{sen} x\frac{1}{2}C_2x^{-3/2}\operatorname{sen} x + c_2x^{-1/2}\cos x \\ y_H''(x) &= \frac{3}{2}c_1x^{-5/2}\cos x + \frac{1}{2}c_1x^{-3/2}\operatorname{sen} x + \frac{1}{2}c_1x^{-3/2}\operatorname{sen} x - c_1x^{-1/2}\cos x \\ &\quad +\frac{3}{4}c_2x^{-5/6}\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}c_2x^{-3/2}\cos x - \frac{1}{2}c_2x^{-3/2}\cos x - c_2x^{-1/2}\operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

Reemplazando $y_H(x)$ en la ecuación diferencial $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$ se sigue que $x^2y_H''(x) + xy_H'(x) + (x^2 - \frac{1}{4})y_H(x)$ es igual a:
$x^2\left[\frac{3}{4}c_1x^{-3/2}\cos x + \frac{1}{2}c_1x^{-3/2}\operatorname{sen} x + \frac{1}{2}c_1x^{-3/2}\operatorname{sen} x - c_1x^{-1/2}\cos x + \frac{3}{4}c_2x^{-3/2}\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}c_2x^{-3/2}\cos x\right.$
$\left.-\frac{1}{2}c_2x^{-3/2}\cos x - c_2x^{-1/2}\operatorname{sen} x\right] + x\left[-\frac{1}{2}c_1x^{-3/2}\cos x - c_1x^{-1/2}\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}c_2x^{-3/2}\operatorname{sen} x + c_2x^{-1/2}\cos x\right]$
$+\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)\left(c_1x^{-1/2}\cos x + c_2x^{-1/2}\operatorname{sen} x\right).$
Que a su vez es igual a:
$\frac{3}{4}c_1x^{-1/2}\cos x + \frac{1}{2}c_1x^{1/2}\operatorname{sen} x + \frac{1}{2}c_1x^{1/2}\operatorname{sen} x - c_1x^{3/2}\cos x + \frac{3}{4}c_2x^{-1/2}\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}c_2x^{1/2}\cos x$
$-\frac{1}{2}c_2x^{1/2}\cos x - c_2x^{3/2}\operatorname{sen} x\frac{1}{2}c_1x^{-1/2}\cos x - c_1x^{1/2}\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}c_2x^{-1/2}\operatorname{sen} x + c_2x^{1/2}\cos x + c_1x^{3/2}\cos x$
$+c_2x^{3/2}\operatorname{sen} x - \frac{1}{4}c_1x^{-1/2}\cos x - \frac{1}{4}c_2x^{-1/2}\operatorname{sen} x.$
o también a:
$\left[\frac{3}{4}c_1 - \frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{4}c_1\right]x^{-1/2}\cos x + \left[\frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_1 - c_1\right]x^{1/2}\operatorname{sen} x + [-c_1 + c_1]\,x^{3/2}\cos x$
$+\left[\frac{3}{4}c_2 - \frac{1}{2}c_2 - \frac{1}{4}c_2\right]x^{-1/2}\operatorname{sen} x + \left[-\frac{1}{2}c_2 - \frac{1}{2}c_2 + c_2\right]x^{1/2}\cos x + [-c_2 + c_2]\,x^{3/2}\operatorname{sen} x = 0.$
Busquemos ahora una solución particular de la ecuación diferencial

$$y'' + \frac{y'}{x} + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)y = x^{-1/2}$$

utilizando el método de variación de parámetros; es decir, busquemos una solución particular de la forma:

$$y_p(x) = v_1(x)x^{1/2}\cos x + v_2(x)x^{-1/2}\operatorname{sen} x$$

donde $v_1(x)$ y $v_2(x)$ satisfacen el sistema:

$$\begin{cases} v_1'(x)x^{-1/2}\cos x + \sqrt{2}'(x)x^{-1/2}\operatorname{sen} x = 0 \\ v_1'(x)\left[-\frac{1}{2}x^{-3/2}\cos x - x^{-1/2}\operatorname{sen} x\right] + v_2'(x)\left[-\frac{1}{2}x^{-3/2}\operatorname{sen} x + x^{-1/2}\cos x x\right] = x^{-1/2} \end{cases}$$

El determinante del sistema es:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} x^{-1/2}\cos x & x^{-1/2}\operatorname{sen} x \\ -\frac{1}{2}x^{-3/2}\cos x - x^{-1/2}\operatorname{sen} x & -\frac{1}{2}x^{-3/2}\operatorname{sen} x + x^{-1/2}\cos x \end{vmatrix} \\ &= -\frac{1}{2}x^{-2}\operatorname{sen} x\cos x + x^{-1}\cos^2 x + \frac{1}{2}x^{-2}\operatorname{sen} x\cos x + x^{-1}\operatorname{sen}^2 x \\ &= x^{-1} \end{aligned}$$

De acuerdo a las reglas de Cramer:

$$v_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^{-1/2}\operatorname{sen} x \\ x^{-1/2} & -\frac{1}{2}x^{-3/2}\operatorname{sen} x + x^{-1/2}\cos x \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{x^{-1}\operatorname{sen} x}{x^{-1}} = \operatorname{sen} x$$

Por tanto $v_1(x) = -\cos x$.

Por otra parte:

$$v_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} x^{-1/2}\cos x & 0 \\ -\frac{1}{2}x^{-3/2}\cos x - x^{-1/2}\operatorname{sen} x & x^{-1/2} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{x^{-1}\cos x}{x^{-1}} = \cos x$$

de donde

$$v_2(x) = \int \cos x dx = \operatorname{sen} x$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= (-\cos x)x^{-1/2}\cos x + \operatorname{sen} x(x^{-1/2}\operatorname{sen} x) \\ &= x^{-1/2}\left[\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x\right] = -x^{1/2}\left[\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\right] \\ &= -x^{-1/2}\cos(2x) \end{aligned}$$

Luego la solución general es: $y(x) = c_1x^{-1/2}\cos x + c_2x^{-1/2}\operatorname{sen} x - x^{-1/2}\cos(2x)$.

3.2. Ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden

Introducción

En esta sección se presentarán dos tópicos en los cuales las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden desempeñan un papel vital para su modelación, a saber, vibraciones mecánicas y circuitos eléctricos.

Un principio fundamental de la física establece que los sistemas físicos tienden a estar en una posición de mínima energía potencial denominada posición de equilibrio y si, por alguna razón, el sistema es forzado a salir de ese equilibrio, entonces tenderá a regresar a él. Por ejemplo, piense por un momento en un péndulo estático; si golpea la masa del péndulo con una pequeña fuerza, el sistema saldrá de su posición de equilibrio y en algún momento posterior se detendrá, pero al no estar en equilibrio retornará buscando dicha posición.

La teoría de oscilaciones pequeñas permite describir cuantitativa y cualitativamente el movimiento que ocurre en los sistemas físicos cuando están cerca de su posición de equilibrio estable. Muchos fenómenos (péndulos, terremotos, mareas, etc.) pueden ser analizados utilizando esta teoría. El modelo más simple que permite describir cuantitativa y cualitativamente el fenómeno de vibración es el sistema masaresorte, también llamado oscilador armónico, en el cual no hay pérdida de energía. Otro modelo es el de masa-resorte-amortiguador, donde además se consideran fuerzas disipativas; en este caso la energía no se conserva y las oscilaciones tienden a desaparecer en el tiempo. Un tercer modelo es el oscilador forzado que considera fuerzas de excitación que incrementan o reducen la energía del sistema. En algunos casos, esta fuente de energía puede llegar a ser la responsable de la destrucción del sistema.

En la primera parte de este capítulo analizaremos los osciladores libre, amortiguado y forzado.

La segunda parte la dedicaremos al estudio de los circuitos eléctricos RLC en serie que están formados por un resistor R, un inductor L y un capacitor C. Estos circuitos encuentran su aplicación más práctica en el sistema eléctrico de una instalación ya sea doméstica o industrial y en todos los aparatos eléctricos que utilizamos en nuestra vida cotidiana. En nuestro análisis describiremos cómo se comportan la carga y la corriente en circuitos RLC. Finalmente, estableceremos una relación electromecánica entre las vibraciones mecánicas y los circuitos eléctricos.

3.3. Vibraciones mecánicas

Comenzamos el estudio de los fenómenos oscilatorios presentando algunos ejemplos en que estos fenómenos ocurren además del que se mencionó en la introducción.

Otro ejemplo puede ocurrir cuando se realiza un viaje en avión. En condiciones normales el avión permanece estable en gran parte del recorrido; sin embargo, una turbulencia puede provocar la pérdida momentánea de la estabilidad y el equilibrio; cuando esto ocurre, el avión empieza a vibrar intentando regresar a su posición de equilibrio. Afortunadamente el avión cuenta con diversos aparatos que permiten la disipación de la vibración de forma rápida y segura.

Un tercer ejemplo lo podemos observar cuando se viaja en un auto y, sin reducir la velocidad, se pasa por un tope o bache. Inmediatamente el auto empieza a vibrar verticalmente y solo la acción de los amortiguadores permite reducir y desaparecer las vibraciones del auto.

En general, las vibraciones aparecen cuando se aplica una pequeña fuerza a un sistema físico que se encuentra inicialmente en un estado de equilibrio estable. Cuando esta fuerza desaparece, el sistema tiende a regresar a su posición de equilibrio. Para entender el proceso físico que ocurre, recordemos que un sistema físico está en una posición de equilibrio estable cuando se encuentra en un mínimo de energía potencial.

Para que abandone esa posición es necesario proporcionarle energía mediante la acción de una fuerza.

Cuando se deja de aplicar la fuerza, el sistema ha adquirido energía potencial, que al intentar retornar a la posición de equilibrio, se transforma en energía cinética. Es decir, cuando pasa la posición de equilibrio tendrá energía cinética y no se detendrá; continuará su movimiento transformando ahora, hasta que desaparezca, su energía cinética en potencial. Esta transferencia entre energía cinética y potencial se repetirá indefinidamente a menos que algún mecanismo permita la disipación de energía mecánica.

3.4. Movimiento armónico simple

Para iniciar el estudio de las vibraciones mecánicas, analicemos una situación cotidiana y simple. Consideremos un cuerpo de masa m que está unido a una pared por medio de un resorte de constante k (sistema masa-resorte) el cual se encuentra sobre una mesa horizontal. Por simplicidad supongamos también que no existe fricción entre el cuerpo y la mesa y que el sistema se encuentra inicialmente en equilibrio. De repente, el resorte se comprime (o se elonga) una distancia pequeña x_0, medida desde la posición de equilibrio (ver figura anterior), y se le aplica una velocidad v_0. Desde ese momento, el resorte ejerce una fuerza sobre la masa que tiende a regresarla a su posición de equilibrio inicial. En general, esta fuerza depende de la distancia comprimida (o elongada) del resorte. Si la compresión (o elongación) es pequeña, se puede suponer que la fuerza es directamente proporcional a dicha deformación y que siempre apunta hacia la posición de equilibrio o en sentido contrario a la deformación. Dicha suposición se conoce como ley de Hooke para resortes lineales. Es decir, la fuerza F_R que en todo momento ejerce el resorte sobre la masa está dada por

$$F_R = -kx,$$

donde x es la deformación y $k > 0$ es la constante del resorte.

Por otra parte, y de acuerdo con la segunda ley de Newton, la suma de todas la fuerzas que se aplican a un cuerpo produce un cambio a su movimiento que se rige por la ecuación

$$F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Igualando estos dos resultados, se obtiene el PVI que modela el sistema masa-resorte:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx, \text{ con las condiciones iniciales } x(0) = x_0 \;\text{ y }\; v(0) = v_0$$

o equivalentemente:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx, \text{ con } x(0) = x_0 \;\text{ y }\; x'(0) = v_0. \tag{3.9}$$

El modelo encontrado es una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes. Para resolverla, proponemos como solución de la ecuación diferencial una función del tipo $x = e^{rt}$. Derivando dos veces con respecto al tiempo y sustituyendo en $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$, obtenemos la ecuación algebraica

$$mr^2e^{rt} = -ke^{rt} \Longrightarrow \left(mr^2 + k\right)e^{rt} = 0 \Longrightarrow mr^2 + k = 0,$$

cuyas dos raíces son imaginarias debido a que m y k son constantes positivas,

$$mr^2 + k = 0 \Longrightarrow r^2 = -\frac{k}{m} \Longrightarrow r = \pm\sqrt{-\frac{k}{m}} \Longrightarrow r = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}, \text{ donde } i = \sqrt{-1}.$$

Si definimos la frecuencia natural del sistema como $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, tendremos $r = \pm i\omega$, de tal forma que un conjunto fundamental de soluciones lo constituyen las dos funciones sinusoidales $\cos\omega t$ y $\operatorname{sen}\omega t$. Entonces la solución general de la ecuación diferencial es

$$x(t) = C_1\cos\omega t + C_2\operatorname{sen}\omega t. \tag{3.10}$$

Derivando la ecuación (3.10), se obtiene la velocidad del cuerpo, esta es

$$x'(t) = v(t) = \omega C_1\operatorname{sen}\omega t + \omega C_2\cos\omega t. \tag{3.11}$$

Las constantes C_1 y C_2 que aparecen en las ecuaciones (3.10) y (3.11) se deben determinar a partir de las condiciones iniciales de movimiento. Como la masa se encuentra inicialmente ($t = 0$ a una distancia x_0 de la posición de equilibrio, y se suelta con velocidad inicial v_0; entonces se debe cumplir que

$$\begin{aligned} x_0 &= x(0) = C_1\cos 0 + C_2\operatorname{sen}0 = C_1(1) + C_2(0) = C_1. \\ v_0 &= \omega C_1\operatorname{sen}0 + \omega C_2\cos 0 = \omega C_2. \end{aligned}$$

de donde

$$C_1 = x_0 \quad \text{y} \quad C_2 = \frac{v_0}{\omega}. \tag{3.12}$$

Finalmente, reemplazando estos resultados en la ecuación (3.10), se obtiene la siguiente expresión para la posición instantánea de la masa en todo tiempo t :

$$x(t) = x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\operatorname{sen}\omega t. \tag{3.13}$$

Por otra parte, para poder analizar la ecuación anterior conviene escribirla en cualquiera de las dos formas compactas equivalentes

$$x(t) = A\operatorname{sen}(\omega t + \phi) \quad \text{o bien } x(t) = A\cos(\omega t - \phi_1).$$

Equivalencia que se obtiene con recordar que las funciones seno y coseno estan desfasadas un ángulo $\frac{\pi}{2}$, es decir: $\operatorname{sen}\theta = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$.

En consecuencia, si elegimos $\theta = \omega t + \phi$, se debe cumplir:

$$\omega t + \phi - \frac{\pi}{2} = \omega t - \phi_1,$$

de donde:

$$\phi_1 = \frac{\pi}{2} - \phi.$$

Queremos reescribir la posición de la masa en la forma $x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$. Se tiene $x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \operatorname{sen} \omega t$ y se quiere $x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$. Lo que se tiene coincide con lo que se quiere cuando:

$$\begin{aligned} C_1 \cos \omega t + C_2 \operatorname{sen} \omega t &= A \operatorname{sen}(\omega t + \phi) = A [\operatorname{sen}(\omega t) \cos \phi + \cos(\omega t) \operatorname{sen} \phi] \\ &= (A \cos \phi) \operatorname{sen}(\omega t) + (A \operatorname{sen} \phi) \cos(\omega t) = (A \operatorname{sen} \phi) \cos(\omega t) + (A \cos \phi) \operatorname{sen}(\omega t). \end{aligned}$$

Y esto sucede si

$$C_1 = A \operatorname{sen} \phi \quad \text{y} \quad C_2 = A \cos \phi. \tag{3.14}$$

De estas igualdades se tiene que

$$C_1^2 + C_2^2 = A^2 \operatorname{sen}^2 \phi + A^2 \cos^2 \phi = A^2 \left(\operatorname{sen}^2 \phi + \cos^2 \phi \right) = A^2 (1) = A^2.$$

De donde:

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2},$$

y además, con $C_2 \neq 0$,

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{A \operatorname{sen} \phi}{A \cos \phi} = \tan \phi \Longrightarrow \phi = \arctan \left(\frac{C_1}{C_2} \right).$$

Es útil recordar estas relaciones usando el triángulo:

Obtenemos así una fórmula simplificada de la posición de la masa, con respecto a su posición de equilibrio:

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi). \tag{3.15}$$

En esta expresión, A y ϕ se definen respectivamente como la amplitud de la oscilación y el ángulo de fase.

Veamos ahora el significado físico de estos conceptos, que se representan en la figura siguiente:

Se tiene que la posición $x(t)$ toma valores en el intervalo $[-A; A]$ ya que

$$\begin{aligned} -1 &\leq \operatorname{sen} \theta \leq 1, \text{ con } \theta \in \mathbb{R} \Longrightarrow |\operatorname{sen} \theta| \leq 1, \text{ con } \theta \in \mathbb{R} \Longrightarrow |\operatorname{sen}(\omega t + \phi)| \leq 1 \Longrightarrow A |\operatorname{sen}(\omega t + \phi)| \leq A, \\ \text{con } A &> 0 \Longrightarrow |A \operatorname{sen}(\omega t + \phi)| \leq A \Longrightarrow |x(t)| \leq A \Longrightarrow -A \leq x(t) \leq A. \end{aligned}$$

De forma que A es la máxima separación del cuerpo con respecto a la posición de equilibrio. De aquí que A sea la amplitud (máxima) de la oscilación. Este desplazamiento máximo ocurre cuando:

$$\begin{aligned} |x(t)| &= A \Longrightarrow |\operatorname{sen}(\omega t + \phi)| = 1 \Longrightarrow \operatorname{sen}(\omega t + \phi) = \pm 1 \Longrightarrow \omega t + \phi = \frac{\pi}{2} + n\pi, \text{ con } n \text{ número entero} \\ &\Longrightarrow \omega t + \phi = (2n+1) \frac{\pi}{2}, \text{ con } n \text{ número entero} \\ &\Longrightarrow t = \frac{(2n+1) \frac{\pi}{2} - \phi}{\omega}, \text{ con } n \text{ número entero y } t \geq 0. \end{aligned}$$

Mediante esta relación, se obtienen los instantes en que $x(t) = A$ (n par), así como los instantes en que $x(t) = -A$ (n impar) y la condición $t \geq 0$.

A la diferencia entre dos tiempos consecutivos donde $x(t) = A$ se le denomina periodo de la función $x(t)$ y al movimiento realizado en dicho intervalo de tiempo se le conoce como una oscilación completa. Es decir, el periodo T es el (intervalo de) tiempo que tarda la masa m en dar una oscilación completa.

Mostraremos ahora que $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ s. Para ello consideremos que $x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$. Entonces:

$$\begin{aligned} x(t+T) &= A \operatorname{sen}[\omega(t+T) + \phi] = A \operatorname{sen}\left[\omega \left(t + \frac{2\pi}{\omega} \right) + \phi \right] = A \operatorname{sen}[\omega t + 2\pi + \phi] \\ &= A \operatorname{sen}[(\omega t + \phi) + 2\pi] = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi) = x(t). \end{aligned}$$

Lo que implica que $x(t+T)=x(t)$ para $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$.

Ahora bien, si la masa m tarda T segundos en dar una oscilación completa, ¿cuántas veces oscilará en un segundo? Al número f de oscilaciones que da el oscilador armónico en la unidad de tiempo se le denomina frecuencia del oscilador; esta queda determinada por la proporción:

$$\frac{1}{T}\frac{\text{oscilaciones}}{\text{segundos}}=\frac{f}{1}\frac{\text{oscilaciones}}{\text{segundo}},\text{ de donde } f=\frac{1}{T}\frac{\text{oscilaciones}}{\text{segundo}}.$$

Es decir, la frecuencia f del oscilador armónico está dada por

$$f=\frac{1}{T}\frac{\text{oscilaciones}}{\text{segundo}}=\frac{1}{T}\frac{\text{ciclos}}{\text{segundo}}=\frac{\omega}{2\pi}\text{hertz }(H)$$

Observe que la frecuencia f del oscilador es diferente de la frecuencia natural ω del sistema.

Además note que el periodo $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ también es la diferencia entre dos tiempos consecutivos en los que $x(t)=-A$.

Finalmente, estudiemos el número real ϕ. Al número ϕ se le denomina ángulo de fase, ya que está relacionado con el desfasamiento $\dfrac{\phi}{\omega}$ que existe entre las curvas $x(t)=A\operatorname{sen}(\omega t)$ y $x(t)=A\operatorname{sen}(\omega t+\phi)$.

Ahora, ¿cómo determinamos el valor de ϕ?

Recordemos que la posición instantánea $x(t)$ está dada por

$$x(t)=C_1\cos\omega t+C_2\operatorname{sen}\omega t=A\operatorname{sen}(\omega t+\phi)$$

1. Si $C_1=x_0=0$ entonces,

$$x(t)=C_2\operatorname{sen}\omega t=A\operatorname{sen}(\omega t+\phi)\,x\Longrightarrow A=|C_2|\text{ y }\phi=0\text{ o bien }\phi=\pi.$$

2. $C_2=\dfrac{v_0}{\omega}=0$ entonces,

$$x(t)=C_1\cos\omega t=C_1\operatorname{sen}\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)=A\operatorname{sen}(\omega t+\phi)\Longrightarrow A=|C_1|=|x_0|\text{ y }\phi=\frac{\pi}{2}.$$

3. Si $C_2\neq=0$ entonces,

$$x(t)=C_1\cos\omega t+C_2\operatorname{sen}\omega t=A\operatorname{sen}(\omega t+\phi)\Longrightarrow A\operatorname{sen}\phi=C_1\text{ y }A\cos\phi=C_2,\text{ de donde }\phi=\arctan\left(\frac{C_1}{C_2}\right).$$

Para calcular ϕ con esta fórmula, por lo común es necesario utilizar una calculadora, la cual nos proporciona un número: $\arctan\left(\dfrac{C_1}{C_2}\right)=\phi_c$. ¿Es este número ϕ_c en verdad el número ϕ que buscamos? Aparentemente sí, pero hay que analizar con más detalle. Veamos.

La función $\theta=\arctan u$ es la inversa de la función $u=\tan\theta$ para $\theta\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ y este es el rango que obtenemos al usar una calculadora. Por esta razón una calculadora dará siempre un número $\theta_c\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, cuando se usan radianes y no grados.

¡Nunca se debe usar grados para funciones trigonométricas si hay derivadas o integrales en ellas!

Para $\theta\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ sabemos que $\cos\theta>0$. Por lo tanto, reconsiderando las igualdades

$$A\operatorname{sen}\phi=C_1\text{ y }A\cos\phi=C_2.$$

a. Si $C_2>0$, entonces $\cos\phi>0$, por lo cual $\phi\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ que coincide con ϕ_c. Esto es, $\phi=\phi_c$.

b. Si $C_2<0$, entonces $\cos\phi<0$, por lo cual $\phi\in\left]\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right[$ que no coincide con ϕ_c. En este caso ocurre que entre ϕ y ϕ_c existe una diferencia de π radianes, por lo que $\phi=\phi_c+\pi$. Esto es, al número ϕ_c dado por una calculadora, se le debe sumar π para así tener el ángulo de fase ϕ.

¿En qué instantes pasa la masa m por la posición de equilibrio?

$$\begin{aligned}x(t)&=0\Longrightarrow A\operatorname{sen}(\omega t+\phi)=0\Longrightarrow\operatorname{sen}(\omega t+\phi)=0\Longrightarrow\omega t+\phi=n\pi,\text{ con } n \text{ número entero}\\&\Longrightarrow\quad t=\frac{n\pi-\phi}{\omega}\text{ y }t\geq 0.\end{aligned}$$

Es decir, mediante esta relación se obtienen los instantes $t \geq 0$ en que $x(t) = 0$; esto es, los instantes en que el cuerpo pasa por su posición de equilibrio.

Por otra parte, si la posición y velocidad iniciales son x_0 y v_0 entonces, de acuerdo con las ecuaciones (3.10) y (3.11), la amplitud es

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}.$$

Y el ángulo de fase satisface:

$$\tan\phi = \frac{x_0\omega}{v_0}.$$

Reuniendo estos resultados, es posible escribir la expresión (3.13) como

$$x(t) = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \ \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right).$$

Hemos dicho que en un movimiento vibratorio es importante saber qué está pasando con la energía. Para ello necesitamos reescribir la ecuación diferencial (3.9) en una forma alternativa.

Consideraremos entonces que

$$\begin{aligned}
m\frac{d^2x}{dt^2} + kx &= 0 \Longrightarrow m\frac{dv}{dt} + kx = 0, \text{ usando la definición de velocidad } v = \frac{dx}{dt} \\
&\Longrightarrow m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} + kx = 0, \text{ aplicando la regla de la cadena } \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} \\
&\Longrightarrow mv\frac{dv}{dx} + kx = 0, \text{ aplicando nuevamente la definición de velocidad } v = \frac{dx}{dt} \\
&\Longrightarrow mvdv + kxdx = 0, \text{ separando las variables.}
\end{aligned}$$

Finalmente, integrando obtenemos E, la energía total del sistema:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = C. \tag{3.16}$$

En esta expresión identificamos los siguientes términos:

La energía cinética del sistema $E_c = \frac{1}{2}mv^2$; debida a que el cuerpo se mueve con velocidad v. Similarmente, la energía potencial del resorte $E_p = \frac{1}{2}kx^2$; debida a que el resorte se comprime o elonga una cantidad x.

La energía total del sistema $E = E_c + E_p$.

La ecuación (3.16) se conoce como la ley de Conservación de Energía para el caso de un sistema masa-resorte y señala que la suma de energía cinética más la energía potencial del resorte siempre es una constante. Esto significa que, cuando se pierde energía potencial, se gana energía cinética y viceversa, de tal suerte que el resultado de su suma no cambia. En consecuencia, cuando la distancia x de la masa a la posición de equilibrio disminuye, entonces aumenta la velocidad, y la máxima velocidad de la masa se obtiene justo cuando pasa por la posición de equilibrio del sistema. Por otra parte, cuando la masa se aleja, aumenta la energía potencial del resorte y disminuye su energía cinética. Cuando esta última finalmente se anula, se obtiene la mayor elongación o comprensión del resorte; a estos puntos se los conoce como puntos de retorno.

EJEMPLO. Considere una masa de 10 kg que está unida a una pared por medio de un resorte de constante $k = 10\ N/m$. Si se alarga el resorte una distancia de $0,02\ m$ y se suelta a partir del reposo, determine la posición y la velocidad de la masa en el tiempo, la frecuencia de oscilación, la amplitud, el ángulo de fase y las energías cinética y potencial en el tiempo t.

Solución. El PVI que modela la posición $x(t)$ de la masa es

$$10\frac{d^2x}{dt^2} + 10x = 0, \text{ con } x(0) = 0,02 \text{ y } x'(0) = v(0) = 0.$$

Proponiendo como solución $x(t) = e^{rt}$; derivando dos veces con respecto al tiempo, usando estos resultados en la ecuación diferencial y simplificando, obtenemos la ecuación característica

$$10r^2 + 10 = 0.$$

Las raíces de esta ecuación son $r_{1;2} = \pm i$. Como ambas son complejas, las dos funciones que resuelven la ecuación diferencial, y que son linealmente independientes, son $x_1(t) = \cos t$ y $x_2 = \operatorname{sen} t$. De suerte que la solución general de la ecuación diferencial es la combinación lineal de ellas, es decir:

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t.$$

Derivando obtenemos la velocidad de la masa:

$$x'(t) = v(t) = -C_1 \operatorname{sen} t + C_2 \cos t.$$

Para determinar los coeficientes C_1y C_2 utilizamos las condiciones iniciales. Para ello utilizamos en el tiempo $t = 0$ los valores $x_0 = 0,02$ y $v_0 = 0$. Así obtenemos:

$$\begin{aligned} 0,02 &= C_1 \cos(0) + C_2 \operatorname{sen}(0) = C_1(1) + C_2(0) = C_1. \\ 0 &= -C_1 \operatorname{sen}(0) + C_2 \cos(0) = -C_1(0) + C_2(1) = C_2. \end{aligned}$$

Finalmente, usando los coeficientes en las expresiones para la posición y la velocidad, obtenemos:

$$x(t) = 0,02 \cos t = 0,02 \operatorname{sen}\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \ m \text{ y } v(t) = -0,02 \operatorname{sen} t \ \frac{m}{s}$$

Tanto la posición como la velocidad son funciones sinusoidales de frecuencia natural $\omega = 1 \frac{rad}{s}$, periodo $T = 2\ s$ y de amplitud $A = 0,02\ m$. La frecuencia de oscilación es $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{2\pi} \frac{\text{oscilaciones}}{s\text{segundo}} = \dfrac{1}{2\pi}$ hertz (H).

El ángulo de fase es $\phi = \dfrac{\pi}{2}$ rad.

Observe que el máximo valor de $x(t)$ se obtiene cuando $\cos t = 1$; y esto se logra en los tiempos: $t = 0$; 2π ; 4π ; 6π; ...

De la misma forma, el mínimo valor de $x(t)$ se obtiene cuando $\cos t = -1$; y esto ocurre cuando: $t = \pi$; 3π ; 5π ; 7π; ...

En estos tiempos la velocidad se anula.

Igualmente, la rapidez de la masa es máxima cuando $|\operatorname{sen} t| = 1$, que ocurre cuando $t = \dfrac{\pi}{2}$; $\dfrac{3\pi}{2}$; $\dfrac{5\pi}{2}$; $\dfrac{7\pi}{2}$; ...

Esta rapidez máxima se alcanza en la posición de equilibrio $x = 0$. En la figura siguiente se muestra tanto la posición como la velocidad en el tiempo.

Por otra parte la energía cinética y potencial están dadas por

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = 0,002 \operatorname{sen}^2 t \qquad \text{y} \qquad E_p = \frac{1}{2} k x^2 = 0,002 \cos^2 t.$$

Sumando las dos energías y usando la identidad $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$; obtenemos que la energía total es constante $E_T = 0,002$ joules (J).

1. En la gráfica de la izquierda figura 3.1, la que corresponde a la posición de la masa, los puntos de la gráfica que se encuentran arriba del eje horizontal son los tiempos en los cuales $x(t) > 0$. En esos momentos, la masa se encuentra a la derecha de la posición de equilibrio. Para aquellos t que corresponden a los puntos de la gráfica por debajo de la posición horizontal, la masa se encuentra a la izquierda de la posición de equilibrio.

2. En la gráfica de la derecha figura 3.1, los puntos de la gráfica que se encuentran arriba del eje horizontal (es decir, cuando $v(t) > 0$) indican que la velocidad de la masa es hacia la derecha. También vemos que cuando $v(t) < 0$ (es decir, cuando los puntos de la gráfica se encuentran abajo del eje horizontal) la masa tiene una velocidad que se dirige hacia la izquierda.

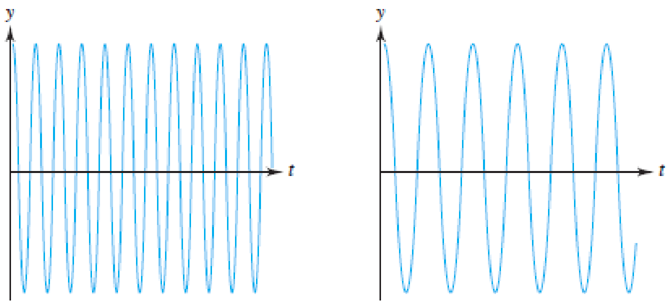

Figura 3.1 Posición del resorte.

EJEMPLO. Considere una masa de 2 kg que está unida a una pared por medio de un resorte de constante $k = 200$ N/m; que se comprime el resorte una distancia de $0,03$ m y se le suelta con una velocidad de $0,4$ m/s hacia la posición de equilibrio. Determine la posición y la velocidad de la masa en el tiempo, calcule también la frecuencia de oscilación, la amplitud y el ángulo de fase.

Solución. El PVI que describe la posición $x\,(t)$ de la masa es

$$2\frac{d^2x}{dt^2} + 200x = 0, \text{ con } x(0) = -0,03 \;\text{ y }\; x'(0) = v(0) = 0,4.$$

La ecuación característica en este caso es

$$2r^2 + 200 = 0 \Longrightarrow r^2 + 100 = 0,$$

cuyas soluciones son $r = \pm 10i$. En consecuencia, dos soluciones linealmente independientes son $x_1\,(t) = \cos 10t$ y $x_2 = \operatorname{sen} 10t$. De forma que la solución general es la combinación lineal de ellas

$$x(t) = C_1 \cos(10t) + C_2 \operatorname{sen}(10t)\,.$$

Al derivar con respecto al tiempo, obtenemos la velocidad de la masa, esta es

$$v(t) = -10C_1 \operatorname{sen}(10t) + 10C_2 \cos(10t)\,.$$

Utilizando las condiciones iniciales tenemos:

$$\begin{aligned} -0,03 &= x(0) = C_1 \cos(0) + C_2 \operatorname{sen}(0) = C_1. \\ 0,4 &= v(0) = -10C_1 \operatorname{sen}(0) + 10C_2 \cos(0) = 10C_2. \end{aligned}$$

De donde resulta:

$$C_1 = -0,03 \text{ y } C_2 = 0,04.$$

Usando estos valores en la función posición $x(t)$:

$$x(t) = -0,03\cos(10t) + 0,04 \operatorname{sen}(10t)\,.$$

Expresamos $x(t)$ en la forma $x(t) = A \operatorname{sen}(10t + \phi)$. Para esto consideramos que

$$A = \sqrt{(-0,03)^2 + (0,04)^2} = 0,05$$

Y además que

$$\begin{aligned} x(t) &= -0,03\cos(10t) + 0,04 \operatorname{sen}(10t) = A \operatorname{sen}(10t+\phi) = A\left[\operatorname{sen}(10t)\cos(\phi) + \cos(10t)\operatorname{sen}(\phi)\right] \\ &= (A\cos(\phi))\operatorname{sen}(10t) + (A\operatorname{sen}(\phi))\cos(10t) \end{aligned}$$

siempre y cuando que

$$A \operatorname{sen}(\phi) = -0,03 \quad \text{y} \quad A\cos(\phi) = 0,04.$$

Se tiene:

$$\operatorname{sen}(\phi) = \frac{-0,03}{A} = \frac{-0,03}{0,05} = -\frac{3}{5} \quad \text{y} \quad \cos(\phi) = \frac{0,04}{A} = \frac{0,04}{0,05} = \frac{4}{5},$$

de donde

$$\tan(\phi) = -\frac{3}{4} \Longrightarrow \phi_c = \arctan(-0,75) = -0,6435 \ rad.$$

Como $\cos(\phi) = 0,8 > 0$, entonces $\phi = \phi_c = -0,6435 \ rad.$
Por lo tanto, la posición de la masa con respecto a su posición de equilibrio es

$$x(t) = 0,05 \operatorname{sen}(10t - 0,6435) \ \text{metros.}$$

La amplitud es $A = 0,05 \ m.$
El periodo es $T = \dfrac{2\pi}{10}$ segundos $= \dfrac{\pi}{5}$segundos $\approx 0.6283 \ s.$
La frecuencia de oscilación es $f = \dfrac{1}{T}H = \dfrac{5}{\pi}H$
El ángulo de fase es $\phi = -0,6435 \ rad.$
El desfasamiento es $\dfrac{\phi}{\omega} = 0,06444 \ s.$
La velocidad instantánea de la masa es

$$v(t) = x'(t) = 0,5 \cos(10t - 0,6435) \ \frac{m}{s}.$$

Considerando lo anterior construimos la gráfica de la posición, ver figura 3.2.

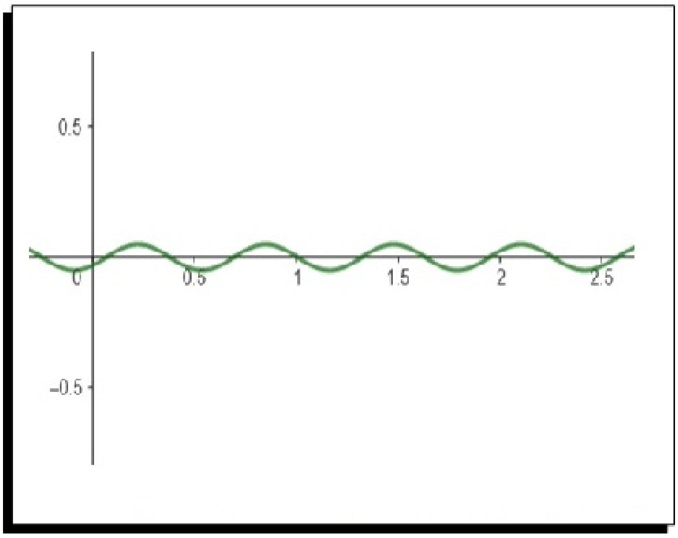

Figura 3.2 Posición del resorte $x(t) = 0,05 \operatorname{sen}(10t - 0,6435)$.

Ejemplo. Cuando se aplica a un resorte una fuerza de $28,8 \ N$, este se estira $0,2 \ m$. Un cuerpo de masa $9 \ kg$ se une al extremo libre de dicho resorte y es puesto en movimiento con posición inicial $x(0) = 0,1 \ m$ y velocidad inicial $v(0) = -0,4 \ m/s$. Encuentre la amplitud, la frecuencia natural, la frecuencia de oscilación y el periodo del movimiento resultante.

Solución. En este caso, primero se determina la constante del resorte. Para ello basta con utilizar la ley de Hooke, $F_RD = -kx$, con los datos $F = 28,8 \ N$ y con $x = 0,2 \ m$; tenemos entonces que

$$F + F_R = 0 \Longrightarrow 28,8 - k(0,2) = 0, \text{ de donde } k = \frac{28,8}{0,2} = 144 \ N/m.$$

La ecuación diferencial que modela la posición $x(t)$ de la masa es:

$$9\frac{d^2x}{dt^2} + 144x = 0,$$

cuya ecuación característica en este caso es $r^2+16=0$. Las soluciones de esta ecuación algebraica son $r=\pm 4i$. En consecuencia, dos soluciones linealmente independientes son $x_1(t)=\cos(4t)$ y $x_2=\operatorname{sen}(4t)$. De forma que la solución general es la combinación lineal de ellas

$$x(t)=C_1\cos(4t)+C_2\operatorname{sen}(4t).$$

La velocidad de la masa es, derivando la función anterior,

$$v(t)=-4C_1\operatorname{sen}(4t)+4C_2\cos(4t).$$

Utilizando las condiciones iniciales tenemos:

$$\begin{aligned} 0,1 &= x(0)=C_1\cos(0)+C_2\operatorname{sen}(0)=C_1. \\ -0,4 &= v(0)=-4C_1\operatorname{sen}(0)+4C_2\cos(0)=4C_2. \end{aligned}$$

De donde: $C_1=0,1$ y $C_2=-0,1$. Entonces:

$$x(t)=0,1\cos(4t)-0,1\operatorname{sen}(4t).$$

Considerando que

$$\begin{aligned} x(t) &= A\operatorname{sen}(4t+\phi)=A\left[\operatorname{sen}(4t)\cos(\phi)+\cos(4t)\operatorname{sen}(\phi)\right] \\ &= A\operatorname{sen}(\phi)\cos(4t)+A\cos(\phi)\operatorname{sen}(4t), \end{aligned}$$

se debe cumplir que $A\operatorname{sen}(\phi)=C_1=0,1$ y que $A\cos(\phi)=C_2=-0,1$; de donde $A=\sqrt{(0,1)^2+(-0,1)^2}=0,1414$, $\operatorname{sen}(\phi)=0,7072$ y $\cos(\phi)=-0,7072$.

Además

$$\tan\phi=\frac{\operatorname{sen}(\phi)}{\cos(\phi)}=\frac{0,7072}{-0,7072}=-1 \Longrightarrow \phi_c=\arctan(-1)=-\frac{\pi}{4}.$$

Como $\cos(\phi)=-0,7072<0$ se sigue que $\phi=\phi_c+\pi=-\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{3\pi}{4}=2,3562\ rad$.

Por lo tanto:

$$x(t)=A\operatorname{sen}(4t+\phi)=(0,1414)\operatorname{sen}\left(4t+\frac{3\pi}{4}\right) \text{ metros.}$$

La amplitud es $A=0,1414\ m$.
La frecuencia natural es $\omega=4\ rad/s$.
El período es $T=\frac{2\pi}{4}$ segundos $=\frac{\pi}{2}$segundos.
La frecuencia de oscilación es $f=\frac{1}{T}H=\frac{2}{\pi}H$.
El ángulo de fase es $\phi=2,3562\ rad$.
La gráfica de la posición $x(t)$ es similar a la figura 3.2.

3.4.1. Caso de un resorte colocado verticalmente

Los problemas anteriores trataron de oscilaciones horizontales. ¿Qué sucede cuando el resorte se coloca verticalmente?

Supongamos que se tiene un resorte colocado verticalmente con su extremo superior fijo. Al colocar un cuerpo de masa m en su extremo libre, el resorte sufre una deformación en su longitud L. Sea ΔL la longitud de la deformación del resorte al quedar la masa m en reposo, esto es, al estar m en su posición de equilibrio.

En esta posición ocurre que $-k(\Delta L)+mg=0$, de donde se puede determinar el valor de la constante del resorte, a saber: $k=\frac{mg}{\Delta L}$.

Al colocar m en una posición inicial x_0 e imprimirle una velocidad inicial v_0, m tiende a oscilar en torno a su posición de equilibrio.

En la siguiente figura 3.3 se muestra un esquema del resorte vertical.

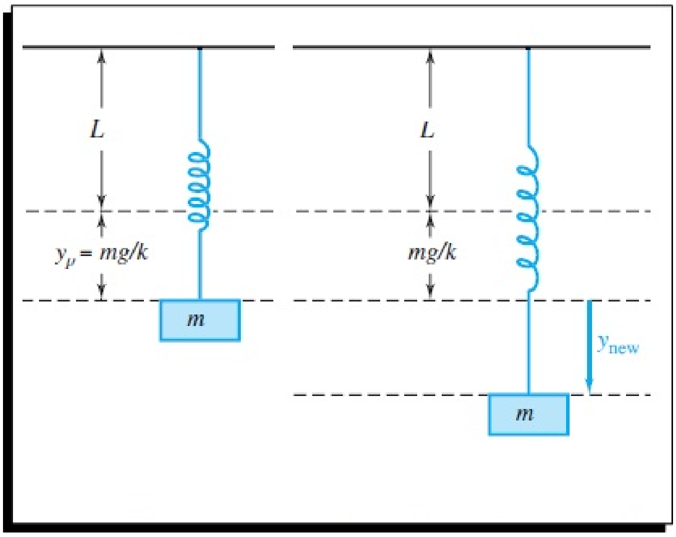

Figura 3.3 Resorte vertical.

Las dos fuerzas que en todo momento actúan sobre la masa m son la fuerza del resorte F_R y la fuerza de la gravedad mg. Cuando el resorte está alargado, ambas fuerzas apuntan en sentidos diferentes; y cuando el resorte está comprimido, apuntan en el mismo sentido.

Si tomamos como origen de coordenadas a la posición de equilibrio y la dirección positiva del eje vertical hacia abajo, entonces, de acuerdo con la segunda ley de Newton, la fuerza total es

$$\begin{aligned} mx''(t) &= mg - k\left(x(t) + \Delta L\right) \Longrightarrow mx''(t) = mg - k\ x(t) - k\ (\Delta L) \\ &\Longrightarrow mx''(t) + k\ x(t) = mg - k\ (\Delta L) \Longrightarrow mx''(t) + k\ x(t) = 0, \text{ ya que } mg = k\ (\Delta L). \end{aligned}$$

Luego, la posición $x(t)$ de m con respecto a su posición de equilibrio está dada, de nuevo, por la solución del PVI:

$$mx''(t) + k\ x(t) = 0, \text{ con } x(0) = x_0 \quad \text{y} \quad x'(0) = v_0.$$

Ejemplo. Un resorte cuelga verticalmente de un techo, el resorte se elonga un centímetro cuando se coloca una masa de $1,5\ kg$ y después el sistema queda en equilibrio. Posteriormente se elonga el resorte una cantidad adicional de $1,5\ cm$ y se suelta a partir del reposo. Determine la constante del resorte, la posición y la velocidad de la masa en el tiempo $t \geq 0$. ¿Cuál es la frecuencia de oscilaciones de la masa y la amplitud del movimiento?

Solución. Cuando el resorte se elonga $0,01\ m$, el sistema está en equilibrio; esto significa que $k\ (\Delta L) = mg$; de donde $k = \dfrac{mg}{\Delta L} = \dfrac{(1,5\ kg)\left(9,8\ m/s^2\right)}{0,01\ m} = 1470\ N/m$:

La posición $x(t)$ de la masa m, con respecto a su posición de equilibrio, está dada por la solución del PVI

$$1,5x''(t) + 1470\ x(t) = 0, \text{ con } x(0) = x_0 = 0,015 \quad \text{y} \quad x'(0) = 0.$$

La ecuación característica de la ED es, en este caso,

$$1,5r^2 + 1470 = 0 \Longrightarrow r^2 + 980 = 0,$$

cuyas raíces son, aproximadamente, $r = \pm(31,305)\,i$. Entonces la solución general de la ED y su derivada están dadas por

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 \cos(31,305t) + C_2 \operatorname{sen}(31,305t). \\ v(t) &= -31,305C_1 \operatorname{sen}(31,305t) + 31,305C_2 \cos(31,305t). \end{aligned}$$

Calculemos ahora los coeficientes C_1 y C_2 utilizando para ello las condiciones iniciales $x_0 = 0,015$ y $v_0 = 0$.

Sustituyendo en las ecuaciones anteriores se tiene:

$$\begin{aligned} 0,015 &= x(0) = C_1\cos(0) + C_2\operatorname{sen}(0) = C_1. \\ 0 &= v_0 = -31,305C_1\operatorname{sen}(0) + 31,305C_2\cos(0) = 31,305C_2. \end{aligned}$$

Finalmente, usando los valores de los coeficientes $C_1 = 0,015$ y $C_2 = 0$ en las expresiones para la posición y la velocidad obtenemos:

$$x(t) = 0,015\cos(31,305t)\ \ m \text{ y } v(t) = -0,4695\operatorname{sen}(31,305t)\ \ m/s.$$

Esta función $x(t)$ tiene frecuencia natural $\omega = 31,305\ rad/s$ y periodo $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{31,305} = 0,2007\ s$. Es decir, la masa realizará aproximadamente $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{31,305}{2\pi} = 24,9823 \approx 5$ oscilaciones en un segundo y la amplitud es $A = 0,015\ m$.

Ejemplo. Un sistema masa-resorte está colocado en forma vertical. La masa del cuerpo es de 9 kg y la constante del resorte es 25 N/m. Al inicio la masa se libera desde un punto que está a 4 cm arriba de la posición de equilibrio imprimiéndole una velocidad hacia abajo de 2 m/s.

1. ¿Cuántos ciclos completos habrá completado la masa al final de 20 segundos?

2. ¿En qué momento la masa pasa por la posición de equilibrio con dirección hacia abajo por segunda vez? ¿Cuál es su velocidad instantánea en ese momento?

3. ¿En qué instante la masa alcanza sus desplazamientos extremos ya sea arriba o abajo de la posición de equilibrio?

4. ¿Cuál es la posición, la velocidad y la aceleración de la masa a los 10 segundos?

Solución. Los datos en el problema son: $m = 9\ kg$; $k = 25\ N/m$; $x_0 = -4\ cm$ y $v_0 = 2\ m/s$.

Si $x(t)$ es la posición instantánea (en metros) de la masa m, con respecto a su posición de equilibrio, al cabo de t segundos, entonces $x(t)$ está dada por la solución del PVI

$$\begin{aligned} mx''(t) + k\ x(t) &= 0; \text{ con } x(0) = x_0, \quad \text{y} \quad x'(0) = v_0. \\ 9x''(t) + 25\ x(t) &= 0; \text{ con } x(0) = -0,04, \quad \text{y} \quad x'(0) = 2. \end{aligned}$$

Para resolver el problema proponemos $x(t) = e^{rt}$ como solución de la ED, así se obtiene:

$$9x''(t) + 25x(t) = 0 \Longrightarrow 9r^2 + 25r = 0 \Longrightarrow r^2 = -\frac{25}{9} \Longrightarrow r = \pm\frac{5}{3}i.$$

La solución general de la ecuación diferencial es

$$x(t) = C_1\cos\left(\frac{5}{3}t\right) + C_2\operatorname{sen}\left(\frac{5}{3}t\right),$$

y la velocidad instantánea es

$$v(t) = x'(t) = -\frac{5}{3}C_1\operatorname{sen}\left(\frac{5}{3}t\right) + \frac{5}{3}C_2\cos\left(\frac{5}{3}t\right)$$

Aplicando las condiciones iniciales:

$$\left\{\begin{array}{c} -0,04 = x(0) = C_1\cos(0) + C_2\operatorname{sen}(0) = C_1, \\ 2 = v(0) = x'(0) = -\frac{5}{3}C_1\operatorname{sen}(0) + \frac{5}{3}C_2\cos(0) = \frac{5}{3}C_2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} C_1 = -0,04 \\ C_2 = \frac{6}{5} = 1,2 \end{array}\right.$$

De manera que la posición instantánea es

$$x(t) = -0,04\cos\left(\frac{5}{3}t\right) + 1,2\operatorname{sen}\left(\frac{5}{3}t\right)\ \ m,$$

y la velocidad instantánea es

$$v(t) = x'(t) = -0,0667\operatorname{sen}\left(\frac{5}{3}t\right) + 2C_2\cos\left(\frac{5}{3}t\right)\ \ m/s$$

Para obtener a $x(t) = A\,\text{sen}(\omega t + \phi)$, calculamos la amplitud:

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{(-0,04)^2 + (1,2)^2} = 1,2007$$

El ángulo de fase ϕ está dado por

$$\begin{aligned}
A\,\text{sen}\,\phi &= -0,04 \quad \text{y} \quad A\cos\phi = 1,2. \\
\text{sen}\,\phi &= \frac{-0,04}{A} = -0,0333 \quad \text{y} \quad \cos\phi = \frac{1,2}{A} = 0,9994 \\
\tan\phi &= \frac{\text{sen}\,\phi}{\cos\phi} = \frac{-0,0333}{0,9994} = -0,0333 \Longrightarrow \phi_c = \arctan(-0,0333) \Longrightarrow \phi_c = -0,0333.
\end{aligned}$$

No hay cambio en el valor de ϕ debido a que $\cos\phi > 0$.
Por lo tanto, la posición instantánea es

$$x(t) = A\,\text{sen}(\omega t + \phi) = 1,2007\,\text{sen}\left(\frac{5}{3}t - 0,0333\right) \text{ metros.}$$

Y su gráfica:
Usando lo anterior podemos obtener los siguientes resultados:
1. El periodo es $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ segundos $= \dfrac{6\pi}{5}\ s = 3,7699\ s$.
La frecuencia de oscilación es $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{3,7699} \approx 0,2653\ osc/s$.
El total de oscilaciones en 20 s es $20 \cdot f = 20\,(0,2653) \approx 5,3$ oscilaciones.
2. La masa m pasa por la posición de equilibrio cuando:

$$\begin{aligned}
x(t) &= 0 \Longrightarrow 1,2007\,\text{sen}\left(\frac{5}{3}t - 0,0333\right) = 0 \Longrightarrow \text{sen}\left(\frac{5}{3}t - 0,0333\right) = 0 \\
&\Longrightarrow \frac{5}{3}t - 0,0333 = n\pi, \text{ con } n \text{ número entero.} \\
&\Longrightarrow t = \frac{3\,(n\pi + 0,0333)}{5}, \text{ con } n \text{ número entero y } t \geq 0. \\
&\Longrightarrow t = \frac{3\,(n\pi + 0,0333)}{5}, \text{ con } n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ ... \text{ y } t \geq 0.
\end{aligned}$$

Considerando la posición inicial x0 de m se tiene que
La masa m pasa por la posición de equilibrio con dirección hacia abajo cuando:

$$\begin{aligned}
n &= 0 \Longrightarrow t = \frac{3\,(0\cdot\pi + 0,0333)}{5} \Longrightarrow t = \frac{3\,(0,0333)}{5} = 0,01999\ s \approx 0,02\ s. \\
n &= 2 \Longrightarrow t = \frac{3\,(2\cdot\pi + 0,0333)}{5} \Longrightarrow t = \frac{3\,(2\pi + 0,0333)}{5} = 3,7899\ s \approx 3,79\ s. \\
n &= 4 \Longrightarrow t = \frac{3\,(4\cdot\pi + 0,0333)}{5} \Longrightarrow t = \frac{3\,(4\pi + 0,0333)}{5} = 7,5598\ s \approx 7,56\ s.
\end{aligned}$$

y así sucesivamente.
La masa m pasa por la posición de equilibrio con dirección hacia arriba cuando:

$$\begin{aligned}
n &= 1 \Longrightarrow t = \frac{3\,(1\cdot\pi + 0,0333)}{5} \Longrightarrow t = \frac{3\,(\pi + 0,0333)}{5} = 1,9049\ s \approx 1,90\ s. \\
n &= 3 \Longrightarrow t = \frac{3\,(3\cdot\pi + 0,0333)}{5} \Longrightarrow t = \frac{3\,(3\pi + 0,0333)}{5} = 5,6749\ s \approx 5,67\ s. \\
n &= 5 \Longrightarrow t = \frac{3\,(5\cdot\pi + 0,0333)}{5} \Longrightarrow t = \frac{3\,(5\pi + 0,0333)}{5} = 9,4448\ s \approx 9,44\ s.
\end{aligned}$$

y así sucesivamente.
Entonces, la masa m pasa por la posición de equilibrio con dirección hacia abajo por segunda vez en el instante $t = 3,79\ s$ y su velocidad en ese momento es $v\,(3,79) = 0,5968\ m/s$.

3. Por otra parte, la masa m alcanza sus desplazamientos extremos cuando:

$$\begin{aligned}
|x(t)| &= A \Longleftrightarrow x(t) = \pm A \Longleftrightarrow A \operatorname{sen}(\omega t + \phi) = \pm A \Longleftrightarrow \operatorname{sen}(\omega t + \phi) = \pm 1 \\
&\Longleftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{5}{3}t - 0,0333\right) = \pm 1 \\
&\Longleftrightarrow \frac{5}{3}t - 0,0333 = \frac{\pi}{2} + n\pi, \text{ con } n \text{ entero} \\
&\Longleftrightarrow \frac{5}{3}t = (2n+1)\frac{\pi}{2} + 0,0333, \text{ con } n \text{ entero y } t \geq 0. \\
&\Longrightarrow t = \frac{3}{5}\left[(2n+1)\frac{\pi}{2} + 0,0333\right], \text{ con } n = 0;\ 1;\ 2;\ ...
\end{aligned}$$

De aquí que la masa m alcanza sus desplazamientos extremos cuando:

$$\begin{aligned}
n &= 0 \Longrightarrow t = \frac{3}{5}\left[(2\times 0+1)\frac{\pi}{2} + 0,0333\right] \approx 0,96\ s. \\
n &= 1 \Longrightarrow t = \frac{3}{5}\left[(2\times 1+1)\frac{\pi}{2} + 0,0333\right] \approx 2,85\ s. \\
n &= 2 \Longrightarrow t = \frac{3}{5}\left[(2\times 2+1)\frac{\pi}{2} + 0,0333\right] \approx 4,73\ s. \\
n &= 3 \Longrightarrow t = \frac{3}{5}\left[(2\times 3+1)\frac{\pi}{2} + 0,0333\right] \approx 6,62\ s.
\end{aligned}$$

y así sucesivamente.

4. Finalmente, la posición, la velocidad y la aceleración a los 10 s se obtienen evaluando $x(t)$, $v(t) = x'(t)$ y $a(t) = x''(t)$ en $t = 10$. Obtenemos:

$$\begin{aligned}
x(t) &= (1,2007)\operatorname{sen}\left(\frac{5}{3}t - 0,0333\right), \\
x'(t) &= (1,2007)\frac{5}{3}\cos\left(\frac{5}{3}t - 0,0333\right) = (2,002)\cos\left(\frac{5}{3}t - 0,0333\right), \\
x''(t) &= (1,2007)\left(\frac{5}{3}\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{5}{3}t - 0,0333\right) = (-3,3367)\operatorname{sen}\left(\frac{5}{3}t - 0,0333\right)
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
x(10) &= (1,2007)\operatorname{sen}\left(\frac{50}{3} - 0,0333\right) = -0,9594\ m, \\
x'(10) &= (1,2007)\frac{5}{3}\cos\left(\frac{50}{3} - 0,0333\right) = -1,2043\ m/s, \\
x''(10) &= (-3,3367)\operatorname{sen}\left(\frac{50}{3} - 0,0333\right) m/s^2 = 2,6656\ m/s^2.
\end{aligned}$$

Esto es,

$$x(10) \approx -0,96\ m; \quad v(10) \approx -1,2\ m/s \ \text{ y } \ a(10) \approx 2,67\ m/s^2.$$

lo que significa que a los 10 s la masa m está a $0,96$ m arriba de la posición de equilibrio, dirigiéndose hacia arriba con una rapidez de $1,2$ m/s y con una aceleración dirigida hacia abajo de $2,67$ m/s^2.

Los siguientes ejemplos tratan con sistemas que no son exactamente masa-resorte, pero su análisis es similar y las respuestas que obtendremos también.

Ejemplo. Una boya cilíndrica de radio r, altura h y densidad ρ_{boya} se encuentra flotando en la superficie de un lago, como se muestra en la figura. Inicialmente la boya se encuentra en equilibrio; de repente se sumerge una distancia x_0 y se suelta con velocidad igual a cero. Determine la ecuación diferencial que modela el sistema y su solución. Si la boya tiene dimensiones $h = 1$ m, $r = 0,5$ m, y su densidad es $\rho = 500 kg/m^3$, determine la posición y la velocidad de la boya en todo tiempo, si se sumerge una profundidad de $x_0 = 0,01$ m, a partir de la posición en equilibrio. Recuerde que $g = 9,8$ m/s^2 y que agua $\rho_{agua} = 1000$ kg/m^3.

Solución De acuerdo con el principio de flotación de Arquímedes, la boya se encuentra en equilibrio cuando la fuerza de flotación es igual al peso de la boya. Por una parte, el volumen que ocupa la boya es $V = \pi r^2 h$ y su peso es igual a

$$w_{boya} = m_{boya} g = \rho_{boya} V g = \rho_{boya} \pi r^2 h g.$$

Por otra parte, supongamos que la boya está en equilibrio cuando se encuentra sumergida una altura H.

Como la fuerza de flotación es igual al peso del líquido desplazado, tenemos que

$$F_{flot} = m_{agua} g = \rho_{agua} V_{despl}\ g = \rho_{agua} \pi r^2 H g.$$

Igualando las dos últimas expresiones, podemos obtener la altura H que se sumerge la boya cuando se encuentra en equilibrio.

$$w_{boya} = F_{flot} \Longrightarrow \rho_{agua} \pi r^2 H g = \rho_{boya} \pi r^2 h g \Longrightarrow \rho_{agua} H = \rho_{boya} h \Longrightarrow H = \frac{\rho_{boya}\ h}{\rho_{agua}}.$$

Ahora, sobre esta distancia H, sumergimos la boya una altura adicional x_0 y la soltamos con velocidad $v_0 = 0$. Entonces la fuerza de flotación ya no es igual al peso, el sistema deja de estar en equilibrio y empieza a oscilar.

En cualquier momento la posición de equilibrio se encuentra una distancia x con respecto al agua. Suponemos que x es negativa cuando la posición de equilibrio de la boya está sumergida una distancia x; es positiva cuando dicha posición de equilibrio se encuentra a una distancia x arriba del agua.

