



**UNIVERSIDAD POLITÉCNICA SALESIANA  
SEDE CUENCA**

**CARRERA DE TELECOMUNICACIONES**

**DESARROLLO DE UN FILTRO PREDICTOR PARA MODULACIÓN PCM CON  
BASE EN EL ALGORITMO ADAPTATIVO RLS**

Trabajo de titulación previo a la obtención del  
título de Ingeniero en Telecomunicaciones

AUTORES: FERNANDO XAVIER MONTAÑO CARDENAS

WILMER CRISTOBAL ZHINGRI TENEMEA

TUTOR: ING. WALTER HUMBERTO OROZCO TUPACYUPANQUI, PhD.

Cuenca – Ecuador

2023

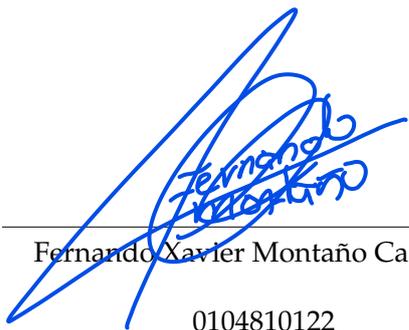
## CERTIFICADO DE RESPONSABILIDAD Y AUTORÍA DEL TRABAJO DE TITULACIÓN

Nosotros, Fernando Xavier Montaña Cardenas con documento de identificación N° 0104810122 y Wilmer Cristobal Zhingri Tenemea con documento de identificación N° 0106789027; manifestamos que:

Somos los autores y responsables del presente trabajo; y, autorizamos a que sin fines de lucro la Universidad Politécnica Salesiana pueda usar, difundir, reproducir o publicar de manera total o parcial el presente trabajo de titulación.

Cuenca, 28 de julio del 2023

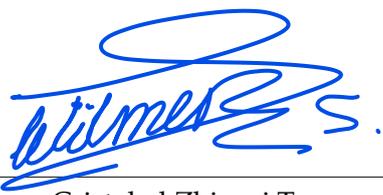
Atentamente,



---

Fernando Xavier Montaña Cardenas

0104810122



---

Wilmer Cristobal Zhingri Tenemea

0106789027

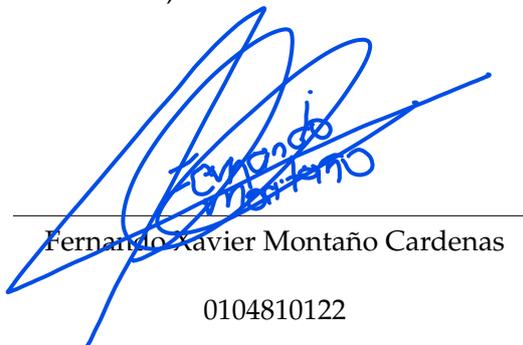
## CERTIFICADO DE CESIÓN DE DERECHOS DE AUTOR DEL TRABAJO DE TITULACIÓN A LA UNIVERSIDAD POLITÉCNICA SALESIANA

Nosotros, Fernando Xavier Montaña Cardenas con documento de identificación N° 0104810122 y Wilmer Cristobal Zhingri Tenemea con documento de identificación N° 0106789027, expresamos nuestra voluntad y por medio del presente documento cedemos a la Universidad Politécnica Salesiana la titularidad sobre los derechos patrimoniales en virtud de que somos autores del Proyecto Técnico: “Desarrollo de un filtro predictor para modulación PCM con base en el algoritmo adaptativo RLS” el cual ha sido desarrollado para optar por el título de: Ingeniero en Telecomunicaciones, en la Universidad Politécnica Salesiana, quedando la Universidad facultada para ejercer plenamente los derechos cedidos anteriormente.

En concordancia con lo manifestado, suscribimos este documento en el momento que hacemos la entrega del trabajo final en formato digital a la Biblioteca de la Universidad Politécnica Salesiana.

Cuenca, 28 de julio del 2023

Atentamente,



\_\_\_\_\_  
Fernando Xavier Montaña Cardenas  
0104810122



\_\_\_\_\_  
Wilmer Cristobal Zhingri Tenemea  
0106789027

## CERTIFICADO DE DIRECCIÓN DEL TRABAJO DE TITULACIÓN

Yo, Walter Humberto Orozco Tupacyupanqui, con documento de identificación N° 0102523974, docente de la Universidad Politécnica Salesiana, declaro que bajo mi tutoría fue desarrollado el trabajo de titulación: DESARROLLO DE UN FILTRO PREDICTOR PARA MODULACIÓN PCM CON BASE EN EL ALGORITMO ADAPTATIVO RLS, realizado por Fernando Xavier Montaña Cardenas con documento de identificación N° 0104810122 y Wilmer Cristobal Zhingri Tenemea con documento de identificación N° 0106789027, obteniendo como resultado final el trabajo de titulación bajo la opción Proyecto Técnico que cumple con todos los requisitos determinados por la Universidad Politécnica Salesiana.

Cuenca, 28 de julio del 2023

Atentamente,



---

Walter Humberto Orozco Tupacyupanqui

0102523974

# AGRADECIMIENTOS

Primeramente, quiero agradecer a Dios por ser mi guía en este camino. A mis padres, Fernando y Janneth, por su sacrificio y dedicación para brindarme una educación de calidad. Sus palabras de aliento y su confianza en mí han sido un pilar fundamental en momentos difíciles; gracias por enseñarme a nunca rendirme y a seguir mis sueños. A mi hermana, María Paz por ser mi confidente y amiga, por acompañarme en este camino y haber estado para mí en todo momento. Agradecer de manera especial a mis abuelitas Martha y Luisa por sus cariño y consejos, siempre serán una parte muy importante en mi vida.

A mi tutor de tesis al Ing. Walter Humberto Orozco Tupacyupanqui, PhD por guiarme en el proceso de elaboración del proyecto de titulación; adicionalmente a la Universidad Politécnica Salesiana por haber sido parte de mi formación personal como profesional.

*Fernando Xavier Montaña Cardenas*

Agradezco a Dios, por ser el guía principal para la culminación de este trabajo y por haber puesto a las personas correctas e idóneas para el apoyo en el caminar académico. Quiero expresar mi profundo agradecimiento a la Universidad Politécnica Salesiana por ser una excelente casa de estudios, así mismo a su cuerpo docente de la carrera de Telecomunicaciones por su capacidad de despejar las dudas que tienen sus estudiantes, de manera especial, quiero agradecer al Dr. Walter Orozco por ser el tutor

de este trabajo de fin de carrera, quien ha sabido compartirnos sus conocimientos para llevar adelante un buen proyecto.

También quiero agradecer a mi mamá por ser mi inspiración y mi motivación en todo momento. Gracias por enseñarme el valor del esfuerzo, la dedicación y la perseverancia. Eres un ejemplo de amor y fortaleza, y te quiero mucho. Espero que este trabajo te haga sentir orgullosa de mí.

Asimismo, quiero agradecer a todos los que de alguna u otra forma han colaborado con este trabajo, ya sea con sus sugerencias, comentarios o apoyo moral. Sin ellos, no habría sido posible realizar este trabajo de titulación.

*Wilmer Cristobal Zhingri Tenemea*

# DEDICATORIAS

## *Dedicatoria de Fernando*

Dedico este trabajo de titulación a mis padres Fernando y Janneth por haberme permitido cumplir uno de mis sueños, por estar conmigo incondicionalmente.

A mi hermana María Paz por sus palabras de aliento para mantenerme enfocado en esta etapa de mi vida. Y finalmente a mis abuelitas Martha y Luisa por su amor y paciencia, por ser la luz que ha iluminado mi camino desde mis primeros pasos.

## *Dedicatoria de Wilmer*

Quiero dedicar este trabajo de titulación a mi madre Luz María, por su amor y apoyo incondicional durante toda mi vida, especialmente en este proceso académico que ha sido muy desafiante y enriquecedor. Gracias por creer en mí y por darme la oportunidad de estudiar y cumplir mis sueños.

De igual manera dedico este proyecto, a mis tíos Rolando y Celia, por ser como mis padres adoptivos y por brindarme su apoyo, cariño y confianza en todo momento. Gracias por estar siempre presentes en mi vida y por guiarme con sus consejos y enseñanzas.

Con el mismo aprecio y cariño quiero ofrendar este trabajo de titulación a mis hermanos Milton Tenemea, Fidel Zhingri, Ana Zhingri y su esposo Jorge Puchi por estar siempre a mi lado, por compartir conmigo sus experiencias y consejos, y por ser un ejemplo de perseverancia y dedicación. Los quiero mucho y los admiro.