La fuerza que siente la boya en cualquier momento es ahora:

$$F = F_{flot} - m_{boya}\ g = \rho_{agua} \pi r^2 \left(H - x\right) g - \rho_{boya} \pi r^2 h g = -\rho_{agua} \pi r^2 x g.$$

De acuerdo con la segunda ley de Newton, $F = ma$; el movimiento de la boya se describe, a partir de la posición en equilibrio, por medio de

$$m_{boya} \frac{d^2 x}{dt^2} = -\rho_{agua} \pi r^2 x g \Longrightarrow \rho_{boya} \pi r^2 h \frac{d^2 x}{dt^2} = -\rho_{agua} \pi r^2 x g \Longrightarrow \rho_{boya} h \frac{d^2 x}{dt^2} = -\rho_{agua} x g.$$

Que se puede reescribir como

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \left(\frac{\rho_{agua} g}{\rho_{boya} h}\right) x = 0.$$

Esta ecuación diferencial es del tipo masa-oscilador que hemos estado estudiando. La frecuencia natural es

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho_{agua} g}{\rho_{boya} h}}.$$

La solución general es, entonces:

$$x\left(t\right) = C_1 \cos\left(\omega t\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\omega t\right).$$

Y la velocidad con la que mueve la boya es

$$v(t) = x'\left(t\right) = -C_1 \omega \operatorname{sen}\left(\omega t\right) + C_2 \omega \cos\left(\omega t\right).$$

Finalmente, si suponemos que $x\left(0\right) = -x_0$ y que $v\left(0\right) = 0$, obtenemos $C_1 = -x_0$ así como $C_2 = 0$. Utilizando estos dos resultados, se obtiene la forma de la oscilación de la boya.

$$x\left(t\right) = -x_0 \cos\left(\omega t\right).$$

Para el caso en que $h = 1\ m$, $r = 0,5\ m$, $\rho = 500 kg/m^3$, $x_0 = 0,01\ m$ y considerando que agua $\rho_{agua} = 1000\ kg/m^3$, se tiene que

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho_{agua} g}{\rho_{boya} h}} \Longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{\left(1000\right)\left(9,8\right)}{\left(500\right)\left(1\right)}} = 4,4272.$$

Por lo que la posición de la boya dadas las condiciones iniciales es

$$x\,(t) = -0,01 \cos(4,4272\ t) \quad \text{metros},$$

y la velocidad es

$$v(t) = x'\,(t) = (-0,01)\,(-4,4272) \operatorname{sen}(4,4272\ t) = 0,0443 \operatorname{sen}(4,4272\ t)\ \ m/s.$$

Ejemplo. Un péndulo de masa $m = 2\ kg$ y de longitud L igual a $2,45m$ está suspendido sobre un marco horizontal, como se ilustra en la figura. El péndulo se levanta un ángulo de $10°$ y se suelta con una velocidad angular de $-0,4\ rad/s$.

1. ¿Cuántos ciclos (oscilaciones) completos habrá completado el péndulo después de 10 s?
2. ¿En qué momento la masa pasa por la posición de equilibrio con velocidad angular positiva por tercera vez?
3. ¿En qué instantes la masa alcanza sus desplazamientos extremos?
4. ¿Cuál es la posición de la masa del péndulo en cualquier tiempo?
5. ¿Cuál es la posición de la masa a los 10 s?

Solución. Primero se determina la ecuación diferencial del movimiento; para ello se considera el diagrama de fuerzas que se muestra en la figura. Las dos únicas fuerzas que actúan sobre la masa son la tensión T de la cuerda que se considera rígida y el peso mg del cuerpo. En la dirección del segmento que une el punto de soporte del péndulo con la masa (dirección radial), la fuerza neta es cero, ya que en esa dirección la masa está en equilibrio.

Por otra parte, en la dirección del movimiento del péndulo (dirección tangencial) solo actúa la componente tangencial del peso, que es $-mg \operatorname{sen}\theta$.

De acuerdo con la segunda ley de Newton, tenemos en la dirección tangencial:

$$m\ a_{\tan} = -mg \operatorname{sen}\theta,$$

donde la aceleración $a_{\tan}$ se relaciona con el ángulo θ de acuerdo con

$$a_{\tan} = L\alpha = l\frac{d^2\theta}{dt^2},$$

donde α es la aceleración angular. Reuniendo estos dos últimos resultados:

$$mL\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \operatorname{sen}\theta.$$

Para ángulos pequeños, donde es posible suponer que $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$, obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0.$$

Observe que no importa el valor de la masa m, ya que la ecuación diferencial no depende de ella. Al usar los valores de la longitud de la cuerda $L = 2,45\ m$ y de la constante $g = 9,8\ m/s^2$, obtenemos:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 4\theta = 0.$$

La solución de esta ecuación diferencial es

$$\theta\,(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \operatorname{sen}(2t)\,.$$

La velocidad angular $\theta'\,(t)$ se obtiene derivando esta expresión. Tenemos entonces que

$$\theta'\,(t) = -2C_1 \operatorname{sen}(2t) + 2C_2 \cos(2t)\,.$$

Las condiciones iniciales del problema son

$$\theta\,(0) = 10° = 10\left(\frac{\pi}{180}\right) rad = \frac{\pi}{18} rad \approx 0,1745\ rad \quad \text{y} \quad \theta'\,(t) = -0,4\ rad/s.$$

Tomando esto en cuenta, y usando las dos expresiones anteriores, tenemos:

$$C_1 = \frac{\pi}{18} \approx 0,1745 \qquad \text{y} \qquad C_2 = -0,2 = -\frac{1}{5}.$$

De manera que

$$\theta(t) = \frac{\pi}{18}\cos(2t) - \frac{1}{5}\operatorname{sen}(2t) = 0,1745\cos(2t) - 0,2\operatorname{sen}(2t).$$

Para reescribir $\theta(t)$ en la forma $\theta(t) = A\operatorname{sen}(\omega t + \phi)$, se considera que

$$\theta(t) = A\operatorname{sen}(\omega t)\cos(\phi) + A\cos(\omega t)\operatorname{sen}(\phi)$$

La amplitud es $A = \sqrt{(0,1745)^2 + (-0,2)^2} = 0,2654$. El ángulo de fase ϕ está dado por

$$A\operatorname{sen}(\phi) = 0,1745 \qquad \text{y} \qquad A\cos(\phi) = -0,2.$$

Entonces,

$$\tan(\phi) = \frac{0,1745}{-0,2} = -0,8725 \Longrightarrow \phi_c = \arctan(-0,8725) = -0,7174$$

y debido a que $\cos\phi < 0$,

$$\phi = \phi_c + \pi = -0,7174 + \pi = 2,4242.$$

De forma que el ángulo θ en el tiempo t es

$$\theta(t) = 0,2654\operatorname{sen}(2t + 2,4242) \;\; rad,$$

y la velocidad angular es

$$\theta'(t) = 0,5308\cos(2t + 2,4242) \;\; rad/s.$$

Estamos ahora en condiciones de responder las preguntas de este ejemplo:

1. Como el periodo es de $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi \ s$, entonces en 10 s se realizan $\frac{10}{\pi} \approx 3$ oscilaciones (o ciclos) completas.

2. La masa pasa por la posición de equilibrio cuando $\theta(t) = 0$; esto ocurre cuando

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(2t + 2,4242) &= 0 \Longrightarrow 2t + 2,4242 = n\pi, \text{ con } n \text{ entero y } t \geq 0. \\ &\Longrightarrow t = \frac{n\pi - 2,4242}{2}, \text{ con } n = 1,\ 2,\ 3,\ ... \end{aligned}$$

Observe que, para valores impares de n, la velocidad angular está dada por $\theta'(t) = -0,5308 \ rad/s$. Así que la tercera vez que se cruza la posición de equilibrio con velocidad angular negativa ocurre cuando $n = 5$, es decir, cuando $t \approx 6,6419 \ s$.

La siguiente es la gráfica de $\theta(t)$.

3. Por otra parte, el péndulo obtiene sus valores extremos o de retorno cuando la velocidad angular es cero. Es decir, cuando

$$\begin{aligned} 0,5308\cos(2t + 2,4242) &= 0 \Longrightarrow 2t + 2,4242 = \frac{\pi}{2} + n\pi, \text{ con } n \text{ entero y } t \geq 0 \\ &\Longrightarrow 2t = (2n+1)\frac{\pi}{2} - 2,4242 \\ &\Longrightarrow t = (2n+1)\frac{\pi}{4} - 1,2121, \text{ con } n = 1,\ 2,\ 3,\ ... \end{aligned}$$

O sea, que

$$t = 1,1441 \ s, \quad 2,7149 \ s, \quad 4,2857 \ s \text{y así sucesivamente.}$$

La siguiente es la gráfica de $\theta'(t)$:

4. Las coordenadas cartesianas de la masa del péndulo con respecto a un sistema de coordenadas con origen en el punto de soporte es:

$$\begin{aligned} x(t) &= L\operatorname{sen}(\theta(t)) = 2,45\operatorname{sen}[0,2654\operatorname{sen}(2t + 2,4242)] \;\; m. \\ y(t) &= -L\cos(\theta(t)) = -2,45\cos[0,2654\operatorname{sen}(2t + 2,4242)] \;\; m/s. \end{aligned}$$

5. Finalmente, la posición de la masa a los 10 s se obtiene evaluando las funciones anteriores; así tenemos que

$$\begin{aligned}
\theta(10) &= 0,2654 \operatorname{sen}(22,4242) \approx -0,1114 \ rad. \\
x(10) &= L\cos(\theta(10)) = 2,45\cos(-0,1114) \approx 2,4348 \ m. \\
y(t) &= -L\operatorname{sen}[\theta(10)] = -2,45\operatorname{sen}(-0,1114) \approx 0,2724 \ m.
\end{aligned}$$

3.4.2. Ejercicios Movimiento armónico simple

1. Un resorte de constante k está conectado en uno de sus extremos a un cuerpo de masa m y en el otro a una pared. El sistema masa-resorte descansa sobre una mesa horizontal sin fricción. Determine la posición en la forma $x(t) = A\operatorname{sen}(\omega t + \phi)$ y la velocidad del cuerpo con las condiciones iniciales $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$.

   a) $m = 0,5\ kg$, $k = 8\ N/m$, $x(0) = 0\ m$, $v(0) = 2\ m/s$.

   b) $m = 2,5\ kg$, $k = 10\ N/m$, $x(0) = 0,1m$, $v(0) = -1,2\ m/s$.

   (Respuesta: a) $x(t) = \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} 4t$ metros; $v(t) = 2\cos 4t\ m/s$ b) $x(t) = 0,6083\operatorname{sen}(2t + 2,9764)$ metros; $v(t) = 1,2566\cos(2t + 2,9764)\ m/s$)

2. Un cuerpo de masa m está unido al extremo de un resorte estirado una distancia d por una fuerza F. El cuerpo es puesto en movimiento en una posición inicial $x(0) = x_0$ y con velocidad inicial $v(0) = v_0$. Encuentre la amplitud, la frecuencia angular, la frecuencia y el periodo del movimiento resultante. Determine la posición en la forma $x(t) = A\operatorname{sen}(\omega t + \phi)$ y la velocidad.

   a) $m = 4\ kg$, $d = 0,2m$, $F = 15\ N$, $x(0) = 0,6m$, $v(0) = 1,5\ m/s$.

   b) $m = 4\ kg$, $d = 0,25m$, $F = 100\ N$, $x(0) = 0,1m$, $v(0) = -1\ m/s$.

   (Respuesta: a). $A = \dfrac{2\sqrt{3}}{5}\ m$; $\omega = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}\ rad/s$; $T = \dfrac{4\pi}{5\sqrt{3}}\ s$; $f = \dfrac{5\sqrt{3}}{4\pi}\ osc/s$; $x(t) = \dfrac{2\sqrt{3}}{5}\operatorname{sen}\left(\dfrac{5\sqrt{3}}{2}t + \dfrac{\pi}{3}\right)\ m$; $v(t) = 3\cos\left(\dfrac{5\sqrt{3}}{2}t + \dfrac{\pi}{3}\right)\ m/s$;

   b) $A = \dfrac{1}{5\sqrt{2}}\ m$; $\omega = 10\ rad/s$; $T = \dfrac{\pi}{5}\ s$; $f = \dfrac{5}{\pi}\ H$; $x(t) = \dfrac{1}{5\sqrt{2}}\operatorname{sen}\left(10t + \dfrac{3\pi}{4}\right)\ m$; $v(t) = \sqrt{2}\cos\left(10t + \dfrac{3\pi}{4}\right)\ m/s$)

3. Una masa m igual a 32 kg se suspende verticalmente de un resorte y, por esta razón, éste se alarga 39,2 cm. Determine la amplitud y el periodo de movimiento, si la masa se libera desde un punto situado 20 cm arriba de la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de 1 m/s. ¿Cuántos ciclos habrá completado la masa al final de 40 s? Suponga $g = 9,8\ m/s^2$. (Respuesta: $A = \dfrac{\sqrt{2}}{5}\ m$; $T = \dfrac{2\pi}{5}\ s$; $n = 31$ ciclos completos)

4. Una masa de 9 kg alarga un resorte 9,8 cm; el sistema masa-resorte se encuentra suspendido verticalmente. La masa se libera desde el reposo de un punto situado 5 cm debajo de la posición de equilibrio.

   a) Encuentre la posición de la masa en los tiempos $t = 5$ y 10 s.

   b) ¿Cuál es la velocidad de la masa cuando t es igual a 12 s? ¿En qué dirección se dirige en ese instante?

   c) ¿En qué tiempos la masa pasa por la posición de equilibrio?

   d) ¿En qué tiempos tiene el resorte su máxima compresión y su máxima elongación?
   (Respuesta:a) $x(5) = 4,82\ cm$; $x(10) = 4,31\ cm$; b) $v(12) = -0,29\ m/s$; la masa se dirige hacia arriba; c) $t = \dfrac{(2n+1)\pi}{20}$, con $n = 0, 1, 2, 3, ...$; d) Máxima compresión en $t = \dfrac{(2n+1)\pi}{10}$, con $n = 0, 1, 2, 3, ...$; Máxima elongación en $t = \dfrac{n\pi}{5}$, con $n = 0, 1, 2, 3, ...$)

5. Una fuerza de 4 N alarga un resorte 4 cm. En el extremo del resorte colocado verticalmente se pone una masa de 25 kg y se libera el sistema desde su posición de equilibrio con una velocidad hacia arriba de 10 m/s. Encuentre la ecuación de movimiento. (Respuesta: $x(t) = -5\,\text{sen}(2t)\ m$.)

6. Un resorte con constante de 20 N/m se suspende verticalmente de un soporte y se coloca una masa de 20 kg. El sistema se libera desde la posición de equilibrio con una velocidad descendente de 10 m/s.

   a) Determine la amplitud, la frecuencia angular y el periodo del movimiento.

   b) Calcule la posición y la velocidad en todo tiempo t.

   c) ¿Cuál es la máxima velocidad de la masa? ¿Qué pasa con la aceleración en ese instante? (Respuesta: a) $A = 10$; $\omega = 1\ rad/s$; $T = 2\pi\ s$; b) $x(t) = 10\,\text{sen}\,t$; $v(t) = 10\cos t$; c) $v_{\text{máx}} = 10\ m/s$; $t = 2n\pi$, con $n = 0, 1, 2, 3, ...$, $a(t) = 0\ m/s^2$, $t = 2n\pi$, con $n = 0, 1, 2, 3, ...$)

7. Una masa de $0,4\ kg$ se une a un resorte de constante 3,6 N/m. Determine la ecuación de movimiento, si la masa se libera inicialmente desde un punto 15 cm debajo de la posición de equilibrio con una velocidad de $0,45\ \frac{m}{s}$ hacia abajo. (Respuesta: $x(t) = 0,15\sqrt{2}\,\text{sen}\left(3t + \dfrac{\pi}{4}\right)\ m$; $v(t) = 0,45\sqrt{2}\cos\left(3t + \dfrac{\pi}{4}\right)\ m/s$)

8. Una masa de 40 kg alarga un resorte $9,8\ cm$. Al inicio, la masa se libera desde un punto que está 40 cm arriba de la posición de equilibrio con una velocidad descendente de 4 m/s.

   a) ¿Cuáles son la amplitud, la frecuencia angular y el periodo del movimiento?

   b) ¿Cuántos ciclos (completos) habrá completado la masa al final de 3 s?

   c) ¿En qué momento la masa pasa por la posición de equilibrio con dirección hacia abajo por sexta vez?

   d) ¿Cuál es la velocidad y la aceleración en ese instante?

   e) ¿En qué instantes la masa alcanza sus desplazamientos extremos en cualquier lado de la posición de equilibrio?

   f) ¿Cuál es la posición, velocidad y aceleración en los tiempos $t = 5$; 10; 15; 20 y 25 s?

   g) ¿En qué instantes la masa está a $0,40\ m$ abajo de la posición de equilibrio?

   (Respuesta: a) $A = 0,4\ \sqrt{2}\ m$; $\omega = 10\ \frac{rad}{s}$; $T = \dfrac{\pi}{5}\ s$; b) $n = \dfrac{3}{T}$; 4 ciclos completos; c) $t = \dfrac{41}{40}\pi\ s$; d) $v = 4\sqrt{2}\ \frac{m}{s}$; $a = 0\ \frac{m}{s^2}$; e) $t = \dfrac{1}{10}\left(\dfrac{3\pi}{4} + n\pi\right)\ s$, con $n = 0, 1, 2, ...$;

   f)

t	$x(t)$	$v(t)$	$a(t)$
5	$-0,4909$	$2,8104$	$49,0936$
10	$-0,5475$	$1,4238$	$54,7474$
15	$-0,5657$	$-0,0625$	$56,5651$
20	$-0,5442$	$-1,5444$	$54,4194$
25	$-0,4846$	$-2,9182$	$48,4607$

   , g) $t = \dfrac{\pi}{10}\left(2n + \dfrac{1}{2}\right)\ s$, con $n = 0, 1, 2, ...$; $t = \dfrac{\pi}{10}(2n+1)\ s$, con $n = 0, 1, 2, ...$;)

9. Determine ángulo y la velocidad angular en el tiempo de un péndulo con las condiciones siguientes. Suponga que $g = 9,8\ m/s^2$.

   a) $L = 0,098\ m$, $m = 0,5\ kg$, $\theta(0) = 0\ rad$, $\theta'(0) = 0,02\ rad/s$.

   b) $L = 0,49\ m$, $m = 5\ kg$, $\theta(0) = -0,2\ rad$, $\theta'(0) = 0\ rad/s$.

   c) $L = 9,8m$, $m = 2,5kg$, $\theta(0) = 0,1\ rad$, $\theta'(0) = -0,1 rad/s$.

   (Respuesta: a) $\theta(t) = 0,002\,\text{sen}(10t)\ rad$; $\theta'(t) = 0,02\cos(10t)\ rad/s$; b) $\theta(t) = -\dfrac{1}{5}\cos\left(2\sqrt{5}t\right)\ rad$; $\theta'(t) = \dfrac{2}{\sqrt{5}}\,\text{sen}(10t)\ rad/s$ c) $\theta(t) = \dfrac{1}{5\sqrt{2}}\,\text{sen}\left(t + \dfrac{3\pi}{4}\right)\ rad$; $\theta'(t) = \dfrac{1}{5\sqrt{2}}\cos\left(t + \dfrac{3\pi}{4}\right)\ rad/s$)

10. Un péndulo de 20 cm de longitud L y de $0,5$ kg de masa m oscila. Si en el tiempo $t=0$, el ángulo y la velocidad angular son $\theta(0)=\frac{\pi}{12}\text{rad}$ y $\theta'(0)=\frac{7\pi}{12}\text{rad/s}$, respectivamente, determinar el periodo de movimiento, la amplitud, el ángulo de fase, $\theta(t)$, $\theta'(t)$ y el primer tiempo para el cual $\theta=0$ rad.

(Respuesta: $A=\frac{\pi}{6\sqrt{2}}\ rad$; $\phi=\frac{\pi}{4}$; $T=\frac{2\pi}{7}\ s$; $\theta(t)=\frac{\pi}{6\sqrt{2}}\operatorname{sen}\left(7t+\frac{\pi}{4}\right)\ rad$; $\theta'(t)=\frac{7\pi}{6\sqrt{2}}\cos\left(7t+\frac{\pi}{4}\right)\ rad/s$)

3.4.3. Vibraciones amortiguadas libres

Continuando el desarrollo del estudio de las vibraciones, suponemos que se agrega ahora un dispositivo mecánico (amortiguador) al sistema masa-resorte que tiene el efecto de reducir la velocidad de la masa cuando el sistema se encuentra vibrando (véase la figura a continuación).

El amortiguador ejerce una fuerza dependiente de la velocidad de la masa; entre mayor sea la velocidad, mayor es la fuerza que ejerce. Por simplicidad supondremos que esta fuerza en magnitud es proporcional a la rapidez, es decir: $\left|\overrightarrow{F}\right|=c\ |v(t)|$, donde $c>0$ es la constante de proporcionalidad.

Entonces, la fuerza que ejerce el amortiguador es

$$F_A=-cv(t)=-c\frac{dx}{dt},$$

donde el signo negativo indica que la fuerza de amortiguación va en sentido contrario a la velocidad del cuerpo. La fuerza total ejercida sobre la masa es, entonces:

$$F=F_R+F_A=-kx-c\frac{dx}{dt},$$

donde F_R es la fuerza del resorte, lo que se puede escribir como:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=0 \text{ o bien como } mx''(t)+cx'(t)+kx=0. \tag{3.17}$$

La ecuación (3.17) modela el movimiento amortiguado de la masa. En este caso, la fuerza de amortiguación produce una pérdida de energía en el sistema masa-resorte, pues ahora no se satisface la ecuación de conservación de la energía. Es de notar que todos los parámetros del modelo (m, c y k) son cantidades positivas. La misma ecuación diferencial modela al sistema masa-resorte colocado verticalmente.

La ecuación característica de la ecuación diferencial es

$$mr^2+cr+k=0.$$

Las dos soluciones de esta ecuación cuadrática son

$$r_1=\frac{-c+\sqrt{c^2-4km}}{2m} \quad \text{y} \quad r_2=\frac{-c-\sqrt{c^2-4km}}{2m}. \tag{3.18}$$

El signo del radicando c^2-$4km$ determina el tipo de movimiento del sistema. Tenemos tres posibilidades: que el radicando en cuestión sea positivo, negativo o cero. Analizemos a continuación cada uno de estos casos.

3.4.4. Movimiento sobreamortiguado $c^2-4mk>0$, es decir $c^2>4mk$.

En el caso $c^2-4mk>0$ las dos raíces que aparecen en (5.2) son diferentes y ambas son negativas, esto implica directamente que la solución de la ED lineal homogénea es

$$X(t)=C_1e^{r_1t}+C_2e^{r_2t},\ \text{ con } r_1=\frac{-c+\sqrt{c^2-4km}}{2m} \text{ y } r_2=\frac{-c-\sqrt{c^2-4km}}{2m}. \tag{3.19}$$

Las dos funciones exponenciales que aparecen en (3.19) son decrecientes, en consecuencia, no se espera vibración alguna y el sistema tiende rápidamente a regresar a su posición de equilibrio, por esa razón decimos que el movimiento es sobreamortiguado. La forma explícita del movimiento depende de las condiciones iniciales, que además sirven para determinar las constantes C_1, C_2.

Por ejemplo, consideremos el caso de un sistema masa-resorte-amortiguador con condiciones iniciales $x(0) = x_0$, $v(0) = 0$. Así obtenemos:

$$x_0 = x(0) = C_1 + C_2. \tag{3.20}$$

Derivando la ecuación (3.19), obtenemos:

$$v(t) = C_1 r_1 e^{r_1 t} + C_2 r_2 e^{r_2 t}.$$

Evaluando en $t = 0$, obtenemos la segunda ecuación a considerar, es decir,

$$0 = v(0) = C_1 r_1 + C_2 r_2. \tag{3.21}$$

El sistema de ecuaciones lineales (3.20) y (3.21) para C_1, C_2 se puede resolver de diferentes formas; en este caso, si seleccionamos la regla de Cramer, obtenemos:

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & 1 \\ 0 & r_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix}} = \frac{x_0 r_2}{r_2 - r_1}; \qquad C_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ r_1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix}} = \frac{-x_0 r_1}{r_2 - r_1}.$$

Finalmente, sustituyendo en (3.19) obtenemos la siguiente expresión para la posición

$$x(t) = \left(\frac{x_0 r_2}{r_2 - r_1}\right) e^{r_1 t} - \left(\frac{x_0 r_1}{r_2 - r_1}\right) e^{r_2 t} = \left(\frac{x_0}{r_2 - r_1}\right)\left(r_2 e^{r_1 t} - r_1 e^{r_2 t}\right) \tag{3.22}$$

De la ecuación (3.18), tenemos que

$$r_2 - r_1 = -\frac{\sqrt{c^2 - 4km}}{m}.$$

Esto nos permite simplificar la ecuación (3.22) de forma que

$$x(t) = \left(\frac{-x_0 m}{\sqrt{c^2 - 4km}}\right)\left(r_2 e^{r_1 t} - r_1 e^{r_2 t}\right) = \frac{x_0 m}{\sqrt{c^2 - 4km}}\left(r_1 e^{r_2 t} - r_2 e^{r_1 t}\right).$$

Ejemplo. Considere un sistema masa-resorte-amortiguador con las constantes siguientes:

$$C = 5\ N.\frac{s}{m}; \quad m = 2\ kg; \quad k = 2\frac{N}{m}; \ x_0 = 1\ m; \quad v_0 = 0\ \frac{m}{s}.$$

Resuelva la ecuación diferencial y grafique la posición en el tiempo.

Solución En este caso la ecuación diferencial por resolver es

$$2\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 2x = 0,$$

cuya ecuación característica es

$$2r^2 + 5r + 2 = 0.$$

Como las dos raíces de esta ecuación cuadrática son

$$r_1 = \frac{-5 + \sqrt{25 - 16}}{4} = -\frac{1}{2} \quad \text{y} \quad r_2 = -2.$$

la solución general de la ecuación diferencial es

$$x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-t/2}.$$

Para determinar las constantes, necesitamos calcular la velocidad y utilizar las condiciones iniciales. La velocidad se obtiene derivando la posición y está dada por

$$v(t) = -2C_1 e^{-2t} - \frac{1}{2} C_2 e^{-t/2}.$$

Si ahora utilizamos las condiciones iniciales $x_0 = 1$ y $v_0 = 0$, obtenemos el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2, \\ 0 = -2C_1 - \frac{1}{2}C_2. \end{cases}$$

De la segunda ecuación se tiene $C_2 = -4C_1$. Sustituyendo en la primera resulta $C_1 = -\frac{1}{3}$. Finalmente $C_2 = \frac{4}{3}$. Así se obtiene que la posición en todo tiempo está dada por la expresión

$$x(t) = -\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{4}{3}e^{-t/2} \ m,$$

de donde es posible determinar tanto la velocidad como la aceleración, derivando una y dos veces:

$$v(t) = \frac{2}{3}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-t/2} \ \frac{m}{s} \qquad \text{y} \qquad a(t) = -\frac{4}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-t/2} \ \frac{m}{s^2}$$

Algunas observaciones interesantes son las siguientes:

1. ¿Pasa m por la posición de equilibrio? Para responder la pregunta encontremos, si existe, el tiempo en el que $x(t) = 0$:

$$\begin{aligned} x(t) &= 0 \Longleftrightarrow -\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{4}{3}e^{-t/2} = 0 \Longrightarrow \frac{4}{3}e^{-t/2} = \frac{1}{3}e^{-2t} \\ &\Longrightarrow 4e^{-t/2}e^{2t} = 1 \Longrightarrow 4e^{3t/2} = 1 \Longrightarrow e^{3t/2} = \frac{1}{4} \\ &\Longrightarrow 3t/2 = \ln\left(\frac{1}{4}\right) \Longrightarrow t = -\frac{2}{3}\ln(4), \ \text{ vemos que } t < 0. \end{aligned}$$

Esto nos indica que no hay $t \geq 0$ para el cual $x(t) = 0$. Entonces, m no pasa por la posición de equilibrio.

2. ¿Hay instantes en que la velocidad de m sea cero? Esto ocurre si $v(t) = 0$:

$$\begin{aligned} v(t) &= 0 \Longleftrightarrow \frac{2}{3}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-t/2} = 0 \Longrightarrow e^{-2t} = e^{-t/2} \Longrightarrow e^{-2t}e^{t/2} = 1 \\ &\Longrightarrow e^{-3t/2} = 1 \Longrightarrow -3t/2 = 0 \Longrightarrow t = 0. \end{aligned}$$

Esto nos indica que $v(t) = 0$ solamente al inicio del movimiento.

Aún más, $v(t) < 0$ cuando $-\frac{3}{2}t < 0$, lo que ocurre cuando $t > 0$. Entonces, en todo instante $t > 0$ sucede que $v(t) < 0$, o sea, $x'(t) < 0$; lo que nos permite afirmar que la posición $x(t)$ decrece al paso del tiempo.

3. ¿Qué ocurre con la posición $x(t)$ y la velocidad $v(t)$ al paso del tiempo?

$$\begin{aligned} \lim_{t\to+\infty} x(t) &= \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{4}{3}e^{-t/2}\right) = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{-1}{3e^{2t}} + \frac{4}{3e^{t/2}}\right) \\ &= -\frac{1}{3}\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{e^{2t}}\right) + \frac{4}{3}\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{e^{t/2}}\right) = 0. \\ \lim_{t\to+\infty} v(t) &= \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{2}{3}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-t/2}\right) = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{2}{3e^{2t}} - \frac{2}{3e^{t/2}}\right) \\ &= \frac{2}{3}\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{e^{2t}}\right) - \frac{2}{3}\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{e^{t/2}}\right) = 0. \end{aligned}$$

Esto es, al paso del tiempo, la masa m tiende a detenerse en la posición de equilibrio.

4. Las gráficas de $x(t)$ y $v(t)$ son las siguientes, ver figura 3.4:

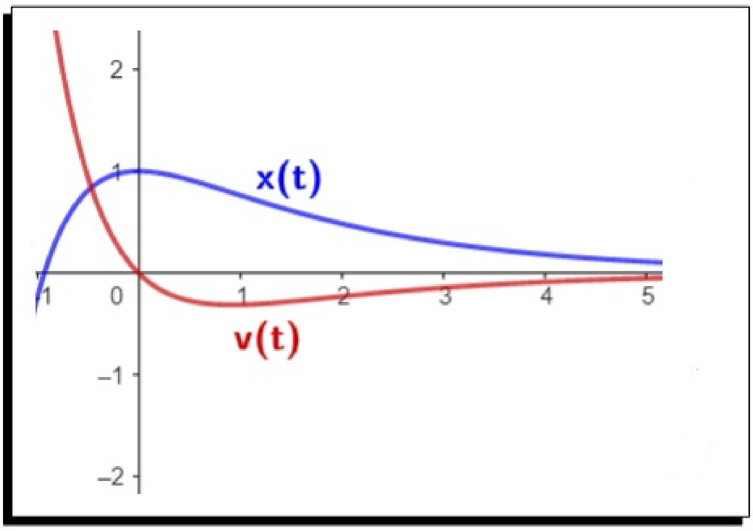

Figura 3.4 Posición y velicidad.

5. Por otra parte, la energía obtenida con la suma de la energía cinética más la energía potencial está dada por

$$
\begin{aligned}
E &= E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \left(\frac{2}{3}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-t/2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{4}{3}e^{-t/2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{9}\left(4e^{-4t} - 8e^{-5t/2} + 4e^{-t} + e^{-4t} - 8e^{-5t/2} + 16e^{-t}\right) \\
&= \frac{1}{9}\left(5e^{-4t} - 16e^{-5t/2} + 20e^{-t}\right).
\end{aligned}
$$

Claramente, esta energía no permanece constante en el tiempo y se va reduciendo hasta desaparecer. Podemos afirmar que el amortiguador, en efecto, disipa energía del sistema masa-resorte.

Ejemplo. Una masa de 5 kg se une a un resorte de constante $k = 5N/m$ y a un amortiguador de constante $c = 26N\ s/m$. La masa se suelta del punto $x_0 = -0,1\ m$, con velocidad $v_0 = 1,94\ m/s$; determine:

1. La posición, velocidad y aceleración de la masa en el tiempo $t \geq 0$.
2. El tiempo en que la masa cruza por la posición de equilibrio y la velocidad en ese instante.
3. El tiempo en que la velocidad de la masa es 0 m/s, así como la posición y aceleración en ese instante.

Solución. La posición $x(t)$ de m, con respecto a la posición de equilibrio, está dada por la solución del PVI

$$5\frac{d^2x}{dt^2} + 26\frac{dx}{dt} + 5x = 0, \quad \text{con} \quad x(0) = -0,1 \quad \text{y} \quad x'(0) = 1,94.$$

Proponiendo como solución $x = e^{rt}$, obtenemos la ecuación característica

$$5r^2 + 26r + 5 = 0;$$

cuyas soluciones son

$$r_{1,2} = \frac{-26 \pm \sqrt{676 - 4(5)(5)}}{2(5)} = \frac{-26 \pm 24}{10} = \begin{cases} -5; \\ -\dfrac{1}{5}, \end{cases}$$

de donde inferimos que la posición de la masa es

$$x(t) = C_1e^{-5t} + C_2e^{-t/5};$$

y su velocidad está dada por:

$$v(t) = -5C_1e^{-5t} - \frac{1}{5}C_2e^{-t/5}.$$

Como en el tiempo $t = 0\ s$, se tiene que $x_0 = -0,1\ m$, con velocidad $v_0 = 1,94\ m/s$, entonces tenemos sustituyendo en las dos ecuaciones previas que

$$\begin{cases} -0,1 = C_1 + C_2, \\ 1,94 = -5C_1 - 0,2\ C_2. \end{cases}$$

Para resolver este sistema usamos el método de Cramer:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\begin{vmatrix} -0,1 & 1 \\ 1,94 & -0,2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -0,2 \end{vmatrix}} = \frac{0,02 - 1,94}{-0,2+5} = \frac{-1,92}{4,8} = -0,4; \\ C_2 &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & -0,1 \\ -5 & 1,94 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -0,2 \end{vmatrix}} = \frac{1,94 - 0,5}{-0,2+5} = \frac{1,44}{4,8} = 0,3. \end{aligned}$$

Con estos resultados, obtenemos la posición, y derivando la velocidad y la aceleración de la masa en el tiempo $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} x(t) &= -0,4e^{-5t} + 0,3e^{-t/5}\ m \\ v(t) &= 2e^{-5t} - 0,06e^{-t/5}\ \ m/s \\ a(t) &= -10e^{-5t} + 0,012e^{-t/5}\ \ m/s^2. \end{aligned}$$

Observe que la masa cruza por la posición de equilibrio cuando

$$\begin{aligned} x(t) &= 0 \Longleftrightarrow -0,4e^{-5t} + 0,3e^{-t/5} = 0 \Longleftrightarrow 0,4e^{-5t} = 0,3e^{-t/5} \Longrightarrow \frac{0,4}{0,3} = e^{5t}e^{-t/5} \\ &\Longrightarrow \frac{0,4}{0,3} = e^{5t-t/5} \Longrightarrow \frac{0,4}{0,3} = e^{24t/5} \Longrightarrow e^{24t/5} = \frac{4}{3} \Longrightarrow t = \frac{5}{24}\ln\left(\frac{4}{3}\right) \approx 0,0599\ s \end{aligned}$$

La velocidad en este tiempo es

$$v(0,0599) = 2e^{-5(0,0599)} - 0,06e^{-(0,0599)/5}\ \ m/s \approx 1,4228\ m/s.$$

La máxima separación de la posición de equilibrio se obtiene cuando la velocidad es cero.
Ejemplos.

1. Resolver la ecuación diferencial $y''' + y = e^x$.

   Solución.
   $y''' + y = e^x \Leftrightarrow (D^3+1)y = e^x \Leftrightarrow (D+1)(D^2 - D + 1)y = e^x$.
   El operador $D^2 - D + 1$ tiene la forma $D^2 - 2aD + a^2 + b^2$, pues la ecuación auxiliar $m^2 - m + 1 = 0$ tiene raíces complejas. Es decir que $-2a = -1$ y $a^2 + b^2 = 1$, de donde $a = \frac{1}{2}$ y $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
   En consecuencia la solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea asociada a la no homogénea es:

   $$Y_H(x) = C_1e^{-x} + c_2e^{1/2x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2e^{1/2x}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

   Hallemos ahora una solución particular y_p utilizando el método del anulador.
   El anulador de e^x es el operador diferencial lineal $L = D - 1$. Luego, aplicando este operador a los dos miembros de la ecuación diferencial dada se sigue que:

   $$(D-1)(D+1)(D^2 - D + 1)Y = (D-1)(e^x) = 0 \tag{3.23}$$

   cuya solución general es

   $$y(x) = k, e^x + k_2e^{-x} + k_3e^{1/2x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + k_4e^{1/2x}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

Como toda solución particular y_p de la ecuación $(D^3+1)y = e^x$, verifica la condición $(D^3+1)y_p = e^x$ se sigue que $(D-1)(D^3+1)y_p = 0$; es decir que y_p es una solución de (3.23). En consecuencia debe tener la forma siguiente.

$$Y_p(x) = k_1e^x + k_2e^{-x} + k_3e^{1/2x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + k_4e^{1/2x}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

para ciertos valores de las constantes k_1, k_2, k_3 y k_4. Dichas valores se determinan mediante la condición $(D^3+1)y_p = e^x$. Es decir:

$$\begin{aligned}(D^3+1)Y_p &= e^x \Leftrightarrow (D+1)(D^2-D+1)\left[k_1e^x + k_2e^{-x} + k_3e^{1/2x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + k_4e^{1/2}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right] \\ &= e^x\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow (D^3+1)[k_1e^x] + \big[(D+1)(D^2-D+1)\big]\left[k_2e^{-x} + k_3e^{1/2x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + k_4e^{1/2x}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right] =$
e^x

$\Leftrightarrow (D^3+1)(k_1e^x) = e^x$, cualesquiera que sean los valores de las constantes k_2, k_3 y k_4. En particular las tomaremos iguales a cero.

De $(D^3+1)(k_1e^x) = e^x$ se sigue que $k_1e^x + k_1e^x = e^x$; es decir $2k_1e^x = e^x$ y por tanto $2k_1 = 1$ o también $k_1 = \frac{1}{2}$. Luego $y_p(x) = \frac{1}{2}e^x$.

En consecuencia la solución general de $(D^3+1)y = e^x$ es

$$y(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{1/2x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_3e^{1/2x}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{1}{2}e^x.$$

2. Hallar el anulador de $f(x) = x^2\operatorname{sen}^2 x$.

   Solución. Como $f(x) = x^2\operatorname{sen}^2 x = x^2\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2}\cos(2x)$ se sigue que un anulador de $f(x)$ es el operador diferencial lineal

   $$L = D^3(D^2+4)^3$$

3. Expresar $L = (xD - \operatorname{sen} x)(xD + \operatorname{sen} x)$ en la forma $a_n(x)D^4 + \cdots + a_1(x)D + a_0(x)$.

   Solución. $L(f(x)) = (XD - \operatorname{sen} x)(XD + \operatorname{sen} x)(f(x)) = (xD - \operatorname{sen} x)(xf'(x) + \operatorname{sen} x)f(x)) \Leftrightarrow$

   $$\begin{aligned} a)\ &= x\left[f\,'(x) + xf\,''(x) + \operatorname{sen} x f\,'(x) + \cos x f(x)\right] - x\operatorname{sen} x f\,'(x) - \operatorname{sen}^2 x f(x) \\ &= x^2 f\,''(x) + xf\,'(x) + (x\cos x - \operatorname{sen}^2 x)f(x) = \left(x^2D^2 + XD + x\cos x - \operatorname{sen}^2 x\right)f(x) \\ &\therefore (XD - \operatorname{sen} x)(XD + \cos x) = x^2D^2 + XD + x\cos x - \operatorname{sen}^2 x.\end{aligned}$$

4. Resolver la ecuación diferencial $y'' + 3y' + 5y = \operatorname{sen}(x+2)$

   Solución.- $y'' + 3y' + 5y = \operatorname{sen}(x+2) \Leftrightarrow (D^2+3D+5)y = \operatorname{sen}(x+2)$

   $\Leftrightarrow (D^2+3D+5)y = \operatorname{sen} x\,\cos 2 + \cos x \operatorname{sen} 2 = h(x)$.

   La solución y_H de la ecuación diferencial homogénea asociada $(D^2+3D+5)y = 0$ es $y_H = C_1e^{-3/2x}\cos\left(\frac{\sqrt{11}}{2}x\right) + C_2e^{-3/2x}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{11}}{2}x\right)$; puesto que $D^2+3D+5 = D^2-2aD+a^2+b^2$ implica que $3 = -2a$ y $a^2+b^2 = 5$ y por tanto $a = -\frac{3}{2}$ y $b = \frac{\sqrt{11}}{2}$.

   El anulador de $h(x)$ es D^2+1. Luego aplicando el operador a ambos miembros de la ecuación diferencial no homogénea:

   $$(D^2+1)(D^2+3D+5)y = 0, \tag{3.24}$$

cuya solución general tiene la forma:

$$y(x) = k_1 e^{-3/2x} \cos\left(\frac{\sqrt{11}}{2}x\right) + k_2 e^{-3/2x} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{11}}{2}x\right) + k_3 \cos x + k_4 \operatorname{sen} x \tag{3.25}$$

y como y_p es una solución de (3.24), debe tener la forma dada en (3.25) para ciertos valores de las constantes k_1, k_2, k_3 y k_4.
Es decir:

$$y_p(x) = k_1 e^{-3/2x} \cos\left(\frac{\sqrt{11}}{2}x\right) + k_2 e^{-3/2x} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{11}}{2}x\right) + k_3 \cos x + k_4 \operatorname{sen} x$$

para ciertos valores de las constantes. Dichos valores se determinan utilizando la condición:

$$(D^2 + 3D + 5)y_p = \operatorname{sen}(x+2). \tag{3.26}$$

Se tiene entonces las equivalencias siguientes, (3.26) es equivalente a:

$$\begin{aligned}
\Longleftrightarrow\quad & (D_2 + 3D + 5)\left[k_1 e^{-3/2x} \cos\left(\frac{\sqrt{11}}{2}x\right) + k_2 e^{-3/2x} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{11}}{2}x\right) + k_3 \cos x + k_4 \operatorname{sen} x\right] = sen(x+2)\\
\Leftrightarrow\quad & (D_2 + 3D + 5)(k_3 \cos x + k_4 \operatorname{sen} x) = \operatorname{sen}(x+2)\\
\Leftrightarrow\quad & -k_3 \cos x - k_4 \operatorname{sen} x - 3k_3 \operatorname{sen} x + 3k_4 \cos x + 5k_3 \cos x + 5k_4 \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x+2)\\
\Leftrightarrow\quad & [-k_3 + 3k_4 + 5k_3] \cos x + [-k_4 - 3k_3 + 5k_3] \operatorname{sen} x = \cos 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2 \cos x\\
\Leftrightarrow\quad & [4k_3 + 3k_4] \cos x + [2k_3 - k_4] \operatorname{sen} x = \cos 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2 \cos x.
\end{aligned}$$

De donde:

$$\begin{cases} 4k_3 + 3k_4 = \operatorname{sen} 2 \\ 2k_3 - k_4 = \cos 2 \end{cases} \Rightarrow \triangle = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -10$$

$$k_3 = \frac{\begin{vmatrix} \operatorname{sen} 2 & 3 \\ \cos 2 & -1 \end{vmatrix}}{-10} = \frac{-\operatorname{sen} 2 - 3\cos 2}{-10} = \frac{\operatorname{sen} 2 + 3\cos 2}{10}$$

$$k_4 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & \operatorname{sen} 2 \\ 2 & \cos 2 \end{vmatrix}}{-10} = \frac{4\cos 2 - 2\operatorname{sen} 2}{-10} = \frac{\operatorname{sen} 2 - 2\cos 2}{5}$$

Tomando $k_1 = k_2 = 0$, se sigue que:

$$y_p(x) = \frac{\operatorname{sen} 2 + 3\cos 2}{10} \cos x + \frac{\operatorname{sen} 2 - 2\cos 2}{5} \operatorname{sen} x.$$

En consecuencia la solución general de la ecuación diferencial dada es:

$$y_G(x) = C_1 e^{-3/2x} \cos\left(\tfrac{\sqrt{11}}{2}x\right) + C_2 e^{-3/2x} \operatorname{sen}\left(\tfrac{\sqrt{11}}{2}x\right) + \left(\frac{\operatorname{sen} 2 + 3\cos 2}{10}\right) \cos x + \left(\frac{\operatorname{sen} 2 - 2\cos 2}{5}\right) \operatorname{sen} x.$$

5. Expresar el operador diferencial lineal $L = (xD+2)(x^2D^2 - 2xD + 4)$ en la forma $a_n(x)D^n + \cdots + a_1(x)D + a_0(x)$.

Solución.

Apliquemos el operador L a una función $f(x)$ que admite derivadas hasta el tercer orden.

$$\begin{aligned}
L(f(x)) &= (xD+2)(x^2D^2 - 2xD + 4)(f(x))\\
&= (xD+2)\left[x^2 f''(x)\right] - 2xf'(x) + 4f(x)\\
&= x\left[x^2 f'''(x) + 2xf''(x) - 2f'(x) - 2xf''(x) + 4f'(x)\right] + 2x^2 f''(x) - 4xf'(x)\\
&\quad -4xf'(x) + 8f(x)\\
&= x^3 f'''(x) + 2x^2 f''(x) - 2xf'(x) - 2x^2 f''(x) + 4xf'(x) + 2x^2 f''(x) - 4xf'(x) + 8f(x)\\
&= x^3 f'''(x) + 2x^2 f''(x) - 2xf'(x) + 8f(x)\\
&= (xD^3 + 2x^2D^2 - 2xD + 8)(f(x))
\end{aligned}$$

Luego:

$(xD+2)\,(x^2D^2-2xD+4) = x^3D^3+2x^2D^2-2xD+8$

6. Resolver la ecuación diferencial $y''+y'+y=\tan x$.

Solución. Puesto que no existe el anulador de $\tan x$, no podemos aplicar el método del anulador. Apliquemos entonces el método de variación de parámetros.

Como:

$$\begin{aligned} y''+y'+y &= 0 \Leftrightarrow (D^2+D+1)y=0 \\ &\Leftrightarrow \; y_h = C_1e^{-x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+C_2e^{-x/2}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \end{aligned}$$

Puesto que la ecuación auxiliar $m^2+m+1=0$ tiene raíces complejas, el operador D^2+D+1 se puede expresar en la forma $D^2-2aD+a^2+b^2$, luego $-2a=1$ y $a^2+b^2=1$, obteniéndose que $a=-\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Buscamos ahora una solución particular de $y''+y'+y=\tan x$, de la forma

$y_p(x) = v_1(x)e^{-x/2}\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)+v_2(x)e^{-x/2}\operatorname{sen}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)$, donde las funciones $v_1(x)$ y $v_2(x)$ verifican el sistema:

$$\begin{cases} v_1'(x)e^{-x/2}\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)+v_2'(x)e^{-x/2}\operatorname{sen}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)=0 \\ v_1'(x)\left[-\dfrac{1}{2}e^{-x/2}\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]+v_2'(x)\left[-\dfrac{1}{2}e^{-x/2}\operatorname{sen}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}e^{-x/2}\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2x}\right)\right]=\tan x \end{cases}$$

El determinante del sistema es igual a:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} e^{-x/2}\;\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) & e^{-x/2}\operatorname{sen}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) \\ -\dfrac{1}{2}e^{-x/2}\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) & -\dfrac{1}{2}e^{-x/2}\operatorname{sen}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}e^{-x/2}\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2x}\right) \end{vmatrix} \\ &= -\frac{1}{2}e^{-x/2}\begin{vmatrix} -2\;\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) & -2\operatorname{sen}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) \\ \cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) & \operatorname{sen}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)-\sqrt{3}\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2x}\right) \end{vmatrix} \\ &= -\frac{1}{2}e^{-x/2}\begin{vmatrix} -2\;\cos(\alpha x) & -2\operatorname{sen}(\alpha x) \\ \cos(\alpha x) & \operatorname{sen}(\alpha x)-\sqrt{3}\cos(\alpha x) \end{vmatrix}; \quad \text{con} \quad \alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}. \\ &= \frac{1}{2}e^{-x}\left[-\operatorname{sen}\alpha x\cos\alpha x+\sqrt{3}\cos^2\alpha x+\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha x+\sqrt{3}\operatorname{sen}^2\alpha x\right] \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-x}. \end{aligned}$$

Aplicando las reglas de Cramer:

$$\begin{aligned}
v_1'(x) &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-x/2}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \\ \tan x & -\frac{1}{2}e^{-x/2}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-1/2x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \end{vmatrix}}{\Delta} \\
&= \frac{e^{-x/2}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\tan x}{\Delta} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}e^{x/2}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)
\end{aligned}$$

$$v_1(x) = -2\frac{\sqrt{3}}{3}\int e^{x/2}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\tan x dx$$

$$\begin{aligned}
v_2'(x) &= \frac{\begin{vmatrix} e^{-x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) & 0 \\ -\frac{1}{2}e^{-x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-x/2}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) & \tan x \end{vmatrix}}{\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-x}} \\
v_2(x) &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\int e^{x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\tan x dx
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= -2\tfrac{\sqrt{3}}{2}e^{-x/2}\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)\int e^{-x/2}\operatorname{sen}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)\tan x dx \\
&\quad+\frac{2\sqrt{3}}{3}e^{-x/2}\operatorname{sen}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)\int e^{1/2x}\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)\tan x dx.
\end{aligned}$$

3.5. Problemas de valor en la frontera

En esta sección vamos a realizar un rápido y muy breve vistazo de los problemas de los valores límite o valor en la frontera. El punto principal de esta sección es obtener algunos de los aspectos básicos de manera que más adelante echaremos un vistazo a uno de los métodos de solución más comunes para las ecuaciones diferenciales parciales.

3.5.1. Problemas de valor límite

Antes de empezar esta sección debemos dejar muy claro que solo vamos a rayar la superficie del tema de los problemas de valores límite. La intención de esta sección es dar una breve (y queremos decir muy breve) idea de los problemas de valores límite y dar suficiente información para permitirnos resolver algunas ecuaciones diferenciales parciales básicas más adelante.

Ahora, con eso fuera del camino, lo primero que debemos hacer es definir lo que queremos decir con un problema de valor límite (PVL para abreviar). Con problemas de valor inicial teníamos una ecuación diferencial y especificábamos el valor de la solución y un número apropiado de derivadas en el mismo punto (denominadas colectivamente condiciones iniciales). Por ejemplo, para una ecuación diferencial de segundo orden, las condiciones iniciales son,

$$y(t_0) = y_0, \qquad y'(t_0) = y_1.$$

Con los problemas de los valores límite, tendremos una ecuación diferencial y especificaremos la función y/o las derivadas en diferentes puntos, que llamaremos valores límite. Para las ecuaciones diferenciales de segundo orden, que trataremos casi exclusivamente aquí, cualquiera de los siguientes puede y será usado para condiciones de frontera.

$$\begin{aligned} y\left(x_0\right) &= y_0, & y\left(x_1\right) &= y_1, & (1)\\ y'\left(x_0\right) &= y_0, & y'\left(x_1\right) &= y_1, & (2)\\ y'\left(x_0\right) &= y_0, & y\left(x_1\right) &= y_1, & (3)\\ y\left(x_0\right) &= y_0, & y'\left(x_1\right) &= y_1, & (4)\end{aligned}$$

Como se mencionó anteriormente, trabajaremos casi exclusivamente con ecuaciones diferenciales de segundo orden. También nos restringiremos a las ecuaciones diferenciales lineales. Por lo tanto, para los propósitos de nuestra discusión aquí trabajaremos casi exclusivamente con ecuaciones diferenciales en la forma,

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x). \tag{3.27}$$

Junto con uno de los conjuntos de condiciones de contorno dados en (1) a (4). En ocasiones observaremos algunas condiciones de frontera diferentes, pero la ecuación diferencial siempre se puede escribir en esta forma.

Como pronto veremos mucho de lo que sabemos acerca de los problemas de valor inicial no se cumplirá aquí. Podemos, por supuesto, resolver (3.27) siempre y cuando los coeficientes sean constantes y para algunos casos en los que no lo son. Nada de eso cambiará. Los cambios (y quizás los problemas) surgen cuando nos movemos de las condiciones iniciales a las condiciones de frontera.

Uno de los primeros cambios es una definición que vimos todo el tiempo en los capítulos anteriores. En los capítulos anteriores dijimos que una ecuación diferencial era homogénea si $g(x) = 0$ para todo x. Aquí diremos que un problema de valor límite es homogéneo si además de $g(x) = 0$ también tenemos $y_0 = 0$ y $y_1 = 0$ (independientemente de las condiciones de contorno que usamos). Si alguno de estos no es cero, llamaremos PVL no homogéneo.

Es importante ahora recordar que cuando decimos homogéneo (o no homogéneo) estamos diciendo algo no solo sobre la ecuación diferencial en sí, sino también sobre las condiciones de frontera también.

El cambio más grande que vamos a ver aquí viene cuando vamos a resolver el problema del valor límite. Al resolver problemas lineales de valor inicial, se garantiza una solución única en condiciones muy suaves. Solo miramos esta idea para PVI de primer orden, pero la idea se extiende a PVI de orden superior. En esa sección vimos que todo lo que necesitábamos para garantizar una solución única era algunas condiciones básicas de continuidad. Con problemas de valores límite a menudo no tendremos solución o infinidad de soluciones incluso para muy buenas ecuaciones diferenciales que darían una solución única si tuviéramos condiciones iniciales en lugar de condiciones de contorno.

Antes de entrar en la solución de algunos de estos veamos a continuación, la cuestión de por qué estamos hablando de estos en primer lugar. Como veremos en el próximo capítulo en el proceso de resolver algunas ecuaciones diferenciales parciales, nos encontraremos con problemas de valores límite que también tendrán que ser resueltos. De hecho, una gran parte del proceso de solución habrá de tratar con la solución al PVL. En estos casos las condiciones de contorno representarán cosas como la temperatura en cualquiera de los extremos de una barra, o el flujo de calor en/fuera de cada extremo de una barra. O tal vez representen la ubicación de los extremos de una cuerda vibrante. Por lo tanto, las condiciones de frontera realmente indicarán condiciones en el límite de algún proceso.

Por lo tanto, con algunas de las cosas básicas vamos a encontrar algunas soluciones a algunos problemas de valor límite. Tenga en cuenta también que realmente no hay nada nuevo aquí todavía. Sabemos cómo resolver la ecuación diferencial y sabemos cómo encontrar las constantes aplicando las condiciones. La única diferencia es que aquí vamos a aplicar las condiciones de frontera en lugar de las condiciones iniciales.

Ejemplo 1 Resuelva el siguiente PVL. $y" + 4y = 0, \quad y\left(0\right) = -2, \quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 10.$

Solución.

Esta es una ecuación diferencial simple de resolver y por lo tanto, le dejaremos a usted para verificar que la solución general es, $y(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$. Ahora todo lo que necesitamos hacer es aplicar las condiciones de contorno.

$$\begin{aligned} -2 &= y(0) = C_1\\ 10 &= y(\frac{\pi}{4}) = C_2\end{aligned}$$

La solución es entonces, $y(x) = -2\cos(2x) + 10\sin(2x)$.

Mencionamos anteriormente que algunos problemas de los valores límite pueden no tener soluciones ni soluciones infinitas. Tenemos que hacer un par de ejemplos de ese tipo también aquí. El siguiente conjunto de ejemplos también mostrará cuán pequeño de un cambio en el PVL se necesita para moverse hacia estas otras posibilidades.

Ejemplo 2 Resuelva el siguiente PVL. $y'' + 4y = 0, \; y(0) = -2, \quad y(2\pi) = -2.$

Solución

Estamos trabajando con la misma ecuación diferencial que en el primer ejemplo, así que todavía tenemos, $y(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$.

Al aplicar las condiciones de contorno obtenemos,

$$\begin{aligned} -2 &= y(0) = C_1 \\ -2 &= y(2\pi) = C_1 \end{aligned}$$

Así que en este caso, a diferencia del ejemplo anterior, ambas condiciones de contorno nos dicen que tenemos que tener $C_1 = -2$ y ninguno de ellos nos dice nada acerca de C_2. Recuerde sin embargo que todo lo que estamos pidiendo es una solución a la ecuación diferencial que satisface las dos condiciones de frontera dada y la siguiente función hará eso, $y(x) = -2\cos(2x) + C_2 \sin(2x)$.

En otras palabras, independientemente del valor de C_2 obtenemos una solución y así, en este caso obtenemos infinitas soluciones al problema del valor límite.

Ejemplo 3. Resuelva el siguiente PVL: $y'' + 4y = 0, \; y(0) = -2, \quad y(2\pi) = 3.$

Solución

De nuevo, tenemos la siguiente solución general, $y(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$. Esta vez las condiciones límite nos dan,

$$\begin{aligned} -2 &= y(0) = C_1 \\ 3 &= y(2\pi) = C_1 \end{aligned}$$

En este caso tenemos un conjunto de condiciones de contorno, cada una de las cuales requiere un valor diferente de C_1 para ser satisfecho. Esto, sin embargo, no es posible y por lo tanto en este caso no tienen solución.

Así, con los ejemplos 2 y 3 podemos ver que solo un pequeño cambio en las condiciones de contorno, en relación entre sí y con el ejemplo 1, puede cambiar completamente la naturaleza de la solución. Los tres ejemplos utilizaron la misma ecuación diferencial y, sin embargo, un conjunto diferente de condiciones iniciales dio lugar a no tener soluciones, una solución o infinidad de soluciones.

Sin embargo, tenga en cuenta que este tipo de comportamiento no siempre es imprevisible.. Si usamos las condiciones $y(0)$ y $y(2\pi)$ la única manera en la que alguna vez obtengamos una solución al problema del valor límite es si tenemos,

$$y(0) = a, \qquad y(2\pi) = a$$

Para cualquier valor de a. Además, tenga en cuenta que si tenemos estas condiciones de frontera, de hecho obtendremos infinitas soluciones.

Todos los ejemplos que hemos trabajado hasta este punto implicaron la misma ecuación diferencial y el mismo tipo de condiciones de contorno, así que trabajemos un par más solo para asegurarnos de que tenemos algunos ejemplos más aquí. Además, tenga en cuenta que con cada uno de estos podríamos modificar las condiciones de contorno un poco para que aparezcan los posibles comportamientos de la solución (es decir, cero, una o infinidad de soluciones).

Ejemplo 4. Resuelva el siguiente PVL: $y'' + 3y = 0, \quad y\,(0) = 7, \; y(2\pi) = 0.$

Solución

La solución general para esta ecuación diferencial es, $y\,(x) = C_1 \cos\left(\sqrt{3}x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{3}x\right)$. Aplicando las condiciones de contorno da,

$$\begin{aligned} 7 &= y(0) = C_1 \\ 0 &= y(2\pi) = C_1 \cos\left(2\sqrt{3}\pi\right) + C_2 \sin\left(2\sqrt{3}\pi\right) \Longrightarrow C_2 = -7\cot\left(2\sqrt{3}\pi\right). \end{aligned}$$

En este caso obtenemos una sola solución,

$$y\,(x) = 7\cos\left(\sqrt{3}x\right) - 7\cot\left(2\sqrt{3}\pi\right)\sin\left(\sqrt{3}x\right).$$

Ejemplo 5. Resuelva el siguiente PVL: $y'' + 25y = 0$, $y'(0) = 6$, $y'(\pi) = -9$.
Solución
Aquí la solución general es, $y(x) = C_1 \cos(5x) + C_2 \sin(5x)$
Y vamos a necesitar la derivada para aplicar las condiciones de contorno,

$$y'(x) = -5C_1 \sin(5x) + 5C_2 \cos(5x)$$

Aplicando las condiciones de contorno da,

$$\begin{aligned} 6 &= y'(0) = 5C_2 \Longrightarrow C_2 = \frac{6}{5} \\ -9 &= y'(\pi) = -5C_2 \Longrightarrow C_2 = \frac{9}{5} \end{aligned}$$

Esto no es posible y, por lo tanto, en este caso no se tiene solución.