Al mismo tiempo, el presente trabajo va dedicado a mis sobrinos David, Tatiana y Katherine, por ser la mayor alegría de mi vida y por motivarme a seguir adelante con sus sonrisas y abrazos. Los quiero mucho y los llevo en mi corazón.

De la misma forma, quiero dedicar esta tesis a mis amigos y compañeros, haciendo una especial mención a Dario Tenezaca, quienes me han acompañado en este camino de aprendizaje académico, por su amistad, solidaridad y continua colaboración. Sin ellos, no habría sido posible superar los obstáculos y dificultades que se presentaron en este trayecto de nuestras vidas.

Por último, quiero dedicar este logro a mi papá Manuel (+) y abuelito Manuel (+) que donde quiera que estén sé que ellos siempre me están dando ese empujón que me hace falta.

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>I</b>
<b>Dedicatorias</b>	<b>III</b>
<b>Índice General</b>	<b>v</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>IX</b>
<b>Índice de tablas</b>	<b>X</b>
<b>Resumen</b>	<b>XI</b>
<b>Abstract</b>	<b>XII</b>
<b>Antecedentes</b>	<b>1</b>
<b>Justificación</b>	<b>3</b>
<b>Objetivos</b>	<b>5</b>
<b>Introducción</b>	<b>6</b>
<b>1. Filtrado Adaptativo</b>	<b>7</b>
1.1. Introducción al Filtrado Adaptativo . . . . .	7
1.2. Conceptos y Terminología Básica . . . . .	8
1.2.1. Estructura del filtrado adaptativo . . . . .	8
1.3. Fundamentos de Filtrado Adaptativo . . . . .	10
1.3.1. Variable Aleatoria . . . . .	10

1.3.2.	Valor Esperado . . . . .	11
1.3.3.	Matriz de Correlación . . . . .	11
1.3.4.	Matriz de Autocorrelación . . . . .	12
1.4.	Función de Correlación Cruzada . . . . .	13
1.5.	Varianza . . . . .	13
1.6.	Covarianza . . . . .	13
1.7.	Proceso Estocástico: . . . . .	14
<b>2.</b>	<b>Algoritmos de Gradiente Estocástico</b>	<b>15</b>
2.1.	Criterio y Conceptos del Error Cuadrático Medio . . . . .	15
2.1.1.	Filtrado de Wiener . . . . .	15
2.2.	Principio de Ortogonalidad . . . . .	17
2.3.	Algoritmos Adaptativos de Gradiente Estocástico . . . . .	18
2.3.1.	Algoritmo Mínimo Cuadrático Promediado (Least Mean Square)	19
2.3.2.	Algoritmo Mínimo Cuadrado Recursivo (Recursive Least Square)	20
2.4.	Aplicación de Filtrado Adaptativo a Modulación PCM . . . . .	23
2.4.1.	Filtro Predictor . . . . .	23
2.4.2.	Modulación PCM . . . . .	25
<b>3.</b>	<b>Resultados</b>	<b>30</b>
3.1.	Resultado de Gráficas con Señal Sinusoidal . . . . .	32
3.1.1.	Resultados de Señal Sinusoidal con 2 muestras y SNR de 100dB .	32
3.1.2.	Resultados de Señal Sinusoidal con 4 muestras y SNR de 100dB .	34
3.1.3.	Resultados de Señal Sinusoidal con 8 muestras y SNR de 100dB .	36
3.1.4.	Resultados de Señal Sinusoidal con 16 muestras y SNR de 100dB	38
3.1.5.	Resultados de Señal Sinusoidal con 2 muestras y SNR de 0.1dB .	40
3.1.6.	Resultados de Señal Sinusoidal con 4 muestras y SNR de 0.1dB .	42
3.1.7.	Resultados de Señal Sinusoidal con 8 muestras y SNR de 0.1dB .	44
3.1.8.	Resultados de Señal Sinusoidal con 16 muestras y SNR de 0.1dB	46
3.2.	Resultados Señal de Dirichlet . . . . .	48
3.2.1.	Resultados Señal de Dirichlet con 2 muestras y SNR de 100dB . .	48
3.2.2.	Resultados Señal de Dirichlet con 4 muestras y SNR de 100dB . .	50

3.2.3.	Resultados Señal de Dirichlet con 8 muestras y SNR de 100dB . .	52
3.2.4.	Resultados Señal de Dirichlet con 16 muestras y SNR de 100dB . .	54
3.2.5.	Resultados Señal de Dirichlet con 2 muestras y SNR de 0.1dB . .	56
3.2.6.	Resultados Señal de Dirichlet con 4 muestras y SNR de 0.1dB . .	58
3.2.7.	Resultados Señal de Dirichlet con 8 muestras y SNR de 0.1dB . .	60
3.2.8.	Resultados Señal de Dirichlet con 16 muestras y SNR de 0.1dB . .	62
3.3.	Señal de Audio . . . . .	64
3.3.1.	Señal de Audio con $f_s=1500$ , $SNR=0.1$ , $\Delta=0.1$ , $\Lambda=0.5$ . .	64
<b>4.</b>	<b>Conclusiones y Trabajos Futuros</b>	<b>67</b>
4.0.1.	Conclusiones . . . . .	67
4.0.2.	Trabajos Futuros . . . . .	69
<b>Glosario</b>		<b>70</b>
<b>Referencias</b>		<b>72</b>
<b>Anexos</b>		<b>73</b>

# Índice de figuras

1.1.	Diagrama de Filtrado Adaptativo. . . . .	8
1.2.	Estructura de Filtro FIR. . . . .	9
2.1.	Estructura de Filtrado de Wiener. . . . .	17
2.2.	Diagrama del Algoritmo LMS. . . . .	20
2.3.	Diagrama de bloque de un filtro predictor de error. . . . .	23
2.4.	Diagrama de Bloques de un filtro FIR predictor de error . . . . .	23
2.5.	Tren de Impulsos Unitarios. . . . .	27
2.6.	Cuantificación Uniforme . . . . .	27
2.7.	Formatos de señalización binaria. . . . .	28
2.8.	Esquema de Modulación PCM a) Transmisor b) Ruta de transmisión c) Receptor PCM .	29
3.1.	SNR=100 dB, Muestras=2, Delta=0.001 . . . . .	33
3.2.	SNR=100 dB, Muestras=2, Delta=0.001 . . . . .	34
3.3.	SNR=100 dB, Muestras=4, Delta=0.001 . . . . .	35
3.4.	SNR=100 dB, Muestras=4, Delta=0.001 . . . . .	36
3.5.	SNR=100 dB, Muestras=8, Delta=0.001 . . . . .	37
3.6.	SNR=100 dB, Muestras=8, Delta=0.001 . . . . .	38
3.7.	SNR=100 dB, Muestras=16, Delta=0.001 . . . . .	39
3.8.	SNR=100 dB, Muestras=16, Delta=0.001 . . . . .	40
3.9.	SNR=0.1 dB, Muestras=2, Delta=0.1 . . . . .	41
3.10.	SNR=0.1 dB, Muestras=2, Delta=0.1 . . . . .	42
3.11.	SNR=0.1 dB, Muestras=4, Delta=0.1 . . . . .	43
3.12.	SNR=0.1 dB, Muestras=4, Delta=0.1 . . . . .	44
3.13.	SNR=0.1 dB, Muestras=8, Delta=0.1 . . . . .	45

3.14. SNR=0.1 dB, Muestras=8, Delta=0.1 . . . . .	46
3.15. SNR=0.1 dB, Muestras=16, Delta=0.1 . . . . .	47
3.16. SNR=0.1 dB, Muestras=16, Delta=0.1 . . . . .	48
3.17. SNR=100 dB, Muestras=2, Delta=0.001 . . . . .	49
3.18. SNR=100 dB, Muestras=2, Delta=0.001 . . . . .	50
3.19. SNR=100 dB, Muestras=4, Delta=0.1 . . . . .	51
3.20. SNR=100 dB, Muestras=4, Delta=0.001 . . . . .	52
3.21. SNR=100 dB, Muestras=8, Delta=0.001 . . . . .	53
3.22. SNR=100 dB, Muestras=8, Delta=0.001 . . . . .	54
3.23. SNR=100 dB, Muestras=16, Delta=0.001 . . . . .	55
3.24. SNR=100 dB, Muestras=16, Delta=0.001 . . . . .	56
3.25. SNR=0.1 dB, Muestras=2, Delta=0.1 . . . . .	57
3.26. SNR=0.1 dB, Muestras=2, Delta=0.1 . . . . .	58
3.27. SNR=0.1 dB, Muestras=4, Delta=0.1 . . . . .	59
3.28. SNR=0.1 dB, Muestras=4, Delta=0.1 . . . . .	60
3.29. SNR=0.1 dB, Muestras=8, Delta=0.1 . . . . .	61
3.30. SNR=0.1 dB, Muestras=8, Delta=0.1 . . . . .	62
3.31. SNR=0.1 dB, Muestras=16, Delta=0.1 . . . . .	63
3.32. SNR=0.1 dB, Muestras=16, Delta=0.1 . . . . .	64
3.33. $f_s=1500$ , SNR=0.1, Delta=0.1, Lambda=0.5 . . . . .	65
3.34. $f_s=1500$ , SNR=0.1, Delta=0.1, Lambda=0.5 . . . . .	66