Todos los ejemplos trabajados hasta este punto han sido no homogéneos porque al menos una de las condiciones de contorno ha sido no nula. Trabajemos un ejemplo no homogéneo donde la ecuación diferencial es también no homogénea antes de trabajar un par de variables homogéneas

Ejemplo 6 Resolver el siguiente PVL: $y'' + 9y = \cos x$, $y'(0) = 5$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{5}{3}$.
Solución
La solución de la ecuación diferencial homogénea asociada es, $y(x) = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)$.

Usando coeficientes indeterminados o variación de parámetros es fácil demostrar (dejamos los detalles para verificar) que una solución particular es, $y_p = \frac{1}{8} \cos x$ La solución general y su derivada (puesto que lo necesitamos para las condiciones de contorno) son,

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x) + \frac{1}{8} \cos x \\ y'(x) &= -3C_1 \sin(3x) + 3C_2 \cos(3x) - \frac{1}{8} \sin x \end{aligned}$$

Aplicando las condiciones de contorno da,

$$\begin{aligned} 5 &= y'(0) = 3C_2 \Longrightarrow C_2 = \frac{5}{3} \\ -\frac{5}{3} &= y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -C_2 \Longrightarrow C_2 = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Las condiciones de contorno entonces nos dicen que debemos tener $C_2 = \frac{5}{3}$ y no nos dicen nada acerca de C_1 y así puede ser elegido arbitrariamente. La solución es entonces,

$$y(x) = C_1 \cos(3x) + \frac{5}{3} \sin(3x) + \frac{1}{8} \cos x$$

Y habrá infinitas soluciones para el PVL.

Ahora vamos a trabajar un par de ejemplos homogéneos que también serán útiles de haber trabajado una vez que lleguemos a la siguiente sección.

Ejemplo 7 Resuelva el siguiente PVL: $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 0$, $y(2\pi) = 0$.
Solución
Aquí la solución general es, $y(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$. Aplicando las condiciones de contorno da,

$$\begin{aligned} 0 &= y(0) = C_1 \\ 0 &= y(2\pi) = C_1 \end{aligned}$$

Así que C_2 es arbitraria y la solución es, $y(x) = C_2 \sin(2x)$. Y en este caso tendremos infinitas soluciones.

Ejemplo 8. Resuelva el siguiente PVL: $y'' + 3y = 0$, $y(0) = 0$, $y(2\pi) = 0$.
Solución
La solución general en este caso es,

$$y(x) = C_1 \cos\left(\sqrt{3}x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{3}x\right).$$

Aplicando las condiciones de contorno da,

$$\begin{aligned} 0 &= y(0) = C_1 \\ 0 &= y(2\pi) = C_2 \sin\left(2\sqrt{3}\pi\right) \Longrightarrow C_2 = 0 \end{aligned}$$

En este caso encontramos que ambas constantes son cero y la solución es, $y(x) = 0$.

En el ejemplo anterior la solución era $y(x) = 0$. Obsérvese, sin embargo, que siempre será una solución a cualquier sistema homogéneo dado por (5) y cualquiera de las condiciones de contorno (homogéneas) dadas por (1) - (4). Debido a esto usualmente llamamos a esta solución la solución trivial. A veces, como en el caso del último ejemplo, la solución trivial es la única solución, pero generalmente preferimos que las soluciones sean no triviales. Esta será una idea importante en la siguiente sección.

Antes de salir de esta sección, hay que hacer un punto importante. En cada uno de los ejemplos, con una excepción, la ecuación diferencial que resolvimos estaba en la forma, $y'' + \lambda y = 0$.

La única excepción a esto todavía resuelto esta ecuación diferencial, excepto que no era una ecuación diferencial homogénea y por lo que todavía está resolviendo esta ecuación diferencial básica de alguna manera. Por lo tanto, probablemente hay varias preguntas naturales que pueden surgir en este punto. ¿Todos los PVL implican esta ecuación diferencial y si no, ¿por qué pasamos tanto tiempo resolviendo esto a la exclusión de todas las demás ecuaciones diferenciales posibles?

Las respuestas a las preguntas son bastante simples. Primero, esta ecuación diferencial no es definitivamente la única usada en problemas de valores límite. Sin embargo, muestra todo el comportamiento que queríamos hablar aquí y tiene la ventaja de ser muy fácil de resolver. Así, utilizando esta ecuación diferencial casi exclusivamente podemos ver y discutir el comportamiento importante que debemos discutir y nos libera de un montón de detalles de la solución potencialmente desordenado y/o soluciones desordenadas. En ocasiones, observaremos otras ecuaciones diferenciales en el resto de este capítulo, pero seguiremos trabajando casi exclusivamente con esta.

Hay otra razón importante para considerar esta ecuación diferencial. Cuando lleguemos al siguiente capítulo y echemos un breve vistazo a la solución de las ecuaciones diferenciales parciales, veremos que casi todos los ejemplos que vamos a trabajar allí se reducen exactamente a esta ecuación diferencial. Además, en esos problemas vamos a trabajar algunos problemas (reales) que en realidad se resuelven en la práctica y por lo tanto no son solo problemas (inventados) a los efectos de ejemplos. Es cierto que tendrán algunas simplificaciones en ellos, pero en algunos casos se acercan a problemas realistas.

3.5.2. Valores propios y autofunciones

Como lo hicimos en la sección anterior, debemos notar nuevamente que solo vamos a dar una breve mirada al tema de los valores propios y autofunciones para los problemas de valores límite. Hay bastantes ideas que no veremos aquí. La intención de esta sección es simplemente darle una idea del tema y hacer suficiente trabajo para permitirnos resolver algunas ecuaciones diferenciales parciales básicas en el próximo capítulo.

Ahora, antes de empezar a hablar sobre el tema real de esta sección, recordemos un tema del Álgebra Lineal que discutimos brevemente en estas notas. Para una matriz cuadrada dada, A, si pudiéramos encontrar valores de λ para los cuales podríamos encontrar soluciones no nulas, es decir, $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$, a, $A\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{x}$.

Entonces llamamos λ un autovalor de A y $\overrightarrow{x}$ su autovector correspondiente.

Es importante recordar aquí que para que λ sea un autovalor, entonces tenemos que ser capaces de encontrar soluciones no nulas a la ecuación.

Entonces, ¿qué tiene que ver esto con los problemas de los valores límite? Bueno, volvamos a la sección anterior y echemos un vistazo a los ejemplos 7 y 8. En esos dos ejemplos resolvimos los PVL homogéneos (¡y eso es importante!) En la forma,

$$y'' + \lambda y = 0, \ y(0) = 0, \quad y(2\pi) = 0 \tag{1}$$

En el ejemplo 7 tenemos $\lambda = 4$ y encontramos soluciones no triviales (es decir, no nulas) al PVL. En el ejemplo 8 se usó $\lambda = 3$ y la única solución fue la solución trivial (es decir $y(t) = 0$. Por lo tanto, este PVL homogéneo (recordar esto también significa que las condiciones de frontera son cero) parece presentar un comportamiento similar al comportamiento en la ecuación matricial anterior. Hay valores de λ que darán soluciones no triviales a este PVL y valores de λ que solo admitirán la solución trivial.

Por lo tanto, para aquellos valores de λ que dan soluciones no triviales llamaremos λ un valor propio para el PVL y las soluciones no triviales se llamarán autofunciones para el PVL correspondiente al valor propio.

Ahora sabemos que para el PVL homogéneo dado en (1), $\lambda = 4$ es un valor propio con funciones propias $y(x) = C_2 \sin x$ y que $\lambda = 3$ no es un autovalor.

Finalmente, trataremos de determinar si hay otros valores propios para (1), sin embargo, antes de hacerlo, comentemos brevemente por qué es tan importante que el PVL sea homogéneo en esta discusión. En el ejemplo 2 y en el ejemplo 3 de la sección anterior se resolvió la ecuación diferencial homogénea $y''+4y = 0$, con dos condiciones de frontera no homogéneas diferentes en la forma, $y(0) = a, \quad y(2\pi) = b$.

En estos dos ejemplos vimos que simplemente cambiando el valor de a y / o b éramos capaces de obtener soluciones no triviales o de no tener ninguna solución en absoluto.

En la discusión de los valores propios/autofunciones necesitamos soluciones para existir y la única manera de asegurar este comportamiento es exigir que las condiciones de contorno también sean homogéneas. En otras palabras, necesitamos que el PVL sea homogéneo.

Hay un tema final que debemos discutir antes de pasar al tema de autovalores y autofunciones y este es más un tema de anotación que nos ayudará con parte del trabajo que tendremos que hacer.

Supongamos que tenemos una ecuación diferencial de segundo orden y su polinomio característico tiene dos raíces reales y distintas y que están en la forma

$$r_1 = \alpha \text{ y } \quad r_2 = -\alpha.$$

Entonces sabemos que la solución es,

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x}$$

Si bien no hay nada malo con esta solución vamos a hacer un poco de reescritura de esto. Comenzaremos dividiendo los términos de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x} \\ &= \frac{C_1}{2} e^{\alpha x} + \frac{C_1}{2} e^{\alpha x} + \frac{C_2}{2} e^{-\alpha x} + \frac{C_2}{2} e^{-\alpha x} \end{aligned}$$

Ahora vamos a sumar/restar los siguientes términos (nota que estamos mezclando el C_i y $\pm\alpha$ en los nuevos términos) para obtener,

$$y(x) = \frac{C_1}{2} e^{\alpha x} + \frac{C_1}{2} e^{\alpha x} + \frac{C_2}{2} e^{-\alpha x} + \frac{C_2}{2} e^{-\alpha x} + \left(\frac{C_1}{2} e^{-\alpha x} - \frac{C_1}{2} e^{-\alpha x}\right) + \left(\frac{C_2}{2} e^{\alpha x} - \frac{C_2}{2} e^{\alpha x}\right)$$

A continuación, reordenar términos alrededor de un poco,

$$y(x) = \frac{1}{2}\left(C_1 e^{\alpha x} + C_1 e^{-\alpha x} + C_2 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x}\right) + \frac{1}{2}\left(C_1 e^{\alpha x} - C_1 e^{-\alpha x} - C_2 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x}\right)$$

Finalmente, las cantidades en el factor del paréntesis y moveremos la localización de la fracción también. Haciendo esto, así como renombrando las nuevas constantes que obtenemos,

$$\begin{aligned} y(x) &= (C_1 + C_2) \frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}{2} + (C_1 - C_2) \frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{2} \\ &= \overline{C_1} \frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}{2} + \overline{C_2} \frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{2} \end{aligned}$$

Todo este trabajo probablemente parece muy misterioso e innecesario. Sin embargo, realmente había una razón para ello. De hecho usted puede haber visto ya la razón, por lo menos en parte. Las dos funciones "nuevas" que tenemos en nuestra solución son, de hecho, dos de las funciones hiperbólicas. En particular,

$$\cosh(x) = \frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}{2}, \qquad \sinh(x) = \frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{2}.$$

Por lo tanto, otra forma de escribir la solución a una ecuación diferencial de segundo orden cuyo polinomio característico tiene dos raíces reales y distintas en la forma $r_1 = \alpha$ y $\quad r_2 = -\alpha$ es,

$$y(x) = C_1 \cosh(\alpha x) + C_2 \sinh(\alpha x).$$

Tener la solución en este formulario para algunos (en realidad la mayoría) de los problemas que estaremos buscando hará nuestra vida mucho más fácil. Las funciones hiperbólicas tienen algunas propiedades muy agradables que podemos aprovechar.

Primero, ya que los necesitaremos más adelante, las derivadas son,

$$\frac{d}{dx}\left(\cosh\left(x\right)\right)=\sinh\left(x\right), \qquad \frac{d}{dx}\left(\sinh\left(x\right)\right)=\cosh\left(x\right).$$

Recordando propiedades básicas de estas funciones, tenga en cuenta que $\cosh(0) = 1$ y $\sinh(0) = 0$. Porque a menudo estaremos trabajando con condiciones de contorno en $x = 0$, estas serán evaluaciones útiles.

A continuación, y posiblemente más importante, notemos que $\cosh(x) > 0$ para todo x y así el coseno hiperbólico nunca será cero. Del mismo modo, podemos ver que $\sinh(x) = 0$ solo si $x = 0$. Utilizaremos estos dos hechos en algunos de nuestros trabajos para no olvidarlos.

Bueno, ahora que tenemos todo eso fuera del camino vamos a trabajar un ejemplo para ver cómo vamos a encontrar autovalores/funciones propias para un PVL.

Ejemplo 1. Encuentre todos los valores propios y autofunciones para el PVL siguiente. $y'' + \lambda y = 0,\ y(0) = 0, \quad y(2\pi) = 0$

Solución

Comenzamos esta sección mirando este PVL y ya conocemos un valor propio ($\lambda = 4$) y conocemos un valor de λ que no es un valor propio ($\lambda = 3$). A medida que avanzamos en el trabajo aquí necesitamos recordar que obtendremos un autovalor para un valor particular de λ si obtenemos soluciones no triviales del PVL para ese valor particular de λ.

Con el fin de saber que hemos encontrado todos los valores propios no podemos simplemente comenzar aleatoriamente tratando valores de λ para ver si tenemos soluciones no triviales o no. Afortunadamente hay una manera de hacer esto que no está demasiado mal y nos dará todos los autovalores/autofunciones. Vamos a tener que hacer algunos casos sin embargo. Los tres casos que deberemos examinar son: $\lambda > 0$, $\lambda = 0$, y $\lambda < 0$. Cada uno de estos casos da una forma específica de la solución al PVL a la cual podemos entonces aplicar las condiciones de contorno para ver si obtendremos soluciones no triviales o no. Así que, vamos a empezar en los casos.

$\lambda > 0$

En este caso, el polinomio característico que obtenemos a partir de la ecuación diferencial es,

$$r^2+\lambda=0 \Longrightarrow r_{1,2}=\pm\sqrt{-\lambda}.$$

En este caso dado que sabemos que $\lambda > 0$ estas raíces son complejas y podemos escribirlas en su lugar como, $r_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}i$. La solución general a la ecuación diferencial es entonces, $y(x) = C_1\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + C_2\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)$.

Aplicando la primera condición de límite nos da,

$$0=y\left(0\right)=C_1.$$

Entonces, teniendo esto en cuenta y aplicando la segunda condición de contorno obtenemos,

$$0=y\left(0\right)=C_2\sin\left(2\pi\sqrt{\lambda}\right).$$

Esto significa que tenemos que tener uno de los siguientes, $C_2 = 0$ o $\sin\left(2\pi\sqrt{\lambda}\right) = 0$.

Sin embargo, recordemos que queremos soluciones no triviales y si tenemos la primera posibilidad, obtendremos la solución trivial para todos los valores de $\lambda > 0$. Por lo tanto, supongamos que $C_2 \neq 0$. Esto significa que tenemos,

$$\sin\left(2\pi\sqrt{\lambda}\right)=0 \Longrightarrow 2\pi\sqrt{\lambda}=n\pi, \quad \text{para } n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

En otras palabras, aprovechando el hecho de que sabemos que el seno es cero podemos llegar a la segunda ecuación. Obsérvese también que, puesto que suponemos que $\lambda > 0$ sabemos que $2\pi\sqrt{\lambda} > 0$ y así n solo puede ser un entero positivo para este caso.

Ahora todo lo que tenemos que hacer es resolver esto para λ y tendremos todos los autovalores positivos para este PVL.

Los autovalores positivos son entonces,

$$\lambda_n = \left(\frac{n}{2}\right)^2 \frac{n^2}{4}, \quad \text{para } n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Y las autofunciones que corresponden a estos valores propios son,

$$y_n(x) = \sin\left(\frac{nx}{2}\right), \quad \text{para } n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Obsérvese que hemos subscripto un n en los autovalores y autofunciones para denotar el hecho de que hay uno para cada uno de los valores dados de n. Observe también que hemos omitido escribir la constante C_2 en las autofunciones. Para autofunciones solo estamos interesados en la función en sí y no en la constante delante de ella y por lo general no se escriben.

Ahora vamos a pasar al segundo caso $\lambda = 0$.

En este caso el PVL deviene $y'' = 0,\ y(0) = 0, \quad y(2\pi) = 0,$ y la integración de la ecuación diferencial un par de veces nos da la solución general $y(x) = C_1 + C_2 x$.

La aplicación de la primera condición de límite da,

$$0 = y(0) = C_1.$$

Aplicar la segunda condición de frontera así como los resultados de la primera condición de contorno da

$$0 = y(2\pi) = 2\pi C_2.$$

Aquí, a diferencia del primer caso, no tenemos una opción sobre cómo hacer que este sea cero. Esto solo será cero si $C_2 = 0$.

Por lo tanto, para esta PVL (y eso es importante), si tenemos $\lambda = 0$ la única solución es la solución trivial y por tanto $\lambda = 0$ no puede ser un autovalor para esta PVL.

Ahora veamos el caso final $\lambda < 0$.

En este caso la ecuación característica y sus raíces son las mismas que en el primer caso. Por lo tanto, sabemos que, $r_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$-

Sin embargo, debido a que asumimos $\lambda < 0$ aquí estas son ahora dos raíces verdaderamente distintas y por lo tanto, utilizando nuestro trabajo anterior para este tipo de raíces reales y distintas, sabemos que la solución general será, $y(x) = C_1 \cosh\left(-\sqrt{\lambda}x\right) + C_2 \sinh\left(-\sqrt{\lambda}x\right)$.

Tenga en cuenta que podríamos haber utilizado la forma exponencial de la solución aquí, pero nuestro trabajo será mucho más fácil si usamos la forma hiperbólica de la solución aquí.

Ahora, aplicando la primera condición de contorno da,

$$0 = y(0) = C_1 \cosh(0) + C_2 \sinh(0) = C_1(1) + C_2(0) = C_1 \Longrightarrow C_1 = 0.$$

La aplicación de la segunda condición de contorno da,

$$0 = y(2\pi) = C_2 \sinh\left(2\pi\sqrt{-\lambda}\right).$$

Debido a que asumimos $\lambda < 0$ sabemos que $2\pi\sqrt{-\lambda} \neq 0$ y por lo tanto también sabemos que $\sinh\left(2\pi\sqrt{-\lambda}\right) \neq 0$. Por lo tanto, al igual que el segundo caso, debemos tener $C_2 = 0$.

Por lo tanto, para este PVL (otra vez que es importante), si tenemos $\lambda < 0$ solo obtenemos la solución trivial y por lo tanto no hay valores propios negativos.

En resumen, tendremos los siguientes autovalores / funciones propias para este PVL.

$$\lambda_n = \frac{n^2}{4}, \qquad y_n(x) = \sin\left(\frac{nx}{2}\right), \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Echemos un vistazo a otro ejemplo con condiciones de frontera ligeramente diferentes.

Ejemplo 2. Encuentre todos los autovalores y eigenfunctions para el PVL siguiente. $y'' + \lambda y = 0,\ y'(0) = 0, \quad y'(2\pi) = 0.$

Solución

Aquí vamos a trabajar con condiciones de frontera derivadas. El trabajo es prácticamente idéntico al ejemplo anterior sin embargo, así que no pondremos tanto detalle aquí. Vamos a tener que pasar por los tres casos al igual que el ejemplo anterior, así que vamos a empezar en eso.

$\lambda > 0$

La solución general a la ecuación diferencial es idéntica al ejemplo anterior y así tenemos, $y(x) = C_1 \cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)$

La aplicación de la primera condición de frontera nos da,

$$0 = y'(0) = \sqrt{\lambda}C_2 \Longrightarrow C_2 = 0.$$

Recuerde que estamos suponiendo que $\lambda > 0$ aquí y por lo que solo será cero si $C_2 = 0$. Ahora, la segunda condición de frontera nos da,

$$0 = y'(2\pi) = -\sqrt{\lambda}C_1 \operatorname{sen}\left(2\pi\sqrt{\lambda}\right)$$

Recuérdese que no queremos soluciones triviales y que $\lambda > 0$ por lo que solo obtendrá solución no trivial si se requiere que,

$$\operatorname{sen}\left(2\pi\sqrt{\lambda}\right) = 0 \Longrightarrow 2\pi\sqrt{\lambda} = n\pi, \qquad n = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Resolviendo para λ y vemos que obtenemos exactamente los mismos autovalores positivos para este BVP que obtuvimos en el ejemplo anterior.

$$\lambda_n = \left(\frac{n}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{4}, \qquad n = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Sin embargo, las autofunciones que corresponden a estos valores propios son,

$$y_n(x) = \cos\left(\frac{nx}{2}\right), \quad n = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Por lo tanto, para este BVP obtenemos cosenos para autofunciones correspondientes a valores propios positivos.

Ahora el segundo caso.

$\lambda = 0$

La solución general es,

$$y(x) = C_1 + C_2 x$$

La aplicación de la primera condición de contorno da,

$$0 = y'(0) = C_2.$$

Usando esto, la solución general es entonces,

$$y(x) = C_1.$$

y observe que esto satisfará trivialmente la segunda condición de contorno,

$$0 = y'(2\pi) = 0.$$

Por lo tanto, a diferencia del primer ejemplo, $\lambda = 0$ es un valor propio para este BVP y la autofunción correspondiente a este autovalor es,

$$y(x) = 1$$

Una vez más, tenga en cuenta que hemos dejado caer la constante arbitraria para las funciones propias.

Finalmente cuidemos el tercer caso.

$\lambda < 0$

La solución general aquí es,

$$y(x) = C_1 \cosh\left(\sqrt{-\lambda}x\right) + C_2 \operatorname{senh}\left(\sqrt{-\lambda}x\right).$$

Aplicando la primera condición de frontera, se tiene:

$$0 = y'(0) = \sqrt{-\lambda}C_1 \operatorname{senh}(0) + \sqrt{-\lambda}C_2 \cosh(0) \Longrightarrow C_2 = 0.$$

Aplicando la segunda condición de frontera, se tiene:

$$0 = y'(2\pi) = \sqrt{-\lambda}C_1 \operatorname{senh}\left(2\pi\sqrt{-\lambda}\right)$$

Como con el ejemplo anterior, sabemos de nuevo que $2\pi\sqrt{-\lambda} \neq 0$ y así $\operatorname{senh}\left(2\pi\sqrt{-\lambda}\right) \neq 0$.
Por lo tanto, debemos tener $C_1 = 0$.
Por lo tanto, para este BVP de nuevo no tenemos valores propios negativos.
En resumen, entonces tendremos los siguientes autovalores y funciones propias para este PVF.

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \frac{n^2}{4}, \qquad y_n(x) = \cos\left(\frac{nx}{2}\right), \qquad n = 1, 2, 3, 4, \ldots \\ \lambda_0 &= 0, \qquad y_0(x) = 1. \end{aligned}$$

Observe también que en realidad podemos combinar estos dos resultados si permitimos que n comience en cero en lugar de uno. Esto a menudo no sucederá, pero cuando sea posible lo aprovecharemos. Así que la lista de autovalores/autofunciones para este BVP es,

$$\lambda_n = \frac{n^2}{4}, \qquad y_n(x) = \cos\left(\frac{nx}{2}\right), \qquad n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Por lo tanto, en los dos ejemplos anteriores vimos que generalmente necesitamos considerar diferentes casos para λ, ya que diferentes valores a menudo llevan a diferentes soluciones generales. No se acerque demasiado a los casos que hicimos aquí. En su mayor parte estaremos resolviendo esta ecuación diferencial particular y así será tentador asumir que estos son siempre los casos que vamos a ver, pero hay PVF que requerirá otros casos diferentes.

Además, como vimos en los dos ejemplos, a veces uno o más de los casos no producen valores propios. Esto a menudo sucede, pero de nuevo no deberíamos leer nada en el hecho de que no tuvimos valores propios negativos para cualquiera de estas dos PVF. Hay PVP que tendrán valores propios negativos.

Echemos un vistazo a otro ejemplo con un conjunto muy diferente de condiciones de contorno. Éstas no son las condiciones fronterizas tradicionales que hemos estado mirando hasta este punto, pero veremos en el próximo capítulo cómo estos pueden surgir de ciertos problemas físicos.

Ejemplo 3. Encuentre todos los autovalores y autofunciones para la PVF siguiente.

$$y'' + \lambda y = 0 \qquad \text{y} \qquad y(-\pi) = y(\pi) \qquad \text{y} \qquad y'(-\pi) = y'(\pi).$$

Solución

Por lo tanto, en este ejemplo no vamos a especificar la solución o su derivada en la frontera. En lugar de eso, simplemente especificaremos que la solución debe ser la misma en los dos límites y la derivada de la solución también debe ser la misma en los dos límites. Además, este tipo de condición de contorno estará típicamente en un intervalo de la forma $[-L, L]$ en lugar de $[0, L]$ como hemos ha estado trabajando en este punto.

Como se mencionó anteriormente, este tipo de condiciones de contorno surgen muy naturalmente en ciertos problemas físicos y lo veremos en el próximo capítulo.

Como con los dos ejemplos anteriores, todavía tenemos los tres casos estándar a considerar.

$\lambda > 0$

La solución general para este caso es,

$$y(x) = C_1 \cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}x\right).$$

Aplicando la primera condición de contorno y usando el hecho de que el coseno es una función par (es decir, $\cos(-x) = \cos(x)$ y el seno es una función impar (es decir, $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$. Nos da,

$$\begin{aligned} C_1 \cos\left(-\sqrt{\lambda}\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(-\sqrt{\lambda}\right) &= C_1 \cos\left(\sqrt{\lambda}\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}\right) \\ C_1 \cos\left(-\sqrt{\lambda}\right) - C_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}\right) &= C_1 \cos\left(\sqrt{\lambda}\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}\right) \\ -C_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}\right) &= C_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}\right) \\ 0 &= 2C_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}\right). \end{aligned}$$

Esta vez, a diferencia de los dos ejemplos anteriores esto realmente no nos dice nada. Podríamos tener $\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}\right) = 0$, pero también es completamente posible, que tengamos también $C_2 = 0$.

Así que, vamos a seguir adelante y aplicar la segunda condición de frontera y ver si conseguimos algo de eso.

$$\begin{aligned}
-\sqrt{\lambda}C_1 \operatorname{sen}\left(-\pi\sqrt{\lambda}\right) + \sqrt{\lambda}C_2 \cos\left(-\pi\sqrt{\lambda}\right) &= -\sqrt{\lambda}C_1 \operatorname{sen}\left(-\pi\sqrt{\lambda}\right) + \sqrt{\lambda}C_2 \cos\left(\pi\sqrt{\lambda}\right) \\
\sqrt{\lambda}C_1 \operatorname{sen}\left(\pi\sqrt{\lambda}\right) + \sqrt{\lambda}C_2 \cos\left(\pi\sqrt{\lambda}\right) &= -\sqrt{\lambda}C_1 \operatorname{sen}\left(\pi\sqrt{\lambda}\right) + \sqrt{\lambda}C_2 \cos\left(\pi\sqrt{\lambda}\right) \\
\sqrt{\lambda}C_1 \operatorname{sen}\left(\pi\sqrt{\lambda}\right) &= -\sqrt{\lambda}C_1 \operatorname{sen}\left(\pi\sqrt{\lambda}\right) \\
2\sqrt{\lambda}C_1 \operatorname{sen}\left(\pi\sqrt{\lambda}\right) &= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos algo muy similar a lo que tuvimos después de aplicar la primera condición de frontera.

Puesto que asumimos que $\lambda > 0$ esto nos dice que o bien $\operatorname{sen}\left(\pi\sqrt{\lambda}\right) = 0$ o $C_1 = 0$.

Obsérvese, sin embargo, que si $\operatorname{sen}\left(\pi\sqrt{\lambda}\right) \neq 0$ entonces tendremos que tener $C_1 = C_2 = 0$ y obtendremos la solución trivial. Por lo tanto, necesitamos requerir que $\operatorname{sen}\left(\pi\sqrt{\lambda}\right) = 0$ y así, tal como hemos hecho con los dos ejemplos anteriores, podemos obtener ahora los valores propios,

$$\pi\sqrt{\lambda} = n\pi \Longrightarrow \lambda = n^2, \qquad n = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Recordando que $\lambda > 0$ podemos ver que necesitamos iniciar la lista de posibles valores de n en uno en lugar de cero.

Por lo tanto, ahora conocemos los autovalores para este caso, pero ¿qué pasa con las autofunciones. La solución para un valor propio dado es,

$$y(x) = C_1 \cos(nx) + C_2 \operatorname{sen}(nx)$$

y no tenemos razón para creer que cualquiera de las dos constantes sean cero o no nulas en este caso. En casos como estos tenemos dos conjuntos de funciones propias, una correspondiente a cada constante.

Los dos conjuntos de autofunciones para este caso son,

$$y_n(x) = \cos(nx), \qquad y_n(x) = \operatorname{sen}(nx), \qquad n = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Ahora el segundo caso.

$\lambda = 0$

La solución general es,

$$y(x) = C_1 + C_2 x.$$

La aplicación de la primera condición de contorno da,

$$\begin{aligned}
C_1 + C_2(-\pi) &= C_1 + C_2(\pi) \\
2\pi C_2 &= 0 \Longrightarrow C_2 = 0.
\end{aligned}$$

Usando esto la solución general es entonces,

$$y(x) = C_1.$$

y observe que esto trivialmente satisfará la segunda condición de contorno tal como vimos en el segundo ejemplo anterior. Por lo tanto, tenemos de nuevo $\lambda = 0$ como un autovalor para este PVF y la autofunción correspondiente a este autovalor es,

$$y(x) = 1.$$

Finalmente consideremos el tercer caso.

$\lambda < 0$

La solución general es,

$$y(x) = C_1 \cosh\left(\sqrt{-\lambda}x\right) + C_2 \operatorname{senh}\left(\sqrt{-\lambda}x\right).$$

La aplicación de la primera condición de contorno y utilizando el hecho de que el coseno hiperbólico es par y el seno hiperbólico es impar, obtenemos:

$$\begin{aligned}
C_1 \cosh\left(-\pi\sqrt{-\lambda}\right) + C_2 \operatorname{senh}\left(-\pi\sqrt{-\lambda}\right) &= C_1 \cosh\left(\pi\sqrt{-\lambda}\right) + C_2 \operatorname{senh}\left(\pi\sqrt{-\lambda}\right) \\
-C_2 \operatorname{senh}\left(-\pi\sqrt{-\lambda}\right) &= C_2 \operatorname{senh}\left(\pi\sqrt{-\lambda}\right) \\
2C_2 \operatorname{senh}\left(\pi\sqrt{-\lambda}\right) &= 0.
\end{aligned}$$

Ahora, en este caso suponemos que $\lambda < 0$ y por lo tanto sabemos que $\pi\sqrt{-\lambda} \neq 0$ que a su vez nos dice que $\operatorname{senh}\left(\pi\sqrt{-\lambda}\right) \neq 0$. Por lo tanto, debemos tener $C_2 = 0$.

Ahora apliquemos la segunda condición de contorno para obtener,

$$\begin{aligned}
\sqrt{-\lambda}C_1 \operatorname{senh}\left(-\pi\sqrt{-\lambda}\right) &= \sqrt{-\lambda}C_1 \operatorname{senh}\left(\pi\sqrt{-\lambda}\right) \\
2\sqrt{-\lambda}C_1 \operatorname{senh}\left(\pi\sqrt{-\lambda}\right) &= 0 \Longrightarrow C_1 = 0.
\end{aligned}$$

Por nuestra suposición sobre λ, de nuevo no tenemos otra opción que tener $C_1 = 0$.

Por lo tanto, en este caso la única solución es la solución trivial y por lo tanto, para este PVF de nuevo no tenemos valores propios negativos.

En resumen, entonces tendremos los siguientes autovalores y funciones propias para este PVF.

$$\begin{aligned}
\lambda_n &= n^2, \qquad y_n(x) = \operatorname{sen}(nx), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \\
\lambda_n &= n^2, \qquad y_n(x) = \cos(nx), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \\
\lambda_0 &= 0, \qquad y_0(x) = 1.
\end{aligned}$$

Tenga en cuenta que hemos establecido que para $\lambda > 0$ teníamos dos conjuntos de funciones propias, enumerándolas cada una por separado. Además, podemos combinar de nuevo los dos últimos en un conjunto de autovalores y funciones propias. Haciendo esto da el siguiente conjunto de autovalores y autofunciones.

$$\begin{aligned}
\lambda_n &= n^2, \qquad y_n(x) = \operatorname{sen}(nx), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \\
\lambda_n &= n^2, \qquad y_n(x) = \cos(nx), \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots
\end{aligned}$$

Una vez más tenemos un ejemplo sin valores propios negativos. Debemos enfatizar que esto depende de la ecuación diferencial con la que estamos trabajando y que habrá ejemplos en los que podemos obtener valores propios negativos.

Hasta ahora, solo hemos trabajado con una ecuación diferencial así que vamos a trabajar un ejemplo con una ecuación diferencial diferente.

Antes de trabajar en este ejemplo, notemos que seguiremos trabajando la gran mayoría de nuestros ejemplos con la única ecuación diferencial que hemos estado utilizando hasta este punto.

Ejemplo 4. Encuentre todos los autovalores y eigenfunctions para el PVF siguiente.

$$x^2y'' + 3xy' + \lambda y = 0, \qquad y(1) = 0, \qquad y(2) = 0.$$

Solución:

Esta es una ecuación diferencial de Euler y así sabemos que vamos a necesitar encontrar las raíces de la siguiente cuadrática

$$r(r-1) + 3r + \lambda = r^2 + 2r + \lambda = 0.$$

Las raíces de este cuadrático son,

$$r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4\lambda}}{2} = -1 \pm \sqrt{1 - \lambda}.$$

Ahora, vamos a tener algunos casos con los que trabajar aquí, sin embargo, no serán los mismos que los ejemplos anteriores. La solución dependerá de si las raíces son o no reales distintas, dobles o complejas y estos casos dependerán del signo/valor de $1-\lambda$. Así que, vamos a pasar por los casos.

$1-\lambda<0 \Longleftrightarrow \lambda>1$.

En este caso las raíces serán complejas y necesitaremos escribirlas de la siguiente manera para anotar la solución.

$$r_{1,2}=-1\pm\sqrt{1-\lambda}=-1\pm\sqrt{-(\lambda-1)}=-1\pm i\sqrt{\lambda-1}.$$

Escribiendo las raíces de esta manera sabemos que $\lambda-1>0$ y así $\lambda-$ es ahora un número real, que necesitamos para escribir la siguiente solución,

$$y(x)=C_1x^{-1}\cos\left(\ln(x)\sqrt{\lambda-1}\right)+C_2x^{-1}\operatorname{sen}\left(\ln(x)\sqrt{\lambda-1}\right)$$

La aplicación de la primera condición de frontera nos da,

$$0=y(1)=C_1\cos(0)+C_2\operatorname{sen}(0)=C_1\Longrightarrow C_1=0.$$

La segunda condición de contorno nos da,

$$0=y(2)=\frac{1}{2}C_2\operatorname{sen}\left(\ln(2)\sqrt{\lambda-1}\right)$$

Para evitar la solución trivial para este caso, requeriremos,

$$\operatorname{sen}\left(\ln(2)\sqrt{\lambda-1}\right)=0\Longrightarrow\ln(2)\sqrt{\lambda-1}=n\pi,\qquad n=1,2,3,4,\ldots$$

Esto es mucho más complicado de una condición de lo que hemos visto hasta este punto, pero aparte de eso hacemos lo mismo. Por lo tanto, la resolución de λ nos da el siguiente conjunto de valores propios para este caso.

$$\lambda_n=1+\left(\frac{n\pi}{\ln 2}\right)^2,\qquad n=1,2,3,4,\ldots$$

Tenga en cuenta que tenemos que empezar los valores de n en uno y no en cero para asegurarse de que tenemos $\lambda>1$ como asumimos para este caso.

Las eigenfunciones que corresponden a estos valores propios son,

$$y_n(x)=x^{-1}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ln 2}\ln(x)\right),\qquad n=1,2,3,4,\ldots$$

Ahora el segundo caso.

$1-\lambda=0\Longleftrightarrow\lambda=1$.

En este caso tenemos una raíz doble de $r_{1,2}=-1$ y así la solución es,

$$y(x)=C_1x^{-1}+C_2x^{-1}\ln x.$$

La aplicación de la primera condición de contorno da,

$$0=y(1)=C_1.$$

La segunda condición de contorno da,

$$0=y(2)=\frac{1}{2}C_2\ln(2)\Longrightarrow C_2=0.$$

Por lo tanto, tenemos solo la solución trivial para este caso y así $\lambda=1$ no es un valor propio.

Ahora analicemos el tercer caso (y el último).

$1-\lambda>0\Longleftrightarrow\lambda<1$

Este caso tendrá dos raíces reales distintas y la solución es,

$$y(x)=C_1x^{-1+\sqrt{1-\lambda}}+C_2x^{-1-\sqrt{1-\lambda}}.$$

La aplicación de la primera condición de contorno da,

$$0=y(1)=C_1+C_2\Longrightarrow C_2=-C_1.$$

Nuestra solución se convierte entonces en,

$$y(x) = C_1 x^{-1+\sqrt{1-\lambda}} - C_1 x^{-1-\sqrt{1-\lambda}}.$$

La aplicación de la segunda condición de contorno da,

$$0 = y(2) = C_1 2^{-1+\sqrt{1-\lambda}} - C_1 2^{-1-\sqrt{1-\lambda}} = C_1 \left(2^{-1+\sqrt{1-\lambda}} - 2^{-1-\sqrt{1-\lambda}}\right).$$

Ahora, porque sabemos que $\lambda \neq 1$ para este caso los exponentes en los dos términos en el paréntesis no son los mismos y por lo que el término entre paréntesis no es cero. Esto significa que solo podemos tener $C_1 = C_2 = 0$ y, en este caso, solo tenemos la solución trivial y no hay valores propios para los cuales $\lambda < 1$.

Los únicos valores propios para este PVF vienen entonces del primer caso.

Por lo tanto, hemos trabajado un ejemplo utilizando una ecuación diferencial diferente de la estándar que hemos estado utilizando hasta este punto. Sin embargo, como vimos en el trabajo, el proceso básico fue prácticamente el mismo. Determinamos que hubo un número de casos (tres aquí, pero no siempre serán tres) que dieron diferentes soluciones. Examinamos cada caso para determinar si las soluciones no triviales eran posibles y si así se encuentran los autovalores y autofunciones correspondientes a ese caso.

Así, hemos trabajado varios ejemplos de autovalores y autofunciones en esta sección. Antes de salir de esta sección necesitamos notar una vez más que hay una gran variedad de problemas diferentes que podemos trabajar aquí y que realmente solo hemos mostrado un puñado de ejemplos y por lo tanto, debe quedar claro que no hemos tratado todo.

Capítulo 4

Métodos operacionales: operador D

En esta parte veremos una introducción a los métodos basados en el operador derivación D que nos proporciona un nuevo método para encontrar soluciones particulares.

4.1. El operador diferencial D

Un "operador" lo podemos definir como un objeto matemático que toma una función y nos devuelve otra. Por ejemplo la operación de derivar hace precisamente esto. Dada la función $y = f(x)$ nos devuelve otra función $y' = \dfrac{df}{dx}$ que llamamos derivada de la función original. Lo que hacemos a continuación es definir el operador asociado a la derivación.

Definición 4.1 *El operador D aplicado a la función y, Dy, devuelve la derivada de la función: $Dy = y'$.*

Aplicando el operador D repetidas veces obtenemos las derivadas sucesivas de la función:

$$D(Dy) = D^2 y = y'', \qquad D(D^2 y) = D^3 y = y''', ..., D^n y = y^{(n)}.$$

Como ya sabemos, la operación inversa de la derivación es la integración; parece pues lógico definir:

Definición 4.2 *El operador D^{-1} aplicado a la función $f(x)$, $D^{-1} f(x)$, devuelve la función primitiva (integral indefinida) de la función: $D^{-1} f(x) = \int f(x)\, dx$.*

Aplicando el operador D^{-1} repetidas veces obtenemos las integrales reiteradas:

$$D^{-n} f(x) = \underbrace{\int ... \int}_{n \text{ veces}} f(x) \underbrace{dx \cdots dx}_{n \text{ veces}}.$$

Recordemos que la derivación es una operación lineal: $(C_1 f(x) + C_2 g(x))' = C_1 f'(x) + C_2 g'(x)$, por lo tanto el operador D también será lineal. Podemos is más allá y definir polinomios en D. Los definiremos aplicándolos a ecuaciones diferenciales lineales.

Definición 4.3 *Dada una ecuación diferencial $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ definimos su operador diferencial $P(D)$ sustituyendo cada derivada $y^{(k)}$ por su operador D^k.*

Ejemplo. El operador diferencial correspondiente a la ecuación diferencial $y^{(4)} - xy'' + 2e^x y' + 10y - x = 0$ es $P(D) = D^4 - xD^2 + 2e^x D + 10$, de forma que la ecuación se puede escribir como $L(D)y - x = 0$.

Veamos ahora algunas propiedades de los operadores diferenciales $L(D)$ que nos servirán para resolver ecuaciones diferenciales.

Estudiemos el efecto de los operadores $(D + a)$ y $(D - a)$ sobre la función exponencial $y = e^{rx}$.

Teorema 4.1 *1. $(D + a)e^{rx} = (r + a)e^{rx}$.*

2. $(D - a)e^{rx} = (r - a)e^{rx}$.

Demostración. En este caso es fácil ver, derivando, que se cumple:

$$\begin{aligned}(D+a)e^{rx} &= re^{rx}+ae^{rx}=(r+a)e^{rx}\\ (D-a)e^{rx} &= re^{rx}-ae^{rx}=(r-a)e^{rx}.\end{aligned}$$

Veamos ahora el efecto de los operadores $(D+a)$ y $(D-a)$ sobre la función $y=e^{rx}f(x)$, donde $f(x)$ es una función derivable cualquiera.

Teorema 4.2 *Si $f(x)$ es una función derivable cualquiera, entonces*

1. $(D+a)e^{rx}f(x)=e^{rx}(D+r+a)f(x)$;
2. $(D-a)e^{rx}f(x)=e^{rx}(D+r-a)f(x)$.

Demostración. Derivando obtenemos:

$$\begin{aligned}(D+a)e^{rx}f(x) &= re^{rx}f(x)+e^{rx}f'(x)+ae^{rx}f(x)=e^{rx}(rf(x)+f'(x)+af(x)=e^{rx}(D+r+a)f(x);\\ (D-a)e^{rx}f(x) &= re^{rx}f(x)+e^{rx}Df-ae^{rx}f(x)=e^{rx}(r+f'(x)-a)=e^{rx}(D+r-a)f(x).\end{aligned}$$

Vemos que los operadores $(D+a)$ y $(D-a)$ aplicados al factor e^{rx} causan que el factor "pase al otro lado" y se modifica el operador sumándole r. Si tenemos un polinomio $P(D)$ que puede descomponerse en producto de binomios, entonces podemos aplicar reiteradamente este teorema.

Ejemplo. El operador $L(D)=D^2-1$ se descompone como $L(D)=(D-1)(D+1)$, luego para calcular $L(D)e^{5x}\cos(x)$ hacemos:

$$\begin{aligned}(D+1)e^{5x}\cos(x) &= e^{5x}(D+6)\cos(x);\\ L(D)e^{5x}\cos(x) &= (D-1)e^{5x}(D+6)\cos(x)=e^{5x}(D+4)(D+6)\cos(x).\end{aligned}$$

Teorema 4.3 *Si $L(D)=a_nD^n+\cdots+a_1D+a_0$ entonces $L(D)e^x=e^xL(1)$*

Este teorema nos indica el efecto de $L(D)$ sobre la función exponencial $y=e^x$. La función exponencial $y=e^x$ viene a ser el "elemento neutro" del operador D, pues $De^x=e^x$.

Demostración. Dado que $D^ke^x=e^x$, se sigue que Aplicando esta propiedad a un polinomio $L(D)=a_nD^n+\cdots+a_1D+a_0$ resulta

$$\begin{aligned}L(D)e^x &= \left(a_nD^n+\cdots+a_1D+a_0\right)e^x=a_nD^ne^x+\cdots+a_1De^x+a_0e^x\\ &= a_ne^x+\cdots+a_1e^x+a_0e^x=e^x\left(a_n+\cdots+a_1+a_0\right)=e^xL(1).\end{aligned}$$

Si en vez de e^x tenemos e^{rx} y dado que $D^ke^{rx}=r^ke^x$, entonces obtenemos la expresión más general

$$L(D)e^{rx}=a_nr^ne^{rx}+\cdots+a_1re^{rx}+a_0e^{rx}=e^{rx}(a_nr^n+\cdots+a_1r+a_0)=e^{rx}L(r).$$

Tenemos entonces el siguiente:

Lemma 4.4 *Si $f\in C^n(I)$ y $a\in\mathbb{R}$ (o $a\in\mathbb{C}$) entonces:*

1. $D^n(e^{ax}f(x))=e^{ax}(D+a)^nf(x)$.
2. $D^n(e^{ax})=e^{ax}a^n$

Demostración. Veamos 1. Por inducción:

$$n=1,\quad D(e^{ax}f(x))=e^{ax}Df(x)+f(x)ae^{ax}=e^{ax}(D+a)f(x)$$

Supongamos que se cumple para $n=k$:

$$D^k(e^{ax}f(x))=e^{ax}(D+a)^kf(x)$$

y veamos que se cumple para $n=k+1$. En efecto, teniendo en cuenta la hipótesis de inducción para $n=k$, y el resultado establecido para $n=1$, se tiene

$$\begin{aligned}D^{k+1}(e^{ax}f(x)) &= D^kD(e^{ax}f(x))=D^k(e^{ax}(D+a)f(x))=e^{ax}(D+a)^k(D+a)f(x)\\ &= e^{ax}(D+a)^{k+1}f(x)\end{aligned}$$

Veamos 2. Por inducción:

$$n = 1, \qquad D(e^{ax}) = ae^{ax}.$$

Supongamos que se cumple para $n = k$:

$$D^k(e^{ax}) = a^k e^{ax},$$

y veamos que se cumple para $n = k+1$. En efecto, teniendo en cuenta la hipótesis de inducción para $n = k$ y el resultado para $n = 1$, se tiene

$$D^{k+1}(e^{ax}) = D^k D(e^{ax}) = D^k(ae^{ax}) = a(D^k e^{ax}) = a(a^k e^{ax}) = a^{k+1}e^{ax}.$$

El siguiente Teorema, llamado teorema básico de los operadores, nos permite sacar una exponencial que está dentro de un operador.

Teorema 4.5 *(Teorema Básico de Operadores).Si $f \in C^n(I)$ y $L(D)$ es un operador diferencial lineal y $a \in \mathbb{R}$ (o $a \in \mathbb{C}$) entonces:*

1. $L(D)(e^{ax}f(x)) = e^{ax}L(D+a)f(x).$ (1.1)
2. $L(D)e^{ax} = L(a)e^{ax}.$ (1.2)

Demostración:
1.

$$\begin{aligned}
L(D)(e^{ax}f(x)) &= (a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + ... + a_1(x)D + a_0(x)D^0)(e^{ax}f(x)) \\
&= a_n(x)D^n(e^{ax}f(x)) + a_{n-1}(x)D^{n-1}(e^{ax}f(x)) + ... + a_1(x)D(e^{ax}f(x)) + a_0(x)e^{ax}f(x) \\
&= a_n(x)e^{ax}(D+a)^n f(x) + a_{n-1}(x)e^{ax}(D+a)^{n-1}f(x) + ... + a_1(x)e^{ax}(D+a)f(x) \\
&\quad + a_0(x)e^{ax}f(x) \\
&= e^{ax}(a_n(x)(D+a)^n + a_{n-1}(x)(D+a)^{n-1} + ... + a_1(x)(D+a) + a_0(x))f(x) \\
&= e^{ax}L(D+a)f(x).
\end{aligned}$$

Nota: Para ingresar una expresión exponencial dentro de un operador, utilizamos la siguiente expresión,

$$e^{ax}L(D)f(x) = L(D-a)(e^{ax}f(x)) \qquad (1.3)$$

Ejemplo. Comprobar que $(D+2)(D-2)^3(x^2e^{2x}) = 0$.
Solución:

$$(D+2)(D-2)^3(x^2e^{2x}) = e^{2x}(D+2+2)(D+2-2)^3x^2 = e^{2x}(D+4)D^3x^2 = 0.$$

Ejemplo. Comprobar que $(D-3)^n(e^{3x}x^n) = n!e^{3x}$.
Solución:

$$(D-3)^n(e^{3x}x^n) = e^{3x}(D+3-3)^n x^n = e^{3x}D^n x^n = n!e^{3x}.$$

Ejemplo. Entrar la exponencial dentro del operador: $e^{-3x}(D-1)(D-3)x$
Solución:

$$e^{-3x}(D-1)(D-3)x = [D-(-3)-1]\,[D-(-3)-3])e^{-3x}x) = (D+2)D(e^{-3x}x)$$

Ejemplo. Obtener la siguiente derivada $\dfrac{d^3}{dx^3}(8e^{3x}) + 8\dfrac{d^2}{dx^2}(8e^{3x}) + 20(8e^{3x})$.
Factorizando en esta expresión $8e^{3x}$ y sustituyendo las derivadas por el operador derivada correspondiente tendremos:

$$\left[\frac{d^3}{dx^3} + 8\frac{d^2}{dx^2} + 20\right](8e^{3x}) = \left(D^3 + 8D^2 + 20\right)(8e^{3x}).$$

Aplicando la ecuación (1.1) el resultado es:

$$\frac{d^3}{dx^3}(8e^{3x}) + 8\frac{d^2}{dx^2}(8e^{3x}) + 20(8e^{3x}) = \left[(3)^3 + 8\,(3)^2 + 20\right](8e^{3x}) = 952e^{3x}.$$

Ejemplo. Obtener la siguiente derivada

$$\frac{d^3}{dx^3}(8e^{-3x}) + 8\frac{d^2}{dx^2}(8e^{-3x}) + 20(8e^{-3x}).$$

Factorizando en esta expresin $8e^{-3x}$ y sustituyendo las derivadas por el operador derivada correspondiente tendremos:

$$\left[\frac{d^3}{dx^3} + 8\frac{d^2}{dx^2} + 20\right](8e^{-3x}) = \left(D^3 + 8D^2 + 20\right)(8e^{-3x})$$

Aplicando la ecuación (1.2) el resultado es:

$$\begin{aligned}
\frac{d^3}{dx^3}(8e^{-3x}) + 8\frac{d^2}{dx^2}(8e^{-3x}) + 20(8e^{-3x}) &= \left(D^3 + 8D^2 + 20\right)(8e^{-3x}) \\
&= \left[(-3)^3 + 8(-3)^2 + 20\right](8e^{-3x}) = 520e^{-3x}.
\end{aligned}$$

En lo que sigue aplicaremos el operador $L(D)$ a la resolución de ecuaciones diferenciales lineales a coeficientes constantes.

Ejemplo. integración de ecuaciones homogéneas de coeficientes constantes

Una ecuación homogénea se expresa como $L(D)y = 0$. Suponiendo que $L(D)$ puede descomponerse en producto de binomios (esto es, si el polinomio tiene todas sus raíces reales, que pueden ser múltiples), tendremos:

$$\begin{aligned}
L(D) &= a_0(D - r_1)^{m_1}(D - r_2)^{m_2} \cdots (D - r_k)^{m_k}\}; \\
L(D)y &= 0 \Longleftrightarrow a_0(D - r_1)^{m_1}(D - r_2)^{m_2} \cdots (D - r_k)^{m_k} y = 0.
\end{aligned}$$

Esta ecuación se descompone en k ecuaciones:

$$\begin{aligned}
(D - r_1)^{m_1} y &= 0 \\
(D - r_2)^{m_2} y &= 0 \\
&\vdots \\
(D - r_k)^{m_k} y &= 0.
\end{aligned}$$

Multiplicamos cada una de ellas por el factor exponencial e^{-mx}, queda:

$$\begin{aligned}
e^{-r_1 x}(D - r_1)^{m_1} y &= 0 \\
e^{-r_2 x}(D - r_2)^{m_2} y &= 0 \\
&\vdots \\
e^{-r_k x}(D - r_k)^{m_k} y &= 0.
\end{aligned}$$

Aplicando a cada una la propiedad 3 las simplificamos y resolvemos:

$$\begin{aligned}
e^{-r_1 x}(D - r_1)^{m_1} y &= D^{m_1} e^{-r_1 x} y = 0 \Longrightarrow e^{-r_1 x} y = Q_{m_1 - 1}(x) \\
e^{-r_2 x}(D - r_2)^{m_2} y &= D^{m_2} e^{-r_2 x} y = 0 \Longrightarrow e^{-r_2 x} y = Q_{m_2 - 1}(x) \\
&\vdots \\
e^{-r_k x}(D - r_k)^{m_k} y &= D^{m_k} e^{-r_k x} y = 0 \Longrightarrow e^{-r_k x} y = Q_{m_k - 1}(x).
\end{aligned}$$

donde los $Q_{m-1}(x)$ son polinomios de grado $m - 1$, pues entonces la derivada $m - \acute{e}sima$ será cero: $D^m Q_{m-1}(x) = 0$. Despejando las y de cada ecuación y combinándolas obtenemos la solución general:

$$y = e^{r_1 x} Q_{m_1 - 1}(x) + e^{r_2 x} Q_{m_2 - 1}(x) + \cdots + e^{r_k x} Q_{m_k - 1}(x).$$

Ejemplo. Integrar $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0$. El operador es $L(D) = D^3 - 2D^2 - 5D + 6$, lo descomponemos en producto de factores simples, $L(D) = (D-1)(D+2)(D-3)$, todos con multiplicidad 1, luego para cada factor el polinomio Q es de grado 0 (una constante), y la solución general es $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{3x}$.

Consideremos ahora funciones de tipo senoidal y cosenoidal como: $\operatorname{sen}(ax+b)$, $\cos(ax+b)$, $\operatorname{sen}(ax)$, $\cos(ax)$, donde a y b son números reales.

Sea $f(x) = \operatorname{sen}(ax+b)$ Aplicando sucesivamente el operador derivada a esta función hasta la cuarta derivada tendremos:

$$
\begin{aligned}
D\operatorname{sen}(ax+b) &= \frac{d}{dx}\operatorname{sen}(ax+b) = a\cos(ax+b) && \text{(a)}\\
D^2\operatorname{sen}(ax+b) &= \frac{d^2}{dx^2}\operatorname{sen}(ax+b) = -a^2\operatorname{sen}(ax+b) && \text{(b)}\\
D^3\operatorname{sen}(ax+b) &= \frac{d^3}{dx^3}\operatorname{sen}(ax+b) = -a^3\cos(ax+b) && \text{(c)}\\
D^4\operatorname{sen}(ax+b) &= \frac{d^4}{dx^4}\operatorname{sen}(ax+b) = a^4\operatorname{sen}(ax+b) && \text{(d)}
\end{aligned}
$$

De las expresiones anteriores se observa que la función trigonométrica $\operatorname{sen}(ax+b)$ se repite en (b) y (d) donde D^2 es sustituida por $-a^2$ y D^4 por $(-a^2)^2 = a^4$.

4.2. Operadores inversos

Dada la ecuación diferencial $L(D)y = f(x)$, donde $L(D)$ es un operador diferencial lineal de coeficientes constantes y $f(x)$ es un polinomio o exponencial o seno o coseno o sumas finitas de productos finitos de las anteriores, es conveniente resolver la ecuación diferencial por el método de los operadores inversos (es un método que sustituye el método de coeficientes indeterminados), este método también sirve para resolver integrales.

Definición 4.4 *Dada la ecuación diferencial $L(D)y = f(x)$ de coeficientes constantes, definimos el operador inverso $L^{-1}(D) = \frac{1}{L(D)}$, como el operador tal que: $L^{-1}(D)f(x)$ es una solución particular de la ecuación diferencial, es decir, $y_p = L^{-1}(D)f(x)$.*

Nota:

1. $L(D)L^{-1}(D) =$ operador identidad y $L^{-1}(D)L(D) =$ operador identidad.
2. Solución general: $y = y_h + y_p = y_h + L^{-1}(D)f(x)$.

Teorema 4.6 *Si y_1 y y_2 son soluciones particulares de la ecuación diferencial $L(D)y = f(x)$, entonces estas dos soluciones difieren en una solución que está en el núcleo de $L(D)$.*

Demostración: sea $y = y_1 - y_2$, veamos que y pertenece al núcleo de $L(D)$.

En efecto
$$L(D)y = L(D)(y_1 - y_2) = L(D)y_1 - L(D)y_2 = f(x) - f(x) = 0,$$
luego y pertenece al núcleo de $L(D)$.

Teorema 4.7 *Si $L(D) = D^n$ y $h(x)$ es una función continua, entonces una solución particular de la ecuación diferencial $D^n y = h(x)$ es*

$$y_p = \underbrace{\int\int\cdots\int\int}_{n\ veces} h(x)\underbrace{dx dx\cdots dx dx}_{n\ veces}$$

Ejemplo. Encontrar una solución particular de $y'' + 4y' + 4y = e^{-2t}$.

Solución. Aquí, $L(D) = D^2 + 4D + 4 = (D+2)^2$, que tiene -2 como una raíz doble; usando (2), tenemos $L''(D) = 2$, por lo que $L''(-2) = 2$, luego

$$y_p = \frac{t^2 e^{-2t}}{2}.$$

Teorema 4.8 *Una solución particular de $L(D)y = e^{ax}$ es;*

1. $y_p = \dfrac{e^{ax}}{L(a)}$, *si* $L(a) \neq 0.$

2. $\dfrac{x^p e^{ax}}{L^{(p)}(a)}$ *si* $L(a) = 0.$

Demostración.

1. Que $y_p = \dfrac{e^{ax}}{L(a)}$es una solución particular de $L(D)\, y = e^{ax}$ se sigue inmediatamente. En efecto:

$$L(D)\, y_p = L(D)\, \frac{e^{ax}}{L(a)} = \frac{1}{L(a)} L(D)\, e^{ax} = \frac{L(a)\, e^{ax}}{L(a)} = e^{ax}.$$

2. En este caso, comenzamos notando que decir que el polinomio $L(D)$ tiene el número a como una raíz de multiplicidad p significa que

$$L(D) = \phi(D)\,(D-a)^p\,, \text{ con } \phi(a) \neq 0. \qquad (*)$$

Primero probemos que (*) implica

$$L^{(p)}(a) = \phi(a)\, p!.$$

Para probar esto, sea k el grado de $\phi(D)$, y escribámoslo en potencias de $(D-a)$:

$$\begin{aligned} \phi(D) &= \phi(a) + c_1(D-a) + c_2(D-a)^2 + \cdots + c_k(D-a)^k\,; \text{ entonces} \\ L(D) &= \phi(a)(D-a)^s + c_1(D-a)^{s+1} + c_2(D-a)^{s+2} + \cdots + c_k(D-a)^{s+k}\,; \\ L^{(p)}(D) &= \phi(a)\, s! + \text{ potencias positivas de } (D-a)\,; \text{ sustituyendo } D \text{ por } a \text{ en ambos} \\ & \quad \text{miembros se tiene (3)..} \end{aligned}$$

Usando $L^{(p)}(a) = \phi(a)\, p!$. podemos probar (2) fácilmente. En efecto:

$$\begin{aligned} L(D)\, \frac{x^p e^{ax}}{L^{(p)}(a)} &= \frac{e^{ax}}{L^{(p)}(a)} L(D+a)\, x^p, \\ &= \frac{e^{ax}}{L^{(p)}(a)} \phi(D+a)\, D^p x^p \\ &= \frac{e^{ax}}{\phi(a)\, p!} \phi(D+a)\, p! \\ &= \frac{e^{ax}}{\phi(a)\, p!} \phi(a)\, p! = e^{ax}. \end{aligned}$$

Note que

$$\phi(D+a)\, p! = \left(\phi(a) + c_1 D + \cdots + c_k D^k\right) p! = \phi(a)\, p!.$$

Ejemplo.
Hallar una solución particular de la ecuación diferencial $\left(D^2+1\right) y = e^{2x}$.
Solución.

$$\left(D^2+1\right) y = e^{2x} \Longleftrightarrow L(D)\, y = e^{2x}.$$

Recordemos que

$$L(D)\, e^{ax} = L(a)\, e^{ax} = e^{ax} L(a)\,,$$

de donde

$$\frac{1}{L(D)} e^{ax} = \frac{e^{ax}}{L(a)}, \text{ si } L(a) \neq 0.$$

Se sigue entonces que

$$\left(D^2+1\right) y = e^{2x} \Longrightarrow y_p = \frac{1}{D^2+1} e^{2x} \Longrightarrow y_p = \frac{1}{2^2+1} e^{2x} \Longrightarrow y_p = \frac{1}{5} e^{2x}.$$

La solución general de la ecuación diferencial es: $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + \dfrac{1}{5} e^{2x}$.

Observación. Si $L(a) = 0$, entonces $L(D)$ contiene el factor $(D - a)$ digamos p veces. Se sigue entonces que

$$L(D) = \phi(D)(D - a)^p, \text{ con } \phi(a) \neq 0.$$

para encontrar $L(D)$ primero notar que:

$$(D - a)^p (x^p e^{ax}) = e^{ax} (D + a - a)^p (x^p) = e^{ax} D^p (x^p) = p! e^{ax}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \phi(D)(D-a)^p (x^p e^{ax}) &= \phi(D) e^{ax} (D + a - a)^p (x^p) = \phi(D) e^{ax} D^p (x^p) \\ &= \phi(D) e^{ax} p! = p!\ \phi(D) e^{ax} = p!\ \phi(a) e^{ax}. \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\left[\frac{1}{\phi(D)(D-a)^p}\right] e^{ax} = \frac{x^p}{p!} \frac{e^{ax}}{\phi(a)}, \text{ con } \phi(a) \neq 0.$$

Teorema 4.9 *Dado $L(D)y = e^{ax} f(x)$ donde $f \in C^n(I)$ y $a \in \mathbb{R}$ (o $a \in \mathbb{C}$), entonces una solución particular de la ecuación diferencial es*

$$y_p = e^{ax} \frac{1}{L(D+a)} f(x).$$

Ejemplo. Hallar la solución general de $(D - 3)^2 y = 48xe^{3x}$.
Solución: La ecuación característica asociada a la ecuación diferencial lineal homogénea asociada:

$$(m - 3)^2 = 0 \Rightarrow m = 3 \quad \text{(con multiplicidad dos)}.$$

Luego

$$y_h = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}.$$

Hallemos una solución particular y_p:

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{L(D)} f(x) = \frac{1}{(D-3)^2}(48xe^{3x}) = 48e^{3x} \frac{1}{(D+3-3)^2} x = 48e^{3x} \frac{1}{D^2} x = 48e^{3x} \int\int x dx dx \\ &= 48e^{3x} \int \frac{x^2}{2} dx = 48e^{3x} \frac{x^3}{6} = 8x^3 e^{3x}. \end{aligned}$$

La solución general es:

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + 8x^3 e^{3x}.$$

Nota: como $L(D) = a_n D^n + ... + a_1 D + a_0$, entonces su polinomio característico es $P_n(m) = a_n m^n + ... + a_1 m + a_0$.

Por lo anterior podemos afirmar que el espacio de los operadores lineales de coeficientes constantes es isomorfo al espacio de los polinomios de coeficientes reales y constantes.

Teorema 4.10 *(Para polinomios). Si $L(D) = D + a$, con $a \neq 0$ y $h(x)$ un polinomio de grado n, entonces*

$$\frac{1}{D+a} h(x) = \frac{1}{a}\left[1 - \frac{D}{a} + \frac{D^2}{a^2} - \frac{D^3}{a^3} + \frac{D^4}{a^4} + \cdots + (-1)^n \frac{D^n}{a^n} + \cdots\right] h(x).$$

Demostración. Por la Nota anterior, el operador $D + a$ es equivalente al polinomio $m + a$ y por tanto las expresiones racionales $\dfrac{1}{D+a}$ y $\dfrac{1}{m+a}$ son equivalentes.
Por división sintética se tiene que:

$$\frac{1}{m+a} = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{1 + \frac{m}{a}}\right] = \frac{1}{a}\left[1 - \frac{m}{a} + \frac{m^2}{a^2} - \frac{m^3}{a^3} + \frac{m^4}{a^4} + \cdots + (-1)^n \frac{m^n}{a^n} + \cdots\right].$$

Luego,

$$\frac{1}{D+a} = \frac{1}{a}\left[1 - \frac{D}{a} + \frac{D^2}{a^2} - \frac{D^3}{a^3} + \frac{D^4}{a^4} + \cdots + (-1)^n \frac{D^n}{a^n} + \cdots\right].$$

Como $h(x)$ es un polinomio de grado n, sus anuladores son D^{n+1}, D^{n+2}, . . ., es decir, $D^{n+k}h(x) = 0$ para $k = 1, 2, ...$

Luego,

$$\frac{1}{D+a}h(x) = \frac{1}{a}\left[1 - \frac{D}{a} + \frac{D^2}{a^2} - \frac{D^3}{a^3} + \frac{D^4}{a^4} + \cdots + (-1)^n \frac{D^n}{a^n}\right] h(x).$$

Ejemplo. Resolver la siguiente integral $\int x^4 e^{2x}dx$.

Solución:

$$\begin{aligned}
\int x^4 e^{2x} dx &= \frac{1}{D}x^4 e^{2x} = e^{2x}\frac{1}{D+2}x^4 = e^{2x}\frac{1}{2}\left[1 - \frac{D}{2} + \frac{D^2}{2^2} - \frac{D^3}{2^3} + \frac{D^4}{2^4}\right] x^4 \\
&= \frac{e^{2x}}{2}\left[1 - \frac{D}{2} + \frac{D^2}{4} - \frac{D^3}{8} + \frac{D^4}{16}\right] x^4 \\
&= \frac{e^{2x}}{2}\left[x^4 - \frac{4x^3}{2} + \frac{12x^2}{4} - \frac{24x}{8} + \frac{24}{16}\right] + C.
\end{aligned}$$

Teorema 4.11 *(Para polinomios). Si $L(D)$ es un operador diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes y $h(x)$ es un polinomio de grado r, entonces una solución particular de la ecuación diferencial $L(D)y = h(x)$ es de la forma*

$$y_p = \frac{1}{L(D)}h(x) = (b_0 + b_1 D + b_2 D^2 + ... + b_r D^r)h(x),$$

donde $b_0 + b_1 D + b_2 D^2 + ... + b_r D^r$ es el resultado de dividir

$$\frac{1}{L(D)} = \frac{1}{a_0 + a_1 D + a_2 D^2 + ... + a_n D^n} = b_0 + b_1 D + b_2 D^2 + ... + b_r D^r + \cdots$$

Ejemplo. Hallar la solución general de $y''' - y = xe^x$.

Solución:

Ecuación característica: $m^3 - 1 = (m-1)(m^2 + m + 1) = 0$ y sus raíces son $m = 1$, $m = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Luego la solución homogénea y particular son

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_3 e^{-x/2}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

$$\begin{aligned}
y_p &= \frac{1}{D^3 - 1}xe^x = e^x\frac{1}{(D+1)^3 - 1}x = e^x\frac{1}{D^3 + 3D^2 + 3D + 1 - 1}x = e^x\frac{1}{D(D^2 + 3D + 3)}x \\
&= e^x\frac{1}{D^2 + 3D + 3}\frac{1}{D}x = e^x\frac{1}{D^2 + 3D + 3}\int x dx = \frac{e^x}{2}\frac{1}{D^2 + 3D + 3}x^2 = \frac{e^x}{2}\left[\frac{1}{3} - \frac{D}{3} + \frac{2}{9}D^2\right] x^2 \\
&= \frac{e^x}{6}\left(x^2 - 2x + \frac{4}{3}\right)
\end{aligned}$$

La solución es

$$y = yh + yp = C_1 e^x + C_2 e^{-x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_3 e^{-x/2}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{e^x}{6}\left(x^2 - 2x + \frac{4}{3}\right).$$

El teorema siguiente también es válido para la función coseno.

Teorema 4.12 *Si a, $L(-a^2)$ y $\frac{1}{L(-a^2)}$ son reales, entonces:*

1. *$L(D^2)\operatorname{sen}(ax) = L(-a^2)\operatorname{sen}(ax)$.*
2. *$\frac{1}{L(D^2)}\operatorname{sen}(ax) = \frac{1}{L(-a^2)}\operatorname{sen}(ax)$, si $L(-a^2) \neq 0$.*

3. $\dfrac{1}{L(D^2)}\operatorname{sen}(ax) = x^k \dfrac{1}{L^{(k)}(D^2)}\operatorname{sen}(ax)$, *si* $L(-a^2) = 0$, *siendo* k *el orden de multiplicidad del factor* $(D^2 + a^2)$ *que anula a* $L(D^2)$.

   Nota. Los resultados 1 y 2 del teorema son válidos para el $\cos(ax)$.

Demostración.

Demostremos por inducción sobre n que

$$D^{2n}(\operatorname{sen}(ax)) = \left(-a^2\right)^n \operatorname{sen}(ax).$$

En efecto, para $n = 1$, veamos que $D^2(\operatorname{sen}(ax)) = \left(-a^2\right)\operatorname{sen}(ax)$. Como $D(\operatorname{sen}(ax)) = a\cos(ax)$ y volviendo a derivar se obtiene $D^2(\operatorname{sen}(ax)) = -a^2\operatorname{sen}(ax)$ o sea que para $n = 1$ se cumple que $D^2(\operatorname{sen}(ax)) = -a^2\operatorname{sen}(ax)$.

Ahora supongamos que se cumple para $n = k$, es decir, se cumple que:

$$D^{2k}(\operatorname{sen}(ax)) = \left(-a^2\right)^k \operatorname{sen}(ax).$$

y demostremos que se cumple para $n = k + 1$.

Se sigue que:

$$\begin{aligned}
D^{2(k+1)}(\operatorname{sen}(ax)) &= D^{2k+2}(\operatorname{sen}(ax)) = D^{2k}D^2(\operatorname{sen}(ax)) = D^{2k}\left(-a^2\right)\operatorname{sen}(ax)\\
&= \left(-a^2\right)D^{2k}\operatorname{sen}(ax) = \left(-a^2\right)D^{2k}\operatorname{sen}(ax) = \left(-a^2\right)\left(-a^2\right)^k\operatorname{sen}(ax)\\
&= \left(-a^2\right)^{k+1}\operatorname{sen}(ax).
\end{aligned}$$

Demostremos ahora el primer resultado:

$$\begin{aligned}
L(D^2)\operatorname{sen}(ax) &= (a_0 + a_2D^2 + a_4D^4 + \cdots + a_{2n}D^{2n})\operatorname{sen}(ax)\\
&= a_0\operatorname{sen}(ax) + a_2D^2\operatorname{sen}(ax) + a_4D^4\operatorname{sen}(ax) + \cdots + a_{2n}D^{2n}\operatorname{sen}(ax)\\
&= a_0\operatorname{sen}(ax) + a_2\left(-a^2\right)\operatorname{sen}(ax) + a_4\left(-a^2\right)^2\operatorname{sen}(ax) + \cdots + a_{2n}\left(-a^2\right)^n\operatorname{sen}(ax)\\
&= L(-a^2)\operatorname{sen}(ax).
\end{aligned}$$

Para la parte 2, utilicemos el resultado de la parte 1, $L(D^2)\operatorname{sen}(ax) = L(-a^2)\operatorname{sen}(ax)$, aplicamos $L^{-1}(D^2)$ a ambos lados:

$$\begin{aligned}
L(D^2)\operatorname{sen}(ax) &= L(-a^2)\operatorname{sen}(ax) \Longrightarrow L^{-1}(D^2)L(D^2)\operatorname{sen}(ax) = L^{-1}(D^2)L(-a^2)\operatorname{sen}(ax)\\
&\Longrightarrow \operatorname{sen}(ax) = L(-a^2)L^{-1}(D^2)\operatorname{sen}(ax) \Longrightarrow L^{-1}(D^2)\operatorname{sen}(ax) = \frac{\operatorname{sen}(ax)}{L(-a^2)}\\
&\Longrightarrow \frac{1}{L(D^2)}\operatorname{sen}(ax) = \frac{1}{L(-a^2)}\operatorname{sen}(ax), \text{ con } L(-a^2) \neq 0.
\end{aligned}$$

Ejemplos.

1. Hallar la solución particular de $(D^4 - 5D^2 + 4)y = \operatorname{sen} 3x$.

   Solución:

$$\begin{aligned}
y_p &= \frac{1}{D^4 - 5D^2 + 4}\operatorname{sen}(3x) = \frac{1}{(D^2)^2 - 5D^2 + 4}\operatorname{sen}(3x) = \frac{1}{(-9)^2 - 5(-9) + 4}\operatorname{sen}(3x)\\
&= \frac{1}{130}\operatorname{sen}(3x)
\end{aligned}$$

2. Obtener: $\left(D^2 + 2D - 6\right)e^{2x}\operatorname{sen}(4x)$

   Solución

   Empleando la ecuación (1.8) podemos reducir la expresión anterior a:

$$\begin{aligned}
\left(D^2 + 2D - 6\right)e^{2x}\operatorname{sen}(4x) &= e^{2x}[(D+2)^2 + 2(D+2) - 6]\operatorname{sen}(4x) = e^{2x}[D^2 + 4D + 4 + 2D + 4 - 6]\operatorname{sen}(4x)\\
&= e^{2x}[D^2 + 6D + 2]\operatorname{sen}(4x)
\end{aligned}$$

Aplicándole a esta última expresión la segunda propiedad del operador diferencial se obtiene:

$$\begin{aligned}(D^2+2D-6)e^{2x}\operatorname{sen}(4x) &= e^{2x}(-16+6D+2)\operatorname{sen}(4x)\\ &= e^{2x}(6D-14)\operatorname{sen}(4x)\\ &= e^{2x}\left[6D\operatorname{sen}(4x)-14\operatorname{sen}(4x)\right]\\ &= e^{2x}\left[24\cos(4x)-14\operatorname{sen}(4x)\right]\end{aligned}$$

Finalmente

$$(D^2+2D-6)e^{2x}\operatorname{sen}(4x)=24e^{2x}\cos(4x)-14e^{2x}\operatorname{sen}(4x).$$

3. **Ejemplo.** Obtener: $(D^2+2D-6)e^{2x}\cos(4x)$.

   Solución.

   Empleando la ecuación (1.8) podemos reducir la expresión anterior a:

$$\begin{aligned}(D^2+2D-6)e^{2x}\cos(4x) &= e^{2x}[(D+2)^2+2(D+2)-6]\cos(4x)\\ &= e^{2x}[D^2+6D+2]\cos(4x)\end{aligned}$$

   Aplicándole a esta última expresión la segunda propiedad el operador diferencial se obtiene:

$$\begin{aligned}.(D^2+2D-6)e^{2x}\cos(4x) &= e^{2x}(-16+6D+2)\cos(4x)\\ &= e^{2x}(6D-14)\cos(4x)\\ &= e^{2x}\left[6D\cos(4x)-14\cos(4x)\right]\\ &= e^{2x}\left[-24\operatorname{sen}(4x)-14\cos(4x)\right]\end{aligned}$$

   Finalmente

$$(D^2+2D-6)e^{2x}\cos(4x)=-24e^{2x}\operatorname{sen}(4x)-14e^{2x}\cos(4x).$$

Teorema 4.13 *Si a, $L_1(-a^2)$ y $L_2(-a^2)$ son reales, entonces:*

1. $L(D)\operatorname{sen}(ax)=L_1(-a^2)\operatorname{sen}(ax)+D\ L_2(-a^2)\operatorname{sen}(ax)$.
2. $\dfrac{1}{L(D)}\operatorname{sen}(ax)=\left[\dfrac{1}{L_1(D^2)+DL_2(D^2)}\right]\operatorname{sen}(ax)=\left[\dfrac{1}{L_1(-a^2)+D\ L_2(-a^2)}\right]\operatorname{sen}(ax)$.

Demostración.

Notemos en primer lugar que el operador diferencial lineal $L(D)=a_0+a_1D+a_2D^2+...+a_nD^n$, con $a_n\neq 0$, de orden n con coeficientes constantes se puede escribir como sigue:

$$L(D)=L_1(D^2)+DL_2(D^2).$$

En efecto,

$$L(D)=a_0+a_1D+a_2D^2+...+a_nD^n=(a_0+a_2D^2+a_4D^4+...)+D(a_1+a_3D^2+a_5D^4+...)$$

y denotando por $L_1(D^2)=a_0+a_2D^2+a_4D^4+...$ y $L_2(D^2)=a_1+a_3D^2+a_5D^4+...$, se obtiene

$$L(D)=L_1(D^2)+DL_2(D^2)$$

$$\begin{aligned}L\,(D) &= \left[L_1(D^2)+DL_2(D^2)\right]\operatorname{sen}(ax)=L_1(D^2)\operatorname{sen}(ax)+DL_2(D^2)\operatorname{sen}(ax)\\ &= L_1(-a^2)\operatorname{sen}(ax)+DL_2(-a^2)\operatorname{sen}(ax)=L_1(-a^2)\operatorname{sen}(ax)+L_2(-a^2)D\operatorname{sen}(ax)\\ &= L_1(-a^2)\operatorname{sen}(ax)+L_2(-a^2)\,(a\cos(ax))\\ &= L_1(-a^2)\operatorname{sen}(ax)+L_2(-a^2)\,(a\cos(ax))\end{aligned}$$

Ejemplo. Hallar la solución particular para $(D^2+2D+2)y=e^x\cos(2x)$

Solución:

$$
\begin{aligned}
y_p &= \frac{1}{D^2+2D+2}e^x\cos(2x) = e^x\left[\frac{1}{(D+1)^2+2(D+1)+2}\right]\cos(2x)\\
&= e^x\left[\frac{1}{D^2+4D+5}\right]\cos(2x) = e^x\left[\frac{1}{(-2^2)+4D+5}\right]\cos(2x)\\
&= e^x\left[\frac{1}{4D+1}\right]\cos(2x) = e^x\left[\frac{1}{4D+1}\right]\left[\frac{4D-1}{4D-1}\right]\cos(2x)\\
&= e^x\left[\frac{4D-1}{16D^2-1}\right]\cos(2x) = e^x\left[\frac{4D-1}{16(-2^2)-1}\right]\cos(2x)\\
&= e^x\left[\frac{4D-1}{-65}\right]\cos(2x) = -\frac{e^x}{65}(4D-1)\cos(2x)\\
&= -\frac{e^x}{65}\left[-8\operatorname{sen}(2x)-\cos(2x)\right] = \frac{e^x}{65}\left[8\operatorname{sen}(2x)+\cos(2x)\right]
\end{aligned}
$$

Es decir, $y_p = \frac{e^x}{65}\left[8\operatorname{sen}(2x)+\cos(2x)\right]$.

Ejemplo. Realizar la siguiente operación

$$\frac{d^3}{dx^3}\operatorname{sen}(3x+2) + \frac{d^2}{dx^2}\operatorname{sen}(3x+2) + \frac{d}{dx}\operatorname{sen}(3x+2).$$

Factorizando la función $\operatorname{sen}(3x+2)$ y utilizando el operador derivada (D) se obtiene:

$$\left(D^3+D^2+D\right)\operatorname{sen}(3x+2).$$

Al desarrollar se tiene:

$$
\begin{aligned}
\left[\left(D^2\right)D+D^2+D\right]\operatorname{sen}(3x+2) &= \left[\left(D^2\right)D+D^2+D\right]_{D^2=-9}\operatorname{sen}(3x+2)\\
&= \left[(-9)D+(-9)+D\right]_{D^2=-9}\operatorname{sen}(3x+2) = (-8D-9)\operatorname{sen}(3x+2)\\
&= (-8D-9)\operatorname{sen}(3x+2) = -8D\operatorname{sen}(3x+2)-9\operatorname{sen}(3x+2)\\
&= -24\cos(3x+2)-9\operatorname{sen}(3x+2).
\end{aligned}
$$

Ejemplo. Realizar la siguiente operación

$$\frac{d^3}{dx^3}\cos(2x-4) + \frac{d^2}{dx^2}\cos(2x-4) + \frac{d}{dx}\cos(2x-4).$$

Factorizando la función $\cos(2x-4)$ y utilizando el operador derivada (D) se obtiene:

$$\left(D^3+D^2+D\right)\cos(2x-4).$$

Al desarrollar se tiene:

$$
\begin{aligned}
\left[\left(D^2\right)D+D^2+D\right]\cos(2x-4) &= \left[\left(D^2\right)D+D^2+D\right]_{D^2=-4}\cos(2x-4)\\
&= \left[(-4)D+(-4)+D\right]_{D^2=-4}\cos(2x-4) = (-3D-4)\cos(2x-4)\\
&= -3D\cos(2x-4)-4\cos(2x-4)\\
&= 6\operatorname{sen}(2x-4)-4\cos(2x-4).
\end{aligned}
$$

Ejemplos varios

Resolver $\left(D^2+5D+4\right)y = e^{2x}+x^2e^{-2x}$.

Solución. La ecuación característica es: $\lambda^2+5\lambda+4=0$, cuyas raíces son -4 y -1. Por lo tanto la solución de la ecuación diferencial lineal homogénea asociada es: $y_h = C_1e^{-4x}+C_2e^{-x}$. Busquemos una solución particular $y_p = y_p$.

$$\left(D^2+5D+4\right)y = e^{2x}+x^2e^{-2x} \Longrightarrow y_p = \frac{1}{D^2+5D+4}\left(e^{2x}+x^2e^{-2x}\right).$$

La solución particular y_p se puede escribir como $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$, donde:

$$y_{p_1} = \frac{1}{D^2+5D+4}\left(e^{2x}\right) \quad \text{y} \quad y_{p_2} = \frac{1}{D^2+5D+4}\left(x^2e^{-2x}\right).$$

Se sigue entonces que:

Aplicando el teorema $\frac{1}{L(D)}e^{ax} = \frac{1}{L(a)}e^{ax}$, si $L(a) \neq 0$.

$$y_{p_1} = \frac{1}{D^2+5D+4}\left(e^{2x}\right) = \frac{1}{2^2+5(2)+4}e^{2x} = \frac{1}{18}e^{2x}.$$

Aplicando el teorema $\dfrac{1}{L(D)}\left[e^{ax}f(x)\right] = e^{ax}\left(\dfrac{1}{L(D+a)}\right)f(x)$:

$$\begin{aligned}
y_{p_2} &= \frac{1}{D^2+5D+4}\left(x^2e^{-2x}\right) = e^{-2x}\frac{1}{(D-2)^2+5(D-2)+4}\left(x^2\right)\\
&= e^{-2x}\frac{1}{D^2+D-2}\left(x^2\right) = -\frac{e^{-2x}}{2}\frac{1}{1-\dfrac{D}{2}-\dfrac{D^2}{2}}\left(x^2\right) = -\frac{e^{-2x}}{2}\left(1+\frac{D}{2}+\frac{3D^2}{4}+\cdots\right)x^2\\
&= -\frac{e^{-2x}}{2}\left(x^2+x+\frac{3}{2}+0+0+\cdots\right), \text{ pues } D^kx^2 = 0 \text{ para } k > 2.\\
&= -\frac{e^{-2x}}{2}\left(x^2+x+\frac{3}{2}\right).
\end{aligned}$$

Haciendo la división larga y parando en D^2 se tiene:

$$\begin{array}{rrrr|l}
1 & & & & 1-\frac{D}{2}-\frac{D^2}{2}\\ \cline{5-5}
-1 & +\frac{D}{2} & +\frac{D^2}{2} & & 1+\frac{D}{2}+\frac{3D^2}{4}\\ \cline{1-3}
 & \frac{D}{2} & +\frac{D^2}{2} & & \\
 & -\frac{D}{2} & +\frac{D^2}{4} & +\frac{D^3}{4} & \\ \cline{2-4}
 & & \frac{3D^2}{4} & +\frac{D^3}{4} & \\
 & & -\frac{3D^2}{4} & +\frac{3D^3}{8} & +\frac{3D^4}{8}\\ \cline{3-5}
\end{array}$$

Alternativamente, podemos usar la expansión en series

$$\frac{1}{1-u} = 1+u+u^2+u^3+\cdots+u^k+\cdots$$

para expandir el operador $\dfrac{1}{1-\dfrac{D}{2}-\dfrac{D^2}{2}}$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-\dfrac{D}{2}-\dfrac{D^2}{2}} &= \frac{1}{1-\left(\dfrac{D}{2}+\dfrac{D^2}{2}\right)}\\
&= 1+\left(\frac{D}{2}+\frac{D^2}{2}\right)+\left(\frac{D}{2}+\frac{D^2}{2}\right)^2+\left(\frac{D}{2}+\frac{D^2}{2}\right)^3+\cdots\\
&= 1+\frac{D}{2}+\frac{D^2}{2}+\frac{D^2}{4}+\frac{D^3}{3}+\frac{D^4}{4}+\left(\frac{D}{2}+\frac{D^2}{2}\right)^3+\cdots\\
&= 1+\frac{D}{2}+\frac{3D^2}{4}+\frac{D^3}{3}+\frac{D^4}{4}+\left(\frac{D}{2}+\frac{D^2}{2}\right)^3+\cdots. \text{ Eliminando los términos arriba de } D^2,\\
&= 1+\frac{D}{2}+\frac{3D^2}{4}
\end{aligned}$$

Por lo tanto una solución particular es

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = \frac{1}{18}e^{2x} - \frac{e^{-2x}}{2}\left(x^2 + x + \frac{3}{2}\right).$$

Técnica para aplicar a un polinomio $C_0 + C_1x + \cdots C_kx^k$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{L(D)}\left(C_0 + C_1x + \cdots C_kx^k\right) &= \frac{1}{a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1D + a_0}\left(C_0 + C_1x + \cdots C_kx^k\right) \\
&= \frac{1}{a_0 + a_1D + \cdots + a_{n-1}D^{n-1} + a_nD^n}\left(C_0 + C_1x + \cdots C_kx^k\right) \\
&= \frac{1}{a_0}\frac{1}{1 + \frac{a_1}{a_0}D + \frac{a_2}{a_0}D^2 + \frac{a_3}{a_0}D^3 + \cdots + \frac{a_n}{a_0}D^n}\left(C_0 + C_1x + \cdots C_kx^k\right) \\
&= \frac{1}{a_0}\left(1 + b_1D + b_2D^2 + b_3D^3 + \cdots + b_kD^k + \cdots\right)\left(C_0 + C_1x + \cdots C_kx^k\right) \\
&= \frac{1}{a_0}\left(1 + b_1D + b_2D^2 + b_3D^3 + \cdots + b_kD^k\right)\left(C_0 + C_1x + \cdots C_kx^k\right)
\end{aligned}$$

Paramos el desarrollo en D^k. La evaluación de $\left(1 + b_1D + b_2D^2 + b_3D^3 + \cdots + b_kD^k\right)\left(C_0 + C_1x + \cdots C_kx^k\right)$ se hace usando:

$$\begin{aligned}
Dx^q &= qx^{q-1},\ D^2x^q = q(q-1)x^{q-2},\ ,D^3x^q = q(q-1)(q-2)x^{q-3},\ \ldots,\ D^qx^q = q(q-1)(q-2)\cdots 2\cdot 1, \\
D^px^q &= 0,\ \text{para } p > q.
\end{aligned}$$

La expansión del operador puede ser obtenida usando la división larga o el desarrollo en series y esta expansión se usa solo cuando aplicamos a polinomios.

Caso especial.

$$\frac{1}{a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1D + a_0}(C_0) = \frac{C_0}{a_0}.$$

Ejemplo. Encontrar una solución particular de $\left(D^2 + 6D + 9\right)y = \left(x^3 + 2x\right)e^{-3x}$.

Solución. Usando el método del operador inverso, una solución particular está dada por:

$$\begin{aligned}
y_p &= \left[\frac{1}{D^2 + 6D + 9}\right]\left(x^3 + 2x\right)e^{-3x} = \left[\frac{1}{(D+3)^2}\right]\left(x^3 + 2x\right)e^{-3x} \\
&= e^{-3x}\left[\frac{1}{([D-3]+3)^2}\right]\left(x^3 + 2x\right) = e^{-3x}\left[\frac{1}{D^2}\right]\left(x^3 + 2x\right) \\
&= e^{-3x}\left[\frac{1}{D}\right]\int\left(x^3 + 2x\right)dx = e^{-3x}\left[\frac{1}{D}\right]\left(\frac{x^4}{4} + x^2\right) \\
&= e^{-3x}\int\left(\frac{x^4}{4} + x^2\right)dx \\
&= e^{-3x}\left(\frac{x^5}{20} + \frac{x^3}{3}\right), \text{ pues } D^{-1} \text{ es el operador integral y } D^{-2}f(x) \text{ es integrar dos veces.} \\
y_p &= e^{-3x}\left(\frac{x^5}{20} + \frac{x^3}{3}\right)
\end{aligned}$$

Ejemplo. Encontrar una solución particular de $\left(D^2 - 2D + 2\right)y = x^2e^x\cos(2x)$.

Solución:

De la fórmula de Euler: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$, se sigue que $\cos(2x) = \operatorname{Re}\left(e^{i2x}\right)$ y $e^x\cos(2x) = \operatorname{Re}\left(e^{(1+2i)x}\right)$. Aplicando el método del operador inverso, una solución particular es:

$$
\begin{aligned}
y_p &= \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{D^2-2D+2}\left[x^2e^{(1+2i)x}\right]\right\} = \operatorname{Re}\left\{e^{(1+2i)x}\frac{1}{\left[D+(1+2i)\right]^2-2\left[D+(1+2i)\right]+2}\left(x^2\right)\right\} \\
&= \operatorname{Re}\left\{e^{(1+2i)x}\frac{1}{D^2+2\left(1+2i\right)D+\left(1+2i\right)^2-2D-2\left(1+2i\right)+2}\left(x^2\right)\right\} \\
&= \operatorname{Re}\left\{e^{(1+2i)x}\frac{1}{D^2+2\left(1+2i\right)D+1+4i-4-2D-2-4i+2}\left(x^2\right)\right\} \\
&= \operatorname{Re}\left\{e^{(1+2i)x}\frac{1}{D^2+\left(2+4i\right)D-3-2D}\left(x^2\right)\right\} \\
&= \operatorname{Re}\left\{e^{(1+2i)x}\frac{1}{D^2+\left(2-2+4i\right)D-3}\left(x^2\right)\right\} = \operatorname{Re}\left\{e^{(1+2i)x}\frac{1}{D^2+4iD-3}\left(x^2\right)\right\} \\
&= \operatorname{Re}\left\{e^{(1+2i)x}\frac{1}{-3+4iD+D^2}\left(x^2\right)\right\} = \operatorname{Re}\left\{-\frac{1}{3}e^{(1+2i)x}\frac{1}{1-\frac{4i}{3}D-\frac{1}{3}D^2}\left(x^2\right)\right\} \\
&= \operatorname{Re}\left\{-\frac{1}{3}e^{(1+2i)x}\frac{1}{1-\left[\frac{4i}{3}D+\frac{1}{3}D^2\right]}\left(x^2\right)\right\} \\
&= \operatorname{Re}\left\{-\frac{1}{3}e^{(1+2i)x}\left[1+\left(\frac{4i}{3}D+\frac{1}{3}D^2\right)+\left(\frac{4i}{3}D+\frac{1}{3}D^2\right)^2+\cdots\right]\left(x^2\right)\right\} \\
&= \operatorname{Re}\left\{-\frac{1}{3}e^{(1+2i)x}\left[1+\frac{4i}{3}D+\frac{1}{3}D^2+\left(\frac{4i}{3}D\right)^2+\frac{8i}{9}D^3+\frac{1}{9}D^4+\cdots\right]\left(x^2\right)\right\} \\
&= \operatorname{Re}\left\{-\frac{1}{3}e^{(1+2i)x}\left[1+\frac{4i}{3}D+\frac{1}{3}D^2-\frac{16}{9}D^2+\frac{8i}{9}D^3+\frac{1}{9}D^4+\cdots\right]\left(x^2\right)\right\} \\
&= \operatorname{Re}\left\{-\frac{1}{3}e^{(1+2i)x}\left[1+\frac{4i}{3}D-\frac{13}{9}D^2\right]\left(x^2\right)\right\} = \operatorname{Re}\left\{-\frac{1}{3}e^{(1+2i)x}\left[x^2+\frac{8i}{3}x-\frac{26}{9}\right]\right\} \\
&= \operatorname{Re}\left\{-\frac{1}{3}e^{x}\left[\cos\left(2x\right)+i\operatorname{sen}\left(2x\right)\right]\left[x^2+\frac{8i}{3}x-\frac{26}{9}\right]\right\} \\
&= -\frac{1}{3}e^{x}\left(x^2\cos\left(2x\right)-\frac{8}{3}x\operatorname{sen}\left(2x\right)-\frac{26}{9}\cos\left(2x\right)\right).
\end{aligned}
$$

Ejemplo
Encontrar una solución particular de $\left(D^2+3D-4\right)y=6\operatorname{sen}\left(3x\right)$.
Solución.

$$
\begin{aligned}
\left(D^2+3D-4\right)y &= 6\operatorname{sen}\left(3x\right) \Longrightarrow y_p=\left[\frac{1}{D^2+3D-4}\right]6\operatorname{sen}\left(3x\right) \\
&\Longrightarrow y_p=\operatorname{Im}\left\{\left[\frac{6}{D^2+3D-4}\right]e^{3ix}\right\} \Longrightarrow y_p=\operatorname{Im}\left\{6\left[\frac{1}{\left(3i\right)^2+3\left(3i\right)-4}\right]e^{3ix}\right\} \\
&\Longrightarrow y_p=\operatorname{Im}\left\{6\left[\frac{1}{\left(3i\right)^2+3\left(3i\right)-4}\right]e^{3ix}\right\}. \text{ Aplicando } \frac{1}{L\left(D\right)}e^{ax}=\frac{1}{L\left(a\right)}e^{ax}, \text{ si } L\left(a\right)\neq 0. \\
&\Longrightarrow y_p=\operatorname{Im}\left\{6\left[\frac{1}{-13+9i}\right]e^{3ix}\right\} \Longrightarrow y_p=\operatorname{Im}\left\{\left[\frac{6\left(-13-9i\right)}{\left(-13+9i\right)\left(-13-9i\right)}\right]e^{3ix}\right\} \\
&\Longrightarrow y_p=\operatorname{Im}\left\{\left[\frac{6\left(-13-9i\right)}{\left(-13+9i\right)\left(-13-9i\right)}\right]\left(\cos\left(3x\right)+i\operatorname{sen}\left(3x\right)\right)\right\} \\
&\Longrightarrow y_p=\frac{2}{125}\operatorname{Im}\left\{\left(-13\cos 3x+9\operatorname{sen}\left(3x\right)\right)+i\left(-13\operatorname{sen}\left(3x\right)-9\cos\left(3x\right)\right)\right\} \\
&\Longrightarrow y_p=\frac{2}{125}\left(-13\operatorname{sen}\left(3x\right)-9\cos\left(3x\right)\right) \Longrightarrow y_p=-\frac{2}{125}\left[13\operatorname{sen}\left(3x\right)+9\cos\left(3x\right)\right].
\end{aligned}
$$

Observaciones:

1. Este enfoque implica manipulaciones de números complejos, que podría ser tedioso. Tenga en cuenta que $i^2 = -1$, $i^4 = 1$, $i^6 = -1, \ldots$

2. Cuando se trata solo de los términos de potencia par de D, uno puede evitar números complejos.

3. Dado que $\cos\beta x$ y $\operatorname{sen}\beta x$ están relacionados con $e^{i\beta x}$, al aplicar el teorema $\dfrac{1}{L(D)}e^{ax} = \dfrac{1}{L(a)}e^{ax}$, con $a = i\beta$ y $a^2 = (i\beta)^2 = -\beta^2$. Por lo tanto, tratando solo con términos de potencia par de D, se puede idear un método más sencillo como sigue:

$$y_p = \left[\frac{1}{D^2+3D-4}\right] 6\operatorname{sen}(3x).$$

Usando el teorema $\dfrac{1}{L(D)}e^{ax} = \dfrac{1}{L(a)}e^{ax}$ con $\operatorname{sen}(3x) = \operatorname{Im}\left(e^{i3x}\right)$, reemplazando D^2 con $(3i)^2 = -3^2$.

$$\begin{aligned}
y_p &= \frac{6}{D^2+3D-4}\operatorname{sen}(3x) = \frac{6}{-13+3D}\operatorname{sen}(3x) = \frac{6(-13-3D)}{(-13+3D)(-13-3D)}\operatorname{sen}(3x) \\
&= \frac{6(-13-3D)}{169-9D^2}\operatorname{sen}(3x) = \frac{6(-13-3D)}{169-9(-3^2)}\operatorname{sen}(3x) = \frac{6(-13-3D)}{250}\operatorname{sen}(3x) = \frac{3(-13-3D)}{125}\operatorname{sen}(3x) \\
y_p &= \frac{3(-13\operatorname{sen}(3x) - 3D\operatorname{sen}(3x))}{125} \Longrightarrow y_p = \frac{3(-13\operatorname{sen}(3x) - 9\cos(3x))}{125} \\
y_p &= -\frac{3}{125}(13\operatorname{sen}(3x) + 9\cos(3x))
\end{aligned}$$

Este procedimiento se resume en el siguiente teorema: note que $L(D)$ puede siempre ser escrito como $L(D) = L_1(D) + D\ L_2(D)$, así por ejemplo,

$$L(D) = 3D^3 + 2D^2 + D + 1 = \left(2D^2+1\right) + D\left(3D^2+1\right)$$

Teorema 4.14

$$\begin{aligned}
\frac{1}{L(D)}\operatorname{sen}(\beta x) &= \frac{1}{L_1(D^2) + D\ L_2(D^2)}\operatorname{sen}(\beta x), \quad \operatorname{sen}(\beta x) \quad \textit{y} \quad \cos(\beta x) \ \textit{están relacionados a } e^{i\beta x}. \\
&= \frac{1}{L_1\left(-\beta^2\right) + D\ L_2\left(-\beta^2\right)}\operatorname{sen}(\beta x), \ \textit{se remplaza } D^2 \textit{ por } (i\beta)^2 = -\beta^2. \\
&= \frac{\left[L_1\left(-\beta^2\right) - D\ L_2\left(-\beta^2\right)\right]}{\left[L_1\left(-\beta^2\right) + D\ L_2\left(-\beta^2\right)\right]\left[L_1\left(-\beta^2\right) - D\ L_2\left(-\beta^2\right)\right]}\operatorname{sen}(\beta x) \\
&= \frac{\left[L_1\left(-\beta^2\right) - D\ L_2\left(-\beta^2\right)\right]}{\left[L_1\left(-\beta^2\right)\right]^2 - D^2\ \left[L_2\left(-\beta^2\right)\right]^2}\operatorname{sen}(\beta x) \\
&= \frac{L_1\left(-\beta^2\right)\operatorname{sen}(\beta x) - D\ L_2\left(-\beta^2\right)\operatorname{sen}(\beta x)}{\left[L_1\left(-\beta^2\right)\right]^2 - \left(-\beta^2\right)\ \left[L_2\left(-\beta^2\right)\right]^2} \\
&= \frac{L_1\left(-\beta^2\right)\operatorname{sen}(\beta x) - L_2\left(-\beta^2\right)\ D\operatorname{sen}(\beta x)}{\left[L_1\left(-\beta^2\right)\right]^2 - \left(-\beta^2\right)\ \left[L_2\left(-\beta^2\right)\right]^2} \\
&= \frac{L_1\left(-\beta^2\right)\operatorname{sen}(\beta x) - \beta L_2\left(-\beta^2\right)\ \cos(\beta x)}{\left[L_1\left(-\beta^2\right)\right]^2 + \beta^2\ \left[L_2\left(-\beta^2\right)\right]^2}
\end{aligned}$$

Si $\left[L_1\left(-\beta^2\right)\right]^2 + \beta^2\ \left[L_2\left(-\beta^2\right)\right]^2 = 0$, use el teorema siguiente:

Teorema 4.15 *Si* $L(a) = 0$, $L'(a) = 0$, $L''(a) = 0$, ..., $L^{(p-1)}(a) = 0$, $L^{(p)}(a) \neq 0$, *es decir,* a *es una raíz de multiplicidad* p *de la ecuación característica* $L(\lambda) = 0$, *entonces*

$$\frac{1}{L(D)}e^{ax} = \frac{1}{L^{(p)}(a)}x^p e^{ax}.$$

Nota. Se calcula la derivada de orden p de $L(D)$, y se reemplaza D por a, multiplicando este resultado por x^p.

Resultado similar se tiene para $\dfrac{1}{L(D)}\cos(\beta x)$. En efecto:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{L(D)}\operatorname{sen}(\beta x) &= \frac{1}{L_1(D^2)+D\ L_2(D^2)}\cos(\beta x), \quad \operatorname{sen}(\beta x) \text{ y } \cos(\beta x) \text{ están relacionados a } e^{i\beta x}.\\
&= \frac{1}{L_1(-\beta^2)+D\ L_2(-\beta^2)}\cos(\beta x), \text{ se remplaza } D^2 \text{ por } (i\beta)^2=-\beta^2.\\
&= \frac{\left[L_1(-\beta^2)-D\ L_2(-\beta^2)\right]}{\left[L_1(-\beta^2)+D\ L_2(-\beta^2)\right]\left[L_1(-\beta^2)-D\ L_2(-\beta^2)\right]}\cos(\beta x)\\
&= \frac{\left[L_1(-\beta^2)-D\ L_2(-\beta^2)\right]}{\left[L_1(-\beta^2)\right]^2-D^2\ \left[L_2(-\beta^2)\right]^2}\cos(\beta x)\\
&= \frac{L_1(-\beta^2)\cos(\beta x)-D\ L_2(-\beta^2)\cos(\beta x)}{\left[L_1(-\beta^2)\right]^2-(-\beta^2)\ \left[L_2(-\beta^2)\right]^2}\\
&= \frac{L_1(-\beta^2)\cos(\beta x)-L_2(-\beta^2)\ D\cos(\beta x)}{\left[L_1(-\beta^2)\right]^2-(-\beta^2)\ \left[L_2(-\beta^2)\right]^2}\\
&= \frac{L_1(-\beta^2)\cos(\beta x)+\beta L_2(-\beta^2)\ \operatorname{sen}(\beta x)}{\left[L_1(-\beta^2)\right]^2+\beta^2\ \left[L_2(-\beta^2)\right]^2}
\end{aligned}$$

No es aconsejable memorizar el resultado del teorema 3, sino tratar el teorema como una técnica para encontrar una solución particular correspondiente a una función sinusoidal.

Ejemplo

Evaluar $y_p=\left[\dfrac{1}{D^2-4D+3}\right]\left[e^x(2\operatorname{sen}3x-3\cos 2x)\right].$

Solución.

$$\begin{aligned}
y_p &= \left[\frac{1}{D^2-4D+3}\right]\left[e^x(2\operatorname{sen}3x-3\cos 2x)\right]\\
&= e^x\left[\frac{1}{(D+1)^2-4(D+1)+3}\right](2\operatorname{sen}3x-3\cos 2x)\\
&= e^x\left[\frac{1}{D^2-2D}\right](2\operatorname{sen}3x-3\cos 2x)\\
&= e^x\left[\frac{1}{(-3^2)-2D}(2\operatorname{sen}3x)+\frac{1}{(-2^2)-2D}(-3\cos 2x)\right]\\
&= e^x\left[\frac{1}{-9-2D}(2\operatorname{sen}3x)+\frac{1}{-4-2D}(-3\cos 2x)\right]=e^x\left[\frac{-2}{9+2D}(\operatorname{sen}3x)+\frac{3}{4+2D}(\cos 2x)\right]\\
&= e^x\left[\frac{-2(9-2D)}{(9+2D)(9-2D)}(\operatorname{sen}3x)+\frac{3(4-2D)}{(4+2D)(4-2D)}(\cos 2x)\right]\\
&= e^x\left[\frac{-2(9-2D)}{(81-4D^2)}(\operatorname{sen}3x)+\frac{3(4-2D)}{(16-4D^2)}(\cos 2x)\right]\\
&= e^x\left[\frac{-2(9-2D)}{(81-4(-9))}(\operatorname{sen}3x)+\frac{3(4-2D)}{(16-4(-4))}(\cos 2x)\right]\\
&= e^x\left[\frac{-2(9\operatorname{sen}3x-6\cos 3x)}{117}+\frac{3(4\cos 2x+4\operatorname{sen}2x)}{32}\right]\\
&= e^x\left[-\frac{2}{39}(3\operatorname{sen}3x-2\cos 3x)+\frac{3}{8}(\cos 2x+\operatorname{sen}2x).\right]
\end{aligned}$$

Ejemplo

Resolver $\left(D^2+6D+9\right)y=72\operatorname{sen}^4 3x$.
Solución. La solución de la ecuación lineal homogénea es: $y_h=(C_1+C_2x)\,e^{-3x}$.
Usando identidades trigonométricas se tiene:

$$\begin{aligned}
72\operatorname{sen}^4 3x &= 72\left(\operatorname{sen}^2 3x\right)^2=72\left(\frac{1-\cos 6x}{2}\right)^2=18\left(1-2\cos 6x+\cos^2 6x\right)\\
&= 18\left(1-2\cos 6x+\frac{1+\cos 12x}{2}\right)=27-36\cos 6x+9\cos 12x.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_p &= \left[\frac{1}{D^2+6D+9}\right](27-36\cos 6x+9\cos 12x)\\
&= \left[\frac{1}{D^2+6D+9}\right](27)-36\left[\frac{1}{D^2+6D+9}\right](\cos 6x)+9\left[\frac{1}{D^2+6D+9}\right](\cos 12x)\\
&= \left(\frac{27}{9}\right)-36\left[\frac{1}{-6^2+6D+9}\right](\cos 6x)+9\left[\frac{1}{-12^2+6D+9}\right](\cos 12x)\\
&= \left(\frac{27}{9}\right)-36\left[\frac{1}{6D-27}\right](\cos 6x)+9\left[\frac{1}{-135+6D}\right](\cos 12x)\\
&= 3-12\left[\frac{1}{2D-9}\right](\cos 6x)+3\left[\frac{1}{2D-45}\right](\cos 12x)\\
&= 3-12\left[\frac{(2D+9)}{(2D-9)\,(2D+9)}\right](\cos 6x)+3\left[\frac{(2D+45)}{(2D-45)\,(2D+45)}\right](\cos 12x)\\
&= 3-12\left[\frac{(2D+9)}{4D^2-81}\right](\cos 6x)+3\left[\frac{(2D+45)}{(4D^2-2025)}\right](\cos 12x)\\
&= 3-12\left[\frac{(2D+9)}{4\left(-6^2\right)-81}\right](\cos 6x)+3\left[\frac{(2D+45)}{(4\left(-12^2\right)-2025)}\right](\cos 12x)\\
&= 3-12\left[\frac{(2D+9)}{-225}\right](\cos 6x)+3\left[\frac{(2D+45)}{2601}\right](\cos 12x)\\
&= 3-12\left[\frac{(2D\cos 6x+9\cos 6x)}{-225}\right]+3\left[\frac{(2D\cos 12x+45\cos 12x)}{2601}\right]\\
&= 3-12\left[\frac{(-12\operatorname{sen} 6x+9\cos 6x)}{-225}\right]+3\left[\frac{(-24\operatorname{sen} 12x+45\cos 12x)}{2601}\right]\\
&= =3-\frac{16}{25}\operatorname{sen} 6x+\frac{12}{25}\cos 6x+\frac{8}{289}\operatorname{sen} 12x-\frac{15}{289}\cos 12x.
\end{aligned}$$

4.2.1. Ejercicios

1. Evalúe $y_p=\dfrac{1}{(D-2)^3}e^{2x}$. Respuesta $y_p=\dfrac{1}{6}x^3e^{2x}$.

2. Resuelva $\left(D^2+4D+13\right)y=e^{-2x}\operatorname{sen} 3x$. Respuesta $y_p=\dfrac{1}{6}xe^{-2x}\cos 3x$.

3. Aplicar el siguiente operador $\dfrac{1}{D^4+5D^2+6}e^{2x}$ Respuesta: $\dfrac{e^{2x}}{42}$.

4. Aplicar el siguiente operador $\dfrac{1}{D^3+4D^2+5D+2}e^{-x}$ Respuesta: $\dfrac{x^2e^{-x}}{2}$.

5. Aplicar el siguiente operador $\dfrac{1}{D^4+4D^2+2}\operatorname{sen} x$ Respuesta: $-\operatorname{sen} x$.

6. Aplicar el siguiente operador $\dfrac{1}{D^5+8D^3+16D}\cos(2x)$ Respuesta: $-\dfrac{x^2}{64}\operatorname{sen}(2x)$.

7. Aplicar el siguiente operador $\dfrac{1}{D+3}\cos(2x)$ Respuesta: $\dfrac{2\operatorname{sen}(2x)+3\cos(2x)}{13}$.

8. Aplicar el siguiente operador $\dfrac{1}{D^2+2D+3}e^{-x}\operatorname{sen}x$ Respuesta: $e^{-x}\operatorname{sen}x$.

9. Aplicar el siguiente operador $\dfrac{1}{D^2+2D+3}xe^{2x}$ Respuesta: $\dfrac{xe^{2x}}{11}-\dfrac{6}{121}e^{2x}$.

10. Aplicar el siguiente operador $\dfrac{1}{-6D^2+4D+2}\left(x^2+6x+8\right)$ Respuesta: $\dfrac{1}{2}x^2+x+5$.

Ejemplo. Calcular $\dfrac{1}{D^2-2D+1}\dfrac{e^t}{t}$.
Solución.

$$\frac{1}{D^2-2D+1}\frac{e^t}{t}=e^t\frac{1}{(D+1)^2-2(D+1)+1}\frac{1}{t}=e^t\frac{1}{D^2+1+2D-2D-2+1}\frac{1}{t}=e^t\frac{1}{D^2}\frac{1}{t}.$$

Aplicando la definición $e^t\dfrac{1}{D^2}\dfrac{1}{t}=e^t\int\left(\int\dfrac{1}{t}dt\right)dt=e^t\int(\ln t)\,dt=e^t\left(t\ln t-t\right)=te^t\left(\ln t-1\right)$, la última integral se hace por partes.

Ejemplo. Calcular $\dfrac{1}{D^2-D-2}t^2e^{2t}$.
Solución.

$$\frac{1}{D^2-D-2}t^2e^{2t}=e^{2t}\frac{1}{(D+2)^2-(D+2)-2}t^2=e^{2t}\frac{1}{D^2+3D}t^2.$$

Para calcular $\dfrac{1}{D^2+3D}t^2$ se recurre a la siguiente técnica de desarrollo en serie de $\dfrac{1}{L(D)}$ en potencias crecientes: dividimos 1 por $L(D)$ para obtener un cociente $C(D)$ y un resto $R(D)$ que tenga grado superior al polinomio t^2, o sea, grado superior a 2:

$$\begin{array}{llll|l}
1 & & & & 3D+D^2 \\ \cline{5-5}
-1 & -\frac{1}{3}D & & & \frac{1}{3}D^{-1}-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}D \\ \cline{1-2}
 & -\frac{1}{3}D & & & \\
 & \frac{1}{3}D & +\frac{1}{9}D^2 & & \\ \cline{2-3}
 & & \frac{1}{9}D^2 & & \\
 & & -\frac{1}{9}D^2 & -\frac{1}{27}D^3 & \\ \cline{3-4}
 & & & -\frac{1}{27}D^3 &
\end{array}$$

Obtenemos $C(D)=\dfrac{1}{3}D^{-1}-\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{27}D$, $\quad R(D)=-\dfrac{1}{27}D^3$, o sea,

$$\frac{1}{3D+D^2}=\left(\frac{1}{3}D^{-1}-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}D\right)+\frac{-\frac{1}{27}D^3}{3D+D^2}.$$

Ahora lo aplicamos al polinomio t^2, teniendo en cuenta que $D^3t^2=0$ ya que la derivada es de orden superior al exponente:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{1}{3D+D^2}\right]t^2 &= \left(\frac{1}{3}D^{-1}-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}D\right)t^2+\frac{-\frac{1}{27}D^3}{3D+D^2}t^2=\frac{1}{3}\int t^2dt-\frac{1}{9}t^2+\frac{1}{27}Dt^2-\frac{\left(\frac{1}{27}D^3t^2\right)}{3D+D^2}\\
&= \frac{t^3}{9}-\frac{1}{9}t^2+\frac{2}{27}t-\frac{0}{3D+D^2}=\frac{t^3}{9}-\frac{1}{9}t^2+\frac{2}{27}t.
\end{aligned}$$

Nos queda:

$$\left[\frac{1}{D^2-D-2}\right]t^2e^{2t}=t^2=e^{2t}\left[\frac{1}{D^2+3D}\right]t^2=e^{2t}\left(\frac{t^3}{9}-\frac{1}{9}t^2+\frac{2}{27}t\right).$$

En general esto sucederá siempre: el resto de la división $1/L(D)$ anulará el polinomio, y no es necesario calcularlo cada vez.

Ejemplo. Encontrar una solución particular de $y'' - 2y' = (x^2 - 2x + 1)e^{-x}$.

Solución. Planteamos la ecuación con operadores D:

$$(D^2 - 2D)y = (x^2 - 2x + 1)e^{-x} \Longrightarrow y_p = \left[\frac{1}{D(D-2)}\right](x^2 - 2x + 1)e^{-x}$$

Aplicamos primero la propiedad 5:

$$\left[\frac{1}{D(D-2)}\right](x^2 - 2x + 1)e^{-x} = e^{-x}\left[\frac{1}{(D-1)^2 - 2(D-1)}\right](x^2 - 2x + 1) = \left[\frac{1}{D^2 - 4D + 3}\right](x^2 - 2x + 1)$$

Ahora dividimos $\dfrac{1}{L(D)}$ en potencias crecientes de D hasta obtener un resto con grado superior a 2, ya que el polinomio $Q(t)$ en este ejemplo es $x^2 - 2x + 1$, obtenemos:

$$\begin{array}{llll|l}
1 & & & & 3 - 4D + D^2 \\ \cline{5-5}
-1 & +\frac{4}{3}D & -\frac{1}{3}D^2 & & \frac{1}{3} + \frac{4}{9}D \\ \cline{1-3}
 & \frac{4}{3}D & -\frac{1}{3}D^2 & & \\
 & -\frac{4}{3}D & +\frac{16}{9}D^2 & -\frac{4}{3}D^3 & \\ \cline{2-4}
\end{array}$$

Entonces:

$$\frac{1}{D^2 - 4D + 3}(x^2 - 2x + 1) = \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{9}D\right)(x^2 - 2x + 1) = \frac{1}{3}(x^2 - 2x + 1) + \frac{4}{9}(2x - 2) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{9}x - \frac{5}{9}.$$

y la solución particular buscada es $y = e^{-x}\left(\dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{2}{9}x - \dfrac{5}{9}\right)$.

Si el término de la derecha de la ecuación es una suma de términos de la forma $e^{rx}Q(x)$, aplicando el principio de superposición de soluciones de las ecuaciones lineales encontramos una solución particular para cada término, y las sumamos todas.

Ejemplo. Encontrar una solución particular de $y'' - 2y' = (x^2 - 2x + 1)e^{-x} + xe^{2x}$.

Tenemos $P(D)y = F(x) + G(x)$, separamos dos problemas, el primero es $(D^2 - 2D)y = (x^2 - 2x + 1)e^{-x}$ que hemos resuelto en el ejemplo anterior; el segundo es $(D^2 - 2D)y = xe^{2x}$. Procedemos como antes:

$$\begin{aligned}
(D^2 - 2D)y &= xe^{2x} \Longrightarrow y = \left[\frac{1}{(D^2 - 2D)}\right](xe^{2x}) = e^{2x}\left[\frac{1}{(D+2)^2 - 2(D+2)}\right]x \\
&= e^{2x}\left[\frac{1}{D^2 - 4D + 3}\right]x = e^{2x}\left(\frac{1}{3}\right)x = \frac{1}{3}xe^{2x}.
\end{aligned}$$

En la división $\dfrac{1}{P(D)}$ hemos aprovechado la del problema anterior, pero ahora es más corta, pues el polinomio $Q(x) = x$ es de grado 1:

$$\begin{array}{lll|l}
1 & & & 3 - 4D + D^2 \\ \cline{4-4}
-1 & +\frac{4}{3}D & -\frac{1}{3}D^2 & \frac{1}{3} \\ \cline{1-3}
 & \frac{4}{3}D & -\frac{1}{3}D^2 & \\
\end{array}$$

Superponiendo las dos soluciones encontradas, obtenemos la solución particular requerida:

$$y = e^{-x}e^{-x}\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{9}x - \frac{5}{9}\right) + \frac{1}{3}xe^{2x}.$$

4.3. Generalización a otras ecuaciones

El método que hemos visto se puede generalizar a ecuaciones con el término de la derecha distinto de $e^{rx}Q(x)$, e incluso se puede aplicar a ecuaciones con coeficientes variables. Además, el factor exponencial e^{rx} también puede generalizarse con exponentes imaginarios e^{irx}; en este último caso aplicando la propiedad 1 se cumple que

$$L(D^2)e^{irx} = e^{irx}L((ir)^2) = e^{irx}L(-r^2).$$

Usando la identidad $e^{irx} = \cos(rt) + i\,\mathrm{sen}(rt)$ en la expresión anterior, e igualando partes reales e imagnarias, obtenemos una nueva propiedad del operador D:

$$\begin{aligned} L(D^2)\left(\cos(rt) + i\,\mathrm{sen}(rt)\right) &= L(D^2)\cos(rt) + L(D^2)i\,\mathrm{sen}(rt) = e^{irx}L(-r^2) \\ &= L(-r^2)\cos(rt) + L(-r^2)i\,\mathrm{sen}(rt) \end{aligned}$$

Lo que implica que

$$L(D^2)\cos(rt) = L(-r^2)\cos(rt); \qquad L(D^2)i\,\mathrm{sen}(rt) = L(-r^2)i\,\mathrm{sen}(rt)$$

Ejemplo. Empleamos exponentes complejos para simplificar la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \frac{1}{D^2-2D+2}te^t\cos t &= e^t\frac{1}{D^2+1}t\cos t = e^t\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{D^2+1}te^{it}\right) \\ &= e^t\,\mathrm{Re}\left(e^{it}\frac{1}{(D+i)^2+1}t\right) = e^t\,\mathrm{Re}\left(e^{it}\frac{1}{D^2+2iD}t\right) \end{aligned}$$

donde el símbolo Re significa "parte real de…"; ahora dividimos:

$$\begin{array}{ll|l} 1 & & 2iD + D^2 \\ \cline{3-3} -1 & -\frac{1}{2i}D & \frac{1}{2i}D^{-1} \\ \cline{1-2} & -\frac{1}{2i}D & \end{array}$$

entonces:

$$\begin{aligned} e^t\,\mathrm{Re}\left(e^{it}\frac{1}{D^2+2iD}t\right) &= e^t\,\mathrm{Re}\left(e^{it}\frac{1}{2i}D^{-1}t\right) = e^t\,\mathrm{Re}\left[\left(\frac{-\,\mathrm{sen}\,t}{2} + \frac{i}{2}\cos t\right)D^{-1}t\right] \\ &= e^t\left(\frac{-\,\mathrm{sen}\,t}{2}\right)\int tdt = -\frac{t^2}{4}e^t\,\mathrm{sen}\,t. \end{aligned}$$

4.3.1. Ejercicios

1. Resolver $y'' - 2y' = (x^3 - 2x + 1)e^{-x}$.
2. Resolver $y'' - 2y' = x^2 - 5$.
3. Resolver $y'' - 2y' + 2y = e^x\cos(x)$ usando exponenciales complejas para representar la función coseno.