# Índice de tablas

3.1. Tabla de experimentos para señales Sinusoidal y Dirichlet . . . . .	31
3.2. Tabla de experimentos para señal de audio . . . . .	32

# Resumen

En el presente trabajo de titulación se realizó el diseño, análisis y evaluación del desarrollo de un filtro predictor para modulación PCM con base en el algoritmo adaptativo RLS, para efectos de análisis se evaluó el sistema en general con siete etapas de filtrado en cascada y 256 pesos, en primera instancia se utilizó una señal periódica sinusoidal con condición de ruido casi nula, en estos experimentos se tomaron un mínimo de muestras obteniendo resultados favorables en la primera etapa de filtrado, es decir señales con un error cuadrático promedio bajo. De igual manera se aplicó una condición de ruido máximo en la que fue necesaria la séptima etapa de filtrado donde se obtiene señales con error cuadrático promedio bajo, es decir señales similares a la original. Adicionalmente se trabajó con una señal más compleja de Dirichlet con una condición de ruido casi nula en donde se puede observar que la señal recuperada necesita de las siete para obtener resultados favorables, de manera similar para la condición de ruido máximo se necesita el mismo número de etapas de filtrado. Por otro lado, se utilizó una señal de audio de 40 segundos, para efectos de visualización se tomó las primeras 300 muestras, obteniendo como resultado en la primera etapa de filtrado una señal no muy favorable, por lo tanto, es necesario una séptima etapa de filtrado para obtener una señal similar a la original. En conclusión, de acuerdo a los resultados obtenidos el filtro predictor tiene una buena recuperación de las señales analizadas anteriormente.

*Palabras clave:* PCM; RLS;

# Abstract

In this final project, the design, analysis, and evaluation of the development of a predictor filter for PCM modulation based on the RLS adaptive algorithm was performed. In general, for analysis purposes, the system was evaluated with seven cascade filtering stages and 256 weights. In the first instance a sinusoidal periodic signal with almost zero noise condition was used, in these experiments a minimum of samples were taken obtaining favorable results in the first stage of filtering, whose mean square error was roughly low. Secondly, a maximum noise condition was applied to the same sinusoidal signal, in this case the seventh filtering stage was necessary to obtain signals with low mean square error, a signal which is similar to the original one. Additionally, we worked with a more complex Dirichlet signal with an almost zero noise condition where it can be observed that the recovered signal needs seven stages to obtain favorable results, similarly for the maximum noise condition the same number of filtering stages is needed. On the other hand, an audio signal of 40 seconds was used, for visualization purposes the first 300 samples were taken, obtaining as a result in the first filtering stage a not very favorable signal, therefore, a seventh filtering stage is necessary to obtain a signal similar to the original one. In conclusion, according to the results obtained, the predictive filter has a good performance in order to recovery the previous analyzed signals.

*Keywords:* PCM; RLS;

# Antecedentes

Con el paso de los años la tecnología evoluciona considerablemente, su principal objetivo es minimizar costos y simplificar procesos, un claro ejemplo es la telefonía [VoIP](#) que se implementa en una intranet para que de esta manera exista interconexión suprimiendo la telefonía tradicional y centrales de comunicación. A medida que la tecnología evoluciona cada vez se pretende reducir errores para poder obtener el máximo rendimiento de un sistema, pero no siempre funciona con éxito dado que existen errores en los sistemas de comunicaciones por ejemplo en la modulación PCM al momento de pasar una señal de tiempo continuo a tiempo discreto se podría generar un error en la tasa de muestreo, este inconveniente puede ser disminuido mediante la implementación de filtros predictores que están diseñados en base a algoritmos adaptativos. En los sistemas de comunicaciones digitales cuando una señal de información como voz o video es muestreada a una tasa ligeramente superior al establecido por el teorema de muestreo de Nyquist, común en modulación de código de pulso (de sus siglas en inglés Pulse Code Modulation, [PCM](#)) [1] se observa un alto grado de correlación entre muestras adyacentes. Como resultado, la diferencia entre las muestras adyacentes posee una varianza que es más pequeña que la varianza de la señal original. Cuando estas muestras con alto grado de correlación son codificadas, la señal resultante contiene información redundante, lo cual significa que no todos los símbolos usados son esenciales para la transmisión de información. Para solventar este inconveniente, es común utilizar predicción de error adaptativa que tiene como núcleo principal los algoritmos adaptativos de gradiente como es el algoritmo Mínimo Cuadrático Promediado (de sus siglas en inglés Least Mean Square, [LMS](#)) o el algoritmo Normalizado de Mínimos Cuadrados (de sus siglas en inglés Normalized Least Mean Square, [NLMS](#)) [2]. Estos algoritmos permiten la

convergencia, estabilidad y robustez de la potencia de la señal de entrada, para que de esta manera en cada una de las iteraciones se actualice el valor de los pesos hasta que se reduzca la estimación de las señales en modulación PCM debido al error de la tasa de muestreo.

# Justificación

La modulación de código de pulso (de sus siglas en inglés Pulse Code Modulation, PCM), consiste en realizar un muestreo a la señal, es decir cuantificarla en amplitud en intervalos regulares aproximados de forma discreta, para después codificarla en un código lineal, solucionando de esta manera el inconveniente por perturbaciones de ruido de la señal analógica [3]. A lo largo de la historia, los avances tecnológicos han tenido un gran impacto en procesos de la evolución humana, temas como (i) la educación que puede cambiar la metodología tradicional de estudio por una de mejor comprensión, (ii) economía gracias al uso de medios tecnológicos se potencia el crecimiento económico o aumento de la productividad, (iii) conectividad dado que gracias a la tecnología existente es posible realizar una comunicación interna; por ejemplo, la telefonía IP o, en su defecto, de manera externa mediante el uso de medios sociales. Dentro de los sistemas de comunicación internos como es la conexión por intranet se puede aplicar la tecnología voz sobre IP que utiliza la modulación PCM, siendo una de sus ventajas que es menos sensible al ruido o interferencia en un canal de comunicación. Cuando se discretiza una señal; es decir, se pasa del dominio del tiempo continuo a tiempo discreto, existe pérdida de información al momento de muestrear la misma, problema que debe ser resuelto para poder llegar al óptimo rendimiento del sistema de modulación. En el presente trabajo se realizará una simulación de un sistema de modulación PCM con tasa de error en la digitalización de la señal de mensaje. Por consiguiente, se modificará la frecuencia de muestreo a una que no cumpla con el teorema de Nyquist dentro de la modulación PCM, como resultado se obtendrá una señal mal muestreada, esta se podrá recuperar partiendo del diseño del filtro FIR predictor mediante la implementación del algoritmo adaptativo RLS. Por último, se realizará el análisis de

eficiencia del predictor para diferentes consideraciones de tasa de error y curva de aprendizaje.

# Objetivos

## Objetivo General

- Desarrollar un filtro predictor para modulación PCM con base en el algoritmo adaptativo RLS.

## Objetivos específicos:

- Analizar el estado del arte de los fundamentos de los algoritmos adaptativos para filtros digitales.
- Diseñar un filtro predictor que permita la estimación de las señales en modulación PCM debido al error de la tasa de muestreo.
- Implementar un filtro digital predictor mediante la programación de algoritmo adaptativo recursivo (RLS).
- Contrastar el sistema PCM con y sin filtro predictor bajo diversas consideraciones de error de tasa de muestreo para comprobar su correcto funcionamiento.