   Ejemplo. Hallar una solución particular de $\left(D^2+1\right)y = \sin x$.

Solución: Utilicemos el operador inverso:

$$\left(D^2+1\right)y = \sin x \Longrightarrow y_p = \frac{1}{D^2+1}\sin x.$$

Como al reemplazar D^2 con -1, $L(D^2) = 0$, utilizamos el resulatado

$$y_p = x\frac{1}{L'(D^2)}\sin x,$$

y dado que $L(D^2) = D^2 + 1$, se sigue que

$$L'(D^2) = 2D.$$

Luego

$$\begin{aligned} y_p &= x\frac{1}{L'(D^2)}\sin x = x\frac{1}{2D}\sin x = \frac{1}{2}x\frac{1}{D}\sin x = \frac{1}{2}x\int \sin x \\ &= -\frac{1}{2}x\cos x. \end{aligned}$$

Verificación:

$$\begin{aligned} \left(D^2+1\right)y_p &= \left(D^2+1\right)\left(-\frac{1}{2}x\cos x\right) = -\frac{1}{2}\left(D^2+1\right)(x\cos x) \\ &= -\frac{1}{2}\left[x\cos x + D\left(\cos x - x\sin x\right)\right] \\ &= -\frac{1}{2}\left[x\cos x - \sin x - \sin x - x\cos x\right] = -\frac{1}{2}\left[-2\sin x\right] = \sin x. \end{aligned}$$

Ejemplo. Hallar una solución particular de $\left(D^2+1\right)^3 y = \sin x$.
Solución: Utilicemos el operador inverso:

$$\left(D^2+1\right)^3 y = \sin x \Longrightarrow y_p = \frac{1}{\left(D^2+1\right)^3}\sin x.$$

Como al reemplazar D^2 con -1, $L(D^2)=0$, utilizamos el resulatado

$$y_p = x^3\frac{1}{L'''(D^2)}\sin x,$$

y dado que $L(D^2) = \left(D^2+1\right)^3 = D^6+3D^4+3D^2+1$, se sigue que

$$\begin{aligned} L'(D^2) &= 6D^5+12D^3+6D \\ L''(D^2) &= 30D^4+36D^2+6 \\ L'''(D^2) &= 120D^3+72D. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} y_p &= x^3\frac{1}{L'''(D^2)}\sin x \\ &= x^3\frac{1}{120D^3+72D}\sin x = x^3\frac{1}{\left(120D^2+72\right)D}\sin x \\ &= x^3\frac{1}{120D^2+72}\frac{1}{D}\sin x = x^3\frac{1}{120D^2+72}\int \sin x dx \\ &= x^3\frac{1}{120D^2+72}\left(-\cos x\right) = -x^3\frac{1}{120D^2+72}\left(\cos x\right) \\ &= -x^3\frac{1}{120\left(-1\right)+72}\left(\cos x\right) = \frac{1}{48}x^3\cos x. \end{aligned}$$

Verificación:

$$\begin{aligned} \left(D^6+3D^4+3D^2+1\right)\left(x^3\cos x\right) &= \frac{d^6}{dx^6}\left(x^3\cos x\right) + 3\frac{d^4}{dx^4}\left(x^3\cos x\right) + 3\frac{d^2}{dx^2}\left(x^3\cos x\right) + x^3\cos x \\ &= 120\sin x - x^3\cos x - 18x^2\sin x + 90x\cos x + 3x^3\cos x - 72\sin x + \\ &\quad +36x^2\sin x - 108x\cos x + 18x\cos x - 18x^2\sin x - 3x^3\cos x + x^3\cos x \\ &= 48\sin x. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\left(D^6+3D^4+3D^2+1\right)\left(\frac{1}{48}x^3\cos x\right) = \frac{48\sin x}{48} = \sin x.$$

Ejemplo. Obtener la solución general de la siguiente ecuación diferencial lineal no homogénea

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 10e^{4x} \tag{4.1}$$

Solución

Solución homogénea: Aplicando el concepto de polinomio diferencial tenemos:

$$(D^2 - 3D + 2)y = 0 \Longrightarrow (D-1)(D-2)y = 0 \Longrightarrow y_1\left(x\right) = e^x \;\text{ y } y_2\left(x\right) = e^{2x},$$

son soluciones de la ecuación diferencial. Luego, el conjunto fundamental solución de la ecuación diferencial homogénea es: $\{e^x, e^{2x}\}$ y por tanto la solución homogénea de la ecuación diferencial es: $y_h = C_1e^x + C_2e^{2x}$.

Nota: En $L(D) = (D-1)(D-2)$, D significa $(D = \frac{d}{dx})$, si en la ecuación característica se conserva esta misma letra, entonces será considerada como un símbolo algebraico y no como operador derivada; es decir $(D-1)(D-2) = 0$; por lo tanto 1 y 2 , son raíces de la ecuación característica.

Solución particular: empleando coeficientes indeterminados

$$y_p = Ae^{4x}, \qquad y_p' = 4Ae^{4x}, \qquad y_p'' = 16Ae^{4x}.$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial tenemos:

$$16Ae^{4x} - 3\left(4Ae^{4x}\right) + 2\left(Ae^{4x}\right) = 10e^{4x} \Longleftrightarrow 6Ae^{4x} = 10e^{4x} \Longrightarrow A = \frac{5}{3},$$

por tanto la solución particular es: $y_p = \frac{5}{3}e^{4x}$.

Solución particular: empleando operador diferencial o derivada

De la ecuación (4.1)

$$(D^2 - 3D + 2)y_p = 10e^{4x} \Longrightarrow y_p = \frac{1}{(D^2 - 3D + 2)}10e^{4x}$$

Aplicando a esta expresión la primera propiedad del operador diferencial se obtiene:

$$y_p = \frac{1}{\left(4\right)^2 - 3\left(4\right) + 2)}10e^{4x} = \frac{10}{6}e^{4x} = \frac{5}{3}e^{4x}.$$

Por lo que la solución general es: $y(x) = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{5}{3}e^{4x}$.

Ejemplo. Obtener la solución general de la siguiente ecuación diferencial lineal no homogénea:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 10e^{-4x}. \tag{4.2}$$

Solución

Solución homogénea: Aplicando el concepto de polinomio diferencial tenemos:

$$(D^2 - 3D + 2)y = 0 \Longrightarrow (D-1)\left(D-2\right)y = 0.$$

De donde en el conjunto fundamental de solución es: $\{e^x, e^{2x}\}$. Siendo la solución homogénea: $y_h = C_1e^x + C_2e^{2x}$.

Solución particular:

De la ecuación (4.2) se sigue

$$(D^2 - 3D + 2)y_p = 10e^{-4x} \Longrightarrow y_p = \left(\frac{1}{D^2 - 3D + 2}\right)10e^{-4x}.$$

Aplicando a esta expresión la primera propiedad del operador diferencial se obtiene:

$$y_p = \left(\frac{1}{\left(-4\right)^2 - 3\left(-4\right) + 2}\right)10e^{-4x} = \frac{10}{30}e^{-4x} = \frac{1}{3}e^{-4x}.$$

Verifiquemos la solución particular

$$\begin{aligned}
(D^2-3D+2)y_p &= (D^2-3D+2)\left(\frac{1}{3}e^{-4x}\right)=10e^{-4x}\\
\left[(-4)^2-3\,(-4)+2\right]\left(\frac{1}{3}e^{-4x}\right) &= 10e^{-4x}\\
\frac{30}{3}e^{-4x} &= 10e^{-4x}\\
10e^{-4x} &= 10e^{-4x}.
\end{aligned}$$

Por lo que la solución general es: $y(x)=C_1e^{x}+C_2e^{2x}+\frac{1}{3}e^{-4x}$.
Ejemplo. Obtener la solución general de la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}+6y=20\cos(4x).$$

Solución
Solución homogénea:
Aplicando el polinomio diferencial tenemos:

$$[D^2+5D+6]y=0\Longleftrightarrow (D+2)\,(D+3)\,y=0.$$

El conjunto fundamental solución es: $\{e^{-2x},e^{-3x}\}$, por lo que su solución homogénea se presenta como: $y_h=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}$.
Solución particular:
Empleando Coeficientes Indeterminados

$$\begin{aligned}
y_p &= A\cos(4x)+B\,\mathrm{sen}(4x)\\
y_p' &= -4A\,\mathrm{sen}(4x)+4B\cos(4x)\\
y_p'' &= -16A\cos(4x)-16B\,\mathrm{sen}(4x)
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuacióon diferencial tenemos:

$$-16A\cos(4x)-16B\,\mathrm{sen}(4x)-20A\,\mathrm{sen}(4x)+20B\cos(4x)+6A\cos(4x)+6B\,\mathrm{sen}(4x)=20\cos(4x)$$

Agrupando:

$$[-10A+20B]\cos(4x)+[-20A-10B]\,\mathrm{sen}(4x)=20\cos(4x).$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases}-10A+20B=20\\ -20A-10B=0\end{cases}$$

se obtienen: $A=-\dfrac{2}{5}$ y $B=\dfrac{4}{5}$.
Al sustituir las constantes previamente obtenidas se tiene:

$$y_p=-\frac{2}{5}\cos(4x)+\frac{4}{5}\,\mathrm{sen}(4x)$$

Solución particular: empleando el operador derivada.

$$[D^2+5D+6]y_p=20\cos(4x)\Longrightarrow y_p=\left[\frac{1}{D^2+5D+6}\right]20\cos(4x)$$

Luego

$$\begin{aligned}
y_p &= \left[\frac{1}{D^2+5D+6}\right]20\cos(4x)=\left[\frac{1}{D^2+5D+6}\right]_{D^2=-16}20\cos(4x)\\
&= \left[\frac{1}{-16+5D+6}\right]_{D^2=-16}20\cos(4x)=\left[\frac{1}{5D-10}\right]20\cos(4x)\\
&= \left[\frac{5}{5\,(D-2)}\right]4\cos(4x)=\left[\frac{1}{D-2}\right]4\cos(4x).
\end{aligned}$$

Multiplicando el operador inverso $\dfrac{1}{D-2}$ por $\dfrac{D+2}{D+2}$ se tiene

$$\begin{aligned}
y_p &= \left[\frac{1}{D-2}\right]4\cos(4x) = \left[\frac{1}{D-2}\right]\left(\frac{D+2}{D+2}\right)4\cos(4x) \\
&= \left[\frac{D+2}{D^2-4}\right]4\cos(4x) = \left[\frac{D+2}{D^2-4}\right]_{D^2=-16} 4\cos(4x) = \left[\frac{D+2}{-20}\right]4\cos(4x) \\
&= -\frac{1}{20}(D+2)\,4\cos(4x) = -\frac{1}{20}\left[D4\cos(4x)+8\cos(4x)\right] = -\frac{1}{20}\left[-16\,\mathrm{sen}(4x)+8\cos(4x)\right] \\
&= \frac{4}{5}\,\mathrm{sen}(4x) - \frac{2}{5}\cos(4x).
\end{aligned}$$

De donde la solución particular es: $y_p = \dfrac{4}{5}\,\mathrm{sen}(4x) - \dfrac{2}{5}\cos(4x)$. Por lo que la solución general buscada es:

$$y(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x} - \frac{2}{5}\cos(4x) + \frac{4}{5}\,\mathrm{sen}(4x).$$

Ejemplo. Obtener la solución general de la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = 20\,\mathrm{sen}(4x).$$

Solución

Solución homogénea: Aplicando el polinomio diferencial tenemos:

$$[D^2+5D+6]y = 0 \iff (D+2)(D+3)\,y = 0.$$

De donde el conjunto fundamental solución de la ecuación diferencial es: $\{e^{-2x}, e^{-3x}\}$, por lo que su solución homogénea se presenta como: $y_h = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x}$.

Solución particular:

$$\begin{aligned}
[D^2+5D+6]y_p &= 20\,\mathrm{sen}(4x) \\
y_p &= \left[\frac{1}{D^2+5D+6}\right]20\,\mathrm{sen}(4x) = \left[\frac{1}{D^2+5D+6}\right]_{D^2=-16} 20\,\mathrm{sen}(4x) \\
&= \left[\frac{1}{-16+5D+6}\right]_{D^2=-16} 20\,\mathrm{sen}(4x) = \left[\frac{1}{5D-10}\right]20\,\mathrm{sen}(4x) \\
&= \left[\frac{1}{D-2}\right]4\,\mathrm{sen}(4x) = 4\left[\frac{1}{D-2}\right]\mathrm{sen}(4x). \text{ Multiplicando} \frac{1}{D-2}\text{por}\frac{D+2}{D+2} \text{ se tiene:} \\
&= 4\left[\frac{1}{D-2}\right]\left[\frac{D+2}{D+2}\right]\mathrm{sen}(4x) = 4\left[\frac{D+2}{D^2-4}\right]\mathrm{sen}(4x) = 4\left[\frac{D+2}{D^2-4}\right]_{D^2=-16}\mathrm{sen}(4x) \\
&= 4\left[\frac{D+2}{-16-4}\right]\mathrm{sen}(4x) = -\frac{1}{5}(D+2)\,\mathrm{sen}(4x) = -\frac{1}{5}\left[D\,\mathrm{sen}(4x)+2\,\mathrm{sen}(4x)\right] \\
&= -\frac{1}{5}\left[4\cos(4x)+2\,\mathrm{sen}(4x)\right] \\
&= -\frac{4}{5}\cos(4x) - \frac{2}{5}\,\mathrm{sen}(4x).
\end{aligned}$$

Siendo nuestra solución particular $y_p = -\dfrac{4}{5}\cos(4x) - \dfrac{2}{5}\,\mathrm{sen}(4x)$. Se deja como ejercicio verificar que efectivamente es una solución particular.

Por lo que la solución general buscada es:

$$y(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x} - -\frac{4}{5}\cos(4x) - \frac{2}{5}\,\mathrm{sen}(4x).$$

Ejemplo. Determinar la solución general de la siguiente ecuación diferencial: $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 8e^{2x}\cos(3x)$.

Solución

Solución homogénea: Aplicando el concepto de polinomio diferencial podemos expresar la ecuación diferencial como:

$$[D^3 + 6D^2 + 11D + 6]y = 0 \Longleftrightarrow (D+1)(D+2)(D+3) = 0.$$

De donde el conjunto fundamental de solución se presenta como: $\{e^{-x}, e^{-2x}, e^{-3x}\}$; por lo que la solución homogénea se expresa como $y_h = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + C_3e^{-3x}$.

Solución particular: Empleando Coeficientes Indeterminados

$$\begin{aligned} y_p &= Ae^{2x}\cos(3x) + Be^{2x}\operatorname{sen}(3x). \\ y_p' &= A[-3e^{2x}\operatorname{sen}(3x) + 2e^{2x}\cos(3x)] + B[3e^{2x}\cos(3x) + 2e^{2x}\operatorname{sen}(3x)] \\ y_p'' &= A[-5e^{2x}\cos(3x) - 12e^{2x}\operatorname{sen}(3x)] + B[-5e^{2x}\operatorname{sen}(3x) + 12e^{2x}\cos(3x)] \\ y_p''' &= A[-46e^{2x}\cos(3x) - 9e^{2x}\operatorname{sen}(3x)] + B[-46e^{2x}\operatorname{sen}(3x) + 9e^{2x}\cos(3x)] \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación deferencial:

$$[-48A + 114B]e^{2x}\cos(3x) + [-114A - 48B]e^{2x}\operatorname{sen}(3x) = 8e^{2x}\cos(3x).$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} -48A + 114B = 8 \\ -114A - 48B = 0 \end{cases},$$

se tiene: $A = -\dfrac{32}{1275}$ y $B = \dfrac{76}{1275}$, por lo que la solución particular es:

$$y_p = -\frac{32}{1275}e^{2x}\cos(3x) + \frac{76}{1275}e^{2x}\operatorname{sen}(3x)$$

Solución particular: Empleando las Propiedades del Operador Derivada

$$(D^3 + 6D^2 + 11D + 6)y_p = 8e^{2x}\cos(3x)$$

Aplicando la tercera propiedad del operador derivada

$$\begin{aligned} y_p &= \left[\frac{1}{D^3 + 6D^2 + 11D + 6}\right] 8\cos(3x) = 8e^{2x}\left[\frac{1}{(D+2)^3 + 6(D+2)^2 + 11(D+2) + 6}\right]\cos(3x) \\ &= 8e^{2x}\left[\frac{1}{D^3 + 12D^2 + 47D + 60}\right]\cos(3x) \end{aligned}$$

Aplicando la segunda propiedad del operador derivada

$$\begin{aligned} y_p &= 8e^{2x}\left[\frac{1}{D(D^2) + 12D^2 + 47D + 60}\right]\cos(3x) \\ y_p &= 8e^{2x}\left[\frac{1}{(-9)D + 12(-9) + 47D + 60}\right]\cos(3x) \\ y_p &= 8e^{2x}\left[\frac{1}{(-9)D + 12(-9) + 47D + 60}\right]\cos(3x) \\ y_p &= 8e^{2x}\left[\frac{1}{38D - 48}\right]\cos(3x) \end{aligned}$$

Multiplicando por $\dfrac{38D + 48}{38D + 48}$ se sigue:

$$\begin{aligned} y_p &= 8e^{2x}\left[\frac{1}{38D - 48}\right]\cos(3x) = 8e^{2x}\left[\frac{1}{38D - 48}\right]\left[\frac{38D + 48}{38D + 48}\right]\cos(3x) \\ &= 8e^{2x}\left[\frac{38D + 48}{1444D^2 - 2304}\right]\cos(3x) = 8e^{2x}\left[\frac{38D + 48}{1444(-9) - 2304}\right]\cos(3x) \\ &= 8e^{2x}\left[\frac{38D + 48}{1444(-9) - 2304}\right]\cos(3x) = -\frac{8}{15300}e^{2x}[38D + 48]\cos(3x) \\ &= -\frac{8}{15300}e^{2x}[-114\operatorname{sen}(3x) + 48\cos(3x)] \\ &= \frac{76}{1275}e^{2x}\operatorname{sen}(3x) - \frac{32}{1275}e^{2x}\cos(3x). \end{aligned}$$

Por lo que la solución general buscada es:

$$y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + C_3e^{-3x} - \frac{32}{1275}e^{2x}\cos(3x) + \frac{76}{1275}e^{2x}\operatorname{sen}(3x).$$

Ejemplo. Determinar la solución general de la siguiente ecuación diferencial:

$$y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 8e^{2x}\operatorname{sen}(x)$$

Solución

Solución homogénea: Aplicando el concepto de polinomio diferencial podemos expresar la ecuación diferencial como:

$$\begin{aligned}
[D^3 + 6D^2 + 11D + 6]y &= 0 \\
[(D+1)(D+2)(D+3)]y &= 0
\end{aligned}$$

Cuyo conjunto fundamental de soluciones es: $\{e^{-x}, e^{-2x}, e^{-3x}\}$. Por lo que la solución homogénea tendrá la forma:

$$y_h = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + C_3e^{-3x}$$

Solución particular:

$$\begin{aligned}
(D^3 + 6D^2 + 11D + 6)y_p &= 8e^{2x}\operatorname{sen}(x) \\
y_p &= \left[\frac{1}{D^3 + 6D^2 + 11D + 6)}\right]8e^{2x}\operatorname{sen}(x)
\end{aligned}$$

Aplicando la tercera propiedad del operador derivada

$$\begin{aligned}
y_p &= 8e^{2x}\left[\frac{1}{(D+2)^3 + 6(D+2)^2 + 11(D+2) + 6)}\right]\operatorname{sen}(x) \\
&= 8e^{2x}\left[\frac{1}{D^3 + 12D^2 + 47D + 60}\right]\operatorname{sen}(x).
\end{aligned}$$

Aplicando la segunda propiedad del operador derivada

$$\begin{aligned}
y_p &= 8e^{2x}\left[\frac{1}{D^2D + 12D^2 + 47D + 60}\right]\operatorname{sen}(x) \\
&= 8e^{2x}\left[\frac{1}{(-1)D + 12(-1) + 47D + 60}\right]\operatorname{sen}(x) \\
&= 8e^{2x}\left[\frac{1}{46D + 48}\right]\operatorname{sen}(x)
\end{aligned}$$

Multiplicando por $\dfrac{46D - 48}{46D - 48}$ se sigue:

$$\begin{aligned}
y_p &= 8e^{2x}\left[\frac{1}{46D + 48}\right]\left(\frac{46D - 48}{46D - 48}\right)\operatorname{sen}(x) \\
&= 8e^{2x}\left[\frac{46D - 48}{2116D^2 - 2304}\right]\operatorname{sen}(x) = 8e^{2x}\left[\frac{46D - 48}{2116(-1) - 2304}\right]\operatorname{sen}(x) \\
&= 8e^{2x}\left[\frac{46D - 48}{-4420}\right]\operatorname{sen}(x) = -\frac{8e^{2x}}{4420}(46D - 48)\operatorname{sen}(x) \\
&= -\frac{8e^{2x}}{4420}[46\cos(x) - 48\operatorname{sen}(x)] \\
&= -\frac{92}{1105}e^{2x}\cos(x) + \frac{96}{1105}e^{2x}\operatorname{sen}(x).
\end{aligned}$$

Es decir, $y_p = -\dfrac{92}{1105}e^{2x}\cos(x) + \dfrac{96}{1105}e^{2x}\operatorname{sen}(x).$

Por lo que la solución general buscada es:

$$y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + C_3e^{-3x} - \frac{92}{1105}e^{2x}\cos(x) + \frac{96}{1105}e^{2x}\operatorname{sen}(x).$$

Ejemplo. Obtener: $(D^3 + 8D^2 + 3D + 2)x^2e^{2x}$.
Solución
Se tiene:

$$(D^3 + 8D^2 + 3D + 2)x^2e^{2x} = e^{2x}\left[(D + 2)^3 + 8(D + 2)^2 + 3(D + 2) + 2\right]x^2$$

Desarrollando:

$$\begin{aligned} e^{2x}[(D^3 + 6D^2 + 12D + 8) + 8(D^2 + 4D + 4) + 3(D + 2) + 2]x^2 &= e^{2x}[D^3 + 14D^2 + 47D + 48]x^2 \\ &= e^{2x}[D^3(x^2) + 14D^2(x^2) + 47D(x^2) + 48x^2] \\ &= e^{2x}[28 + 94x + 48x^2] \end{aligned}$$

Reacomodando se tiene:

$$\left[48x^2 + 94x + 28\right]e^{2x}$$

Ejemplo. Obtener la solución general de la siguiente ecuación diferencial $\left(D^2 - 2D + 2\right)y = 8xe^x$.
Solución
Solución homogénea:

$$\left(D^2 - 2D + 2\right)y = 0 \Longrightarrow \left[\left(D^2 - 2D + 1\right) + 1\right]y = 0 \Longrightarrow \left[(D - 1)^2 + 1\right]y = 0.$$

Las raíces de la ecuación característica son $1 + i$, $1 - i$. Luego una base del espacio solución es. $\{e^x\cos x, e^x\operatorname{sen} x\}$. la solución general de la edo homogénea es: $y_h(x) = C_1e^x\cos x + C_2e^x\operatorname{sen} x$.
Solución particular empleando propiedades del Operador Derivada:

$$\left(D^2 - 2D + 2\right)y_p = 8xe^x$$

Por lo tanto
Por lo cual la solución general es

$$y(x) = C_1e^x\cos x + C_2e^x\operatorname{sen} x + 8xe^x.$$

Ejemplo. Encontrar la solución de la siguiente ecuación diferencial $(D^2 + 4D + 4)y = te^{3t}\cos(2t)$.
Solución
Solución homogénea:

$$(D^2 + 4D + 4)y = 0 \Longrightarrow (D + 2)^2y = 0 \Longrightarrow y_h = C_1e^{-2t} + C_2te^{-2t}.$$

Solución particular, empleando propiedades del Operador Derivada.

$$\begin{aligned} (D^2 + 4D + 4)y &= te^{3t}\cos(2t) \Longrightarrow y_p = \frac{1}{D^2 + 4D + 4}te^{3t}\cos(2t) \\ y_p &= \frac{1}{D^2 + 4D + 4}te^{3t}\cos(2t) = e^{3t}\frac{1}{(D + 3)^2 + 4(D + 3) + 4}t\cos(2t) \\ &= e^{3t}\frac{1}{D^2 + 10D + 25}t\cos(2t) \end{aligned}$$

Aplicando la última propiedad:

$$\begin{aligned}
y_p &= e^{3t}\left(\frac{1}{D^2+10D+25}\right)t\cos(2t) = e^{3t}\left[\left(t+\frac{d}{dD}\right)\frac{1}{D^2+10D+25}\right]\cos(2t)\\
&= e^{3t}\left[t\left(\frac{1}{D^2+10D+25}\right)\cos(2t)+\frac{d}{dD}\left(\frac{1}{D^2+10D+25}\right)\cos(2t)\right]\\
&= e^{3t}\left[t\left(\frac{1}{D^2+10D+25}\right)\cos(2t)-\frac{2D+10}{\left(D^2+10D+25\right)^2}\cos(2t)\right]\\
&= e^{3t}\left[t\left(\frac{1}{-4+10D+25}\right)\cos(2t)-\frac{2D+10}{\left(-4+10D+25\right)^2}\cos(2t)\right]\\
&= e^{3t}\left[t\left(\frac{1}{10D+21}\right)\cos(2t)-\frac{2D+10}{\left(10D+21\right)^2}\cos(2t)\right]\\
&= e^{3t}\left[t\left(\frac{1}{10D+21}\right)\cos(2t)-\frac{2D+10}{100D^2+420D+441}\cos(2t)\right]\\
&= e^{3t}\left[t\left(\frac{1}{10D+21}\right)\cos(2t)-\frac{2D+10}{100\,(-4)+420D+441}\cos(2t)\right]\\
&= e^{3t}\left[t\left(\frac{1}{10D+21}\right)\cos(2t)-\frac{2D+10}{420D+41}\cos(2t)\right]
\end{aligned}$$

Al multiplicar por $\dfrac{10D-21}{10D-21}$ y por $\dfrac{420D-41}{420D-41}$:

$$\begin{aligned}
y_p &= e^{3t}\left[t\left(\frac{1}{10D+21}\right)\cos(2t)-\frac{2D+10}{420D+41}\cos(2t)\right]\\
&= e^{3t}\left[t\left(\frac{1}{10D+21}\right)\left(\frac{10D-21}{10D-21}\right)\cos(2t)-\left(\frac{2D+10}{420D+41}\right)\left(\frac{420D-41}{420D-41}\right)\cos(2t)\right]\\
&= e^{3t}\left[t\left(\frac{10D-21}{100D^2-441}\right)\cos(2t)-\left(\frac{840D^2+4118D-410}{176400D^2-1681}\right)\cos(2t)\right]\\
&= e^{3t}\left[t\left(\frac{10D-21}{100\,(-4)-441}\right)\cos(2t)-\left(\frac{840\,(-4)+4118D-410}{176400\,(-4)-1681}\right)\cos(2t)\right]\\
&= e^{3t}\left[t\left(\frac{10D-21}{-841}\right)\cos(2t)-\left(\frac{4118D-3770}{-707281}\right)\cos(2t)\right].
\end{aligned}$$

Desarrollando

$$y_p = te^{3t}\left(\frac{20}{841}\operatorname{sen}(2t)+\frac{21}{841}\cos(2t)\right)-e^{3t}\left(\frac{8236}{707281}\operatorname{sen}(2t)+\frac{3770}{707281}\cos(2t)\right)$$

Agrupando y simplificando

$$y_p = e^{3t}\left[\left(\frac{21}{841}t-\frac{130}{24389}\right)\cos(2t)+\left(\frac{20}{841}t-\frac{284}{24389}\right)\operatorname{sen}(2t)\right].$$

Ejemplo

Calcule una solución de $L\,(D)\,y = x^2\operatorname{sen}x$, donde $L\,(D) = \left(D^2+1\right)^2$.

Solución.

$$
\begin{aligned}
L\left(D\right)y &= x^2\operatorname{sen}x \Longrightarrow \left(D^2+1\right)^2 y = x^2\operatorname{sen}x\\
y_p &= \left[\frac{1}{\left(D^2+1\right)^2}\right]x^2\operatorname{sen}x = \left[\frac{1}{\left(D^2+1\right)^2}\right]x^2\operatorname{Im}\left(e^{ix}\right)\\
&= \operatorname{Im}\left[\frac{1}{\left(D^2+1\right)^2}x^2\left(e^{ix}\right)\right] = \operatorname{Im}\left[\left(e^{ix}\right)\frac{1}{\left(\left(D+i\right)^2+1\right)^2}x^2\right]\\
&= \operatorname{Im}\left[\left(e^{ix}\right)\frac{1}{\left(D^2+2iD-1+1\right)^2}x^2\right] = \operatorname{Im}\left[\left(e^{ix}\right)\frac{1}{\left(D^2+2iD\right)^2}x^2\right]\\
&= \operatorname{Im}\left[\left(e^{ix}\right)\frac{1}{D^2\left(D+2i\right)^2}x^2\right] = \operatorname{Im}\left[\left(e^{ix}\right)\frac{1}{D^2\left(D^2+4iD-4\right)}x^2\right]\\
&= \operatorname{Im}\left[\left(e^{ix}\right)\frac{1}{\left(D^2+4iD-4\right)D^2}x^2\right] = \operatorname{Im}\left[\left(e^{ix}\right)\frac{1}{D^2}\frac{1}{\left(D^2+4iD-4\right)}x^2\right]\\
&= \operatorname{Im}\left[\left(e^{ix}\right)\frac{1}{D^2}\left(-\frac{1}{4}-\frac{i}{4}D+\frac{3}{16}D^2\right)x^2\right] = \operatorname{Im}\left[\left(e^{ix}\right)\frac{1}{D^2}\left(-\frac{x^2}{4}-\frac{ix}{2}+\frac{3}{16}\left(2\right)\right)\right]\\
&= \operatorname{Im}\left[\left(e^{ix}\right)\frac{1}{D^2}\left(-\frac{x^2}{4}-\frac{ix}{2}+\frac{3}{8}\right)\right] = \operatorname{Im}\left[\left(e^{ix}\right)\frac{1}{D}\left(\int\left(-\frac{x^2}{4}-\frac{ix}{2}+\frac{3}{8}\right)dx\right)\right]\\
&= \operatorname{Im}\left[\left(e^{ix}\right)\frac{1}{D}\left(-\frac{x^3}{12}-\frac{ix^2}{4}+\frac{3}{8}x\right)\right] = \operatorname{Im}\left[\left(e^{ix}\right)\int\left(-\frac{x^3}{12}-\frac{ix^2}{4}+\frac{3}{8}x\right)dx\right]\\
&= \operatorname{Im}\left[\left(e^{ix}\right)\left(-\frac{x^4}{48}-\frac{ix^3}{12}+\frac{3}{16}x^2\right)\right] = \operatorname{Im}\left[\left(\cos x+i\operatorname{sen}x\right)\left(-\frac{x^4}{48}-\frac{ix^3}{12}+\frac{3}{16}x^2\right)\right]\\
&= \operatorname{Im}\left\{\left[\left(\frac{3}{16}x^2-\frac{x^4}{48}\right)\cos x+\frac{x^3}{12}\operatorname{sen}x\right]+i\left[\left(\frac{3}{16}x^2-\frac{x^4}{48}\right)\operatorname{sen}x-\frac{x^3}{12}\cos x\right]\right\}\\
&= \left(\frac{3}{16}x^2-\frac{x^4}{48}\right)\operatorname{sen}x-\frac{x^3}{12}\cos x.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{lllll|l}
1 & & & & & -4+4iD+D^2 \\
\cline{6-6}
-1 & +iD & +\frac{1}{4}D^2 & & & -\frac{1}{4}-\frac{i}{4}D+\frac{3}{16}D^2 \\
\cline{1-3}
 & +iD & +\frac{1}{4}D^2 & & & \\
 & -iD & -D^2 & +\frac{i}{4}D^3 & & \\
\cline{2-4}
 & & -\frac{3}{4}D^2 & +\frac{i}{4}D^3 & & \\
 & & \frac{3}{4}D^2 & -\frac{3}{4}iD^3 & -\frac{3}{16}D^4 & \\
\cline{3-5}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
y_p &= \operatorname{Im}\left[\left(e^{ix}\right)\frac{1}{\left(D^2+4iD-4\right)}\frac{x^4}{12}\right] = \operatorname{Im}\left[\left(e^{ix}\right)\left(-\frac{1}{4}-\frac{i}{4}D+\frac{3}{16}D^2\right)\frac{x^4}{12}\right]\\
&= \operatorname{Im}\left[\left(e^{ix}\right)\left(-\frac{x^4}{48}-\frac{i}{4}\left(\frac{x^3}{3}\right)+\frac{3}{16}D^2\right)\frac{x^4}{12}\right]
\end{aligned}
$$

Observación. $\dfrac{1}{D^2+4iD-4} = -\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}iD+\dfrac{3}{16}D^2+\dfrac{1}{8}iD^3-\dfrac{5}{64}D^4+O\left(D^5\right)$

Hallar la solución general de la edo $y'''+2y''+y=\left(2x+1\right)\sin x+\left(x^2-4x\right)\cos x$

Solución.

$$
y'''+2y''+y' = \left(2x+1\right)\sin x+\left(x^2-4x\right)\cos x \Longleftrightarrow \left(D^3+2D^2+D\right)y = \left(2x+1\right)\sin x+\left(x^2-4x\right)\cos x
$$

La solución de la ecuacióbdiferencial lineal homogénea asociada es:

$$\begin{aligned}\left(D^3+2D^2+D\right)y &= 0 \Longrightarrow D\left(D^2+2D+1\right)y=0 \Longrightarrow D\left(D+1\right)^2 y=0\\ &\Longrightarrow y_h = C_1+C_2e^{-x}+C_3xe^{-x}.\end{aligned}$$

Busquemos una solución particular y_p usando el operador inverso.

$$\begin{aligned}\left(D^3+2D^2+D\right)y &= (2x+1)\sin x+\left(x^2-4x\right)\cos x \Longleftrightarrow\\ \left(D^3+2D^2+D\right)y &= (2x+1)\operatorname{Im}\left(e^{ix}\right)+\left(x^2-4x\right)\operatorname{Re}\left(e^{i3x}\right)\end{aligned}$$

Se sigue entonces que:

$$\begin{aligned}y_p &= \frac{1}{D^3+2D^2+D}(2x+1)\operatorname{Im}\left(e^{ix}\right)+\left(x^2-4x\right)\operatorname{Re}\left(e^{i3x}\right)\\ y_p &= \operatorname{Im}\left[\frac{1}{D^3+2D^2+D}(2x+1)e^{ix}\right]+\operatorname{Re}\left[\frac{1}{D^3+2D^2+D}\left(x^2-4x\right)e^{i3x}\right]\\ y_p &= \operatorname{Im}\left[e^{ix}\frac{1}{(D+i)^3+2(D+i)^2+(D+i)}(2x+1)\right]\\ &\quad+\operatorname{Re}\left[e^{i3x}\frac{1}{(D+3i)^3+2(D+3i)^2+(D+3i)}\left(x^2-4x\right)\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_p &= \operatorname{Im}\left[e^{ix}\frac{1}{D^3+(2+3i)D^2-(2-4i)D-2}(2x+1)\right]\\ &\quad+\operatorname{Re}\left[e^{i3x}\frac{1}{D^3+(2+9i)D^2-(26-12i)D-18-24i}\left(x^2-4x\right)\right]\\ y_p &= \operatorname{Im}\left\{e^{ix}\left[-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-i\right)D\right](2x+1)\right\}+\\ &\quad+\operatorname{Re}\left\{e^{i3x}\left[-\left(\frac{1}{50}-\frac{2}{75}i\right)-\left(\frac{47}{2250}+\frac{3}{125}i\right)D+\left(\frac{11}{625}-\frac{659}{67\,500}i\right)D^2\right]\left(x^2-4x\right)\right\}\\ &= \operatorname{Im}\left\{e^{ix}\left[-\frac{1}{2}(2x+1)+\left(\frac{1}{2}-i\right)(2)\right]\right\}+\\ &\quad+\operatorname{Re}\left\{e^{i3x}\left[-\left(\frac{1}{50}-\frac{2}{75}i\right)\left(x^2-4x\right)-\left(\frac{47}{2250}+\frac{3}{125}i\right)(2x-4)+\left(\frac{11}{625}-\frac{659}{67\,500}i\right)(2)\right]\right\}\\ &= \operatorname{Im}\left\{(\cos x+i\sin x)\left[-x-\frac{1}{2}+1-2i\right]\right\}+\\ &\quad+\operatorname{Re}\left\{(\cos 3x+i\sin 3x)\left[-\left(\frac{1}{50}-\frac{2}{75}i\right)\left(x^2-4x\right)-\left(\frac{47}{2250}+\frac{3}{125}i\right)(2x-4)+\left(\frac{11}{625}-\frac{659}{67\,500}i\right)(2)\right]\right\}\\ &= \operatorname{Im}\left\{(\cos x+i\sin x)\left[-x+\frac{1}{2}-2i\right]\right\}+\\ &\quad+\operatorname{Re}\left\{(\cos 3x+i\sin 3x)\left[-\left(\frac{1}{50}-\frac{2}{75}i\right)\left(x^2-4x\right)-\left(\frac{47}{2250}+\frac{3}{125}i\right)(2x-4)+\left(\frac{11}{625}-\frac{659}{67\,500}i\right)(2)\right]\right\}\\ &= \operatorname{Im}\left\{\left[\left(-x+\frac{1}{2}\right)\cos x+2\sin x\right]+i\left[\left(-x+\frac{1}{2}\right)\sin x-2\cos x\right]\right\}+\\ &\quad+\operatorname{Re}\left\{(\cos 3x+i\sin 3x)\left[-\left(\frac{1}{50}-\frac{2}{75}i\right)\left(x^2-4x\right)-\left(\frac{47}{2250}+\frac{3}{125}i\right)(2x-4)+\left(\frac{11}{625}-\frac{659}{67\,500}i\right)(2)\right]\right\}\end{aligned}$$

Una solución y_{p_1} es $\left(-x+\frac{1}{2}\right)\sin x-2\cos x$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{D^3+(2+3i)D^2-(2-4i)D-2} &= -\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-i\right)D+\left(1+\frac{5}{4}i\right)D^2-\left(\frac{7}{4}-\frac{1}{2}i\right)D^3 \\
&\quad+\left(\frac{1}{8}-\frac{7}{4}i\right)D^4+O\left(D^5\right) \\
\frac{1}{D^3+(2+9i)D^2-(26-12i)D-18-24i} &= -\left(\frac{1}{50}-\frac{2}{75}i\right)-\left(\frac{47}{2250}+\frac{3}{125}i\right)D \\
&\quad+\left(\frac{11}{625}-\frac{659}{67\,500}i\right)D^2+\left(\frac{3133}{1012\,500}+\frac{63}{6250}i\right)D^3 \\
&\quad-\left(\frac{123}{25\,000}-\frac{1351}{3037\,500}i\right)D^4+O\left(D^5\right) \\
(\cos x+i\sin x)\left(-\frac{1}{2}(2x+1)+\left(\frac{1}{2}-i\right)(2)\right) &= (\cos x+i\sin x)\left(x+\frac{3}{2}-2i\right)
\end{aligned}$$

$$\operatorname{Re}\left\{(\cos 3x+i\sin 3x)\left[-\left(\frac{1}{50}-\frac{2}{75}i\right)\left(x^2-4x\right)-\left(\frac{47}{2250}+\frac{3}{125}i\right)(2x-4)+\left(\frac{11}{625}-\frac{659}{67\,500}i\right)(2)\right]\right\}$$

$$\operatorname{Re}\left\{(\cos 3x+i\sin 3x)\left[-\left(\frac{1}{50}-\frac{2}{75}i\right)\left(x^2-4x\right)-\left(\frac{47}{2250}+\frac{3}{125}i\right)(2x-4)+\left(\frac{11}{625}-\frac{659}{67\,500}i\right)(2)\right]\right\}$$

$$(\cos 3x+i\sin 3x)\left[\left(-\frac{1}{50}\left(x^2-4x\right)-\frac{47}{2250}(2x-4)+\frac{22}{625}\right)+i\left(\frac{2}{75}\left(x^2-4x\right)-\frac{3}{125}(2x-4)-\frac{1318}{67\,500}\right)\right]$$

$$\left(-\frac{1}{50}\left(x^2-4x\right)-\frac{47}{2250}(2x-4)+\frac{22}{625}\right)\cos 3x-\left(\frac{2}{75}\left(x^2-4x\right)-\frac{3}{125}(2x-4)-\frac{1318}{67\,500}\right)\sin 3x$$

La parte real es

$$\left(-\frac{1}{50}\left(x^2-4x\right)-\frac{47}{2250}(2x-4)+\frac{22}{625}\right)\cos 3x-\left(\frac{2}{75}\left(x^2-4x\right)-\frac{3}{125}(2x-4)-\frac{1318}{67\,500}\right)\sin 3x$$

$$\left(-\frac{1}{50}x^2+\frac{4}{50}x-\frac{94}{2250}x+\frac{188}{2250}+\frac{22}{625}\right)\cos 3x-\left(\frac{2}{75}x^2-\frac{8}{75}x-\frac{6}{125}x-\frac{12}{125}-\frac{1318}{67\,500}\right)\sin 3x$$

$$\left(-\frac{1}{50}x^2+\left(\frac{4}{50}-\frac{94}{2250}\right)x+\frac{188}{2250}+\frac{22}{625}\right)\cos 3x-\left(\frac{2}{75}x^2-\frac{8}{75}x-\frac{6}{125}x-\frac{12}{125}-\frac{1318}{67\,500}\right)\sin 3x$$

$$\left(-\frac{1}{50}x^2+\frac{43}{1125}x+\frac{668}{5625}\right)\cos 3x-\left(\frac{2}{75}x^2-\frac{58}{375}x-\frac{3899}{33\,750}\right)\sin 3x$$

Teorema 4.16 *Sean $L(D)y=h_1(x)+i\,h_2(x)$ y $y_p=y_{p_1}+i\,y_{p_2}$ es una solución particular de la ecuación diferencial anterior, entonces y_{p_1} es la solución particular de la edo. $L(D)y=h_1(x)$ y y_{p_2} es una solución particular de la edo. $L(D)y=h_2(x)$.*

Demostración. En efecto, como $y_p = y_{p_1}+i\ y_{p_2}$ es una solución particular, entonces satisface la ecuación diferencial: $L(D)y=h_1(x)+ih_2(x)$; es decir,

$$\begin{aligned}
L(D)y_p &= h_1(x)+i\ h_2(x) \\
L(D)\left(y_{p_1}+i\ y_{p_2}\right) &= h_1(x)+i\ h_2(x) \\
L(D)\left(y_{p_1}\right)+i\ L(D)\left(y_{p_2}\right) &= h_1(x)+i\ h_2(x).
\end{aligned}$$

Igualando la parte real tenemos

$$L(D)\left(y_{p_1}\right)=h_1(x)$$

es decir, y_{p_1} es solución particular de $L(D)y=h_1(x)$

Igualando la parte imaginaria tenemos

$$L(D)\left(y_{p_2}\right)=h_2(x),$$

es decir, y_{p_2} es solución particular de $L(D)y = h_2(x)$

Ejemplo. Aplicando este último teorema, hallar una solución particular de la edo $(D^2+a^2)y = e^{iax} = \cos(ax) + i\ \operatorname{sen}(ax)$.

Solución: observe que como

$$L(D) = D^2 + a^2 \Rightarrow L(-a^2) = -a^2 + a^2 = 0,$$

entonces procedemos como sigue:

$$\begin{aligned}
y_p &= \frac{1}{D^2+a^2}(\cos(ax) + i\ \operatorname{sen}(ax)) = \frac{1}{D^2+a^2}e^{iax} = e^{iax}\frac{1}{(D+ia)^2+a^2}(1) \qquad (4.3)\\
&= e^{iax}\frac{1}{D^2+2iaD-a^2+a^2}(1) = e^{iax}\frac{1}{D^2+2iaD}(1) = e^{iax}\frac{1}{(D+2ia)\,D}(1)\\
&= e^{iax}\frac{1}{(D+2ia)}\frac{1}{D}(1) = e^{iax}\frac{1}{(D+2ia)}\int 1dx = e^{iax}\frac{1}{(D+2ia)}x\\
&= e^{iax}\frac{1}{2ia}\left[1-\frac{D}{2ia}\right]x = e^{iax}\frac{1}{2ia}\left[x-\frac{1}{2ia}\right] = \frac{e^{iax}}{2a}\left[-ix+\frac{1}{2a}\right]\\
&= \frac{1}{2a}\left[\cos(ax) + i\ \operatorname{sen}(ax)\right]\left[\frac{1}{2a}-ix\right]\\
&= \frac{1}{2a}\left[\left(\frac{1}{2a}\cos(ax) + x\operatorname{sen}(ax)\right) + i\left(\frac{1}{2a}\operatorname{sen}(ax) - x\cos(ax)\right)\right]
\end{aligned}$$

$$y_{p_1} = \frac{1}{2a}\cos(ax) + x\operatorname{sen}(ax) \quad \text{y} \quad y_{p_2} = \frac{1}{2a}\operatorname{sen}(ax) - x\cos(ax)$$

Los dos términos $\frac{1}{2a}\cos(ax)$ y $\frac{1}{2a}\operatorname{sen}(ax)$ en la expresión (4.3) no se tienen en cuenta porque $y_h = C_1\cos(ax) + C_2\operatorname{sen}(ax)$ y y_h absorbe los términos descartados, por lo tanto:

$$y_p = \frac{1}{2a}x\operatorname{sen}(ax) - i\frac{1}{2a}x\cos(ax)\,.$$

Se concluye entonces que

$$y_{p_1} = \frac{1}{2a}x\operatorname{sen}(ax)\,,$$

es solución particular de la ecuación diferencial $(D^2+a^2)y = \cos ax$ y $y_{p_2} = -\frac{1}{2a}x\cos(ax)$, es solución particular de la edo $(D^2+a^2)y = \operatorname{sen}(ax)$.

Ejemplo. Hallar la solución particular de $(D^2+a^2)y = \cos(ax)$

Solución: como $\cos(ax) =$ parte real de $e^{iax} = \operatorname{Re}\left(e^{iax}\right)$, entonces

$$\begin{aligned}
y_p &= \frac{1}{D^2+a^2}\operatorname{Re}\left(e^{iax}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{D^2+a^2}e^{iax}\right)\\
&= \operatorname{Re}\left(e^{iax}\frac{1}{(D+ia)^2+a^2}(1)\right) = \operatorname{Re}\left(e^{iax}\frac{1}{D^2+2iaD-a^2+a^2}(1)\right)\\
&= \operatorname{Re}\left(e^{iax}\frac{1}{D^2+2iaD}(1)\right) = \operatorname{Re}\left(e^{iax}\frac{1}{(D+2ia)\,D}(1)\right) = \operatorname{Re}\left(e^{iax}\frac{1}{D+2ia}\frac{1}{D}(1)\right)\\
&= \operatorname{Re}\left(e^{iax}\frac{1}{D+2ia}\int 1dx\right) = \operatorname{Re}\left(e^{iax}\frac{1}{D+2ia}x\right)\\
&= \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2a}x\operatorname{sen}(ax) - i\frac{1}{2a}x\cos(ax)\right) = \frac{1}{2a}x\operatorname{sen}(ax)\,.
\end{aligned}$$

Ejemplo. Hallar la solución particular de $(D^2+a^2)y = \operatorname{sen}(ax) =$ parte imaginaria de $(e^{iax}) = \operatorname{Im}(e^{iax})$

Solución: como $\operatorname{sen}(ax) =$ parte imaginaria de $e^{iax} = \operatorname{Im}(e^{iax})$, entonces

$$\begin{aligned}
y_p &= \frac{1}{D^2+a^2}\operatorname{Im}\left(e^{iax}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{D^2+a^2}e^{iax}\right)\\
&= \operatorname{Im}\left(e^{iax}\frac{1}{(D+ia)^2+a^2}(1)\right) = \operatorname{Im}\left(e^{iax}\frac{1}{D^2+2iaD-a^2+a^2}(1)\right)\\
&= \operatorname{Im}\left(\frac{1}{2a}x\operatorname{sen}(ax) - i\frac{1}{2a}x\cos(ax)\right) = -\frac{1}{2a}x\cos(ax).
\end{aligned}$$

Nota: el anterior método también se aplica para las edos de la forma $L(D)y = q(x)\operatorname{sen}(ax)$ o $L(D)y = q(x)\cos(ax)$, donde $q(x)$ es un polinomio o exponencial o producto de polinomio por exponencial.

Ejemplo. Hallar la solución particular de $(D^2-2D+2)y = 4e^x x\operatorname{sen}(x)$.

Solución:

$$\begin{aligned}
y_p &= \frac{1}{D^2-2D+2}4e^x x\operatorname{sen}(x) = 4e^x\frac{1}{(D+1)^2-2(D+1)+2}x\operatorname{sen}(x)\\
&= 4e^x\frac{1}{D^2+1}x\operatorname{sen}(x) = 4e^x\frac{1}{D^2+1}x\operatorname{Im}\left(e^{ix}\right) = 4e^x\operatorname{Im}\left[\frac{1}{D^2+1}xe^{ix}\right]\\
&= 4e^x\operatorname{Im}\left[e^{ix}\frac{1}{(D+i)^2+1}x\right] = 4e^x\operatorname{Im}\left[e^{ix}\frac{1}{D^2+2iD-1+1}x\right]\\
&= 4e^x\operatorname{Im}\left[e^{ix}\frac{1}{D^2+2iD}x\right] = 4e^x\operatorname{Im}\left[e^{ix}\frac{1}{(D+2i)D}x\right]\\
&= 4e^x\operatorname{Im}\left[e^{ix}\frac{1}{(D+2i)}\frac{1}{D}x\right] = 4e^x\operatorname{Im}\left[e^{ix}\frac{1}{(D+2i)}\int x\,dx\right]\\
&= 4e^x\operatorname{Im}\left[e^{ix}\frac{1}{(D+2i)}\frac{x^2}{2}\right] = 2e^x\operatorname{Im}\left[e^{ix}\frac{1}{(D+2i)}x^2\right]\\
&= 2e^x\operatorname{Im}\left[e^{ix}\frac{1}{2i}\left[1-\frac{D}{2i}+\frac{D^2}{(2i)^2}\right]x^2\right] = 2e^x\operatorname{Im}\left(e^{ix}\frac{1}{2i}\left[1-\frac{D}{2i}-\frac{D^2}{4}\right]x^2\right)\\
&= 2e^x\operatorname{Im}\left[e^{ix}\frac{1}{2i}\left(x^2-\frac{2x}{2i}-\frac{2}{4}\right)\right] = 2e^x\operatorname{Im}\left[e^{ix}\frac{1}{2i}\left(x^2-\frac{x}{i}-\frac{1}{2}\right)\right]\\
&= e^x\operatorname{Im}\left[e^{ix}(-i)\left(x^2-\frac{x}{i}-\frac{1}{2}\right)\right] = e^x\operatorname{Im}\left[e^{ix}\left(-ix^2+x+\frac{i}{2}\right)\right]\\
&= e^x\operatorname{Im}\left[(\cos x + i\operatorname{sen} x)\left(-ix^2+x+\frac{i}{2}\right)\right] = e^x\left(-x^2\cos x + x\operatorname{sen} x + \frac{\cos x}{2}\right).
\end{aligned}$$

La homogénea asociada: $(D^2-2D+2)y = 0$ tiene por cuación característica $m^2-2m+2 = 0$, cuyas raíces son $m = \frac{2\pm\sqrt{4-8}}{2} = \frac{2\pm 2i}{2} = 1\pm i$.

Luego

$$y_h = C_1e^x\cos x + C_2e^x\operatorname{sen} x$$

y como $e^x\frac{\cos x}{2}$ aparece en y_h, entonces descartamos esta expresión de y_p, por lo tanto la y_p queda de la siguiente forma:

$$y_p = e^x\left(-x^2\cos x + x\operatorname{sen} x\right).$$

Ejemplo. Utilizando el método de los operadores inversos resolver la siguiente integral: $\int x^2\cos x\,dx$.

Solución:

$$\begin{aligned}
\int x^2 \cos x\ dx &= \frac{1}{D}x^2\cos x = \frac{1}{D}x^2 \operatorname{Re}\left(e^{ix}\right) = \operatorname{Re}\left[\frac{1}{D}x^2e^{ix}\right]\\
&= \operatorname{Re}\left[e^{ix}\frac{1}{(D+i)}x^2\right] = \operatorname{Re}\left[e^{ix}\frac{1}{i}\left(1-\frac{D}{i}+\frac{D^2}{i^2}\right)x^2\right]\\
&= \operatorname{Re}\left[e^{ix}\left(-i\right)\left(1-\frac{D}{i}+\frac{D^2}{i^2}\right)x^2\right] = \operatorname{Re}\left[e^{ix}\left(-i+D+iD^2\right)x^2\right]\\
&= \operatorname{Re}\left[e^{ix}\left(-ix^2+2x+2i\right)\right] = \operatorname{Re}\left[(\cos x + i\operatorname{sen} x)\left(-ix^2+2x+2i\right)\right]\\
&= 2x\cos x - 2\operatorname{sen} + x^2\operatorname{sen} x + C.
\end{aligned}$$

Ejemplo. Usando el método de los operadores inversos, calcular la siguiente integral: $\int e^{3x}\operatorname{sen}(2x)\,dx$.
Solución:

$$\begin{aligned}
\int e^{3x}\operatorname{sen}(2x)\,dx &= \frac{1}{D}e^{3x}\operatorname{sen}(2x) = e^{3x}\frac{1}{D+3}\operatorname{sen}(2x)\\
&= e^{3x}\frac{D-3}{D^2-9}\operatorname{sen}(2x) = e^{3x}\frac{D-3}{-2^2-9}\operatorname{sen}(2x)\\
&= e^{3x}\frac{D-3}{-13}\operatorname{sen}(2x) = -\frac{1}{13}e^{3x}\left(D-3\right)\operatorname{sen}(2x)\\
&= -\frac{1}{13}e^{3x}\left[2\cos(2x) - 3\operatorname{sen}(2x)\right] + C.
\end{aligned}$$

4.3.2. Ejercicios

1. Para los siguientes ejercicios hallar la solución particular, utilizando el método de los operadores inversos:

   a) $(D^2+16)y = x\cos 4x$ (Respuesta: $y_p = \frac{1}{64}x\cos 4x + \frac{x^2}{16}\operatorname{sen} 4x$)

   b) $(D^2+4)y = xe^x\operatorname{sen} x$ (Respuesta: $y_p = e^x\left[\left(\frac{1}{50}-\frac{x}{10}\right)\cos x + (-\frac{7}{50}+\frac{x}{5})\operatorname{sen} x\right]$)

   c) $(D^2+4)y = 64x\operatorname{sen} 2x + 32\cos 2x$ (Respuesta: $y_p = 12x\operatorname{sen} 2x - 8x^2\cos 2x$)

   d) $y''' - 5y'' + 6y' = 2\operatorname{sen} x + 8$ (Respuesta: $y_p = -\frac{1}{5}\cos x + \frac{1}{5}\operatorname{sen} x + \frac{4}{3}x$)

   e) $(D^2+9)y = 36\operatorname{sen} 3x$ (Respuesta: $y_p = -6x\cos 3x$)

   f) $(D^3+1)y = \cos 2x + 2\operatorname{sen} 3x$ (Respuesta: $y_p = \frac{1}{65}(\cos 2x - 8\operatorname{sen} 2x) + \frac{1}{365}(27\cos 3x + \operatorname{sen} 3x)$)

   g) $(D^2+2D+2)y = e^x\operatorname{sen} x$ (Respuesta: $y_p = -\frac{e^x}{8}(\cos x - \operatorname{sen} x)$)

2. Calcular, utilizando el método de los operadores inversos,

   $\int x^3e^2xdx$. (Respuesta: $\frac{e^{2x}}{2}(x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}) + C$)

3. Calcular, $\int e^{-pt}t^n dt$, utilizando operadores inversos.

   Respuesta: $-\frac{e^{-pt}}{p}\left[t^n + \frac{nt^{n-1}}{p} + \frac{n(n-1)t^{n-2}}{p^2} + \ldots + \frac{n!}{p^n}\right] + C.$

4. Calcular, $\int xe^x\cos(2x)\,dx$, utilizando operadores inversos.

   Respuesta: $\frac{e^x}{5}\left[x\cos(2x) + \frac{3}{5}\cos(2x) + 2x\operatorname{sen}(2x) - \frac{4}{5}\operatorname{sen} x\right] + C.$

5. Dada la edo $y'' + by' + cy = e^{ax}$, donde a no es raíz de la ecuación característica. Mostrar que una solución particular es de la forma $y_p = Ae^{ax}$, donde $A = \frac{1}{a^2+ab+c}$.

6. Dada la E.D. $y'' + by' + cy = e^{ax}$, donde a es raíz de multiplicidad dos de la ecuación característica. Mostrar que una solución particular es de la forma $y_p = Ax^2e^{ax}$, donde $A = \dfrac{1}{2}$.

7. Hallar una solución particular de la ecuación diferencial $\left(D^2+1\right)y = \operatorname{sen} x$.

Solución. Por la fórmula de Euler tenemos que $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$. Luego $\operatorname{sen} x = \operatorname{Im}\left(e^{ix}\right)$ y $\cos x = \operatorname{Re}\left(e^{ix}\right)$.

Consideremos la ecuación diferencial $\left(D^2+1\right)z(x) = e^{ix}$. Se sigue entonces que:

$$\begin{aligned}
\left(D^2+1\right)z(x) &= e^{ix} \Longrightarrow z_p(x) = \frac{1}{\left(D^2+1\right)}e^{ix} \\
&\Longrightarrow z_p(x) = e^{ix}\frac{1}{\left((D+i)^2+1\right)}(1) \\
&\Longrightarrow z_p(x) = e^{ix}\frac{1}{D^2+2iD+i^2+1}(1) \Longrightarrow z_p(x) = e^{ix}\frac{1}{D^2+2iD-1+1}(1) \\
&\Longrightarrow z_p(x) = e^{ix}\frac{1}{D^2+2iD}(1) \Longrightarrow z_p(x) = e^{ix}\frac{1}{(D+2i)D}(1) \\
&\Longrightarrow z_p(x) = e^{ix}\frac{1}{D+2i}\frac{1}{D}(1) \Longrightarrow z_p(x) = e^{ix}\left[\frac{1}{D+2i}\right]\left(\int 1dx\right) \\
&\Longrightarrow z_p(x) = e^{ix}\left[\frac{1}{D+2i}\right]x.
\end{aligned}$$

Hagamos la división de 1 por $D+2i$:

$$\begin{array}{lll|l}
1 & & & 2i + D \\ \cline{4-4}
-1 & -\dfrac{D}{2i} & & \dfrac{1}{2i} - \dfrac{D}{(2i)^2} + \dfrac{D^2}{(2i)^3} \\ \cline{1-2}
 & -\dfrac{D}{2i} & & \\
 & \dfrac{D}{2i} & +\dfrac{D^2}{(2i)^2} & \\ \cline{2-3}
 & & \dfrac{D^2}{(2i)^2} &
\end{array}$$

$\dfrac{1}{2i+D} = -\frac{1}{2}i + \frac{1}{4}D + \frac{1}{8}iD^2 - \frac{1}{16}D^3 - \frac{1}{32}iD^4 + O\left(D^5\right)$

Luego:

$$\begin{aligned}
z_p(x) &= e^{ix}\left[\frac{1}{D+2i}\right]x = e^{ix}\left[-\frac{1}{2}i + \frac{1}{4}D\right]x \\
&= e^{ix}\left[-\frac{1}{2}ix + \frac{1}{4}\right] = (\cos x + i \operatorname{sen} x)\left[-\frac{1}{2}ix + \frac{1}{4}\right] \\
&= \frac{1}{4}\cos x + \frac{1}{2}x \operatorname{sen} x + i\left[\frac{1}{4}\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}x\cos x\right]
\end{aligned}$$

Para hallar una solución particular de la ecuación diferencial $\left(D^2+1\right)y = \operatorname{sen} x$, dado que $\operatorname{sen} x = \operatorname{Im}\left(e^{ix}\right)$, utilizamos la parte imaginaria de $z(x)$ que es $\dfrac{1}{4}\operatorname{sen} x - \dfrac{1}{2}x\cos x$, y como $\dfrac{1}{4}\operatorname{sen} x$ es absorvido por la solución de la ecuación lineal homogénea asociada, se sigue que $y_p = -\frac{1}{2}x\cos x$.

La solución general de la ecuación diferencial dada es: $y(x) = C_1\cos x + C_2 \operatorname{sen} x - \frac{1}{2}x\cos x$.

Ejemplo. Use el operador diferencial inverso para resolver la ecuación $D^2(D-1)^3(D+1)y = e^x$.

Solución. La solución de la ecuación lineal homogénea asociada es

$$y_h = C_1 + C_2x + C_3e^x + C_4xe^x + C_5x^2e^x + C_6e^{-x}.$$

Hallemos una solución particular:

$$D^2(D-1)^3(D+1)\,y = e^x \Longrightarrow y_p = \left[\frac{1}{D^2(D-1)^3(D+1)}\right]e^x.$$

Recordemos que

$$\begin{aligned} L(D)\,e^{mx} &= L(m)\,e^{mx} \\ (D-m)^n(x^n e^{mx}) &= n!e^{mx}. \end{aligned}$$

Si $n=1$, entonces

$$(D-m)(xe^{mx}) = D(xe^{mx}) - m(xe^{mx}) = e^{mx} + mxe^{mx} - mxe^{mx} = e^{mx}.$$

Si $n=2$, entonces

$$\begin{aligned} (D-m)^2(x^n e^{mx}) &= \left(D^2 - 2mD + m^2\right)\left(x^2 e^{mx}\right) \\ &= e^{mx}(D+m-m)^2\left(x^2\right) = e^{mx}D^2\left(x^2\right) = 2e^{mx} = 2!e^{mx}. \end{aligned}$$

De $L(D)\,e^{mx} = L(m)\,e^{mx}$, se sigue que

$$\frac{1}{L(D)}e^{mx} = \frac{e^{mx}}{L(m)}, \text{ si } L(m) \neq 0.$$

Este resultado no podemos aplicar en este caso porque $L(1) = 1^2(1-1)^3(1+1) = 0$ Debemos buscar otra alternativa. Reescribiendo el operador $L(D) = D^2(D-1)^3(D+1)$, en la forma $L(D) = \phi(D)(D-1)^3$, donde $\phi(D) = D^2(D+1)$, con $\phi(1) = 20$, y aplicando $(D-m)^n(x^n e^{mx}) = n!e^{mx}$, se sigue que:

$$\begin{aligned} L(D)\left(x^3 e^x\right) &= \phi(D)(D-1)^3\left(x^3 e^x\right) = \phi(D)\,e^x(D+1-1)^3\left(x^3\right) \\ &= \phi(D)\,e^x D^3\left(x^3\right) = \phi(D)\,e^x 3! = 3!\phi(D)\,e^x = 3!\phi(1)\,e^x. \end{aligned}$$

Luego

$$\frac{1}{\phi(D)(D-1)^3}e^x = \frac{x^3e^x}{3!\phi(1)} = \frac{x^3e^x}{3!(2)} = \frac{x^3e^x}{12}.$$

Es decir que $y_p = \dfrac{x^3e^x}{12}$.
La soluciónn general es:

$$y(x) = C_1 + C_2x + C_3e^x + C_4xe^x + C_5x^2e^x + C_6e^{-x} + \frac{x^3e^x}{12}.$$

Ejemplo
Hallar una solución particular de $\left(D^3+D+1\right)y(x) = \operatorname{sen}(3x)$.
Solución.

$$\begin{aligned} \left(D^3+D+1\right)y(x) &= \operatorname{sen}(3x) \Longrightarrow y_p = \frac{1}{(D^3+D+1)}\operatorname{sen}(3x) \Longrightarrow y_p = \frac{1}{(-9D+D+1)}\operatorname{sen}(3x) \\ &\Longrightarrow \quad y_p = \left[\frac{1}{1-8D}\right]\operatorname{sen}(3x) \Longrightarrow y_p = \left[\frac{1}{1-8D}\frac{1+8D}{1+8D}\right]\operatorname{sen}(3x) \\ &\Longrightarrow \quad y_p = \left[\frac{1+8D}{1-64D^2}\right]\operatorname{sen}(3x) \Longrightarrow y_p = \left[\frac{1+8D}{1-64(-9)}\right]\operatorname{sen}(3x) \\ &\Longrightarrow \quad y_p = \left[\frac{1+8D}{577}\right]\operatorname{sen}(3x) \Longrightarrow y_p = \left[\frac{\operatorname{sen}(3x) + 8(3\cos(3x))}{577}\right] \\ &\Longrightarrow \quad y_p = \left[\frac{\operatorname{sen}(3x) + 24\cos(3x)}{577}\right] \end{aligned}$$

Ejemplo

Encontrar una solución particular de $(D+1)(D-3)^2 y(x) = e^{3x}$.
Solución.

$$\begin{aligned}
y_p &= \frac{1}{(D+1)(D-3)^2}e^{3x} \Longrightarrow y_p = \left(\frac{1}{D+1}\right)\left(\frac{1}{D-3}\right)^2 e^{3x} \Longrightarrow y_p = \left(\frac{1}{D-3}\right)^2\left(\frac{1}{D+1}\right)e^{3x} \\
\Longrightarrow \quad & y_p = \left(\frac{1}{D-3}\right)^2\left(\frac{1}{D+1}\right)e^{-x}e^{x}e^{3x} \Longrightarrow y_p = \left(\frac{1}{D-3}\right)^2 e^{-x}\left(\frac{1}{D-1+1}\right)e^{4x} \\
\Longrightarrow \quad & y_p = \left(\frac{1}{D-3}\right)^2 e^{-x}\left(\frac{1}{D}\right)e^{4x} \Longrightarrow y_p = \left(\frac{1}{D-3}\right)^2 e^{-x}\int e^{4x}dx \\
\Longrightarrow \quad & y_p = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{D-3}\right)^2 e^{3x} \Longrightarrow y_p = \frac{1}{4}e^{3x}\left(\frac{1}{D+3-3}\right)^2(1) \Longrightarrow y_p = \frac{1}{4}e^{3x}\frac{1}{D^2}(1) \\
\Longrightarrow \quad & y_p = \frac{1}{4}e^{3x}\int\left(\int 1dx\right)dx \Longrightarrow y_p = \frac{1}{4}e^{3x}\int xdx \Longrightarrow y_p = \frac{1}{4}e^{3x}\left(\frac{x^2}{2}\right) \Longrightarrow y_p = \frac{1}{8}x^2e^{3x}.
\end{aligned}$$

Otra forma:

$$\begin{aligned}
(D+1)(D-3)^2 y(x) &= e^{3x} \Longrightarrow y_p = \frac{1}{\phi(D)(D-3)^2}e^{3x}, \text{ donde } \phi(D) = D+1, \text{ con } \phi(3) = 4 \\
&\Longrightarrow \quad y_p = \frac{x^2}{2!\phi(3)}e^{3x} \Longrightarrow y_p = \frac{x^2}{2!(4)}e^{3x} \Longrightarrow y_p = \frac{x^2}{8}e^{3x}.
\end{aligned}$$

Ejemplo
Encontrar una solución particular de $\left(D^2+1\right) y(x) = xe^x \cos x$.
Solución. Como $\cos x = \operatorname{Re}\left(e^{ix}\right)$, resolveremos la ecuación

$$\left(D^2+1\right) y(x) = xe^x e^{ix} \Longleftrightarrow \left(D^2+1\right) y(x) = xe^{(1+i)x}$$

y del resultado tomaremos la parte real.

$$\begin{aligned}
\left(D^2+1\right) y(x) &= xe^{(1+i)x} \Longrightarrow y_p = \left(\frac{1}{D^2+1}\right)xe^{(1+i)x} \\
y_p &= e^{(1+i)x}\left(\frac{1}{(D+1+i)^2+1}\right)x \\
y_p &= e^{(1+i)x}\left(\frac{1}{D^2+(2+2i)D+1+2i}\right)x \\
y_p &= e^{(1+i)x}\left[\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i\right)-\left(\frac{2}{25}-\frac{14}{25}i\right)D\right]x \\
y_p &= e^{(1+i)x}\left[\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i\right)x-\left(\frac{2}{25}-\frac{14}{25}i\right)\right] \\
y_p &= e^{(1+i)x}\left[\frac{1}{5}x-\frac{2}{5}ix-\frac{2}{25}+\frac{14}{25}i\right] \\
y_p &= e^{(1+i)x}\left[\left(\frac{1}{5}x-\frac{2}{25}\right)+i\left(\frac{14}{25}-\frac{2}{5}x\right)\right] \\
y_p &= e^x(\cos x + i\operatorname{sen} x)\left[\left(\frac{1}{5}x-\frac{2}{25}\right)+i\left(\frac{14}{25}-\frac{2}{5}x\right)\right] \\
y_p &= e^x\left[\left(\frac{1}{5}x-\frac{2}{25}\right)\cos x-\left(\frac{14}{25}-\frac{2}{5}x\right)\operatorname{sen} x\right] \\
&\quad +ie^x\left[\left(\frac{14}{25}-\frac{2}{5}x\right)\cos x+\left(\frac{1}{5}x-\frac{2}{25}\right)\operatorname{sen} x\right]
\end{aligned}$$

Observación. $\frac{1}{D^2+(2+2i)D+1+2i} = \left(\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i\right)-\left(\frac{2}{25}-\frac{14}{25}i\right)D-\left(\frac{1}{125}+\frac{68}{125}i\right)D^2+\left(\frac{12}{625}+\frac{316}{625}i\right)D^3-\left(\frac{19}{3125}+\frac{1542}{3125}i\right)D^4+O\left(D^5\right)$

La parte real es $e^x\left[\left(\frac{1}{5}x-\frac{2}{25}\right)\cos x-\left(\frac{14}{25}-\frac{2}{5}x\right)\operatorname{sen} x\right]$.

Teorema de entrada de la exponencial. Sea un operador polinomial con coeficientes constantes y $L^{(p)}$ su $p-\acute{e}sima$ derivada. Entonces

$$L\left(D\right)y=e^{ax},\ \text{ donde } a \text{ es un real o complejo,}$$

tiene como solución particular

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{e^{ax}}{L\left(a\right)},\ \text{ si } L\left(a\right)\neq 0; \qquad (1)\\ y_p &= \frac{x^pe^{ax}}{L^{(p)}\left(a\right)},\ \text{ si } a \text{ es un cero (raíz) de multiplicidad } p \text{ de } L\left(D\right). \qquad (2)\end{aligned}$$

Si $p=0$, de (2) se deduce (1).

Antes de probar el teorema, damos dos ejemplos; la primera ilustra nuevamente la utilidad de exponenciales complejas.

Ejemplo

Encuentre una solución particular para $\left(D^2-D+1\right)y=e^{2x}\cos x$.

Solución. Nosotros escribimos $e^{2x}\cos x=\operatorname{Re}\left(e^{(2+i)x}\right)$. Por lo que la correspondiente ecuación compleja es

$$\left(D^2-D+1\right)z=e^{(2+i)x},$$

y nuestra y_p buscada será entonces la parte real de z. Usando (1) se sigue que

$$L\left(2+i\right)=\left(2+i\right)^2-\left(2+i\right)+1=2+3i,$$

por lo cual

$$z_p=\frac{1}{2+3i}e^{(2+i)x}=\frac{2-3i}{13}e^{2x}\left(\cos x+i\operatorname{sen} x\right).$$

Luego

$$\operatorname{Re}\left(z_p\right)=\frac{2}{13}e^{2x}\cos x+\frac{3}{13}e^{2x}\operatorname{sen} x=y_p.$$

Ejemplo. Hallar una solución particular de $\left(D^2+D+1\right)y=e^{-x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

Solución. Como $e^{-x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)=\operatorname{Re}\left(e^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)x}\right)$, se sigue que:

$$\left(D^2+D+1\right)z=e^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)x}.$$

De este resultado tomaremos la parte real.

$$z_p=\left[\frac{1}{D^2+D+1}\right]e^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)x}.$$

Como, $L(D)=D^2+D+1$ y

$$L\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)+1=\frac{1}{4}-\frac{i\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}+1=0,$$

aplicamos el teorema 4:

$$z_p=\frac{x^ke^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)x}}{k!\phi\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)},\ \text{donde } \phi\left(D\right)=\frac{D^2+D+1}{\left(D-\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\right)}$$

y como

$$D^2+D+1=\left(D-\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(D-\left(-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

se sigue que

$$\phi(D) = \left(D - \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \left(D + \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$$

Luego

$$\phi\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} = i\sqrt{3}.$$

por tanto

$$\begin{aligned} z_p &= \frac{x^k e^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)x}}{k!\phi\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{xe^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)x}}{1!\left(i\sqrt{3}\right)} = \frac{xe^{-x/2}e^{i\frac{i\sqrt{3}}{2}x}}{i\sqrt{3}} = -i\frac{\sqrt{3}}{3}xe^{-x/2}e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}x} \\ &= -i\frac{\sqrt{3}}{3}xe^{-x/2}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + i\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right] \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}xe^{-x/2}\left[-i\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right] \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} y_p &= \operatorname{Re}\left\{\frac{\sqrt{3}}{3}xe^{-x/2}\left[-i\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]\right\} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}xe^{-x/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(D^2+D+1\right)y &= e^{-x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Longrightarrow y_p = \left[\frac{1}{D^2+D+1}\right]e^{-x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &\Longrightarrow y_p = e^{-x/2}\left[\frac{1}{\left(D-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(D-\frac{1}{2}\right)+1}\right]\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &\Longrightarrow y_p = e^{-x/2}\left[\frac{1}{D^2 - D + \frac{1}{4} + D - \frac{1}{2} + 1}\right]\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &\Longrightarrow y_p = e^{-x/2}\left[\frac{1}{D^2+\frac{3}{4}}\right]\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}$$

Como al sustituir D^2 con $-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ en $D^2 + \frac{3}{4}$ se tiene $-\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 0$, entonces procedemos como sigue:

$$\begin{aligned} y_p &= e^{-x/2}\left[\frac{1}{D^2+\frac{3}{4}}\right]\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= xe^{-x/2}\left[\frac{1}{2D}\right]\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= xe^{-x/2}\left[\frac{1}{2\frac{\sqrt{3}}{2}}\right]\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}xe^{-x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}xe^{-x/2}\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right). \end{aligned}$$

Verificación.
Calculemos:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}xe^{-x/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)+\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}xe^{-x/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}xe^{-x/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

Se tiene:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}xe^{-x/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)=\frac{1}{6}e^{-\frac{1}{2}x}\left(2\sqrt{3}\sin\frac{1}{2}\sqrt{3}x+3x\cos\frac{1}{2}\sqrt{3}x-\sqrt{3}x\sin\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right)$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}
.\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}xe^{-x/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) &= \frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}xe^{-x/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)\right]\\
&= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{6}e^{-\frac{1}{2}x}\left(2\sqrt{3}\sin\frac{1}{2}\sqrt{3}x+3x\cos\frac{1}{2}\sqrt{3}x-\sqrt{3}x\sin\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right)\right)\\
&= -\frac{1}{6}e^{-\frac{1}{2}x}\left(2\sqrt{3}\sin\frac{1}{2}\sqrt{3}x-6\cos\frac{1}{2}\sqrt{3}x+3x\cos\frac{1}{2}\sqrt{3}x+\sqrt{3}x\sin\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right)
\end{aligned}$$

Es decir:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}xe^{-x/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)=-\frac{1}{6}e^{-\frac{1}{2}x}\left(2\sqrt{3}\sin\frac{1}{2}\sqrt{3}x-6\cos\frac{1}{2}\sqrt{3}x+3x\cos\frac{1}{2}\sqrt{3}x+\sqrt{3}x\sin\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right).$$

Se deja como ejercicio continuar la verificación.

4.3.3. Otros ejemplos resueltos

1. Hallar una solución particular de la ecuación diferencial $\left(D^2+D+1\right)y=e^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)x}$.

   Solución.

   Como, $L(D)=D^2+D+1$ y $L\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)+1=\frac{1}{4}-\frac{i\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}+1=0$, aplicamos el teorema que dice que $y_p=\dfrac{x^ke^{ax}}{k!\phi\left(a\right)}$, donde a es la raíz de multiplicidad k de la ecuación característica y que anula a $L\left(D\right)$ y $\phi\left(D\right)=\dfrac{L\left(D\right)}{\left(D-\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\right)}$; y como

$$D^2+D+1=\left(D-\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(D-\left(-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\right),$$

   se sigue que

$$\begin{aligned}
\phi\left(D\right) &= \frac{D^2+D+1}{\left[D-\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\right]}=\frac{\left[D-\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\right]\left[D-\left(-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\right]}{\left[D-\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\right]}\\
&= \left[D-\left(-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\right]=\left(D+\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right).
\end{aligned}$$

   Es decir que

$$\phi\left(D\right)=D+\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

En consecuencia
$$\phi\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}=i\sqrt{3}.$$

Luego:
$$y_p=\frac{x^k e^{ax}}{k!\phi\left(a\right)}=\frac{x^k e^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)x}}{k!\phi\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{xe^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)x}}{1!\phi\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{xe^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)x}}{i\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}ixe^{\alpha x},\quad \text{con } .\alpha=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

Llamando $\alpha=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{i\sqrt{3}}{2}$, la solución particular se escribiría como $y_p=\dfrac{xe^{\alpha x}}{i\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}ixe^{\alpha x}$.

Verifiquemos que es una solución particular:
$$\begin{aligned}
\left(D^2+D+1\right)y_p &= \left(D^2+D+1\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}ixe^{\alpha x}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}i\left(D^2+D+1\right)\left(xe^{\alpha x}\right)\\
&= -\frac{\sqrt{3}}{3}i\left[D^2\left(xe^{\alpha x}\right)+D\left(xe^{\alpha x}\right)+\left(xe^{\alpha x}\right)\right]\\
&= \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}i\right)\left[\left(xe^{\alpha x}\right)+D\left(xe^{\alpha x}\right)+D^2\left(xe^{\alpha x}\right)\right]\\
&= \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}i\right)\left[\left(xe^{\alpha x}\right)+\left(e^{\alpha x}+\alpha xe^{\alpha x}\right)+D\left(e^{\alpha x}+\alpha xe^{\alpha x}\right)\right]\\
&= \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}i\right)\left[xe^{\alpha x}+e^{\alpha x}+\alpha xe^{\alpha x}+\alpha e^{\alpha x}+\alpha e^{\alpha x}+\alpha^2 xe^{\alpha x}\right]\\
&= \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}i\right)\left[\left(1+\alpha+\alpha^2\right)xe^{\alpha x}+\left(1+2\alpha\right)e^{\alpha x}\right]
\end{aligned}$$

Por otra parte,
$$\begin{aligned}
1+\alpha+\alpha^2 &= 1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2\\
&= 1-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{4}-\frac{i\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4}=0.\\
1+2\alpha &= 1+2\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)=1-1+i\sqrt{3}=i\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Luego
$$\begin{aligned}
\left(D^2+D+1\right)y_p &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}i\right)\left[\left(1+\alpha+\alpha^2\right)xe^{\alpha x}+\left(1+2\alpha\right)e^{\alpha x}\right]\\
&= \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}i\right)\left[i\sqrt{3}e^{\alpha x}\right]=e^{\alpha x}=e^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)x}.
\end{aligned}$$

2. Hallar una solución particular de $\left(D^2+D+1\right)y=e^{-x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

   Solución. Como $e^{-x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)=\operatorname{Re}\left(e^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)x}\right)$, se sigue que podemos resolver la ecuación diferencial:
$$\left(D^2+D+1\right)z=e^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)x},$$
   y de dicho resultado tomar la parte real. Así:
$$z_p=\left[\frac{1}{D^2+D+1}\right]e^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)x}.$$

$$z_p = \frac{x^k e^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)x}}{k!\phi\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)}, \text{ donde } \phi(D) = \frac{D^2+D+1}{\left(D-\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\right)}$$

y como

$$D^2+D+1 = \left(D-\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(D-\left(-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

se sigue que

$$\phi(D) = \left(D-\left(-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \left(D+\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$$

Luego

$$\phi\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2} = i\sqrt{3}.$$

por tanto

$$\begin{aligned} z_p &= \frac{x^k e^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)x}}{k!\phi\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{x e^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)x}}{1!\left(i\sqrt{3}\right)} = \frac{xe^{-x/2}e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}x}}{i\sqrt{3}} = -i\frac{\sqrt{3}}{3}xe^{-x/2}e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}x} = -i\frac{\sqrt{3}}{3}x\ e^{\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x} \\ &= -i\frac{\sqrt{3}}{3}xe^{-x/2}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+i\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right] \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}xe^{-x/2}\left[-i\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right] \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} y_p &= \operatorname{Re}(z_p) = \operatorname{Re}\left\{\frac{\sqrt{3}}{3}xe^{-x/2}\left[-i\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]\right\} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}xe^{-x/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right). \end{aligned}$$

Otra forma de proceder es la siguiente:

$$\begin{aligned} \left(D^2+D+1\right)y &= e^{-x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \Longrightarrow y_p = \left[\frac{1}{D^2+D+1}\right]e^{-x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \\ &\Longrightarrow y_p = e^{-x/2}\left[\frac{1}{\left(D-\frac{1}{2}\right)^2+\left(D-\frac{1}{2}\right)+1}\right]\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \\ &\Longrightarrow y_p = e^{-x/2}\left[\frac{1}{D^2-D+\frac{1}{4}+D-\frac{1}{2}+1}\right]\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \\ &\Longrightarrow y_p = e^{-x/2}\left[\frac{1}{D^2+\frac{3}{4}}\right]\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}$$

Como al sustituir D^2 con $-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ en $D^2+\frac{3}{4}$ se tiene $-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=0$, entonces aplicamos el resultado que nos dice que: $\frac{1}{L(D^2)}\cos(ax) = x^k\frac{1}{L^{(k)}(D^2)}\cos(ax)$, si $L\left(-a^2\right)=0$, siendo k el orden de multiplicidad del factor $\left(D^2+a^2\right)$ que anula a $L\left(D^2\right)$. Por lo que como $k=1$, que es la multiplicidad de la raíz a, y como de $L\left(D^2\right)=D^2+\frac{3}{4}$ se sigue que $L'\left(D^2\right)=2D$, luego:

$$\begin{aligned}
y_p &= e^{-x/2}\left[\frac{1}{D^2+\frac{3}{4}}\right]\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\\
&= e^{-x/2}\left[x\frac{1}{L'\left(D^2\right)}\right]\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)=xe^{-x/2}\left[\frac{1}{2D}\right]\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\\
&= \frac{1}{2}xe^{-x/2}\frac{1}{D}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)=\frac{1}{2}xe^{-x/2}\int\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)dx\\
&= \frac{1}{2}xe^{-x/2}\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}xe^{-x/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).
\end{aligned}$$

Observación. Como dada la ecuación diferencial $\left(D^2+D+1\right)z=e^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)x}$ se sigue que una solución particular es:

$$\begin{aligned}
z_p &= -\frac{\sqrt{3}}{3}ixe^{\alpha x}=-\frac{\sqrt{3}}{3}ixe^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)x}=-\frac{\sqrt{3}}{3}ixe^{-x/2}e^{\frac{i\sqrt{3}}{2}x}\\
&= -\frac{\sqrt{3}}{3}ixe^{-x/2}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+i\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]\\
&= \frac{\sqrt{3}}{3}xe^{-x/2}\left[-i\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]
\end{aligned}$$

Luego, las partes real e imaginaria de z_p son:

$$\operatorname{Re}\left(z_p\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}xe^{-x/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\qquad \text{e} \qquad \operatorname{Im}\left(z_p\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}xe^{-x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

3. Hallar una solución particular de

   a) $\left(D^2+4\right)y=\cos(2x)$

   b) $\left(D^2+4\right)^2y=\cos(2x)$

   c) $\left(D^2+4\right)^3y=\sin(2x)$

   d) $\left(D^2+D+1\right)^2y=e^{-x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

   e) $\left(D^2+D+1\right)^3y=e^{-x/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

4. Hallar una solución particular de $\left(D^2+a^2\right)y=\sin(ax)$

   Solución

$$\begin{aligned}
\left(D^2+a^2\right)y &= \sin(ax)\Longrightarrow y_p=\left[\frac{1}{D^2+a^2}\right]\sin(ax)\Longrightarrow y_p=x^1\left[\frac{1}{L'\left(D^2\right)}\right]\sin(ax)\\
&\Longrightarrow y_p=x^1\left[\frac{1}{2D}\right]\sin(ax)\Longrightarrow y_p=\frac{1}{2}x\left[\frac{1}{D}\right]\sin(ax)\\
&\Longrightarrow y_p=\frac{1}{2}x\int\sin(ax)\,dx\Longrightarrow y_p=-\frac{1}{2a}x\cos(ax).
\end{aligned}$$

Verificación:

$$\begin{aligned}
\left(D^2+a^2\right)y_p &= \left(D^2+a^2\right)\left(-\frac{1}{2a}x\cos(ax)\right) = -\frac{1}{2a}\left[D^2\left(x\cos(ax)\right)+a^2\left(x\cos(ax)\right)\right]\\
&= -\frac{1}{2a}\left[D\left(\cos(ax)-ax\sin ax\right)+a^2x\cos(ax)\right]\\
&= -\frac{1}{2a}\left[\left(-a\sin(ax)-a\sin(ax)-a^2x\cos(ax)\right)+a^2x\cos(ax)\right]\\
&= -\frac{1}{2a}\left[-a\sin(ax)-a\sin(ax)-a^2x\cos(ax)+a^2x\cos(ax)\right]\\
&= -\frac{1}{2a}\left[-2a\sin(ax)\right]=\sin(ax).
\end{aligned}$$

5. Hallar una solución particular de $\left(D^2+a^2\right)^2 y=\sin(ax)$

   Solución

$$\left(D^2+a^2\right)^2 y=\sin(ax)\Longrightarrow y_p=\left[\frac{1}{\left(D^2+a^2\right)^2}\right]\sin(ax)\Longrightarrow y_p=x^2\left[\frac{1}{L''\left(D^2\right)}\right]\sin(ax).$$

Y como

$$L\left(D^2\right)=\left(D^2+a^2\right)^2=D^4+2a^2D^2+a^4,$$

se sigue que:

$$\begin{aligned}
L'\left(D^2\right) &= 4D^3+4a^2D\\
L''\left(D^2\right) &= 12D^2+4a^2.
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
y_p &= x^2\left[\frac{1}{L''\left(D^2\right)}\right]\sin(ax)=x^2\left[\frac{1}{12D^2+4a^2}\right]\sin(ax)\\
&= \frac{1}{4}x^2\left[\frac{1}{3D^2+a^2}\right]\sin(ax)=\frac{1}{4}x^2\left[\frac{1}{3\left(-a^2\right)+a^2}\right]\sin(ax)\\
&= \frac{1}{4}x^2\left[\frac{1}{-2a^2}\right]\sin(ax)=-\frac{1}{8a^2}x^2\sin(ax).
\end{aligned}$$

Verificación:

$$\begin{aligned}
\left(D^2+a^2\right)^2 y_p &= \left(D^2+a^2\right)^2\left(-\frac{1}{8a^2}x^2\sin(ax)\right)=\left(D^4+2a^2D^2+a^4\right)\left(-\frac{1}{8a^2}x^2\sin(ax)\right)\\
&= -\frac{1}{8a^2}\left[D^4\left(x^2\sin(ax)\right)+2a^2D^2\left(x^2\sin(ax)\right)+a^4\left(x^2\sin(ax)\right)\right]
\end{aligned}$$

Se tiene

$$\begin{aligned}
D^2\left(x^2\sin(ax)\right) &= D\left(2x\sin(ax)+ax^2\cos(ax)\right)=2\sin(ax)+2ax\cos(ax)\\
&\quad +2ax\cos(ax)-a^2x^2\sin(ax)\\
&= 2\sin(ax)+4ax\cos(ax)-a^2x^2\sin(ax)\\
D^3\left(x^2\sin(ax)\right) &= D\left[2\sin(ax)+4ax\cos(ax)-a^2x^2\sin(ax)\right]\\
&= 2a\cos(ax)+2a\cos(ax)-2a^2x\sin(ax)+2a\cos(ax)-2a^2x\sin(ax)\\
&\quad -2a^2x\sin(ax)-a^3x^2\cos(ax)\\
&= 6a\cos(ax)-6a^2x\sin(ax)-a^3x^2\cos(ax)\\
D^4\left(x^2\sin(ax)\right) &= D\left[6a\cos(ax)-6a^2x\sin(ax)-a^3x^2\cos(ax)\right]\\
&= -6a^2\sin ax-6a^2\sin ax-6a^3x\cos ax-2a^3x\cos ax+a^4x^2\sin ax\\
&= -12a^2\sin ax-8a^3x\cos ax+a^4x^2\sin ax.
\end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} D^4\left(x^2\sin(ax)\right)+2a^2D^2\left(x^2\sin(ax)\right)+a^4\left(x^2\sin(ax)\right) &= -12a^2\sin ax-8a^3x\cos ax \\ &\quad +a^4x^2\sin ax+4a^2\sin(ax)+ \\ &\quad 8a^3x\cos(ax)-2a^4x^2\sin(ax) \\ &\quad +a^4x^2\sin(ax)-12a^2\sin ax \\ &\quad -8a^3x\cos ax+a^4x^2\sin ax \\ &= \left(-12a^2+4a^2\right)\sin ax=-8a^2\sin ax. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$-\frac{1}{8a^2}\left[D^4\left(x^2\sin(ax)\right)+2a^2D^2\left(x^2\sin(ax)\right)+a^4\left(x^2\sin(ax)\right)\right]=-\frac{1}{8a^2}\left(-8a^2\sin ax\right)=\sin ax.$$

6. Hallar una solución particular de $\left(D^2+b^2\right)^2y=\sin(bx)$

Solución. Utilicemos la relación de Euler: $\sin(bx)=\operatorname{Im}\left(e^{ibx}\right),\cos bx=\operatorname{Re}\left(e^{ibx}\right)$ y resolvamos $\left(D^2+b^2\right)^2z=e^{ibx}$. En efecto:

$$\begin{aligned} \left(D^2+b^2\right)^2z &= e^{ibx}\Longrightarrow z_p=\frac{1}{\left(D^2+b^2\right)^2}e^{ibx} \\ &\Longrightarrow z_p=\frac{1}{\left(D^2+b^2\right)^2}e^{ibx} \end{aligned}$$

Como $D^2+b^2=(D-ib)(D+ib)$ entonces $\left(D^2+b^2\right)^2=(D-ib)^2(D+ib)^2$. Luego

$$z_p=\frac{1}{\left(D^2+b^2\right)^2}e^{ibx}\Longrightarrow z_p=\frac{x^2}{2!\phi(ib)}e^{ibx},\ \text{ con }\ \phi(D)=\frac{(D-ib)^2(D+ib)^2}{(D-ib)^2}=(D+ib)^2,$$

de donde $\phi(ib)=[ib+ib]^2=[2ib]^2=-4b^2$. Por tanto,

$$\begin{aligned} z_p &= \frac{x^2}{2!\phi(ib)}e^{ibx}=\frac{x^2}{2\left(-4b^2\right)}e^{ibx} \\ &= \frac{x^2}{2\left(-4b^2\right)}\left[\cos(bx)+i\sin(bx)\right]e^{ibx} \\ &= -\frac{x^2}{8b^2}\left[\cos(bx)+i\sin(bx)\right]e^{ibx} \end{aligned}$$

Se tiene:

$$\operatorname{Re}(z_p)=-\frac{x^2}{8b^2}\cos(bx)\qquad \text{e}\qquad \operatorname{Im}(z_p)=-\frac{x^2}{8b^2}\sin(bx).$$

En consecuencia, una solución particular de $\left(D^2+b^2\right)^2y=\sin(bx)$ es $y_p=-\dfrac{x^2}{8b^2}\sin(bx)$ y una solución particular de $\left(D^2+b^2\right)^2y=\cos(bx)$ es $y_p=-\dfrac{x^2}{8b^2}\cos(bx)$.

7. Hallar una solución particular de $\left(D^2-2aD+a^2+b^2\right)^2z=e^{(a+bi)x}$

Solución.

$$\begin{aligned} \left(D^2-2aD+a^2+b^2\right)^2z &= e^{(a+bi)x}\Longrightarrow z_p=\frac{1}{\left(D^2+b^2\right)^2}e^{(a+bi)x} \\ &\Longrightarrow z_p=\frac{1}{\left(D^2-2aD+a^2+b^2\right)^2}e^{(a+bi)x}. \end{aligned}$$

Como $D^2-2aD+a^2+b^2=(D-a-bi)(D-a+bi)$, entonces

$$\left(D^2-2aD+a^2+b^2\right)^2=(D-a-bi)^2(D-a+bi)^2.$$

Luego

$$\Longrightarrow z_p = \frac{1}{\left(D^2 - 2aD + a^2 + b^2\right)^2} e^{(a+bi)x} \Longrightarrow z_p = \frac{x^2}{2!\phi\left(ib\right)} e^{(a+bi)x},$$

con

$$\phi\left(D\right) = \frac{\left(D - a - bi\right)^2 \left(D - a + bi\right)^2}{\left(D - a - bi\right)^2} = \left(D - a + bi\right)^2,$$

de donde $\phi\left(a + ib\right) = \left(a + ib - a + bi\right)^2 = \left[2ib\right]^2 = -4b^2$. Por tanto,

$$\begin{aligned} z_p &= \frac{x^2}{2!\phi\left(a + ib\right)} e^{ibx} = \frac{x^2}{2\left(-4b^2\right)} e^{(a+bi)x} \\ &= -\frac{x^2}{8b^2} \left[\cos\left(bx\right) + i \sin\left(bx\right)\right] e^{ax} \\ &= -\frac{x^2}{8b^2} \left[\cos\left(bx\right) + i \sin\left(bx\right)\right] e^{ax}. \end{aligned}$$

Las partes real e imaginaria de z_p son:

$$\operatorname{Re}\left(z_p\right) = -\frac{x^2}{8b^2} e^{ax} \cos\left(bx\right) \qquad \text{e} \qquad \operatorname{Im}\left(z_p\right) = -\frac{x^2}{8b^2} e^{ax} \sin\left(bx\right)$$

De tal manera que una soluión particular de $\left(D^2 - 2aD + a^2 + b^2\right)^2 z = e^{ax} \cos\left(bx\right)$ es $y_p = -\frac{x^2}{8b^2} e^{ax} \cos\left(bx\right)$ y una solución particular de $\left(D^2 - 2aD + a^2 + b^2\right)^2 z = e^{ax} \sin\left(bx\right)$ es $y_p = -\frac{x^2}{8b^2} e^{ax} \sin\left(bx\right)$.

Capítulo 5

Sistemas bidimensionales

Consideraremos sistemas lineales homogéneos de primer orden de la forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax(t) + by(t) \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = cx(t) + ey(t) \end{cases}$$

Dicho sistema, en forma matricial se escribe como:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Longleftrightarrow X'(t) = AX(t),$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix}, \; X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \text{ y } X'(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix}.$$

Se prueba que si $\vec{v}$ es un vector propio de la matriz A asociado al valor propio λ entonces la función vectorial

$$Y(t) = \vec{v}e^{\lambda t}$$

es una solución del sistema $X'(t) = AX(t)$.

Se denomina vector propio de una matriz cuadrada A a un vector $\vec{v}$ no nulo que verifica la condición:

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, donde al menos una de las componentes α, β es diferente de cero (supondremos en lo que sigue que por ejemplo $\alpha \neq 0$). Se tiene las equivalencias siguientes:

$$\begin{aligned} A\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a\alpha + b\beta = \lambda\alpha \\ c\alpha + e\beta = \lambda\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-\lambda)\,\alpha + b\beta = 0 \\ c\alpha + (e-\lambda)\,\beta = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Queremos encontrar qué condición verifica λ; para ello multipliquemos la primera ecuación por $(e - \lambda)$ y la segunda por $(-b)$:

$$\begin{cases} (e-\lambda)\,(a-\lambda)\,\alpha + b\,(e-\lambda)\,\beta = 0 \\ \qquad -bc\alpha - b\,(e-\lambda)\,\beta = 0 \end{cases}$$

Sumando miembro a miembro se obtiene:

$$(e-\lambda)\,(a-\lambda)\,\alpha - bc\alpha = 0$$

de donde:

$$\left[\lambda^2 - (a+e)\lambda + (ae-bc)\right]\alpha = 0.$$

Puesto que hemos supuesto que $\alpha \neq 0$, de la última igualdad se sigue que:

$$\lambda^2 - (a+e)\lambda + (ae-bc) = 0.$$

Esta última ecuación es llamada ecuación característica de la matriz A y sus raíces son los llamados valores propios de A. El polinomio $P(\lambda) = \lambda^2 - (a+e)\lambda + (ae-bc)$ es llamado el polinomio característico asociado a la matriz A.

Usando la fórmula de la ecuación de segundo grado se tiene:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{(a+e) \pm \sqrt{(a+e)^2 - 4(ae-bc)}}{2} \\ \lambda &= \frac{Tr(A) \pm \sqrt{\left[Tr(A)\right]^2 - 4\det(A)}}{2} \end{aligned}$$

donde $Tr(A) = a+e$, es la traza de la matriz A que se obtiene sumando los elementos de la diagonal y $\det(A)$ es el determinante de la matriz A que en este caso es igual al valor $\det(A) = ae\text{-}bc$.

Si asumimos que $\beta \neq 0$, repitiendo el proceso, eliminando α, se llega a la misma solución para λ.

$$\lambda^2 - (a+e)\lambda + (ae-bc) = 0 \Longleftrightarrow \lambda^2 - \left[Tr(A)\right]\lambda + \det(A) = 0$$

Ejemplo

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 2x + 2y \end{cases}$$

Solución:

Hallemos los valores propios; es decir resolvamos la ecuación:

$$\lambda^2 - (Tr(A))\lambda + \det(A) = 0$$

que en este caso es equivalente a

$$\lambda^2 - 3\lambda = 0 \Longleftrightarrow \lambda(\lambda - 3) = 0$$

Cuyas raíces son: $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 3$.

Calculemos ahora los vectores propios asociados a esos valores propios.

Para $\lambda_1 = 0$, busquemos los vectores no nulos $\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ tales que: $A\vec{v} = \lambda_1\vec{v}$. Es decir:

$$\begin{aligned} A\vec{v} = \lambda_1\vec{v} &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \{\alpha + \beta = 0 \end{aligned}$$

De $\alpha + \beta = 0$ se obtiene: $\beta = -\alpha$. por tanto los vectores propios asociados a $\lambda_1 = 0$ son de la forma:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} a, \text{ para todo } \alpha \neq 0.$$

De dicha familia de vectores propios tomamos un representante, por ejemplo $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y podemos entonces afirmar que la función vectorial

$$Y_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{0\times t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

es una solución de $X'(t) = AX(t)$.

Para $\lambda_2 = 3$, busquemos los vectores no nulos $\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ tales que: $A\vec{v} = \lambda_2\vec{v}$. Es decir:

$$\begin{aligned} A\vec{v} = \lambda_2\vec{v} \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\alpha \\ 3\beta \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} \alpha + \beta = 3\alpha \\ 2\alpha + 2\beta = 3\beta \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \beta = 2\alpha \\ 2\alpha = \beta \end{array} \right. \Longleftrightarrow \{\beta = 2\alpha \end{aligned}$$

Por tanto los vectores propios asociados a $\lambda_2 = 3$ son de la forma:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\alpha, \text{ para todo } \alpha \neq 0.$$

De dicha familia de vectores propios tomamos un representante, por ejemplo $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y podemos entonces afirmar que la función vectorial

$$Y_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t}$$

es una soluciòn de $X'(t) = AX(t)$.

En consecuencia la solución del sistema dado es

$$Y(t) = C_1Y_1(t) + C_2Y_2(t) \Longleftrightarrow Y(t) = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{3t}.$$

Observación:

A continuación vamos a mostrar que el sistema

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{dx}{dt} = ax(t) + b\ y(t) & (1) \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = cx(t) + e\ y(t) & (2) \end{array} \right. ,$$

puede transformarse a una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden.

Eliminemos $x(t)$ de las dos ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{r} c\dfrac{dx}{dt} = acx(t) + bc\ y(t) \\ \\ -a\dfrac{dy}{dt} = -acx(t) - ae\ y(t) \end{array} \right.$$

Sumando miembro a miembro las dos ecuaciones se tiene:

$$c\frac{dx}{dt} - a\frac{dy}{dt} = bcy(t) - aey(t) \Longleftrightarrow c\frac{dx}{dt} - a\frac{dy}{dt} = (bc - ae)\ \ y(t) \qquad (3)$$

Tomando la derivada con respecto a t a la ecuación (2) se sigue:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = c\frac{dx}{dt} + e\frac{dy}{dt}$$

de donde $c\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d^2y}{dt^2} - e\dfrac{dy}{dt}$, que reemplazamos en la ecuación (3):

$$\frac{d^2y}{dt^2} - e\frac{dy}{dt} - a\frac{dy}{dt} = (bc - ae)\ \ y(t) \Longleftrightarrow \frac{d^2y}{dt^2} - (e + a)\ \frac{dy}{dt} + (ae - bc)\ \ y(t) = 0. \qquad (4)$$

Si se hubiese eliminado la incógnita $y(t)$ del sistema original se obtiene la misma ecuación diferencial; es decir,

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (e+a)\,\frac{dx}{dt} + (ae-bc)\;\; x(t) = 0. \qquad (5)$$

es decir que $x(t)$ y $y(t)$ son de la misma naturaleza.

La ecuación diferencial lineal homogénea (4) o (5) puede ser resuelta en la forma usual. Consideremos la ecuación auxiliar o característica:

$$m^2 - (e+a)\,m + (ae-bc) = 0$$

Si denotamos con m_1 y m_2 las raíces de la ecuación característica, se tienen los siguientes tipos de soluciones:

$m_1, m_2 \in \mathbb{R}$, con $m_1 \neq m_2$	$\Delta > 0$	$x(t) = A_1 e^{m_1 t} + B_1 e^{m_2 t}$ $y(t) = A_2 e^{m_1 t} + B_2 e^{m_2 t}$;
$m_1 = m_2 = m \in \mathbb{R}$	$\Delta = 0$	$x(t) = A_1 e^{mt} + B_1 t e^{mt}$ $y(t) = A_2 e^{mt} + B_2 t e^{mt}$;
$m_1, m_2 \in \mathbb{C}$, $m_1 = p + iq$, $\;m_2 = p - iq$	$\Delta < 0$	$x(t) = A_1 e^{pt}\cos(qt) + B_1 e^{pt}\,\mathrm{sen}(qt)$ $y(t) = A_2 e^{pt}\cos(qt) + B_2 e^{pt}\,\mathrm{sen}(qt)$;

Como la ecuación es de segundo orden, debe haber solo dos constantes arbitrarias y no cuatro. Para reducirse a dos, se sustituye en el sistema original y se expresa A_2 y B_2 en términos de A_1 y B_1.

Ejemplo

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 2x + 2y \end{cases}$$

Solución: Si transformamos el sistema a una ecuación lineal homogénea de segundo orden tenemos que la ecuación característica es:

$$m^2 - (a+e)m + (ae-bc) = 0 \Longleftrightarrow m^2 - 3m = 0 \Longleftrightarrow m\,(m-3) = 0$$

Es decir que las raíces son: $m_1 = 0$ y $m_2 = 3$. Luego las soluciones son de la forma:

$$x(t) = A_1 e^{0\times t} + B_1 e^{3t} = A_1 + B_1 e^{3t}; \quad y(t) = A_2 e^{0\times t} + B_2 e^{3t} = A_2 + B_2 e^{3t}.$$

Como $x(t)$ y $y(t)$ deben verificar el sistema, se sigue:

$$x' = x + y \Longleftrightarrow 3B_1 e^{3t} = A_1 + B_1 e^{3t} + A_2 + B_2 e^{3t} \Longleftrightarrow 3B_1 e^{3t} = (A_1 + A_2) + (B_1 + B_2)\,e^{3t}.$$

De la igualdad $3B_1 e^{3t} = (A_1 + A_2) + (B_1 + B_2)\,e^{3t}$, se deduce:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 0 \\ B_1 + B_2 = 3B_1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A_2 = -A_1 \\ B_2 = 2B_1 \end{cases}$$

Con lo cual se concluye que

$$\begin{cases} x(t) = A_1 + B_1 e^{3t} \\ y(t) = -A_1 + 2B_1 e^{3t} \end{cases}$$

Luego

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 + B_1 e^{3t} \\ -A_1 + 2B_1 e^{3t} \end{pmatrix} &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + B_1 \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + B_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} \end{aligned}$$

Compare el resultado obtenido con el anterior:

$$Y(t) = C_1 Y_1(t) + C_2 Y_2(t) \Longleftrightarrow Y(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

Ejemplo
Resolver el sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} x' = x - y \\ y' = x + y \end{array}\right.$$

Solución:
Hallemos los valores propios; es decir resolvamos la ecuación:

$$\lambda^2 - (Tr(A))\lambda + \det(A) = 0$$

que en este caso es equivalente a

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(2)}}{2} \Longleftrightarrow \lambda = \frac{2 \pm 2i}{2} \Longleftrightarrow \lambda = 1 \pm i.$$

Es decir que las raíces son: $\lambda_1 = 1 + i$ y $\lambda_2 = 1 - i$.

Calculemos ahora los vectores propios asociados a esos valores propios.

Para $\lambda_1 = 1 + i$, busquemos los vectores no nulos $\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ tales que: $A\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}$. Es decir:

$$\begin{aligned} A\vec{v} = \lambda_1 \vec{v} \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = (1+i)\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+i)\,\alpha \\ (1+i)\,\beta \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \alpha - \beta = (1+i)\,\alpha \\ \alpha + \beta = (1+i)\,\beta \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} i\alpha = -\beta \\ \alpha = i\beta \end{array}\right. \Longleftrightarrow \{\alpha = i\beta. \end{aligned}$$

Por tanto los vectores propios asociados a $\lambda_1 = 1 + i$ son de la forma:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\beta \\ \beta \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\beta, \text{ para todo } \beta \neq 0.$$

De dicha familia de vectores propios tomamos un representante, por ejemplo $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ y podemos entonces afirmar que la función vectorial

$$Y_1(t) = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(1+i)t}$$

es una solución de $X'(t) = AX(t)$.

Para $\lambda_2 = 1 - i$, busquemos los vectores no nulos $\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ tales que: $A\vec{v} = \lambda_2 \vec{v}$. Es decir:

$$\begin{aligned} A\vec{v} = \lambda_2 \vec{v} \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = (1-i)\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-i)\alpha \\ (1-i)\beta \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \alpha - \beta = (1-i)\alpha \\ \alpha + \beta = (1-i)\beta \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \beta = i\alpha \\ \alpha = -i\beta \end{array}\right. \Longleftrightarrow \{\beta = i\alpha \end{aligned}$$

Por tanto los vectores propios asociados a $\lambda_2 = 1 - i$, son de la forma:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\beta \\ \beta \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}\beta, \text{ para todo } \beta \neq 0.$$

De dicha familia de vectores propios tomamos un representante, por ejemplo $\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$ y podemos entonces afirmar que la función vectorial

$$Y_2(t) = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(1-i)t}$$

es una solución de $X'(t) = AX(t)$.

En consecuencia la solución del sistema dado es

$$Y(t) = C_1Y_1(t) + C_2Y_2(t) \Longleftrightarrow Y(t) = C_1 \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(1+i)t} + C_2 \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(1-i)t}.$$

Como cualquier combinación lineal de soluciones de $X'(t) = AX(t)$ es otra solución, se sigue que:

$$Z_1(t) = \frac{Y_1(t) + Y_2(t)}{2} \qquad \text{y} \qquad Z_2(t) = \frac{Y_1(t) - Y_2(t)}{2i}$$

son también soluciones y se prueba que son linealmente independientes.

Por otra parte:

$$\begin{aligned}
Y_1(t) &= \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(1+i)t} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{t+it} \\
&= \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^t e^{it} = e^t \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{it} \\
&= e^t \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} [\cos t + i \ \operatorname{sen} t]\,; \ \text{ pues } \ e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta \\
&= e^t \begin{pmatrix} i\,[\cos t + i \ \operatorname{sen} t] \\ 1\,[\cos t + i \ \operatorname{sen} t] \end{pmatrix} \\
&= e^t \begin{pmatrix} i\cos t - \operatorname{sen} t \\ \cos t + i \ \operatorname{sen} t \end{pmatrix} = e^t \left[\begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t \\ \cos\ t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \cos\ t \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix} \right] \\
Y_2(x) &= \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(1-i)t} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} e^t e^{-it} \\
&= e^t \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} [\cos(-t) + i \ \operatorname{sen}(-t)] \\
&= e^t \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} [\cos t - i \ \operatorname{sen} t] \\
&= e^t \begin{pmatrix} -i\cos t - \operatorname{sen} t \\ \cos t - i \ \operatorname{sen} t \end{pmatrix} = e^t \left[\begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\operatorname{sen} t \end{pmatrix} \right] \\
Z_1(t) &= \frac{Y_1(t) + Y_2(t)}{2} = \frac{e^t \left[\begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t \\ \cos\ t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \cos t \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix} \right] + e^t \left[\begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} \cos t \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix} \right]}{2} \\
&= e^t \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix} \\
Z_2(t) &= \frac{Y_1(t) - Y_2(t)}{2i} = e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

La solución general es:

$$Y(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix} \tag{6}$$

Si utilizamos el procedimiento de reducir el sistema a una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden se sigue que, la ecuación característica es:

$$\begin{aligned}
m^2 - [Tr(A)]\,m + \det(A) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad m^2 - 2m + 2 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad m = \tfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4(2)}}{2} \\
&\Longleftrightarrow \quad m = \tfrac{2 \pm 2i}{2} \\
&\Longleftrightarrow \quad m = 1 \pm i \\
&\Longleftrightarrow \quad m_1 = 1 + i, \ m_2 = 1 - i, \ p = 1, \ q = 1,
\end{aligned}$$

se sigue entonces que la solución es:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 e^t \cos t + B_1 e^t \operatorname{sen} t \\ y(t) &= A_2 e^t \cos t + B_2 e^t \operatorname{sen} t \end{aligned}$$

Debemos ahora expresar las constantes A_2 y B_2 en términos de A_1 y B_1 :

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) - y(t) \\ &\Updownarrow \\ A_1 e^t \cos t - A_1 e^t \operatorname{sen} t + B_1 e^t \operatorname{sen} t + B_1 e^t \cos t &= (A_1 - A_2) e^t \cos t + (B_1 - B_2) e^t \operatorname{sen} t \\ &\Updownarrow \\ [A_1 + B_1]\, e^t \cos t + [B_1 - A_1]\, e^t \operatorname{sen} t &= (A_1 - A_2) e^t \cos t + (B_1 - B_2) e^t \operatorname{sen} t. \end{aligned}$$

De la última igualdad se deduce que

$$\left\{ \begin{array}{c} A_1 + B_1 = A_1 - A_2 \\ B_1 - A_1 = B_1 - B_2 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} B_1 = -A_2 \\ A_1 = B_2 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} A_2 = -B_1 \\ B_2 = A_1 \end{array} \right.$$

Luego

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 e^t \cos t + B_1 e^t \operatorname{sen} t \\ y(t) &= -B_1 e^t \cos t + A_1 e^t \operatorname{sen} t. \end{aligned}$$

Se tiene entonces que:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_1 e^t \cos t + B_1 e^t \operatorname{sen} t \\ -B_1 e^t \cos t + A_1 e^t \operatorname{sen} t \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= A_1 e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix} + B_1 e^t \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ -\cos t \end{pmatrix} \qquad (7) \end{aligned}$$

Compare los resultados obtenidos en (6) y (7). La gráfica de las curvas integrales se muestran en la figura 5.1, donde se observa el comportamiento del punto estacionario (0,0).

Ejemplo

Resolver el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = 5x + 2y \\ y' = -2x + y \end{array} \right.$$

Reduciendo el sistema de ecuaciones diferenciales a una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden se sigue que la ecuación característica de dicha ecuación es

$$m^2 - 6m + 9 = 0 \Longleftrightarrow (m-3)^2 = 0$$

Es decir que $m_1 = m_2 = 3$. Luego las soluciones son

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 e^{3t} + B_1 t e^{3t} \\ y(t) &= A_2 e^{3t} + B_2 t e^{3t} \end{aligned}$$

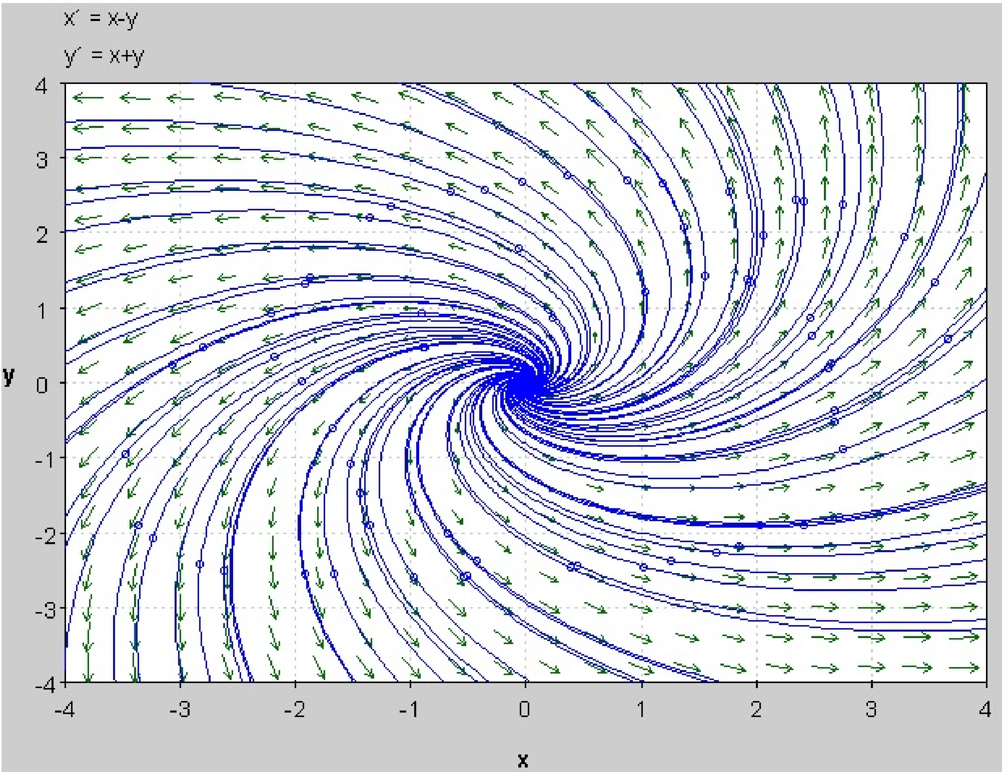

Figura 5.1 Curvas Integrales. Punto estacionario (0,0).

Expresemos A_2 y B_2 en términos de A_1 y B_1 :

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= 5x(t)+2y(t)\\
&\Updownarrow\\
3A_1e^{3t}+B_1e^{3t}+3B_1te^{3t} &= (5A_1+2A_2)e^{3t}+(5B_1+2B_2)te^{3t}\\
&\Updownarrow\\
(3A_1+B_1)e^{3t}+3B_1te^{3t} &= (5A_1+2A_2)e^{3t}+(5B_1+2B_2)te^{3t}
\end{aligned}
$$

de donde

$$
\left\{\begin{array}{c} 3A_1+B_1=5A_1+2A_2\\ 3B_1=5B_1+2B_2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} B_1=2A_1+2A_2\\ 2B_1+2B_2=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} A_2=\dfrac{B_1-2A_1}{2}\\ B_2=-B_1 \end{array}\right.
$$

$$
\iff \left\{\begin{array}{l} x(t)=A_1e^{3t}+B_1te^{3t}\\ y(t)=\left(\dfrac{B_1-2A_1}{2}\right)e^{3t}-B_1te^{3t} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{r} x(t)=A_1e^{3t}+B_1te^{3t}\\ y(t)=\left(\dfrac{B_1-2A_1}{2}\right)e^{3t}-B_1te^{3t} \end{array}\right.
$$

$$
\iff \begin{pmatrix} x(t)\\ y(t) \end{pmatrix} = A_1\begin{pmatrix} e^{3t}\\ -e^{3t} \end{pmatrix} + B_1\begin{pmatrix} te^{3t}\\ \dfrac{1}{2}e^{3t}-te^{3t} \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t) \end{pmatrix} &= A_1\begin{pmatrix} e^{3t}\\ -e^{3t} \end{pmatrix} + B_1\left[\begin{pmatrix} te^{3t}\\ -te^{3t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0\\ \frac{1}{2}e^{3t} \end{pmatrix}\right]\\
&= A_1e^{3t}\begin{pmatrix} 1\\ -1 \end{pmatrix} + B_1\left[te^{3t}\begin{pmatrix} 1\\ -1 \end{pmatrix} + e^{3t}\begin{pmatrix} 0\\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right]
\end{aligned}
$$

La gráfica de las curvas integrales $(x(t), y(t))$ se muestran en la figura 5.2.

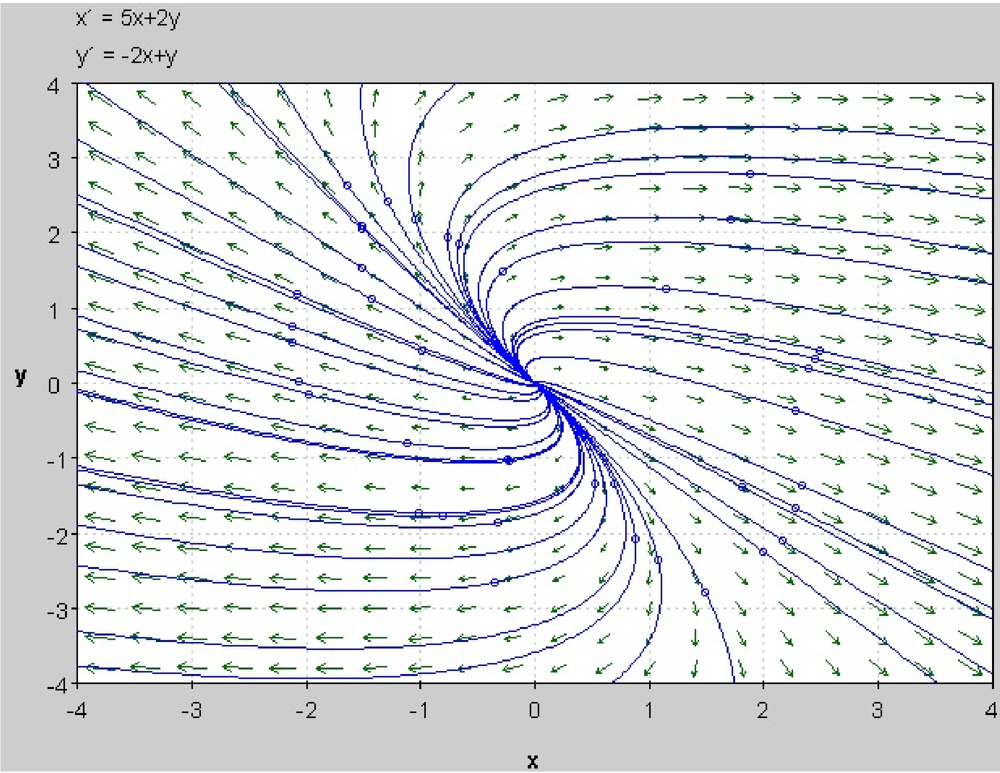

Figura 5.2 Curvas integrales.

Ejemplo
Resolver el sistema

$$\left\{ \begin{array}{c} x' = 3x + 5y \\ y' = 3y \end{array} \right.$$

Solución:
En forma matricial el sistema se escribe como:

$$\left\{ \begin{array}{c} x' = 3x + 5y \\ y' = 3y \end{array} \right. \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Longleftrightarrow X'(t) = AX(t).$$

Calculemos los valores y vectores propios de la matriz A.
Valores propios: λ verifica la ecuación característica $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$. Se tiene:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Longleftrightarrow (\lambda - 3)^2 = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 3.$$

Es decir que se tiene un valor propio repetido. Calculemos ahora los vectores propios asociados a este valor propio.

$$\begin{aligned} A\vec{v} = \lambda\vec{v} &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\alpha \\ 3\beta \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 3\alpha + 5\beta = 3\alpha \\ 3\beta = 3\beta \end{array} \right. \Longleftrightarrow \{5\beta = 0 \Longleftrightarrow \{\beta = 0 \end{aligned}$$

Por tanto los vectores propios asociados a $\lambda = 3$ son de la forma:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \alpha, \text{ para todo } \alpha \neq 0.$$

De dicha familia de vectores propios tomamos un representante, por ejemplo $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y podemos entonces afirmar que la función vectorial

$$Y_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t}$$

es una solución de $X'(t) = AX(t)$.

Se prueba que otra solución de la ecuación diferencial $X'(t) = AX(t)$, linealmente independiente con $Y_1(t)$, está dada por:

$$Y_2(t) = \vec{V} e^{3t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} te^{3t},$$

donde el vector $\vec{V}$ verifica la ecuación: $(A - \lambda I)\,\vec{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Se sigue:

$$(A - \lambda I)\,\vec{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow 5\beta = 1 \Longleftrightarrow \beta = \frac{1}{5}.$$

Es decir que $\vec{V}$ es de la forma:

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \alpha, \text{ con } \alpha \text{ cualquier valor.}$$

Tomando $\alpha = 0$, se tiene: $\vec{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$; con lo cual una segunda solución de $X'(t) = AX(t)$, es.

$$Y_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} te^{3t}.$$

La solución general del sistema es:

$$\begin{aligned} Y(t) &= C_1 Y_1(t) + C_2 Y_2(t) \\ &= C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t} + C_2 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} te^{3t}. \right] \qquad (*) \end{aligned}$$

Segundo procedimiento: Si reducimos el sistema a una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden, por lo antes expuesto sabemos que la ecuación característica a analizar es: $m^2 - 6m + 9 = 0$, que es equivalente a: $(m-3)^2 = 0$, que tiene como raíz repetida a $m = 3$. En consecuencia las soluciones $x(t)$ y $y(t)$ son de la forma:

$$\begin{cases} x(t) = A_1 e^{3t} + B_1 te^{3t} \\ x(t) = A_2 e^{3t} + B_2 te^{3t} \end{cases}$$

Expresemos ahora las constantes A_2 y B_2 en términos de A_1 y B_1. Se tiene:

$$\begin{aligned} x' &= 3x + 5y \\ &\Updownarrow \\ 3A_1 e^{3t} + B_1 e^{3t} + 3B_1 te^{3t} &= (3A_1 + 5A_2)\, e^{3t} + (3B_1 + 5B_2) te^{3t} \\ &\Updownarrow \\ (3A_1 + B_1)\, e^{3t} + 3B_1 te^{3t} &= (3A_1 + 5A_2)\, e^{3t} + (3B_1 + 5B_2) te^{3t}. \end{aligned}$$

De la última igualdad se deduce que:

$$\begin{cases} 3A_1 + B_1 = 3A_1 + 5A_2 \\ 3B_1 = 3B_1 + 5B_2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} B_1 = 5A_2 \\ 5B_2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A_2 = \frac{1}{5} B_1 \\ B_2 = 0 \end{cases}.$$

Luego:

$$\begin{cases} x(t) = A_1 e^{3t} + B_1 te^{3t} \\ x(t) = \frac{1}{5} B_1 e^{3t} \end{cases}.$$

Además

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_1 e^{3t} + B_1 t e^{3t} \\ \frac{1}{5} B_1 e^{3t} \end{pmatrix} \\
&= A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t} + B_1 \begin{pmatrix} t e^{3t} \\ \frac{1}{5} e^{3t} \end{pmatrix} \\
&= A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t} + B_1 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t e^{3t} \right] \qquad (**)
\end{aligned}$$

Compare las soluciones obtenidas en (*) y (**).

Ejemplo

Resolver el sistema

$$\begin{cases} x' = 4x + y \\ y' = -x + 2y \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Solución:

Si se reduce el sistema a una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden, la ecuación característica a estudiar es: $m^2 - 6m + 9 = 0$. Como $m^2 - 6m + 9 = 0$ es equivalente a: $(m-3)^2 = 0$, se sigue que las soluciones $x(t)$ y $y(t)$ son de la forma:

$$\begin{cases} x(t) = A_1 e^{3t} + B_1 t e^{3t} \\ x(t) = A_2 e^{3t} + B_2 t e^{3t} \end{cases}$$

Expresemos ahora las constantes A_2 y B_2 en términos de A_1 y B_1. Se tiene:

$$\begin{aligned}
y' &= -x + 2y \\
&\Updownarrow \\
3A_2 e^{3t} + B_2 e^{3t} + 3B_2 t e^{3t} &= (-A_1 + 2A_2) e^{3t} + (2B_2 - B_1) t e^{3t} \\
&\Updownarrow \\
(3A_2 + B_2) e^{3t} + 3B_2 t e^{3t} &= (-A_1 + 2A_2) e^{3t} + (2B_2 - B_1) t e^{3t}.
\end{aligned}$$

De la última igualdad se deduce que:

$$\begin{cases} 3A_2 + B_2 = -A_1 + 2A_2 \\ 3B_2 = 2B_2 - B_1 \end{cases} \iff \begin{cases} A_2 = -A_1 - B_2 \\ B_2 = -B_1 \end{cases} \iff \begin{cases} A_2 = -A_1 + B_1 \\ B_2 = -B_1. \end{cases}.$$

Luego:

$$\begin{cases} x(t) = A_1 e^{3t} + B_1 t e^{3t} \\ y(t) = (B_1 - A_1) e^{3t} - B_1 t e^{3t} \end{cases}.$$

Además

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_1 e^{3t} + B_1 t e^{3t} \\ (B_1 - A_1) e^{3t} - B_1 t e^{3t} \end{pmatrix} \\
&= A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t} + B_1 \begin{pmatrix} t e^{3t} \\ e^{3t} - t e^{3t} \end{pmatrix} \\
&= A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t} + B_1 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t e^{3t} \right].
\end{aligned}$$

Si utilizamos valores y vectores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, se tiene:

$$\begin{aligned}
|A - \lambda I| = 0 &\iff \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (4-\lambda)(2-\lambda) + 1 = 0 \iff \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \\
&\iff (\lambda - 3)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 3.
\end{aligned}$$

Cálculo de los vectores propios asociadoa a $\lambda = 3$.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha + \beta = 3\alpha \\ -\alpha + 2\beta = 3\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = -\alpha.$$

Luego los vectores $\vec{v}$ asociados al valor propio $\lambda = 3$ son de la forma:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \alpha \neq 0.$$

Eligiendo $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ como un vector propio asociado a $\lambda = 3$, se tiene que una solución del sistema es: $Y_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t}$.

Como el valor propio $\lambda = 3$ es repetido, buscamos una segunda solución de la forma:

$$Y_2(t) = \vec{V} e^{3t} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t e^{3t},$$

donde el vector $\vec{V}$ verifica:

$$(A - \lambda I)\, \vec{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Se tiene:

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)\, \vec{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ -\alpha - \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \{\alpha + \beta = 1 \Rightarrow \beta = 1 - \alpha \end{aligned}$$

Luego:

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 - \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Si hacemos $\alpha = 0$, nos queda $\vec{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; es decir que $Y_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t e^{3t}$.

La solución general es entonces:

$$Y(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t} + C_2 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t e^{3t} \right].$$

Ejemplo
resolver el sistema:

$$\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = -x + 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow X'(t) = AX(t).$$

Solución.
Como $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, se tiene que $Tr(A) = 5$ y $\det(A) = 7$; la ecuación característica a estudiar es: $m^2 - 5m + 7 = 0$. Sus solucione son: $m_1 = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ y $m_2 = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

Luego las soluciones $x(t)$ y $y(t)$ del sistema son de la forma:

$$\begin{cases} x(t) = A_1 e^{\frac{5}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) + B_1 e^{\frac{5}{2}t} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) \\ y(t) = A_2 e^{\frac{5}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) + B_2 e^{\frac{5}{2}t} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) \end{cases}.$$

Expresemos ahora A_2 y B_2 en función de A_1 y B_1.
$x' = 3x + y$ es equivalente a:

$\frac{5}{2} A_1 e^{\frac{5}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} A_1 e^{\frac{5}{2}t} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) + \frac{5}{2} B_1 e^{\frac{5}{2}t} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} B_1 e^{\frac{5}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right)$

$= (3A_1 + A_2)\, e^{\frac{5}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) + (3B_1 + B_2)\, e^{\frac{5}{2}t} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right)$

o también

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{5}{2}A_1+\frac{\sqrt{3}}{2}B_1\right)e^{\frac{5}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+\left(\frac{5}{2}B_1-\frac{\sqrt{3}}{2}A_1\right)e^{\frac{5}{2}t}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\\
=\;&(3A_1+A_2)\,e^{\frac{5}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+(3B_1+B_2)\,e^{\frac{5}{2}t}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).
\end{aligned}
$$

Se deduce entonces que:

$$
\left\{\begin{array}{l}
\frac{5}{2}A_1+\frac{\sqrt{3}}{2}B_1=3A_1+A_2\\
\frac{5}{2}B_1-\frac{\sqrt{3}}{2}A_1=3B_1+B_2
\end{array}\right.
\iff
\left\{\begin{array}{l}
\frac{\sqrt{3}}{2}B_1-\frac{1}{2}A_1=A_2\\
-\frac{1}{2}B_1-\frac{\sqrt{3}}{2}A_1=B_2
\end{array}\right.
$$

Luego:

$$
\begin{aligned}
x(t)&=A_1e^{\frac{5}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+B_1e^{\frac{5}{2}t}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\\
y(t)&=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}B_1-\frac{1}{2}A_1\right)e^{\frac{5}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+\left(-\frac{1}{2}B_1-\frac{\sqrt{3}}{2}A_1\right)e^{\frac{5}{2}t}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).
\end{aligned}
$$

Además

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix} A_1e^{\frac{5}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+B_1e^{\frac{5}{2}t}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}B_1-\frac{1}{2}A_1\right)e^{\frac{5}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+\left(-\frac{1}{2}B_1-\frac{\sqrt{3}}{2}A_1\right)e^{\frac{5}{2}t}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\end{pmatrix}\\
&=A_1e^{\frac{5}{2}t}\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\\ -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\end{pmatrix}+B_1e^{\frac{5}{2}t}\begin{pmatrix}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)-\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Si usamos el procedimiento de hallar los valores y vectores propios se sigue que λ verifica la ecuación: $\lambda^2-5\lambda+7=0$, cuyas raíces (valores propios) son: $\lambda_1=\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ y $\lambda_2=\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Determinemos ahora los vectores propios asociados:

Para $\lambda_1=\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$:

$$
\begin{pmatrix}3&1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\left(\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\iff\left\{\begin{array}{r}3\alpha+\beta=\left(\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\alpha\\ -\alpha+2\beta=\left(\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\beta\end{array}\right.
$$

$$
\iff\left\{\beta=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\alpha.\right.
$$

Los vectores propios asociados a $\lambda_1=\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ son entonces de la forma:

$$
\begin{aligned}
\vec{v}&=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\alpha\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}1\\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\end{pmatrix}\alpha,\ \text{ para } \alpha\neq 0.
\end{aligned}
$$

Eligiendo el vector propio $\begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i \end{pmatrix}$ se sigue que una solución del sistema es:

$$Y_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i \end{pmatrix} e^{\left(\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)t},$$

es una solución del sistema. La otra está dada por:

$$Y_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i \end{pmatrix} e^{\left(\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)t}.$$

Busquemos ahora las partes real e imaginaria de $Y_1(t)$.

$$\begin{aligned}
Y_1(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i \end{pmatrix} e^{\left(\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)t} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i \end{pmatrix} e^{\frac{5}{2}t} e^{\frac{\sqrt{3}}{2}it} \\
&= e^{\frac{5}{2}t} \begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i \end{pmatrix} \left[\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) + i \operatorname{sen}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right] \\
&= e^{\frac{5}{2}t} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\ \left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right] \end{pmatrix} \\
&= e^{\frac{5}{2}t} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\ -\dfrac{1}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \dfrac{1}{2}i\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$Y_1(t) = e^{\frac{5}{2}t} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\ -\dfrac{1}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \end{pmatrix} e^{\frac{5}{2}t}.$$

Sabemos que las partes real e imaginaria de $Y_1(t)$ son soluciones del sistema. Por lo tanto la solución general es:

$$Y(t) = C_1 \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\ -\dfrac{1}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \end{pmatrix} e^{\frac{5}{2}t} + C_2 \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \end{pmatrix} e^{\frac{5}{2}t}.$$

Compare este resultado con el anteriormente obtenido.

Autoevaluación (Taller en grupo)

1. Hallar la solución general del sistema de ecuaciones lineales de primer orden $X'(t) = AX(t)$ donde $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $\vec{\xi} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un vector propio asociado al valor propio repetido $\lambda = 4$ de la matriz A, y que $\vec{\eta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ satisface la ecuación: $(A - 4I)\,\vec{\eta} = \vec{\xi}$.

2. Resolver el problema de valor inicial $X'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} X(t)$, con $X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5.1. Solución de la ecuación diferencial $Y'(x) = AY(x)$.

5.2. Caso valores propios repetidos.

1. Supongamos que λ es un valor propio de multiplicidad n de la matriz A de orden p.

   Si existen n vectores propios $\overrightarrow{E}_1, \overrightarrow{E}_2, \overrightarrow{E}_3, \ldots, \overrightarrow{E}_n$ linealmente independientes asociados al valor propio λ, entonces las funciones $Y_1(x) = \overrightarrow{E}_1 e^{\lambda x}$, $Y_2(x) = \overrightarrow{E}_2 e^{\lambda x}$, $Y_3(x) = \overrightarrow{E}_3 e^{\lambda x}, \ldots, Y_n(x) = \overrightarrow{E}_n e^{\lambda x}$, son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial $Y'(x) = AY(x)$ asociadas al valor propio λ de multiplicidad n.

   Si solo existen h (con $h < n$) vectores propios $\overrightarrow{E}_1, \overrightarrow{E}_2, \overrightarrow{E}_3, \ldots, \overrightarrow{E}_h$ linealmente independientes asociados al valor propio λ, entonces las funciones $Y_1(x) = \overrightarrow{E}_1 e^{\lambda x}$, $Y_2(x) = \overrightarrow{E}_2 e^{\lambda x}$, $Y_3(x) = \overrightarrow{E}_3 e^{\lambda x}, \ldots, Y_h(x) = \overrightarrow{E}_h e^{\lambda x}$, son soluciones linealmente independientes asociadas al valor propio λ de multiplicidad n. Hace falta encontrar $n - h$ soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial $Y'(x) = AY(x)$ asociadas al valor propio λ. para ello, entre los vectores $\overrightarrow{E}_1, \overrightarrow{E}_2, \overrightarrow{E}_3, \ldots, \overrightarrow{E}_h$ se elige uno, supongamos por ejemplo que hemos elegido el vector $\overrightarrow{E}_1$, se busca entonces una solución de la forma $Y_{h+1}(x) = \overrightarrow{V} e^{\lambda x} + \overrightarrow{E}_1 x e^{\lambda x}$, donde $\overrightarrow{V}$ es un vector a determinarse. Para ello se utiliza el hecho de que $Y_{h+1}(x)$ tiene que ser una solución de la ecuación diferencial $Y'(x) = AY(x)$; es decir debe verificar la condición: $Y'_{h+1}(x) = AY_{h+1}(x)$. De dicha igualdad se sigue que:

$$
\begin{aligned}
Y'_{h+1}(x) &= AY_{h+1}(x) \Longrightarrow \lambda\overrightarrow{V} e^{\lambda x} + \overrightarrow{E}_1 e^{\lambda x} + \lambda\overrightarrow{E}_1 x e^{\lambda x} = A\overrightarrow{V} e^{\lambda x} + A\overrightarrow{E}_1 x e^{\lambda x} \\
&\Longrightarrow A\overrightarrow{V} e^{\lambda x} - \lambda\overrightarrow{V} e^{\lambda x} - \overrightarrow{E}_1 e^{\lambda x} + A\overrightarrow{E}_1 x e^{\lambda x} - \lambda\overrightarrow{E}_1 x e^{\lambda x} = \overrightarrow{0} \\
&\Longrightarrow \left(A\overrightarrow{V} - \lambda\overrightarrow{V} - \overrightarrow{E}_1\right) e^{\lambda x} + \left(A\overrightarrow{E}_1 - \lambda\overrightarrow{E}_1\right) x e^{\lambda x} = \overrightarrow{0}
\end{aligned}
$$

   Como $A\overrightarrow{E}_1 - \lambda\overrightarrow{E}_1 = \overrightarrow{0}$ se sigue que $\left(A\overrightarrow{V} - \lambda\overrightarrow{V} - \overrightarrow{E}_1\right) e^{\lambda x} = \overrightarrow{0}$ y como $e^{\lambda x} \neq 0$, para todo real x, entonces $A\overrightarrow{V} - \lambda\overrightarrow{V} - \overrightarrow{E}_1 = \overrightarrow{0}$; es decir que

   $A\overrightarrow{V} - \lambda\overrightarrow{V} - \overrightarrow{E}_1 = \overrightarrow{0} \Longrightarrow (A - \lambda I)\overrightarrow{V} - \overrightarrow{E}_1 = \overrightarrow{0} \Longrightarrow (A - \lambda I)\overrightarrow{V} = \overrightarrow{E}_1$, donde I es la matriz identidad.

   La ecuación vectorial $(A - \lambda I)\overrightarrow{V} = \overrightarrow{E}_1$ representa un sistema de ecuaciones y como $\det(A - \lambda I) = 0$, el sistema puede o no tener solución. Si tiene solución, tiene infinitas y se escoge una cualquiera de ellas. Se prueba además que los vectores $\overrightarrow{V}$ y $\overrightarrow{E}_1$ son linealmente independientes y en ese caso las funciones $Y_1(x) = \overrightarrow{E}_1 e^{\lambda x}$, $Y_2(x) = \overrightarrow{E}_2 e^{\lambda x}$, $Y_3(x) = \overrightarrow{E}_3 e^{\lambda x}, \ldots, Y_h(x) = \overrightarrow{E}_h e^{\lambda x}$, $Y_{h+1}(x)$ son soluciones linealmente independientes Si no tiene solución, se cambia el vector $\overrightarrow{E}_1$ y se repite el proceso.

   Si $h + 1 = n$, el proceso concluye, pues ya se tiene todas las soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial $Y'(x) = AY(x)$ asociadas a λ.

   Si $h + 1 < n$, se busca una nueva solución de la forma $Y_{h+2}(x) = \overrightarrow{Z} e^{\lambda x} + \overrightarrow{V} x e^{\lambda x} + \overrightarrow{E}_1 \dfrac{x^2}{2!} e^{\lambda x}$, donde $\overrightarrow{Z}$ es un vector a determinarse. Para ello se utiliza el hecho de que $Y_{h+2}(x)$ tiene que ser una solución de la ecuación diferencial $Y'(x) = AY(x)$; es decir debe verificar la condición: $Y'_{h+2}(x) = AY_{h+2}(x)$. De dicha igualdad se sigue que:

$$
\begin{gathered}
Y'_{h+2}(x) = AY_{h+2}(x) \Longrightarrow \lambda\overrightarrow{Z} e^{\lambda x} + \overrightarrow{V} e^{\lambda x} + \lambda\overrightarrow{V} x e^{\lambda x} + \overrightarrow{E}_1 x e^{\lambda x} + \lambda\overrightarrow{E}_1 \tfrac{x^2}{2!} e^{\lambda x} \\
= A\overrightarrow{Z} e^{\lambda x} + A\overrightarrow{V} x e^{\lambda x} + A\overrightarrow{E}_1 \tfrac{x^2}{2!} e^{\lambda x} \\
\Longrightarrow A\overrightarrow{Z} e^{\lambda x} - \lambda\overrightarrow{Z} e^{\lambda x} - \overrightarrow{V} e^{\lambda x} + A\overrightarrow{V} x e^{\lambda x} - \lambda\overrightarrow{V} x e^{\lambda x} - \overrightarrow{E}_1 x e^{\lambda x} + A\overrightarrow{E}_1 \tfrac{x^2}{2!} e^{\lambda x} - \lambda\overrightarrow{E}_1 \tfrac{x^2}{2!} e^{\lambda x} = \overrightarrow{0} \\
\Longrightarrow \left(A\overrightarrow{Z} - \lambda\overrightarrow{Z} - \overrightarrow{V}\right) e^{\lambda x} + \left(A\overrightarrow{V} - \lambda\overrightarrow{V} - \overrightarrow{E}_1\right) x e^{\lambda x} + \left(A\overrightarrow{E}_1 - \lambda\overrightarrow{E}_1\right) \tfrac{x^2}{2!} e^{\lambda x} = \overrightarrow{0}
\end{gathered}
$$

   Como $A\overrightarrow{E}_1 - \lambda\overrightarrow{E}_1 = \overrightarrow{0}$ y $A\overrightarrow{V} - \lambda\overrightarrow{V} - \overrightarrow{E}_1 = \overrightarrow{0}$, se sigue que $\left(A\overrightarrow{Z} - \lambda\overrightarrow{Z} - \overrightarrow{V}\right) e^{\lambda x} = \overrightarrow{0}$ y como $e^{\lambda x} \neq 0$, para todo real x, entonces $A\overrightarrow{Z} - \lambda\overrightarrow{Z} - \overrightarrow{V} = \overrightarrow{0}$; es decir que

$$A\overrightarrow{Z} - \lambda\overrightarrow{Z} - \overrightarrow{V} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow (A - \lambda I)\overrightarrow{Z} - \overrightarrow{V} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow (A - \lambda I)\overrightarrow{Z} = \overrightarrow{V}$$

La ecuación vectorial $(A-\lambda I)\overrightarrow{Z}=\overrightarrow{V}$ representa un sistema de ecuaciones y como $\det(A-\lambda I)=0$, el sistema puede o no tener solución. Si tiene solución, tiene infinitas y se escoge una cualquiera de ellas. Se prueba además que los vectores $\overrightarrow{Z}$ y $\overrightarrow{V}$ son linealmente independientes y en ese caso las funciones $Y_1(x)=\overrightarrow{E}_1e^{\lambda x}$, $Y_2(x)=\overrightarrow{E}_2e^{\lambda x}$, $Y_3(x)=\overrightarrow{E}_3e^{\lambda x}$,...,$Y_h(x)=\overrightarrow{E}_he^{\lambda x}$, $Y_{h+1}(x)$, $Y_{h+2}(x)$ son soluciones linealmente independientes Si no tiene solución, se cambia el vector $\overrightarrow{E}_1$ y se repite el proceso.

Si $h+2=n$, el proceso concluye, pues ya se tiene todas las soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial $Y'(x)=AY(x)$ asociadas a λ.

Si $h+2<n$, se busca una nueva solución de la forma $Y_{h+3}(x)=\overrightarrow{U}e^{\lambda x}+\overrightarrow{Z}xe^{\lambda x}+\overrightarrow{V}\dfrac{x^2}{2!}e^{\lambda x}+\overrightarrow{E}_1\dfrac{x^3}{3!}e^{\lambda x}$,, donde $\overrightarrow{U}$ es un vector a determinarse. De la condición $Y'_{h+3}(x)=AY_{h+3}(x)$ se sigue que el vector $\overrightarrow{U}$ debe verificar la ecuación: $(A-\lambda I)\overrightarrow{U}=\overrightarrow{Z}$. Se repite el proceso.

Observación. Resumen:

$$\begin{aligned}
Y_{h+1}(x) &= \overrightarrow{V}e^{\lambda x}+\overrightarrow{E}_1xe^{\lambda x},\\
(A-\lambda I)\overrightarrow{V} &= \overrightarrow{E}_1\\
Y_{h+2}(x) &= \overrightarrow{Z}e^{\lambda x}+\overrightarrow{V}xe^{\lambda x}+\overrightarrow{E}_1\frac{x^2}{2!}e^{\lambda x},\\
(A-\lambda I)\overrightarrow{Z} &= \overrightarrow{V}\\
Y_{h+3}(x) &= \overrightarrow{U}e^{\lambda x}+\overrightarrow{Z}xe^{\lambda x}+\overrightarrow{V}\frac{x^2}{2!}e^{\lambda x}+\overrightarrow{E}_1\frac{x^3}{3!}e^{\lambda x},\\
(A-\lambda I)\overrightarrow{U} &= \overrightarrow{Z}
\end{aligned}$$

Como $(A-\lambda I)\overrightarrow{E}_1=\overrightarrow{0}$, se sigue que:

$$(A-\lambda I)\overrightarrow{V}=\overrightarrow{E}_1\Longrightarrow(A-\lambda I)^2\overrightarrow{V}=(A-\lambda I)\overrightarrow{E}_1=\overrightarrow{0};\quad\text{es decir, }(A-\lambda I)^2\overrightarrow{V}=\overrightarrow{0}$$

De manera similar:

$$(A-\lambda I)\overrightarrow{Z}=\overrightarrow{V}\Longrightarrow(A-\lambda I)^3\overrightarrow{Z}=(A-\lambda I)^2\overrightarrow{V}=\overrightarrow{0};\quad\text{es decir, }(A-\lambda I)^3\overrightarrow{Z}=\overrightarrow{0}$$

De manera similar:

$$(A-\lambda I)\overrightarrow{U}=\overrightarrow{Z}\Longrightarrow(A-\lambda I)^4\overrightarrow{U}=(A-\lambda I)^3\overrightarrow{Z}=\overrightarrow{0};\quad\text{es decir, }(A-\lambda I)^4\overrightarrow{U}=\overrightarrow{0}$$

2. Determinamos la solución general $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ del sistema homogéneo

$$\begin{aligned}
x' &= x-2y+z\\
y' &= -y-z\\
z' &= 4y+3z.
\end{aligned}$$

Con

$$X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\quad\text{y}\quad A=\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&-1&-1\\0&4&3\end{bmatrix}$$

puede este sistema escribirse en la forma $X'=AX$.

a) Determinación de los autovalores a partir de la relación $\det(A-\lambda I)=0$.

$$\det\begin{bmatrix}1-\lambda&-2&1\\0&-1-\lambda&-1\\0&4&3-\lambda\end{bmatrix}=(1-\lambda)\left[(-1-\lambda)(3-\lambda)+4\right]=(1-\lambda)^3=0$$

de donde se obtiene un valor propio repetido 3 veces: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1=\lambda$.

b) Determinar los vectores propios de la relación $(A-\lambda I)X=0$.

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ o también } \begin{cases} -2y_1+z_1=0 \\ -2y_1-z_1=0 \\ 4y_1+2z_1=0 \end{cases}$$

Si elegimos $x_1=1$, obtenemos el vector propio $X_1=[1,0,0]^T$ debido a $y_1=z_1=0$. No hay otros vectores propios linealmente independientes con X_1 (¿por qué?).

c) Determinación de los vectores principales etapa 2 : $X_1^{(2)}$ a partir de la relación $(A-\lambda I)X_1^{(2)}=X_1$:

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ y_1^{(2)} \\ z_1^{(2)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ o también } \begin{cases} -2y_1^{(2)}+z_1^{(2)}=1 \\ -2y_1^{(2)}-z_1^{(2)}=0 \\ 4y_1^{(2)}+2z_1^{(2)}=0 \end{cases}$$

da $y_1^{(2)}=-\dfrac{1}{4}$, $z_1^{(2)}=\dfrac{1}{2}$, y si tenemos $x_1^{(2)}=0$, el (único) vector principal de la segunda etapa $X_1^{(2)}=\left[0,-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right]^T$.

d) Determinación del vector principal del tercer grado a x_1 a partir de la relación $(A-\lambda I)X_1^{(3)}=X_1^{(2)}$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1^{(3)} \\ y_1^{(3)} \\ z_1^{(3)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ o también } \begin{cases} -2y_1^{(3)}+z_1^{(3)}=0 \\ -2y_1^{(3)}-z_1^{(3)}=-\dfrac{1}{4} \\ 4y_1^{(3)}+2z_1^{(3)}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

da $y_1^{(3)}=\dfrac{1}{16}$, $z_1^{(3)}=\dfrac{1}{8}$ y, si elegimos $x_1^{(3)}=0$, el vector principal del tercer grado $X_1^{(3)}=\left[0,\dfrac{1}{16},\dfrac{1}{8}\right]^T$.

Con los vectores

$$X_1=X_1^{(1)}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad X_1^{(2)}=\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \qquad X_1^{(3)}=\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{16} \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

hemos encontrado un sistema de 3 vectores principales linealmente independientes de valor propio $\lambda=1$.

e) Determinamos la solución general de nuestro sistema utilizando el esquema de coeficientes indeterminados.

El resultado es un sistema fundamental de soluciones:

$$e^tX_1^{(1)}, \qquad e^t\left[X_1^{(2)}+t\,X_1^{(1)}\right], \qquad e^t\left[X_1^{(3)}+t\,X_1^{(2)}+\frac{t^2}{2!}X_1^{(1)}\right],$$

y, por lo tanto, la solución general buscada del sistema:

$$\begin{aligned} X(t) &= C_1e^t\left(X_1^{(3)}+t\,X_1^{(2)}+\frac{t^2}{2!}X_1^{(1)}\right)+C_2e^t\left[X_1^{(2)}+t\,X_1^{(1)}\right]+C_3e^tX_1^{(1)} \\ &= e^t\left\{C_1\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{16} \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix}+(C_1t+C_2)\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}+\left(C_1\frac{t^2}{2}+C_2t+C_3\right)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}. \end{aligned}$$

3. Resolver la ecuación diferencial $Y'(x) = AY(x)$, donde $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   Solución:

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & 4 \\ 0 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3 \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda = 2,$$

   es decir, $\lambda = 2$, es un valor propio de multiplicidad 3.

   Vectores propios:

   Para $\lambda = 2$:

$$\begin{aligned} (A-\lambda I)\overrightarrow{v} &= \overrightarrow{0} \Longrightarrow (A-2I)\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} 3y+4z=0 \\ 3z=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases} \Longrightarrow \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \overrightarrow{v} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x \neq 0. \end{aligned}$$

   Una solución es entonces

$$Y_1(x) = e^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Busquemos ahora vectores principales:

$$\begin{aligned} (A-\lambda I)\overrightarrow{u} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow (A-2I)\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} 3y+4z=1 \\ 3z=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{3} \\ z=0 \end{cases} \Longrightarrow \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

   Otra solución es

$$Y_2(x) = e^{2x}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} xe^{2x}.$$

   para la tercera solución resolvemos:

$$\begin{aligned} (A-\lambda I)\overrightarrow{w} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow (A-2I)\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} 3y+4z=0 \\ 3z=\frac{1}{3} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y=-\frac{1}{27} \\ z=\frac{1}{9} \end{cases} \Longrightarrow \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} x \\ -\frac{1}{27} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

   Otra solución es

$$Y_3(x) = e^{2x}\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{27} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix} + xe^{2x}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\frac{x^2}{2!}e^{2x}.$$

Lemma 5.1 *4.12 Sea λ es un valor propio de A con multiplicidad algebraica $m > 1$. Entonces el siguiente sistema*

$$(A-\lambda I)^m v = 0 \qquad (4.4.5)$$

tiene exactamente m soluciones linealmente independientes.

Mediante cálculos directos podemos probar el siguiente teorema.

Teorema 5.2 *Sea λ es un valor propio de A con multiplicidad algebraica $m > 1$.. Sea $v_0 \neq 0$ una solución de $(A - \lambda I)^m v = 0$. Definimos*

$$v_k = (A - \lambda I)\, v_{k-1}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, m-1. \qquad \textit{(4.4.6)}$$

y sea

$$x(t) = e^{\lambda t}\left[v_0 + t v_1 + \frac{t^2}{2} v_2 + \cdots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} v_{m-1}\right] \qquad \textit{(4.4.7)}$$

Entonces $x(t)$ es una solución de (4.4.1).

Sean $v_0^{(1)}$, $v_0^{(2)}$, ..., $v_0^{(m)}$, m soluciones linealmente independientes de $(A - \lambda I)^m v = 0$. Ellos generan m soluciones linealmente independientes de (4.4.1) vía (4.4.6) y (4.4.7).

Observación. En (4.4.6), siempre se tiene

$$(A - \lambda I)\, v_{m-1} = 0.$$

Si $v_{m-1} \neq 0$ entonces v_{m-1} es un vector propio de la matriz A asociado con el valor propio λ.

En la práctica, para encontrar las soluciones de (4.4.1) asociadas con un valor propio λ de multiplicidad m, primero resolvemos (4.4.5) y encontramos m soluciones linealmente independientes

$$v_0^{(1)}, v_0^{(2)}, \ldots, v_0^{(m)}.$$

Para cada uno de estos vectores , $v_0^{(k)}$, calculamos la secuencia iterativa

$$v_l^{(k)} = (A - \lambda I)\, v_{l-1}^{(k)}, \qquad l = 1, 2, 3, \ldots$$

Existe un entero $0 \leq j \leq m-1$ (j depende de la selección de $v_0^{(k)}$) tal que

$$v_j^{(k)} \neq 0, \quad (A - \lambda I)\, v_j^{(k)} = 0.$$

Entonces, v_j es un vector propio de A asociado con el valor propio λ. Entonces la iteración se detiene y se obtiene la solución

$$x^{(k)}(t) = e^{\lambda t}\left[v_0^{(k)} + t v_1^{(k)} + \frac{t^2}{2} v_2^{(k)} + \cdots + \frac{t^j}{j!} v_j^{(k)}\right] \qquad (4.4.8)$$

Ejemplo. Resolver $X' = AX$, donde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Solución. De $\det(A - \lambda I) = -\lambda (\lambda + 3)^2 = 0$, encontramos los valores propios $\lambda_1 = -3$ con multiplicidad 2, y $\lambda_2 = 0$ simple. Para el valor propio doble $\lambda_1 = -3$, resolvemos

$$(A + 3I)^2 v = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} v = \overrightarrow{0},$$

y encontramos dos soluciones linealmente independientes $v_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_0^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Reemplazando $v_0^{(1)}$ y $v_0^{(2)}$ en (4.4.6), (4.4.7) obtenemos

$$\begin{aligned}
v_1^{(1)} &= (A+3I)\,v_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \\
x^{(1)}(t) &= e^{-3t}\left[v_0^{(1)} + tv_1^{(1)}\right] = e^{-3t}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}\right], \\
v_1^{(2)} &= (A+3I)\,v_0^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
x^{(2)}(t) &= e^{-3t}\left[v_0^{(2)} + tv_1^{(2)}\right] = e^{-3t}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right].
\end{aligned}$$

Para el valor propio simple $\lambda_2 = 0$ encontramos como un vector propio $Z_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Entonces la solución general es

$$\begin{aligned}
X(t) &= C_1X^{(1)}(t) + C_2X^{(2)}(t) + C_3Z_3 \\
&= C_1e^{-3t}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}\right] + C_2e^{-3t}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] + C_3\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ejemplo. Resolver el sistema

$$\begin{cases} x' = 2x + y + 2z, \\ y' = -x + 4y + 2z \\ z' = 3z. \end{cases}$$

Solución. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

El valor propio de A es 3 con multiplicidad 3. Resolviendo el sistema lineal:

$$(A-3I)^3\,v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v = \overrightarrow{0},$$

obtenemos tres soluciones linealmente independientes

$$v_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_0^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_0^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Reemplazando $v_0^{(j)}$ en (4.4.6), (4.4.7) obtenemos

$$\begin{aligned}
v_1^{(1)} &= (A-3I)\,v_0^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2^{(1)} = (A-3I)\,v_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
X^{(1)} &= e^{3t}\left(v_0^{(1)} + tv_1^{(1)}\right) = e^{3t}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]; \\
v_1^{(2)} &= (A-3I)\,v_0^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2^{(2)} = (A-3I)\,v_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
X^{(2)} &= e^{3t}\left(v_0^{(2)} + tv_1^{(2)}\right) = e^{3t}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]; \\
v_1^{(3)} &= (A-3I)\,v_0^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2^{(3)} = (A-3I)\,v_1^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
X^{(3)} &= e^{3t}\left(v_0^{(3)} + tv_1^{(3)}\right) = e^{3t}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right].
\end{aligned}
$$

La solución general es

$$
\begin{aligned}
X(t) &= C_1X^{(1)} + C_2X^{(2)} + C_3X^{(3)} = C_1e^{3t}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] + C_2e^{3t}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \\
&\quad + C_3e^{3t}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right].
\end{aligned}
$$

Ejemplo. Resolver $X' = AX$, donde $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Solución. La matriz A tiene un valor propio $\lambda = 3$ de multiplicidad 4. Un cálculo directo da:

$$
(A-3I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A-3I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A-3I)^3 = \mathbf{O}, \quad \text{y} \quad (A-3I)^4 = \mathbf{O}\,.
$$

Se puede ver que

$$
V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad V_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{son dos vectores propios linealmente independientes de la matriz } A.
$$

Junto con

$$
V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ellos forman una base de } \left\{V : (A-3I)^4\,V = \mathbf{O}\right\} = \mathbb{R}^4.
$$

Note que $(A-3I)\,V_2 = V_3$, y $(A-3I)\,V_3 = V_4$. Por lo tanto $\{V_2,\ V_3, V_4\}$ forma una cadena de vectores propios generalizados asociados con el valor propio 3. $\{V_1\}$ solo es otra cadena. Por lo tanto, la solución general es

$$
X(t) = e^{3t}\left[C_1V_1 + C_2\left(V_2 + tV_3 + \frac{t^2}{2}V_4\right) + C_3\left(V_3 + tV_4\right) + C_4V_4\right]
$$

Es decir

$$
X(t) = \left(\begin{pmatrix} C_1e^{3t} \\ C_2e^{3t} \\ (C_2t + C_3)\,e^{3t} \\ \left(C_2\frac{t^2}{2} + C_3t + C_4\right)e^{3t} \end{pmatrix}\right)
$$

Ejercicio. Resolver $X' = AX$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 10 & -5 & 4 \\ -4 & -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Respuesta:

$$X(t) = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + C_3 e^{t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + C_4 e^{t} \begin{pmatrix} -t-1 \\ 1 \\ -2t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Capítulo 6

Ejercicios resueltos y talleres

1. Encontrar la solución general del sistema $X'(t) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X(t)$. Respuesta: $X(t) = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   Solución: Determinemos los valores propios:

   $$\det \begin{pmatrix} 6-\lambda & -3 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow (6-\lambda)(1-\lambda) + 6 = 0 \Longleftrightarrow (\lambda - 3)(\lambda - 4) = 0.$$

   Se tiene entonces dos valores propios: $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = 4$.
   Hallemos ahora vectores propios asociados a dichos valores propios.
   Para $\lambda_1 = 3$:

   $$(A - 3I)\overrightarrow{X} = \overrightarrow{0} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3x - 3y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \{x = y$$

   Es decir que los vectores propios asociados a $\lambda_1 = 3$ son de la forma $\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ con $x \neq 0$. Si elegimos $x = 1$ se tiene el vector propio $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y por tanto una solución del sistema es $\overrightarrow{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$.
   Para $\lambda_1 = 4$:

   $$(A - 4I)\overrightarrow{X} = \overrightarrow{0} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \left\{ x = \frac{3}{2} y \right.$$

   Es decir que los vectores propios asociados a $\lambda_2 = 4$ son de la forma $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ con $y \neq 0$. Si elegimos $y = 2$ se tiene el vector propio $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ y por tanto una solución del sistema es $\overrightarrow{X}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t}$. Por tanto la solución general es: $\overrightarrow{X}(t) = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. Use matrices para encontrar la solución general del sistema $\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = x + 2y + z \\ z' = 3y - z \end{cases}$.

   Solución:
   En forma matricial el sistema se escribe:

   $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 3 & -1-\lambda \end{pmatrix} &= (-1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (-1-\lambda)\left[(2-\lambda)(-1-\lambda)-3\right]-(-1-\lambda) \\
&= (-1-\lambda)\left[\lambda^2-\lambda-2-3-1\right] = (-1-\lambda)(\lambda-3)(\lambda-2)\,.
\end{aligned}$$

Se tiene entonces tres valores propios: $\lambda = -1; \quad \lambda = -2, \quad \lambda = 3.$

Calculemos los vectores propios.

Para $\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y=0 \\ x+3y+z=0 \\ 3y=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} y=0 \\ x=-z \end{array}\right. \Longrightarrow V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Primera solución: $X_1(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Para $\lambda = -2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y=0 \\ x+4y+z=0 \\ 3y+z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=-y \\ 3y+z=0 \\ 3y+z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=-y \\ z=-3y \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \quad V_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Segunda solución: $X_3(t) = e^{-2t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Para $\lambda = 3$:

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} -4x+y=0 \\ x-y+z=0 \\ 3y-4z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} y=4x \\ z=3x \\ 0=0 \end{array}\right. \Longrightarrow V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Tercera solución: $X_3(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Luego la solución general es:

$$X(t) = C_1e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2e^{-2t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + C_3e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

o lo que es lo mismo

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = C_1e^{-t} - C_2e^{-2t} + C_3e^{3t} \\ y(t) = C_2e^{-2t} + 4C_3e^{3t} \\ z(t) = -C_1e^{-t} - 3C_2e^{-2t} + 3C_3e^{3t} \end{array}\right.$$

3. Resolver el problema de valor inicial $X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}X, \quad X(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Mostrar que el sistema de Cauchy - Euler

$$tX'(t) = AX(t), \quad t > 0,$$

donde A es una matriz constante tiene soluciones no triviales de la forma $X(t) = t^r \overrightarrow{u}$ si y solamente si r es un valor propio de A y $\overrightarrow{u}$ es un correspondiente vector propio.
Solución: X

$$\begin{aligned} X(t) &= t^r\overrightarrow{u} \text{ es una solución, con } X(t) \neq 0 \Longleftrightarrow t\left(rt^{r-1}\overrightarrow{u}\right) = At^r \overrightarrow{u} \\ &\Longleftrightarrow t^r r\overrightarrow{u} = t^r A\overrightarrow{u} \\ &\Longleftrightarrow r\overrightarrow{u} = A\overrightarrow{u} \\ &\Longleftrightarrow (A - rI)\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \\ &\Longleftrightarrow \overrightarrow{u} \text{ es un vector propio de } A \text{ asociado al valor propio } r. \end{aligned}$$

b) Use el resultado previo para encontrar la solución general de

$$t\ X'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} X(t).$$

Solución:
Valores propios de A :

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 5 \\ 1 & -3-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow (1-\lambda)(-3-\lambda) - 5 = 0 \Longleftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = -4 \text{ o } \lambda = 2.$$

Vectores propios
Para $\lambda = -4$

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} 5x + 5y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow x = -y \Longrightarrow \overrightarrow{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} -x + 5y = 0 \\ x - 5y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow x = 5y \Longrightarrow \overrightarrow{u}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La solución general es

$$X(t) = C_1 t^{-4}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 t^2 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Resolver el sistema
$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) - 3y(t) \\ y'(t) = 3x(t) - y(t) \end{cases},$$
y graficar algunas soluciones.

5. Resuelva el problema de valor inicial

$$y'' + 5y' + 6y = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ t, & \text{si } 1 \leq t < 5 \\ 1, & \text{si } 5 \leq t \end{cases}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$$

Solución:

Sea $g(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ t, & \text{si } 1 \leq t < 5 \\ 1, & \text{si } 5 \leq t \end{cases}$, en términos de escalones unitarios se tiene:

$$g(t) = 0 + (t-0)\mathcal{U}(t-1) + (1-t)\mathcal{U}(t-5) = [(t-1)+1]\mathcal{U}(t-1) + [6-(t-5)]\mathcal{U}(t-5)$$

Por tanto

$$\mathcal{L}\left\{y''+5y'+6y\right\}=\mathcal{L}\left\{g(t)\right\}\Longleftrightarrow\mathcal{L}\left\{y''\right\}+5\mathcal{L}\left\{y'\right\}+6\mathcal{L}\left\{y\right\}=e^{-s}\left(\mathcal{L}\left\{t\right\}+\mathcal{L}\left\{1\right\}\right)+e^{-5s}\left(\mathcal{L}\left\{6\right\}-\mathcal{L}\left\{t\right\}\right)$$

Luego

$$s^2\mathcal{L}\left\{y\right\}-2+5s\mathcal{L}\left\{y\right\}+6\mathcal{L}\left\{y\right\}=e^{-s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}\right)+e^{-5s}\left(\frac{6}{s}-\frac{1}{s^2}\right)$$

o también

$$\left(s^2+5s+6\right)\mathcal{L}\left\{y\right\}=e^{-s}\left(\frac{1+s}{s^2}\right)+e^{-5s}\left(\frac{6s-1}{s^2}\right)+2,$$

de donde

$$\mathcal{L}\left\{y\right\}=e^{-s}\left(\frac{1+s}{s^2\left(s^2+5s+6\right)}\right)+e^{-5s}\left(\frac{6s-1}{s^2\left(s^2+5s+6\right)}\right)+\frac{2}{\left(s^2+5s+6\right)}$$

Por descomposición en fracciones parciales, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{1+s}{s^2\left(s^2+5s+6\right)} &= \frac{a}{s}+\frac{b}{s^2}+\frac{c}{s+3}+\frac{d}{s+2}=\frac{1}{36s}+\frac{1}{6s^2}+\frac{2}{9\left(s+3\right)}-\frac{1}{4\left(s+2\right)}\\
\frac{6s-1}{s^2\left(s^2+5s+6\right)} &= \frac{41}{36s}-\frac{1}{6s^2}-\frac{13}{4\left(s+2\right)}+\frac{19}{9\left(s+3\right)}=\mathcal{L}\left\{\frac{41}{36}-\frac{t}{6}-\frac{13e^{-2t}}{4}+\frac{19e^{-3t}}{9}\right\}\\
\frac{2}{\left(s^2+5s+6\right)} &= \frac{2}{s+2}-\frac{2}{s+3}=\mathcal{L}\left\{2e^{-2t}-2e^{-3t}\right\}
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
y &= 2e^{-2t}-2e^{-3t}+\left(\frac{1}{36}+\frac{t-1}{6}-\frac{e^{-2(t-1)}}{4}+\frac{2e^{-3(t-1)}}{9}\right)\mathcal{U}\left(t-1\right)+\\
&\quad+\left(\frac{41}{36}-\frac{(t-5)}{6}-\frac{13e^{-2(t-5)}}{4}+\frac{19e^{-3(t-5)}}{9}\right)\mathcal{U}\left(t-5\right)
\end{aligned}$$

Respuesta:

$$\begin{aligned}
y(t) &= 2e^{-2t}-2e^{-3t}+\left(\frac{1}{36}+\frac{t-1}{6}-\frac{e^{-2(t-1)}}{4}+\frac{2e^{-3(t-1)}}{9}\right)\mathcal{U}\left(t-1\right)+\\
&\quad+\left(\frac{41}{36}+\frac{1}{6}\left(t-5\right)-\frac{13}{4}e^{-2(t-5)}+\frac{19}{9}e^{-3(t-5)}\right)\mathcal{U}\left(t-5\right)
\end{aligned}$$

6. Exprese el sistema de ecuaciones diferenciales dado en notación matricial:

$$\begin{aligned}
x_1'(t) &= (\cos 2t)\,x_1(t)\\
x_2'(t) &= x_3(t)-x_2(t)+e^t x_1(t)\\
x_3'(t) &= \left(2+t^3\right)x_2(t)+(\operatorname{sen} t)\,x_3(t)
\end{aligned}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}\cos 2t & 0 & 0\\ e^t & -1 & 1\\ 0 & \left(2+t^3\right) & \operatorname{sen} t\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

7. Exprese la ecuación diferencial de orden superior y el sistema de ecuaciones diferenciales de orden superior como un sistema de ecuaciones de primer orden.

   a) $y'''+y''-ty=\cos 2t$

   Solución:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1=y\\ x_2=y'\\ x_3=y''\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x_1'=y'=x_2\\ x_2'=y''=x_3\\ x_3'=y'''=\cos 2t-y''+t\,y\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x_1'=x_2\\ x_2'=x_3\\ x_3'=\cos 2t-x_3+t\,x_1\end{array}\right.$$

b) $y'' - 3ty' + 5t^2 y = e^{2t}, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 3.$

Solución:

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = y' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1' = y' = x_2 \\ x_2' = y'' = e^{2t} + 3ty' - 5t^2 y \end{cases}, \text{ condiciones iniciales: } \begin{cases} x_1(0) = y(0) = 5 \\ x_2(0) = y'(0) = 3 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = e^{2t} + 3tx_2 - 5t^2 x_1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1(0) = 5 \\ x_2(0) = 3 \end{cases}$$

c) $\begin{cases} x'' + 3x' - y' + 2y = 0 \\ y'' + x' + 3y' + y = 0 \end{cases}$

Solución:

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = x' \\ x_3 = y \\ x_4 = y' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_3' = x_4 \\ x_2' + 3x_2 - x_4 + 2x_3 = 0 \\ x_4' + x_2 + 3x_4 + x_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -3x_2 + x_4 - 2x_3 \\ x_3' = \ x_4 \\ x_4' = -x_2 - 3x_4 - x_3 \end{cases}$$

8. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$

   a) Encontrar $2A - 3B$. Respuesta $\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -13 & -4 \end{pmatrix}$

   b) Encontrar AB y BA.

   c) Encontrar $A^2 - 3A$ y $B^2 - 2B$. Respuesta: $A^2 - 3A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I. \qquad B^2 - 2B = \begin{pmatrix} 18 & -3 \\ -5 & 15 \end{pmatrix}.$

9. Encontrar $\dfrac{dX}{dt}$ para $X(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} 2t & \cos 2t & e^{-2t} \\ -\operatorname{sen} 2t & 2\cos 2t & 3e^{-2t} \\ 3\operatorname{sen} 2t & \cos 2t & e^{-2t} \end{pmatrix}.$

   Respuesta: $\dfrac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} 2\cos 2t & -2\operatorname{sen} 2t & -2e^{-2t} \\ -2\cos 2t & -4\operatorname{sen} 2t & -6e^{-2t} \\ 6\cos 2t & -2\operatorname{sen} 2t & -2e^{-2t} \end{pmatrix}.$

10. Verifique que la función matricial dada satisface la ecuación diferencial matricial.

$$X'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} X(t), \qquad X(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & e^{5t} \\ 0 & e^t & -e^{5t} \end{pmatrix}.$$

Solución:

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & e^{5t} \\ 0 & e^t & -e^{5t} \end{pmatrix} \Longrightarrow X'(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 5e^{5t} \\ 0 & e^t & -5e^{5t} \end{pmatrix}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} X(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & e^{5t} \\ 0 & e^t & -e^{5t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & 3e^t - 2e^t & 3e^{5t} + 2e^{5t} \\ 0 & -2e^t + 3e^t & -2e^{5t} - 3e^{5t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 5e^{5t} \\ 0 & e^t & -5e^{5t} \end{pmatrix} = X'(t). \end{aligned}$$

En consecuencia X es solución de $X'(t) = AX$.

6.1. Tarea

1. Resuelva el problema de valor inicial

$$y'' + 5y' + 6y = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ t, & \text{si } 1 \leq t < 5 \\ 1, & \text{si } 5 \leq t \end{cases}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$$

Solución:

Sea $g(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ t, & \text{si } 1 \leq t < 5 \\ 1, & \text{si } 5 \leq t \end{cases}$, en términos de escalones unitarios se tiene:

$$g(t) = 0 + (t-0)\mathcal{U}(t-1) + (1-t)\mathcal{U}(t-5) = [(t-1)+1]\mathcal{U}(t-1) + [6-(t-5)]\mathcal{U}(t-5)$$

Por tanto

$$\mathcal{L}\{y'' + 5y' + 6y\} = \mathcal{L}\{g(t)\} \Longleftrightarrow \mathcal{L}\{y''\} + 5\mathcal{L}\{y'\} + 6\mathcal{L}\{y\} = e^{-s}(\mathcal{L}\{t\} + \mathcal{L}\{1\}) + e^{-5s}(\mathcal{L}\{6\} - \mathcal{L}\{t\})$$

Luego

$$s^2\mathcal{L}\{y\} - 2 + 5s\mathcal{L}\{y\} + 6\mathcal{L}\{y\} = e^{-s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}\right) + e^{-5s}\left(\frac{6}{s} - \frac{1}{s^2}\right)$$

o también

$$\left(s^2 + 5s + 6\right)\mathcal{L}\{y\} = e^{-s}\left(\frac{1+s}{s^2}\right) + e^{-5s}\left(\frac{6s-1}{s^2}\right) + 2,$$

de donde

$$\mathcal{L}\{y\} = e^{-s}\left(\frac{1+s}{s^2(s^2+5s+6)}\right) + e^{-5s}\left(\frac{6s-1}{s^2(s^2+5s+6)}\right) + \frac{2}{(s^2+5s+6)}$$

Por descomposición en fracciones parciales, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{1+s}{s^2(s^2+5s+6)} &= \frac{a}{s} + \frac{b}{s^2} + \frac{c}{s+3} + \frac{d}{s+2} = \frac{1}{36s} + \frac{1}{6s^2} + \frac{2}{9(s+3)} - \frac{1}{4(s+2)} \\
\frac{6s-1}{s^2(s^2+5s+6)} &= \frac{41}{36s} - \frac{1}{6s^2} - \frac{13}{4(s+2)} + \frac{19}{9(s+3)} = \mathcal{L}\left\{\frac{41}{36} - \frac{t}{6} - \frac{13e^{-2t}}{4} + \frac{19e^{-3t}}{9}\right\} \\
\frac{2}{(s^2+5s+6)} &= \frac{2}{s+2} - \frac{2}{s+3} = \mathcal{L}\left\{2e^{-2t} - 2e^{-3t}\right\}
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
y &= 2e^{-2t} - 2e^{-3t} + \left(\frac{1}{36} + \frac{t-1}{6} - \frac{e^{-2(t-1)}}{4} + \frac{2e^{-3(t-1)}}{9}\right)\mathcal{U}(t-1) + \\
&\quad + \left(\frac{41}{36} - \frac{(t-5)}{6} - \frac{13e^{-2(t-5)}}{4} + \frac{19e^{-3(t-5)}}{9}\right)\mathcal{U}(t-5)
\end{aligned}$$

Respuesta:

$$\begin{aligned}
y(t) &= 2e^{-2t} - 2e^{-3t} + \left(\frac{1}{36} + \frac{t-1}{6} - \frac{e^{-2(t-1)}}{4} + \frac{2e^{-3(t-1)}}{9}\right)\mathcal{U}(t-1) + \\
&\quad + \left(\frac{41}{36} + \frac{1}{6}(t-5) - \frac{13}{4}e^{-2(t-5)} + \frac{19}{9}e^{-3(t-5)}\right)\mathcal{U}(t-5).
\end{aligned}$$

2. Exprese el sistema de ecuaciones diferenciales dado en notación matricial:

$$\begin{gathered}
x_1'(t) = (\cos 2t)\, x_1(t) \\
x_2'(t) = x_3(t) - x_2(t) + e^t x_1(t) \\
x_3'(t) = \left(2 + t^3\right) x_2(t) + (\operatorname{sen} t)\, x_3(t)
\end{gathered}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \cos 2t & 0 & 0 \\ e^t & -1 & 1 \\ 0 & \left(2+t^3\right) & \operatorname{sen} t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

3. Exprese la ecuación diferencial de orden superior y el sistema de ecuaciones diferenciales de orden superior como un sistema de ecuaciones de primer orden.

   a) $y''' + y'' - ty = \cos 2t$
   Solución:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = y \\ x_2 = y' \\ x_3 = y'' \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1' = y' = x_2 \\ x_2' = y'' = x_3 \\ x_3' = y''' = \cos 2t - y'' + t\ y \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ x_3' = \cos 2t - x_3 + t\ x_1 \end{array}\right.$$

   b) $y'' - 3ty' + 5t^2 y = e^{2t}, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 3.$
   Solución:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = y \\ x_2 = y' \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1' = y' = x_2 \\ x_2' = y'' = e^{2t} + 3ty' - 5t^2 y \end{array}\right., \text{ condiciones iniciales: } \left\{\begin{array}{l} x_1(0) = y(0) = 5 \\ x_2(0) = y'(0) = 3 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1' = x_2 \\ x_2' = e^{2t} + 3tx_2 - 5t^2 x_1 \end{array}\right., \quad \left\{\begin{array}{l} x_1(0) = 5 \\ x_2(0) = 3 \end{array}\right.$$

   c) $\left\{\begin{array}{l} x'' + 3x' - y' + 2y = 0 \\ y'' + x' + 3y' + y = 0 \end{array}\right.$
   Solución:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = x \\ x_2 = x' \\ x_3 = y \\ x_4 = y' \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1' = x_2 \\ x_3' = x_4 \\ x_2' + 3x_2 - x_4 + 2x_3 = 0 \\ x_4' + x_2 + 3x_4 + x_3 = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1' = x_2 \\ x_2' = -3x_2 + x_4 - 2x_3 \\ x_3' = x_4 \\ x_4' = -x_2 - 3x_4 - x_3 \end{array}\right.$$

4. Encontrar $\dfrac{dX}{dt}$ para $X(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} 2t & \cos 2t & e^{-2t} \\ -\operatorname{sen} 2t & 2\cos 2t & 3e^{-2t} \\ 3\operatorname{sen} 2t & \cos 2t & e^{-2t} \end{pmatrix}$.

   Respuesta: $\dfrac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} 2\cos 2t & -2\operatorname{sen} 2t & -2e^{-2t} \\ -2\cos 2t & -4\operatorname{sen} 2t & -6e^{-2t} \\ 3\cos 2t & -2\operatorname{sen} 2t & -2e^{-2t} \end{pmatrix}$.

5. Verifique que la función matricial dada satisface la ecuación diferencial matricial.

$$X'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} X(t), \qquad X(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & e^{5t} \\ 0 & e^t & -e^{5t} \end{pmatrix}.$$

   Solución:

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & e^{5t} \\ 0 & e^t & -e^{5t} \end{pmatrix} \Longrightarrow X'(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 5e^{5t} \\ 0 & e^t & -5e^{5t} \end{pmatrix}$$

   Por otra parte

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} X(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & e^{5t} \\ 0 & e^t & -e^{5t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & 3e^t - 2e^t & 3e^{5t} + 2e^{5t} \\ 0 & -2e^t + 3e^t & -2e^{5t} - 3e^{5t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 5e^{5t} \\ 0 & e^t & -5e^{5t} \end{pmatrix} = X'(t). \end{aligned}$$

   En consecuencia X es solución de $X'(t) = AX$.

6.2. Tarea

1. Resuelva cada problema de valor inicial.

   a) $y'' + y = t - (t-4)\mathcal{U}(t-2), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$
   Solución:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y\} &= \mathcal{L}\{t\} - \mathcal{L}\{(t-4)\mathcal{U}(t-2)\} \\
&\Updownarrow \\
s^2\mathcal{L}\{y\} - 1 - s\cdot 0 + \mathcal{L}\{y\} &= \frac{1}{s^2} - \mathcal{L}\{[(t-2)-2]\mathcal{U}(t-2)\} \\
&\Updownarrow \\
\left(s^2+1\right)\mathcal{L}\{y\} &= 1 + \frac{1}{s^2} - \mathcal{L}\{(t-2)\mathcal{U}(t-2)\} + 2\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-2)\} \\
&\Updownarrow \\
\left(s^2+1\right)\mathcal{L}\{y\} &= \frac{1+s^2}{s^2} - \frac{e^{-2s}}{s^2} + \frac{2e^{-2s}}{s}
\end{aligned}$$

   De donde

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y\} &= \frac{1+s^2}{s^2\left(s^2+1\right)} - \frac{e^{-2s}}{s^2\left(s^2+1\right)} + \frac{2e^{-2s}}{s\left(s^2+1\right)} \\
&= \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-2s}(1-2s)}{s^2\left(s^2+1\right)}.
\end{aligned}$$

   Descomponiendo en fracciones parciales:

$$\frac{1-2s}{s^2\left(s^2+1\right)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+1} = \frac{A\left(s^3+s\right) + B\left(s^2+1\right) + Cs^3 + Ds^2}{s^2\left(s^2+1\right)}$$

$$\left\{\begin{array}{l}
\text{Coeficientes de } s^3 : A + C = 0 \\
\text{Coeficientes de } s^2 : B + D = 0 \\
\text{Coeficientes de } s : A = -2 \\
\text{Término independiente:} \quad B = 1
\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}
C = -2 \\
D = -1 \\
A = -2 \\
B = 1
\end{array}\right.$$

   Luego:

$$\frac{1-2s}{s^2\left(s^2+1\right)} = \frac{-2}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{2s+1}{s^2+1} = L\{-2 + t - 2\cos t - \operatorname{sen} t\}$$

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} - \frac{e^{-2s}(1-2s)}{s^2\left(s^2+1\right)}\right\} = t - [-2 + (t-2) - 2\cos(t-2) - \operatorname{sen}(t-2)]\mathcal{U}(t-2) \\
&= t - [t - 4 - 2\cos(t-2) - \operatorname{sen}(t-2)]\mathcal{U}(t-2)
\end{aligned}$$

   b) $y'' + y = \delta(t-\pi), \; y(0) = 0, \; y'(0) = 0.$
   Solución:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y\} &= \mathcal{L}\{\delta(t-\pi)\} \Longrightarrow \left(s^2+1\right)\mathcal{L}\{y\} = e^{-\pi s} \Longrightarrow \mathcal{L}\{y\} = \frac{e^{-\pi s}}{s^2+1} \\
&\Longrightarrow \mathcal{L}\{y\} = e^{-\pi s}\mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\} \Longrightarrow y(t) = \operatorname{sen}(t-\pi)\mathcal{U}(t-\pi).
\end{aligned}$$

   c) $y'' - y' = 4\delta(t-2) + t^2, \; y(0) = 0, \; y'(0) = 3.$
   Solución:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y''\} - \mathcal{L}\{y'\} &= 4\mathcal{L}\{\delta(t-2)\} + \mathcal{L}\left\{t^2\right\} \\
&\Updownarrow \\
s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) - s\mathcal{L}\{y\} + y(0) &= 4e^{-2s} + \frac{2}{s^3} \\
&\Updownarrow \\
\left(s^2 - s\right)\mathcal{L}\{y\} &= 4e^{-2s} + \frac{2}{s^3} + 3
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{4e^{-2s}}{s(s-1)} + \frac{2+3s^3}{s^4(s-1)}$$

Se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{4}{s(s-1)} &= -\frac{4}{s} + \frac{4}{s-1} \\ \frac{2+3s^3}{s^4(s-1)} &= \frac{5}{s-1} - \frac{5}{s} - \frac{5}{s^2} - \frac{5}{s^3} - \frac{2}{s^4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y\} &= 5\mathcal{L}\left\{e^t - 1 - t - \frac{t^2}{2}\right\} - \mathcal{L}\left\{\frac{t^3}{3}\right\} + 4e^{-2s}\mathcal{L}\{e^t - 1\} \\ y &= 5e^t - 5 - 5t - \frac{5t^2}{2} - \frac{t^3}{3} + 4\left(e^{t-2} - 1\right)\mathcal{U}(t-2). \end{aligned}$$

d) $y'' + 6y' + 5y = e^t\delta(t-1),\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 4.$
Solución: Recordemos que $L\{f(t)\delta(t-c)\} = e^{-cs}f(c)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y''\} + 6\mathcal{L}\{y'\} + 5\mathcal{L}\{y\} &= \mathcal{L}\left\{e^t\delta(t-1)\right\},\ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 4 \\ s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) + 6s\mathcal{L}\{y\} - 6y(0) + 5\mathcal{L}\{y\} &= e^{-s}e \\ s^2\mathcal{L}\{y\} - 4 + 6s\mathcal{L}\{y\} + 5\mathcal{L}\{y\} &= e^{-s}e \\ \left(s^2 + 6s + 5\right)\mathcal{L}\{y\} &= e^{-s}e + 4 \\ \mathcal{L}\{y\} &= \frac{ee^{-s} + 4}{(s+5)(s+1)} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{(s+5)(s+1)} = -\frac{1}{4(s+5)} + \frac{1}{4(s+1)}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y\} &= \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+5} + \frac{e}{4}e^{-s}\left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+5}\right) \\ y(t) &= e^{-t} - e^{-5t} + \frac{e}{4}\left(e^{-(t-1)} - e^{-5(t-1)}\right)\mathcal{U}(t-1). \end{aligned}$$

2. Encontrar la transformada de Laplace de $f(t) = \displaystyle\int_0^t (t-v)\,e^{3v}dv$.

   a) **Solución**: Se tiene $f(t) = t * e^{3t}$. Luego

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\left\{t * e^{3t}\right\} \Longleftrightarrow \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{t\}\,\mathcal{L}\left\{e^{3t}\right\} \Longrightarrow \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s^2}\frac{1}{s-3} = \frac{1}{s^2(s-3)}.$$

3. Encontrar la transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones usando el teorema de la convolución.

   a) $F(s) = \dfrac{s}{\left(s^2+4\right)^2}$.
   Solución:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{s}{s^2+4}\cdot\frac{1}{s^2+4} = L\{\cos 2t\}\cdot L\left\{\frac{\operatorname{sen} 2t}{2}\right\} \\ L^{-1}\{F(s)\} &= \cos 2t * \frac{\operatorname{sen} 2t}{2} = \frac{1}{2}\cos 2t * \operatorname{sen} 2t \\ &= \frac{1}{2}\int_0^t \cos[2(t-v)]\operatorname{sen} 2v dv = \frac{1}{2}\int_0^t \operatorname{sen}[2(t-v)]\cos 2v dv \end{aligned}$$

b) $G(s) = \dfrac{1}{s^5(s^2+1)}$.

Solución:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{s^5}\frac{1}{s^2+1} = \mathcal{L}\left\{\frac{t^4}{4!}\right\}\cdot\mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\} = \mathcal{L}\left\{\frac{t^4}{4!} * \operatorname{sen} t\right\} \\ \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} &= \frac{t^4}{4!} * \operatorname{sen} t = \int_0^t \frac{(t-v)^4}{4!}\operatorname{sen} v\; dv \end{aligned}$$

4. Resolver el problema de valor inicial y graficar la solución.

   a) $y'' + y = 3\operatorname{sen} 2t - 3\operatorname{sen}(2t)\,\mathcal{U}(t-2\pi)$, $\quad y(0) = 1$, $\quad y'(0) = -2$.

   b) $y'' + y = \delta(t-\pi) - \delta(t-2\pi)$, $\quad y(0) = 0$, $\quad y'(0) = 1$.

6.3. Tarea

1. Resolver la ecuación diferencial $y'' + 9y = \sec^3(3t)$.

   Solución. El método del anulador o de los coeficientes indeterminados no aplica en este caso, por lo tanto, debemos usar el método de variación de parámetros.

   Solución de la ecuación diferencial lineal homogénea asociada: Como la ecuación característica es $\lambda^2 + 9 = 0$, se sigue que $\lambda = \pm 3i$. Por tanto $y_1 = \cos 3t$ y $y_2 = \operatorname{sen} 3t$ son soluciones linealmente independientes.

   Busquemos ahora una solución particular de la forma $y_p = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$, con $C_1(x) = -\int \frac{h(x)y_2}{W[y_1,y_2]}dx$ y $C_2(x) = -\int \frac{h(x)y_1}{W[y_1,y_2]}dx$. O también, C_1 y C_2 son soluciones de

$$\begin{aligned} \begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = h(x) \end{cases} &\Longrightarrow \begin{cases} C_1'\cos 3x + C_2'\operatorname{sen} 3x = 0 \\ -3C_1'\operatorname{sen} 3x + 3C_2'\cos 3x = \sec^3(3t) \end{cases} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} C_1' = -C_2'\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\cos 3x} \\ 3C_2'\dfrac{\operatorname{sen}^2 3x}{\cos 3x} + 3C_2'\cos 3x = \sec^3(3t) \end{cases} \qquad (2) \\ (2) &\Longrightarrow 3\left(\operatorname{sen}^2 3x + \cos^2 3x\right)C_2' = \sec^2(3t) \Longrightarrow C_2' = \frac{1}{3}\sec^2(3t) \\ &\Longrightarrow C_2 = \frac{1}{9}\tan(3t) \Longrightarrow C_1' = -\frac{1}{3}\frac{\operatorname{sen} 3x}{\cos^3 3x}, \end{aligned}$$

   de donde $C_1 = -\dfrac{1}{3}\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 3x}{\cos^3 3x}dx = -\dfrac{1}{18\cos^2 3x}$. Finalmente se sigue que $y_p = -\dfrac{1}{18\cos 3x} + \dfrac{1}{9}\tan 3x \operatorname{sen} 3x$.

2. Dado que $y_1 = t^{-1}$ es solución de la ecuación diferencial homogénea $t^2y'' + 3ty' + y = 0$, para $t > 0$.

   a) Use el método de reducción del orden para encontrar la solución general de la ecuación homogénea.

   Solución:

   Solución general en la forma $y = v(t)y_1 = \dfrac{v(t)}{t}$.

$$y' = \frac{v'(t)}{t} - \frac{v(t)}{t^2}, \qquad y'' = \frac{v''(t)}{t} - \frac{2v'(t)}{t^2} + \frac{2v(t)}{t^3}.$$

   Luego

$$t^2y'' + 3ty' + y = 0 \Longleftrightarrow tv''(t) - 2v'(t) + \frac{2v(t)}{t} + 3v'(t) - \frac{3v(t)}{t} + \frac{v(t)}{t} = 0,$$

de donde

$$tv''(t)+v'(t)\,(-2+3)+\frac{v(t)}{t}\,(2-3+1)=0 \Longleftrightarrow tv''(t)+v'(t)=0 \Longleftrightarrow \frac{d}{dt}\,(tv'(t))=0,$$

luego $tv'(t)=C$ y por tanto $v'(t)=\dfrac{C}{t}$, es decir, $v(t)=C\ln t+D$. Finalmente $y(t)=\dfrac{C\ln t+D}{t}$.

b) Use el método de variación de parámetros para encontrar la solución general de $t^2y''+3ty'+y=\dfrac{1}{t}$, con $t>0$.

Solución: Dividiendo ambos miembros de $t^2y''+3ty'+y=\dfrac{1}{t}$ para t^2 se sigue que $y''+\dfrac{3}{t}y'+\dfrac{y}{t^2}=\dfrac{1}{t^3}=h(x)$. Por otra parte, del resultado anterior se sigue que $y_1=\dfrac{1}{t}$, $y_2=\dfrac{\ln t}{t}$ forman una base del espacio nulo de la ecuación homogénea asociada. Se tiene además $y_1'=-\dfrac{1}{t^2}$, $y_2'=\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{\ln t}{t^2}$. Debemos resolver entonces el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{C_1'(t)}{t}+\dfrac{C_2'(t)\ln t}{t}=0 \\ -\dfrac{C_1'(t)}{t^2}+\dfrac{C_2'(t)}{t^2}-\dfrac{C_2'(t)\ln t}{t^2}=\dfrac{1}{t^3} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} C_1'(t)=-C_2'(t)\ln t \\ C_2'(t)=\dfrac{1}{t} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} C_1(t)=-\dfrac{1}{2}\ln^2 t+D \\ C_2(t)=\ln t+C \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y &= \left(-\frac{1}{2}\frac{\ln^2 t}{t}\right)+\frac{D}{t}+\ln t\frac{\ln t}{t}+\frac{C\ln t}{t} \\ y &= \frac{\ln^2 t}{2t}+\frac{D}{t}+\frac{C\ln t}{t} \end{aligned}$$

3. Use la definición de la transformada de Laplace para encontrar la transformada de Laplace de $f(t)=t^2e^{-3t}$.

a) **Solución:**

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^{+\infty} t^2e^{-3t}e^{-st}dt=\int_0^{+\infty} t^2e^{-(3+s)t}dt.$$

Haciendo $u=t^2$, $du=2tdt$, $dv=e^{-(3+s)t}dt$, $v=-\dfrac{e^{-(3+s)t}}{s+3}$ y aplicando integración por partes tenemos:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=-\left.\frac{t^2e^{-(3+s)t}}{s+3}\right|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{2te^{-(3+s)t}}{s+3}dt.$$

Si $s+3>0$, entonces $\left.\frac{t^2e^{-(3+s)t}}{s+3}\right|_0^{+\infty}=0$, luego $\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^{+\infty}\frac{2te^{-(3+s)t}}{s+3}dt$. Integrando por partes, hacemos $u=2t$, $u'=2$, $v'=e^{-(3+s)t}$, $v=-\dfrac{e^{-(3+s)t}}{s+3}$. Se sigue entonces que

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=-\left.\frac{2te^{-(3+s)t}}{(s+3)^2}\right|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{2e^{-(3+s)t}}{(s+3)^2}dt=\int_0^{+\infty}\frac{2e^{-(3+s)t}}{(s+3)^2}dt=-\left.\frac{2e^{-(3+s)t}}{(s+3)^3}\right|_0^{+\infty}=\frac{2}{(s+3)^3},$$

pues $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{2te^{-(3+s)t}}{(s+3)^3}=0$.

Finalmente, $\mathcal{L}\{f(t)\}=\dfrac{2}{(s+3)^3}$, $s>-3$.

4. Use la definición de la transformada de Laplace para encontrar la transformada de Laplace de

$$f(t)=\begin{cases} 0, & \text{si } 0\le t<3\\ 5, & \text{si } 3\le t<6\\ 0, & \text{si } t>6 \end{cases}.$$

   a) **Solución:**

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt=\int_0^{3} e^{-st}f(t)dt+\int_3^{6} e^{-st}f(t)dt+\int_6^{+\infty} e^{-st}f(t)dt\\
&= 0+\int_3^{6} e^{-st}f(t)dt+0=\int_3^6 5e^{-st}dt=-\left.\frac{5e^{-st}}{s}\right|_3^6=\frac{-5e^{-6s}+5e^{-3s}}{s}.
\end{aligned}$$

5. Usando la transformada de Laplace, resolver el problema de valor inicial $y''+3y'+5y=t+e^{-t}$, $y(0)=-1,\quad y'(0)=0$.

Solución:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y''\}+3\mathcal{L}\{y'\}+5\mathcal{L}\{y\} &= \mathcal{L}\{t\}+\mathcal{L}\left\{e^{-t}\right\}\\
&\Updownarrow\\
s^2\mathcal{L}\{y\}-sy(0)-y'(0)+3s\mathcal{L}\{y\}-3y(0)+5\mathcal{L}\{y\} &= \frac{1}{s^2}+\frac{1}{s+1}\\
&\Updownarrow\\
\left(s^2+3s+5\right)\mathcal{L}\{y\} &= \frac{1}{s^2}+\frac{1}{s+1}-s-3\\
&\Updownarrow\\
\mathcal{L}\{y\} &= \left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s+1}-s-3\right)\frac{1}{(s^2+3s+5)}
\end{aligned}$$

Una descomposición en fracciones parciales conduce a:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y\} &= \frac{-91s-263}{75\left(s^2+3s+5\right)}+\frac{1}{5s^2}-\frac{3}{25s}+\frac{1}{3\left(s+1\right)}\\
&= \frac{-91\left(s+\dfrac{3}{2}\right)+\dfrac{91\times 3}{2}-263}{75\left[\left(s+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}\right]}+\frac{1}{5s^2}-\frac{3}{25s}+\frac{1}{3\left(s+1\right)}\\
&= -\frac{91}{75}\frac{s+\dfrac{3}{2}}{\left(s+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}}-\frac{23\sqrt{11}\dfrac{\sqrt{11}}{2}}{75\left[\left(s+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}\right]}+\frac{1}{5s^2}-\frac{3}{25s}+\frac{1}{3\left(s+1\right)}
\end{aligned}$$

Que a su vez permite obtener:

$$y=-\frac{91}{75}e^{-3t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{11}t}{2}\right)-\frac{23\sqrt{11}}{75}e^{-3t/2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{11}t}{2}\right)+\frac{t}{5}-\frac{3}{25}+\frac{1}{3}e^{-t}.$$

6.4. Tarea

1. Dadas las siguientes ecuaciones diferenciales y sus correspondientes campos direccionales, determine el comportamiento cuando $t\to 0$.

2. Considere la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx}=y-x$.

a) ¿Cuál es la pendiente del gráfico de la solución en $(0,1)$, en el punto $(1,1)$, en el punto $(3,0)$, en el punto $(0,0)$ y en el punto (x_0, y_0)?

b) Encontrar todos los puntos donde las tangentes a las curvas solución son horizontales.

c) Describa la naturaleza de los puntos críticos.

3. Una cierta droga empieza a administrarse intravenosamente a un paciente en el hospital. El fluido conteniendo 5 mg/cm^3 de droga entra a la sangre del paciente a una tasa de 100 cm^3/h. La droga es absorbida por los tejidos del cuerpo o de otra manera llega al torrente sanguíneo a una tasa proporcional a la cantidad presente, con una tasa constante de $0,4$ cm^3/h.

   a) Asumiendo que la droga es siempre distribuida uniformemente a través de la sangre, escriba una ecuación diferencial para la cantidad de droga que está presente en la sangre en cualquier tiempo.

   b) ¿Qué cantidad de fármaco está presente en el torrente sanguíneo después de un largo tiempo?

4. Aparee el campo direccional a la ecuación diferencial.

   a) $y' = y - 2$

   b) $y' = 2 - y$

   c) $y' = 2 + y$

   d) $y' = -2 - y$

   e) $y' = (y-2)^2$

   f) $y' = (y+2)^2$

5. El campo direccional para la ecuación diferencial $x'(t) = \dfrac{2t\ x(t)}{1 + x(t)}$ es dado abajo. Construya el gráfico de las soluciones al problema de valor inicial dado.

   a) $x(0) = 1$

   b) $x(0) = -2$

   c) $x(0) = -0,5$

6. La tasa instantánea de cambio de la temperatura T del café en el tiempo t es proporcionala la diferencia entre la temperatura M del aire y la temperatura T en el tiempo t.

   a) Encontrar el modelo matemático para el problema.

   b) Dado que la temperatura de la habitación es $75°F$ y $k = 0,08$, encontrar la solución de la ecuación diferencial.

   c) La temperatura inicial del café es $200°F$. Encontrar la solución a este problema.

7. Su piscina que contiene 60000 galones de agua ha sido contaminada por 5 kg de un colorante no tóxico que deja la piel de un nadador un verde poco atractivo. El sistema de filtrado de la piscina puede tomar el agua de la piscina, quitar el tinte, y devolver el agua a la piscina a una velocidad de flujo de 200 gal/min.

   a) Escriba abajo el problema de valor inicial para el proceso de filtrado; sea $q(t)$ la cantidad de colorante en cualquier tiempo t.

   b) Resuelva el problema.

   c) Has invitado a varias docenas de amigos a una fiesta en la piscina que está programado para comenzar en 4 horas. También se ha determinado que el efecto del tinte es imperceptible si su concentración es inferior a $0,02$ $gramos/galón$. ¿Es el sistema de filtrado capaz de reducir la concentración de colorante a este nivel dentro de las 4 horas?

d) Encontrar el tiempo T en el cual la concentración de colorante primero alcanza el valor $0,02$ *gramos/galón*.

e) Encontrar la tasa de flujo que es suficiente para lograr la concentración de $0,02$ g/gal dentro de 4 horas.

8. Dada la siguiente ecuación diferencial, clasifique cada una como una ecuación diferencial ordinaria, ecuación diferencial parcial, dar el orden. Si la ecuación es una ecuación diferencial ordinaria, diga si la ecuación es lineal o no lineal.

   a) $\dfrac{dy}{dx} = 3y + x^2$.

   b) $8\dfrac{d^4y}{dx^4} = x\,(x-1)$.

   c) $\dfrac{\partial N}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 N}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial N}{\partial r} + kN$.

   d) $\dfrac{dx}{dt} = x^2 - t$.

   e) $\left(1+y^2\right)y'' + ty' + y = e^t$.

   f) $\dfrac{dy}{dx} + xy^2 = 0$.

9. Mostrar que $f(t) = \left(x^2 + Ax + B\right)e^{-x}$ es solución de $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$ para todos los números reales A y B. Encontrar la solución que satisface la condición inicial $y(0) = 3$ y $y'(0) = 1$.

10. Determine si la función $y(t) = \dfrac{t}{3} + e^{-t}$ es solución de la ecuación diferencial $y^{(4)} + 4y^{(3)} + 3y = t$.

11. Verifique que las funciones dadas son soluciones de la ecuación diferencial.

    a) $2t^2y'' + 3ty' - y = 0,\ t > 0,\ \ y_1(t) = \sqrt{t},\ \ y_2(t) = t^{-1}$.

    b) $t^2y'' + 5ty' + 4y = 0,\ t > 0,\ \ y_1(t) = t^{-2},\ \ y_2(t) = t^{-2}\ln t$.

12. ¿Para qué valores de r la función $(x-1)\,e^{-rx}$ es solución de la ecuación diferencial $y'' - 6y' + 9y = 0$?

13. Determine para qué valores de r la función t^r es solución de la ecuación diferencial $t^2y'' - 4ty' + 4y = 0$.

14. Determine los valores de r para los cuales la ecuación diferencial $y''' - 3y'' + 2y' = 0$ tiene soluciones de la forma $y = e^{rt}$.

15. Considere la ecuación diferencial $y' = x + \operatorname{sen} y$.

    a) Una curva solución pasa por el punto $\left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$. ¿Cuál es la pendiente de la solución en este punto?

    b) Argumenta que toda curva solución es creciente para $x > 1$.

    c) ¿Cuál es el límite de la solución cuando x tiende a infinito?

6.5. Tarea

1. Encontrar la solución al problema de valor inicial.

   a) $y'' + 4y' + 13y = 0,\quad y(0) = 4,\quad y'(0) = 0.$ Respuesta: $y = 4e^{-2t}\cos 3t + \dfrac{8}{3}e^{-2t}\operatorname{sen} 3t$.

b) $y'' + 12y' + 36y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = -1.$ Respuesta: $y = e^6 e^{-6t} - e^6 e^{-6t} t.$

2. Use el método de reducción del orden para encontrar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales.

a) $t^2 y'' + 4ty' + 2y = 0, \quad y_1(t) = \dfrac{1}{t}.$

Solución: Encontremos y en la forma $y = \dfrac{v(t)}{t}$. Se sigue que:

$$y'(t) = \frac{v'(t)}{t} - \frac{v(t)}{t^2}; \qquad y''(t) = \frac{v''(t)}{t} - \frac{2v'(t)}{t^2} + \frac{2v(t)}{t^3}\ .$$

Luego

$$t^2 y'' + 4ty' + 2y = 0 \Longleftrightarrow tv''(t) - 2v'(t) + \frac{2v(t)}{t} + 4v'(t) - \frac{4v(t)}{t} + \frac{2v(t)}{t} \Leftrightarrow tv''(t) + 2v'(t) = 0.$$

Si $Y = v'(t)$, $tY' + 2Y = 0$, $Y' + \dfrac{2}{t} Y = 0.$

Factor integrante: t^2.

$$t^2 Y' + 2tY = 0 \Longleftrightarrow \frac{d\left(t^2 Y\right)}{dt} = 0 \Longleftrightarrow t^2 Y = C$$

Y como $v'(t) = Y = \dfrac{C}{t^2}$, se sigue que $v(t) = -\dfrac{C}{t} + D$. Finalmente

$$y = \left(-\frac{C}{t} + D\right)\frac{1}{t} = -\frac{C}{t^2} + \frac{D}{t}.$$

b) $xy'' + (1 - 2x)\, y' + (x - 1)\, y = 0, \quad y_1(x) = e^x.$

Solución: Encontremos y en la forma $y = v(x)e^x$. Se sigue que:

$$y'(x) = v'(t)e^x + v(x)e^x; \qquad y''(x) = v''(t)e^x + 2v'(x)e^x + v'(t)e^x + v(x)e^x.$$

Luego, sustituyendo en $xy'' + (1 - 2x)\, y' + (x - 1)\, y = 0$ se sigue que

$$xv''(t)e^x + 2xv'(x)e^x + xv(x)e^x + (1 - 2x)\left(v'(t)e^x + v(x)e^x\right) + (x - 1)\, v(x)e^x = 0$$

De donde

$$xv''(t)e^x + v'(x)e^x = 0 \Longrightarrow\ xv''(t) + v'(x) = 0, \text{ pues } e^x \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Si hacemos $Y = v'(x)$, se tiene $xY' + Y = 0$, de donde $Y' + \dfrac{1}{x} Y = 0$. Multiplicando por el factor integrante que es x, se sigue que:

$$xY' + Y = 0 \Longleftrightarrow \frac{d}{dx}(xY) = 0 \Longrightarrow xY = C \Longrightarrow v'(x) = Y = \frac{C}{x} \Longrightarrow v(x) = C \ln x + D.$$

Finalmente, la solución es $y = (C \ln x + D)\, e^x$.

3. Dadas y_1 y y_2 dos soluciones de la ecuación diferencial $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$.

   a) Mostrar que el wronskiano $W(x) = W[y_1(x), y_2(x)]$ satisface la ecuación diferencial $W'(x) + p(x)W(x) = 0$.
   Solución:
   $$W(x) = W[y_1(x), y_2(x)] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x).$$
   Por otra parte,
   $$\begin{aligned} W'(x) + p(x)W(x) &= y_1(x)y_2''(x) + y_1'(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2'(x) - y_1''(x)y_2(x) \\ &\quad + p(x)y_1(x)y_2'(x) - p(x)y_1'(x)y_2(x) \\ &= y_1(x)y_2''(x) - y_1''(x)y_2(x) + p(x)y_1(x)y_2'(x) - p(x)y_1'(x)y_2(x) \\ &= y_1(x)\left[y_2''(x) + p(x)y_2'(x)\right] - y_2(x)\left[y_1''(x) + p(x)y_1'(x)\right] \end{aligned}$$
   Como $y_1(x)$ es solución de la ecuación diferencial, $y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0$, de donde $y_1'' + p(x)y_1' = -q(x)y_1$. Igualmente, para y_2 se tiene $y_2'' + p(x)y_2' = -q(x)y_2$, con lo cual,
   $$\begin{aligned} W'(x) + p(x)W(x) &= y_1(x)\left[y_2''(x) + p(x)y_2'(x)\right] - y_2(x)\left[y_1''(x) + p(x)y_1'(x)\right] \\ &= y_1(x)\left[-q(x)y_2(x)\right] - y_2(x)\left[-q(x)y_1(x)\right] \\ &= -y_1(x)y_2(x)q(x) + y_2(x)q(x)y_1(x) = 0. \end{aligned}$$

   b) Resuelva la ecuación diferencial de la parte a) y pruebe el teorema de Abel.
   Solución: W es solución de la ecuación diferencial lineal de primer orden: $W'(x)+p(x)W(x) = 0$, cuyo factor integrante es $\mu = e^{\int p(x)dx}$. Se sigue entonces que
   $$\frac{d}{dx}(\mu W) = 0 \Longrightarrow \mu W = C \Longrightarrow W = \frac{C}{\mu} = \frac{C}{e^{\int p(x)dx}} = Ce^{-\int p(x)dx}.$$

4. Considere la ecuación diferencial $y'' + 5y' - 6y = 0$. Mostrar que $S = \left\{y_1 = e^x, \quad y_2 = e^x - e^{-6x}\right\}$ es un conjunto fundamental de soluciones.
   Solución:
   Veamos que $y_1 = e^x$ es solución:
   $$y_1 = e^x \Longrightarrow y_1'(x) = e^x \Longrightarrow y_1''(x) = e^x \Longrightarrow y_1'' + 5y_1' - 6y_1 = e^x + 5e^x - 6e^x = 0.$$
   Es decir $y_1 = e^x$ es solución.
   Veamos que $y_2(x) = e^x - e^{-6x}$ es solución:
   $$\begin{aligned} y_2(x) &= e^x - e^{-6x} \Longrightarrow y_2'(x) = e^x + 6e^{-6x} \Longrightarrow y_2''(x) = e^x - 36e^{-6x} \\ &\Longrightarrow y_2'' + 5y_2' - 6y_2 = e^x - 36e^{-6x} + 5e^x + 30e^{-6x} - 6e^x + 6e^{-6x} = 0. \end{aligned}$$
   Es decir $y_2 = e^x - e^{-6x}$ es solución.

5. por otra parte, S es un conjunto fudamental de soluciones si $W(y_1(x), y_2(x)) \neq 0$. En efecto,
   $$W(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} e^x & e^x - e^{-6x} \\ e^x & e^x + 6e^{-6x} \end{vmatrix} = e^{2x} + 6e^{-5x} - e^{2x} + e^{-5x} = 7e^{-5x} \neq 0.$$
   Por tanto S es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial.

6. Mostrar que $y(t) = 0$ y $y(t) = \dfrac{t^4}{16}$ son soluciones del problema de valor inicial $y' = t\, y^{1/2}$, $y(0) = 0$. Explique por qué este hecho no contradice el teorema de xistencia y unicidad.
   Solución: Si $y(t) = 0$ se tiene que $y(0) = 0$, $y'(t) = 0$ y $t\, y^{1/2}(t) = 0$, por tanto $y(t) = 0$ es solución.
   Si $y(t) = \dfrac{t^4}{16}$ se tiene que $y(0) = 0$, $y'(t) = \dfrac{t^3}{4}$ y $t\, y^{1/2}(t) = t\left(\dfrac{t^2}{4}\right) = \dfrac{t^3}{4}$, por tanto $y(t) = \dfrac{t^4}{16}$ es solución.
   $y' = f(t, y) = t\, y^{1/2}(t)$ es continua en $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$. $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{t}{2y^{1/2}}$ no es continua para $y = 0$, por lo tanto el teorema de existencia y unicidad no se aplica. Tener dos soluciones al mismo problema de valor inicial es posible.

6.6. Tarea

1. Encontrar la solución general de la ecuación diferencial dada.

   a) $6y'' + y' - 2y = 0$. Respuesta: $y = C_1 e^{t/2} + C_2 e^{-2t/3}$.

   b) $y'' + 6y' + 10y = 0$. Respuesta: $y = C_1 e^{-3t} \cos t + C_2 e^{-3t} \operatorname{sen} t$.

2. Encontrar una ecuación diferencial cuya solución general es $y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t}$. Respuesta: $y'' + y' - 6y = 0$.

3. Resolver cada problema de valor inicial.

   a) $y'' + y' = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$. Respuesta: $y = 3 - e^{-t}$.

   b) $3y'' + 10y' + 3y = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 1$. Respuesta: $y = -\dfrac{7}{8} e^{-3t} + \dfrac{39}{8} e^{-t/3}$.

      1) Determine además el punto en el cual la solución es máxima. Respuesta: La solución alcanza un máximo para $t = \dfrac{3}{8} \ln \left(\dfrac{21}{13} \right)$.

      2) Encontrar el punto donde la solución se anula. Respuesta: $t = \dfrac{3}{8} \ln \left(\dfrac{7}{39} \right)$.

4. Considere el problema de valor inicial $y'' + 2y' + 5y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = a$. Respuesta: $y = 2e^{-t}\cos 2t + \left(\dfrac{a+2}{2}\right)e^{-t}\operatorname{sen} 2t$.

   a) Encontrar a tal que $y = 0$ cuando $t = 1$. Respuesta: $a = -4\cot 2 - 2$.

   b) Encontrar, como una función de a, el más pequeño valor positivo de t para el cual $y = 0$. Respuesta: $t = \frac{1}{2}\arctan\left[-\left(\dfrac{a+2}{4}\right)\right]$.

5. Para ver el efecto de cambio del parámetro b en el problema de valor inicial $y'' + by' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Resuelva el problema para $b = 5$, $b = 4$ y $b = 2$ y construya las soluciones.

6.7. Tarea

1. Determine el mayor intervalo en el cual el problema de valor inicial $\left(t^2 - 4\right)y' + (\tan t)\,y = e^t$, $y(\pi) = -1$, es seguro que existe.

   Solución:

$$\left(t^2 - 4\right)y' + (\tan t)\,y = e^t \iff y'(t) + \frac{\tan t}{t^2 - 4}y(t) = \frac{e^t}{t^2 - 4}; \quad y(\pi) = -1.$$

   $\dfrac{\tan t}{t^2 - 4}$ y $\dfrac{e^t}{t^2 - 4}$ son continuas en $\left]2, \dfrac{3\pi}{2}\right[$, $\dfrac{\tan t}{t^2 - 4}$ no es continua en 2, y en $\dfrac{3\pi}{2}$, por lo tanto, por el teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales lineales, la solución existe y es única en el intervalo abierto $\left]2, \dfrac{3\pi}{2}\right[$.

2. Resolver el problema de valor inicial $2y'(t) = \dfrac{3t^2}{y\left(1 + t^3\right)}$, con $y(0) = y_0$. Determinar además cómo el intervalo en el que existe la solución depende del valor y_0.

   Solución: Se trata de una ecuación diferencial a variables separables:

$$2ydy = \frac{3t^2}{1 + t^3}dt \Longrightarrow y^2 = \ln\left(1 + t^3\right) + C.$$

De $y_0 = y(0)$ se sigue que $C = y_0^2$.
Si $y_0 \geq 0$ entonces $y = \sqrt{\ln(1+t^3) + y_0^2}$. Determinemos su dominio:

$$\ln\left(1+t^3\right) + y_0^2 > 0 \Longrightarrow 1 + t^3 > e^{-y_0^2} \Longrightarrow t > \left(e^{-y_0^2} - 1\right)^{1/3} = \sqrt[3]{e^{-y_0^2} - 1}.$$

Si $y_0 < 0$ entonces $y = -\sqrt{\ln(1+t^3) + y_0^2}$. Determinemos su dominio:

$$\ln\left(1+t^3\right) + y_0^2 > 0 \Longrightarrow 1 + t^3 > e^{-y_0^2} \Longrightarrow t > \sqrt[3]{e^{-y_0^2} - 1}.$$

3. Dada la ecuación diferencial $y'(x) = f(y) = y\left(9 - y^2\right)$.

   a) Construir el gráfico de f con respecto a y.

   b) Encontrar las soluciones de equilibrio.
   Solución:
   $$f(y) = 0 \Longrightarrow y = 0 \ \text{ o } \ y = 3 \ \text{ o } \ y = -3.$$

   c) Determinar dónde las soluciones son crecientes y dónde son decrecientes.
   Solución: y es creciente cuando $y' = f(y) > 0$; es decir cuando $y < -3$ o $0 < y < 3$.
   y es decreciente cuando $y' = f(y) < 0$; es decir cuando $y > 3$ o cuando $-3 < y < 0$.

   d) Construya la línea de fase y clasifique las soluciones de equilibrio como asintóticamente estable, inestable o semiestable.
   Solución:
   $y = -3$ y $y = 3$ son asintóticamente estables. $y = 0$ es inestable.

   e) Determine dónde el gráfico de y versus t es cóncavo hacia arriba y dónde es cóncavo hacia abajo.
   Solución:
   y es cóncava hacia arriba si $f''(t) > 0$. Como $y''(t) = \dfrac{d}{dt}f(y(t)) = f'(t)y'(t) = f'(y)f(y)$ y $f'(y) = 9 - 3y^2 = 3\left(3 - y^2\right)$ y $y'' = 3y\left(3-y\right)\left(3+y\right)\left(\sqrt{3}-y\right)\left(\sqrt{3}+y\right)$, se sigue que y es cóncava hacia arriba cuando $y \in \left]-3, -\sqrt{3}\right[\cup \left]0, \sqrt{3}\right[\cup \left]3, +\infty\right[$. y es cóncava hacia abajo cuando $y \in \left]-\infty, -3\right[\cup \left]-\sqrt{3}, 0\right[\cup \left]\sqrt{3}, 3\right[$.

   f) Grafique algunas soluciones.

4. Determine si la ecuación diferencial dada es exacta y en caso afirmativo encontrar la solución.

   a) $(1 - y \operatorname{sen} x)\, dx + \cos x dy = 0$. Respuesta: Es exacta. Solución general $x + y\cos x = C$.
   Solución: Como $\dfrac{\partial M}{\partial y} = -\operatorname{sen} x = \dfrac{\partial N}{\partial x}$, entonces la ecuación diferencial es exacta. Existe entonces una función $F(x,y)$ tal que $\dfrac{\partial F}{\partial x} = M = 1 - y\operatorname{sen} x$ y $\dfrac{\partial F}{\partial y} = N = \cos x$. De $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 1 - y\operatorname{sen} x$ se sigue que $F(x,y) = x + y\cos x + g(y)$. Como $\dfrac{\partial F}{\partial y} = \cos x + g'(y) = \cos x$, se deduce que $g'(y) = 0$ y en consecuencia $g(y) = K$. Es decir que $F(x,y) = x + y\cos x + K$. La solución general es $x + y\cos x = C$.

b) $2xy^2 + 4x^3 + 2x^2y\dfrac{dy}{dx} = 0$. Respuesta: Es exacta. Solución general $x^2y^2 + x^4 = C$.

Solución: En este caso $M(x,y) = 2xy^2 + 4x^3$ y $N(x,y) = 2x^2y$. Luego $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 4xy = \dfrac{\partial N}{\partial x}$, entonces la ecuación diferencial es exacta. Existe entonces una función $F(x,y)$ tal que $\dfrac{\partial F}{\partial x} = M = 2xy^2 + 4x^3$ y $\dfrac{\partial F}{\partial y} = N = 2x^2y$. De $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 2xy^2 + 4x^3$ se sigue que $F(x,y) = x^2y^2 + x^4 + g(y)$. Como $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 2x^2y + g'(y) = 2x^2y$, se deduce que $g'(y) = 0$ y en consecuencia $g(y) = K$. Es decir que $F(x,y) = x^2y^2 + x^4 + K$. La solución general es $x^2y^2 + x^4 = C$.

5. Considere la ecuación diferencial $\left(y^2 - xy\right)dx + x^2dy = 0$.

a) Mostrar que la ecuación diferencial no es exacta.

Solución: En este caso $M(x,y) = y^2 - xy$ y $N(x,y) = x^2$. Luego $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 2y - x \neq \dfrac{\partial N}{\partial x} = 2x$, entonces la ecuación diferencial no es exacta.

b) Multiplicar la ecuación por el factor integrante $\mu(x,y) = \dfrac{1}{xy^2}$ y resolver la ecuación diferencial exacta que se obtiene.

Solución: Multiplicando los dos miembros de la ecuación diferencial $\left(y^2 - xy\right)dx + x^2dy = 0$ por el factor integrante $\dfrac{1}{xy^2}$, se obtiene la ecuación diferencial $\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right)dx + \dfrac{x}{y^2}dy = 0$. Dicha ecuación diferencial es exacta, en efecto, $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right) = \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{y^2}\right) = \dfrac{\partial N}{\partial x}$. Existe entonces una función $F(x,y)$ tal que $\dfrac{\partial F}{\partial x} = M = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}$ y $\dfrac{\partial F}{\partial y} = N = \dfrac{x}{y^2}$. De $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}$ se sigue que $F(x,y) = \ln x - \dfrac{x}{y} + g(y)$. Como $\dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{x}{y^2} + g'(y) = \dfrac{x}{y^2}$, se deduce que $g'(y) = 0$ y en consecuencia $g(y) = K$. Es decir que $F(x,y) = \ln x - \dfrac{x}{y} + K$. La solución general es $\ln x - \dfrac{x}{y} = C$.

6.8. Tarea

1. Resuelva la ecuación diferencial y encuentre, si es posible, una solución explícita.

a) $y' = \dfrac{\sec^2 y}{1+x^2}$

Solución: Es una ecuación diferencial no lineal y a variables separables.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\sec^2 y}{1+x^2} \Longrightarrow \frac{y'}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+x^2} \Longrightarrow \frac{dy}{\sec^2 y} = \frac{dx}{1+x^2} \Longrightarrow \cos^2 y\ dy = \frac{dx}{1+x^2} \\ &\Longrightarrow \frac{1+\cos 2y}{2}\ dy = \frac{dx}{1+x^2} \Longrightarrow \frac{y}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2y}{4} = \arctan x + C. \end{aligned}$$

En este caso no es posible obtener una solución en forma explícita.

b) $(1+x)\,y' + y = \cos x$.

Solución: Es una ecuación diferencial lineal, no es a variables separables. Se puede buscar el factor integrante. Pero como el primer miembro de la ecuación diferencial es la derivada del producto $(1+x)\,y$ se sigue que

$$(1+x)\,y' + y = \cos x \Longleftrightarrow \frac{d}{dx}\left[(1+x)\,y\right] = \cos x \Longrightarrow (1+x)\,y = \operatorname{sen} x + C,$$

de donde se obtiene como solución general: $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1+x} + \dfrac{C}{1+x}$.

c) $y' = ye^x - 2e^x + y - 2$.

Solución: Es una ecuación diferencial lineal y a variables separables.

$$\begin{aligned} y' &= ye^x - 2e^x + y - 2 \Longrightarrow y' = (y-2)(e^x+1) \Longrightarrow \frac{dy}{y-2} = (e^x+1)\,dx \\ &\Longrightarrow \ln(y-2) = e^x + x + C \Longrightarrow y - 2 = e^{(e^x+x+C)} \Longrightarrow y - 2 = e^{(e^x+x)}e^C \\ &\Longrightarrow y - 2 = Ke^{e^x+x} \Longrightarrow y = 2 + Ke^{e^x+x} = 2 + e^{e^x+x+C}. \end{aligned}$$

2. Resuelva el problema de valor inicial. Encontra, si es posible, una solución en forma explícita. Indicar además el intervalo de existencia de la solución.

   a) $y' = \dfrac{x}{2y-6}$, $y(-1) = 0$. Respuesta: Solución general: $y^2 - 6y = \dfrac{x^2}{2} + C$. Solución problema valor inicial: $y = 3 - \sqrt{\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{17}{2}}$. Intervalo de existencia: $\mathbb{R}$, pues y existe para todo x ya que $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{17}{2} > 0$.

   b) $y' = \dfrac{y^2+1}{y}$, $y(1) = 2$. Respuesta: $y = 2xe^{2x} - 2e^{2x} + 5e^x$. Dominio: $\mathbb{R}$.

   c) $\operatorname{sen} x \dfrac{dy}{dx} + y\cos x = 2x \operatorname{sen} x$, $y(\pi/2) = 2$. Respuesta: Note que $\operatorname{sen} x \dfrac{dy}{dx} + y\cos x = \dfrac{d}{dx}(y \operatorname{sen} x)$.

3. Un tanque con capacidad de 100 galones contiene inicialmente 20 galones de agua pura. Una solución de agua salada conteniendo $0,5$ libras de sal por galón de agua empieza a entrar en el tanque a una tasa de 4 galones por minuto. Al mismo tiempo, un drenaje se abre en el fondo del tanque que permite que la mezcla de agua salada salga del tanque a una tasa de 2 galones por minuto.

   a) Encontrar el volumen $V(t)$, en galones, de la mezcla de agua sal en cualquier tiempo (en minutos) antes de que el tanque esté lleno. ¿En qué momento se iniciará el desborde del tanque?

   Solución: $V(t) = 20 + 2t$. Rebose del depósito se tiene cuando $V(t) = 100 = 20 + 2t$, de donde $t = 40$ minutos.

   b) sea $A(t)$ la cantidad de sal, en libras, en el tanque. Encontrar una ecuación diferencial satisfecha por $A(t)$ antes de llenar el tanque. Establezca una condición inicial.

   Solución:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= A_{ingresa} - A_{salida} \\ &= 4\,(0,5) - 2\,(\text{concentración}) \\ &= 2 - \frac{2A(t)}{20+2t}; \qquad A(0) = 0. \end{aligned}$$

4. Dada la ecuación diferencial $y' = -\dfrac{2x}{1+y}$.

   a) Graficar el campo direccional y dibujar algunas curvas solución.

   b) Encontrar una solución explícita para el problema de valor inicial $y(1) = -2$. ¿Cuál es el dominio de la solución? Respuesta: Para el dominio, y existe si $3 - 2x^2 > 0$, es decir, si $-\sqrt{\dfrac{3}{2}} < x < \sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

5. Considere el sistema $Y' = AY$, donde $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

   a) Describa el procedimiento que usted sigue para encontrar un conjunto fundamental de soluciones para sistemas de este tipo.

b) Encontrar un conjunto fundamental de soluciones. Asegúrese de señalar por qué forman un conjunto fundamental de soluciones.

6. Considere la ecuación diferencial $y'' + 5y' + 4y = 0$.

a) Encontrar un conjunto fundamental de soluciones.

Solución. El polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 4 = (\lambda + 1)(\lambda + 4)$. Las raíces características son -1 y -4, por lo tanto las funciones $y_1(t) = e^{-t}$ y $y_2(t) = e^{-4t}$ forman un conjunto fundamental de soluciones.

b) ¿Cuál es la solución general?

Solución: La solución general es $y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$.

c) Encontrar la solución que satisface $y(0) = 1$ y $y'(0) = 2$.

Solución: Necesitamos encontrar C_1 y C_2 tales que

$$\begin{aligned} 1 &= y(0) = C_1 + C_2 \\ 2 &= y'(0) = -C_1 - 4C_2 \end{aligned}$$

Resolviendo estas ecuaciones se obtiene que $C_1 = 2$ y $C_2 = -1$. La solución es $y(t) = 2e^{-t} - e^{-4t}$.

7. Considere la ecuación diferencial $x' = (1 + x^2)\cos t$.

a) ¿Cuál es la solución general?

Solución: La ecuación es a variables separables. Separando variables e integrando se tiene:

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \int \cos t\ dt \Longrightarrow \arctan x = -\operatorname{sen} t + C.$$

De donde $x(t) = \tan(C - \operatorname{sen} t)$.

b) Encontrar la solución que satisface $x(0) = 0$.

Solución: Tenemos $0 = x(0) = \tan C$, esto es $C = 0$, y la solución es $x(t) = \tan(-\operatorname{sen} t) = -\tan(\operatorname{sen} t)$.

8. Considere el sistema

$$\begin{cases} x' = y + (1 - x^2 - y^2) \\ y' = -x + (1 - x^2 - y^2) \end{cases}$$

a) Mostrar que el par $x(t) = \operatorname{sen} t$, $y(t) = \cos t$ es una solución.

Solución: Tenemos $x'(t) = \cos t$ y $y + (1 - x^2 - y^2) = \cos t + (1 - \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t) = \cos t$. Es decir la primera ecuación es satisfecha.. Para la segunda ecuación: $y' = -\operatorname{sen} t$ y $-x + (1 - x^2 - y^2) = -\operatorname{sen} t + (1 - \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t) = -\operatorname{sen} t$. Es decir también satisface la segunda ecuación.

b) ¿Qué puede usted decir acerca del tipo de punto de equilibrio en el origen $(0, 0)$?

Solución: El jacobiano del sistema es

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} -2x & 1 - 2y \\ -1 - 2x & -2y \end{pmatrix}.$$

En el origen tenemos

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz tiene traza nula ($T = 0$) y determinante igual a 1 ($D = 1$). Consecuentemente el origen es un centro para el sistema linealizado. Puesto que el centro es no genérico, no podemos concluir nada acerca del punto de equilibrio del sistema no lineal.

c) Describa qué ocurre con todas las soluciones que comienzan desde el origen- (Sugerencia: considerar la función $r(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$)

Solución: Tenemos

$$\begin{aligned} rr' &= xx' + yy' \\ &= x\left[y + (1 - x^2 - y^2)\right] + y\left[-x + (1 - x^2 - y^2)\right] \\ &= (x + y)(1 - r^2). \end{aligned}$$

Sin embargo, esto no ayuda mucho más allá de confirmar que $r = 1$ es una curva de solución.

9. Considere dos especies con poblaciones $x(t)$ y $y(t)$ que viven en la misma área, e interactúan en la siguiente forma:

- En ausencia de la otra población, la población x prosperaría sujeto a recursos limitados.
- En ausencia de la otra población, población y se extinguiría.
- Las dos poblaciones tienen una relación simbiótica, lo que significa que cada uno se beneficia de la presencia de la otra. Derive una ecuación diferencial que modele la interacción de estas dos especies. No es necesario resolver las ecuaciones.

Solución: Esta es una instancia de dos especies que interactúan. Lleva a las ecuaciones

$$\begin{cases} x' = (a_1 - b_1 x + c_1 y)y \\ y' = (-a_2 + c_2 x)y \end{cases}$$

donde todas las constantes son positivas.

10. Considere el sistema

$$\begin{cases} x' = y - x^2 \\ y' = x + y \end{cases}$$

a) Encontrar las nulclinales y dibujarlas, indicando claramente cuál es la x- nulclinal y cuál es la y-nulclinal.

Solución: La nulclinal x es la parábola $y = x^2$. Es la curva en trazo cortado en la siguiente figura. La nulclinal y es la recta definida por $x + y = 0$, y está trazada con línea continua en la figura.

b) Encontrar todos los puntos de equilibrio.

Solución: Los puntos de equilibrio son los puntos donde se cortan las nulclinales. Ellas lo hacen en dos, el origen $(0, 0)$ y en $(-1, 1)$.

c) Calcule la matriz jacobiana.

Solución: La matriz jacobiana es

$$J = \begin{pmatrix} -2x & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) Clasifique los puntos de equilibrio.

Solución: En el origen el jacobiano es

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Puesto que el determinante de es -1, el origen es un punto silla. En $(-1, 1)$ el jacobiano es

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta vez J tiene traza $T = 3$, y el determinante $D = 1$. El discriminante es $T^2 - 4D = 5$. Puesto que es positivo, el punto de equilibrio es un nodo fuente.

e) Trazar flechas sobre las nulclinales indicando la dirección de las curvas solución.
Solución: Las flechas son mostradas en la figura precedente.

f) Las nulclinales dividen al plano en varias regiones. ¿Cuáles de estas regiones son invariantes?
Solución: Hay dos regiones invariantes. Ellas son etiquetadas S_1 y S_2 en la figura.

11. Considere la siguiente ecuación para un oscilador armónico amortiguado **(forced)**

$$y'' + 4y' + 8y = 20\cos 2t.$$

a) ¿Cuál es la ecuación diferencial homogénea asociada?
Solución: $y'' + 4y' + 8y = 0$.

b) Encontrar la solución general para la ecuación diferencial homogénea .
Solución: El polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 8$. Las raíces características son

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2}(-4 \pm 4i) \\ &= -2 \pm 2i. \end{aligned}$$

Por lo tanto la solución general es $y_h(t) = e^{-2t}[C_1 \cos 2t + C_2 \operatorname{sen} 2t]$.

c) Encontrar una solución particular de la ecuación diferencial no homogénea.
Solución: Busquemos una solución de la forma $z(t) = ae^{2it}$ de la ecuación $z''+4z'+8z = 20e^{2it}$ Sustituyendo, se tiene: $z'' + 4z' + 8z = (4 + 8i)ae^{2it}$. Tenemos una solución si $(4 + 8i)a = 20$. Resolviendo para a tenemos:

$$\begin{aligned} a &= \frac{20}{4+8i} = \frac{5}{1+2i} \\ &= \frac{5}{1+2i}\frac{1-2i}{1-2i} \\ &= \frac{5(1-2i)}{1+4} = 1 - 2i. \end{aligned}$$

Por lo tanto la solución en forma compleja es

$$\begin{aligned} z(t) &= (1-2i)e^{2it} \\ &= (1-2i)[\cos 2t + i \operatorname{sen} 2t] \\ &= [\cos 2t + 2\operatorname{sen} 2t] + i[\operatorname{sen} 2t - 2\cos 2t], \end{aligned}$$

y nuestra solución particular es $y_p(t) = \operatorname{Re}(z(t)) = \cos 2t + 2\operatorname{sen} 2t$.

d) Encontrar la solución general de la ecuación no homogénea.
Solución:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_h(t) + y_p(t) \\ &= e^{-2t}[C_1 \cos 2t + C_2 \operatorname{sen} 2t] + \cos 2t + 2\operatorname{sen} 2t. \end{aligned}$$

e) ¿Cuál es la solución estado estable?
Solución: La solución de estado estable es esa parte de la solución que no se extingue. Es

$$y_p(t) = \cos 2t + 2\operatorname{sen} 2t.$$

f) ¿Cuál es la amplitud de la solución de estado estable?
Solución: La amplitud de $y_p(t) = \cos 2t + 2\operatorname{sen} 2t$ es $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

12. Considere el sistema de ecuaciones $Y' = AY$, donde $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 9 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}$.

a) ¿Cuál es el polinomio característico de A?
Solución: El polinomio característico es

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 9 \\ 0 & -1 & -5-\lambda \end{pmatrix}.$$

Desarrollando el determinante por la primera fila se tiene:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= -(\lambda+1)\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 9 \\ -1 & -5-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -(\lambda+1)\left[(\lambda-1)(\lambda+5)+9\right] \\ &= -(\lambda+1)\left[\lambda^2+4\lambda+4\right] \\ &= -(\lambda+1)(\lambda+2)^2. \end{aligned}$$

b) ¿Cuáles son los valores propios de la matriz A ? ¿Y, cuáles son las multiplicidades algebraicas y geométricas de cada uno de ellos?
Solución: Los valores propios de A son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = -2$. El valor propio λ_1 tiene multiplicidad 1 y por lo tanto multiplicidad geométrica 1 evidentemente El valor propio λ_2 tiene multiplicidad algebraica 2. Para descubrir su multiplicidad geométrica debemos encontrar el espacio nulo de

$$A - \lambda_2 I = A + 2I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Vemos que el espacio nulo está generado por el vector $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, esto es, es de dimensión 1. Por lo tanto la multiplicidad geométrica de λ_2 es 1.

c) Para cada valor propio, encontrar una base del espacio propio.
Solución: En la parte b) encontramos que el espacio propio para λ_2 fue generado por el vector v_2. Para $\lambda_1 = -1$ examinemos el espacio nulo de

$$A - \lambda_1 I = A + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 9 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz es casi en forma escalonada, y se ve facilmente que el espacio nulo es generado por el vector propio $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

d) Encontrar un conjunto fundamental de soluciones para el sistema.
Solución: Primero encontremos una solución correspondiente al valor propio λ_1, y los dos correspondientes a λ_2. Para λ_1 podemos usar el vector propio v_1, y dar la solución

$$Y_1(t) = e^{tA}v_1 = e^{\lambda_1 t}v_1 = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Para λ_2 damos una solución de la forma del vector propio v_2,

$$Y_2(t) = e^{tA}v_2 = e^{\lambda_2 t}v_2 = e^{-2t}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar una segunda solución debemos buscar un vector propio generalizado. Este debe ser un vector en el espacio nulo de

$$(A - \lambda_2 I)^2 = (A + 2I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El espacio nulo tiene la base $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Necesitamos solamente uno de estos que es linealmente independiente de v_2. Escojamos $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Puesto que $(A - \lambda_2 I)^2 v_3 = \vec{0}$, la solución es

$$\begin{aligned} Y_3(t) &= e^{tA} v_3 \\ &= e^{\lambda_2 t}\left[v_3 + t(A - \lambda_2 I)v_3\right] \\ &= e^{-2t}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \\ &= e^{-2t}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}\right] \\ &= e^{-2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 9t \\ 1-3t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

e) Encontrar la solución que satisface la condición inicial $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Solución: Necesitamos encontrar las constantes C_1, C_2, y C_3 tales que $Y = C_1Y_1 + C_2Y_2 + C_3Y_3$ satisface la condición inicial. Esto significa que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} &= Y(0) = C_1Y_1(0) + C_2Y_2(0) + C_3Y_3(0) \\ &= C_1v_1 + C_2v_2 + C_3v_3, \end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned} C_1 &= 1, \\ -4C_1 - 3C_2 &= 2 \\ C_1 + C_2 + C_3 &= 0. \end{aligned}$$

Se encuentra fácilmente que $C_1 = 1$, $C_2 = -2$ y $C_3 = 1$. Por lo tanto la solución es

$$Y(t) = Y_1(t) - 2Y_2(t) + Y_3(t).$$

f) ¿Qué puede decir acerca del tipo de punto de equilibrio en el origen $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$?

Solución: Puesto que todos los valores propios son negativos, el origen es asintóticamente estable.

13. Encontrar la solución del problema de valor inicial dado por

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{y}{t} + 3t + 2, \quad y(-1) = 2.$$

Encontrar también el intervalo de existencia.

14. Encontrar la solución del siguiente problema de valor inicial y establecer su intervalo de existencia:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2t}{y + yt^2}, \quad y(0) = 2.$$

Capítulo 7

Bibliografía

[1] Brauer, F. y Castillo, C. (2019). *Mathematical models in epidemiology* (2a ed.). Springer Text in Applied Mathematics.

[2] Brauer, F., Castillo, C. y Feng, Z. (2012). *Mathematical Models in population biology and epidemiology* (2a ed.). Springer Text in Applied Mathematics.

[3] Bürger R. (2018). *Introducción al modelamiento en Biomatemática*. Centro de Investigación en Ingeniería Matemática (2a ed.). CI2MA.

[4] Butcher, J. C. (2008). *Numerical methods for ordinary diferential equations* (2a ed.). John Wiley & Sons, Ltd.

[5] Butcher, J. C. (2016). *Numerical methods for ordinary diferential equations* (3a ed.). John Wiley & Sons, Ltd.

[6] Burden, R., Faires, D. y Burden, A. (2017). *Análisis numérico* (10a ed.). Cengage Learning Editores.

[7] Hairer E. y Wanner G. (1993). Solving ordinary diferential equations I. Nonstiff Problems (2a ed.). Springer Series in Computational Mathematics.

[8] Hairer, E., Nörsett S. y Wanner, G. (1996). *Solving ordinary diferential equations II. Stiff Problems.* (3.a ed.) Springer Series in Computational Mathematics.

[9] Kalechman, M. (2009). *Practical Matlab Applications for Engineers* (1a ed.). CRC Press Taylor & Francis Group.

[10] Lara, J. (2005). *Ecuaciones diferenciales ordinarias* (2a ed.). Universidad Central del Ecuador. Editorial Centro de Matemática.

[11] Levin, S., Hallam, T. y Gross, L. (1988). *Applied Mathematical Ecology. Biomathematics* (2a ed.). Springer-Verlag.

[12] Mathews, J. y Fink, K. (2001). *Numerical methods using Matlab* (3a ed.). Prentice Hall.

[13] Nagle, R., Saff, E. y Snider, A. (2005). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera* (4a ed.). Pearson Addison Wesley.

[14] Pérez López, C. (2014). *Matlab Differential Equations* (1a ed.). Apress Academic. Matlab Solutions Series.

[15] Pérez López, C. (2016). *Matlab Control Systems Enginnering* (1a ed.). Apress Academic. Matlab Solutions Series.

[16] Sahoo, P., Demirkaya, O. y Asyali, M., (2009). *Image processing with Matlab Applications in Medicine and Biology* (1a ed.). Taylor & Francis Group.

[17] Zill, D. y Cullen, M. (2012). *Differential equations with modeling applications* (9a ed.). Brooks Cole Publishing Company. An International Thompson Publishing Company.

[18] Zill D., Cullen M. (2006). *Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera* (8a ed.). Cengage Learning Editores. S. A.