# Introducción

En este trabajo se propone desarrollar un filtro predictor para modulación PCM en base con el algoritmo adaptativo RLS que permite la minimización de la varianza del error de predicción generado por un mal muestreo. Para realizar el proyecto y responder tanto al antecedente planteado como al de la justificación es necesario en primera instancia conocer los fundamentos del filtrado adaptativo y de los algoritmos de gradiente estocástico, para este proyecto se ha hecho énfasis en el estudio del algoritmo adaptativo RLS, cuya principal característica es su robustez y rápida convergencia. La señal original y la recuperada del filtro predictor adaptivo es utilizada como señal de ingreso al sistema de modulación PCM, lo cual permite verificar si la codificación que se logra de la señal recuperada por parte del filtro predictor se asemeja a la de la señal original y bajo condiciones de muestreo adecuado. En este contexto, se utilizará tres señales de prueba, una sinusoidal, una señal de Dirichlet y finalmente una señal de audio para analizar el desempeño del filtro predictor. Al finalizar el proyecto se pretende verificar si el filtro predictor tiene la capacidad de recuperar las señales con condiciones de muestreo no adecuado y contaminadas o no por ruido, pretendiendo obtener un error mínimo cuadrático pequeño, de tal manera que puedan ser utilizadas en sistema de modulación PCM.

# Capítulo 1

## Filtrado Adaptativo

### 1.1. Introducción al Filtrado Adaptativo

El filtrado adaptativo es una técnica empleada en el procesamiento de señales, está conformado por un filtro digital el cual realiza el procesamiento en tiempo real. Su propósito es optimizar la calidad de la señal de ingreso para esto se debe de eliminar las interferencias y ruidos presentes en la misma. Como principal ventaja el uso del filtrado adaptativo es ajustar los coeficientes de un filtro, por lo tanto, tiene la capacidad de adaptación a cambios que se realicen en la señal de entrada esto es favorable al momento que se presente una señal variable. Dentro del filtrado adaptativo existen varias técnicas las cuales se diferencian de la convergencia o de su carga computacional dentro de estas tenemos LMS (Least Mean Square) y el algoritmo recursivo (Recursive Least Square).

Los aspectos que definen a un filtro adaptativo son:

- **Estabilidad:** un filtro adaptativo tiene que garantizar la estabilidad en el sistema para que no diverja o sea inestable, esto se consigue por ajuste de parámetros o de diseño.
- **Velocidad de Convergencia:** hace referencia a la velocidad con la que el filtro se acopla a las especificaciones de la señal de ingreso, es decir se diferencian con base en su rápida convergencia, carga computacional o parámetros de ajuste y tratamiento de la señal.

- Aplicación: depende de las señales de entrada con las que se trabajará.

## 1.2. Conceptos y Terminología Básica

Como se puede observar en la Figura 1.1 tenemos un diagrama del filtro adaptativo en donde  $a(n)$  es la señal de ingreso,  $b(n)$  es la señal esperada,  $c(n)$  es la señal resultante del filtro adaptativo,  $e(n)$  la señal de error [4].

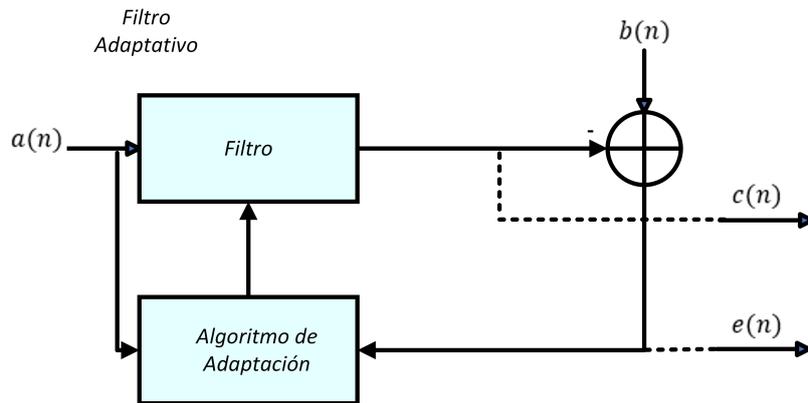


Figura 1.1: Diagrama de Filtrado Adaptativo.

La señal de error  $e(n)$  de salida está representada de la siguiente manera [5]:

$$e(n) = c(n) - b(n) \quad (1.1)$$

El error es el encargado de realizar la adaptación del filtro en diferentes instantes de tiempo, es decir la actualización de coeficientes se realiza mediante el algoritmo.

### 1.2.1. Estructura del filtrado adaptativo

La estructura está descrita como sigue [6]:

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} w_i x(n-i) \quad (1.2)$$

La salida generada por filtro adaptativo es equivalente a la conjunción de muestras con cierto grado de retraso las cuales provienen de la entrada  $x(n-i)$ , en donde los

pesos del sistema toman la variable  $\mathbf{w}_i = [w_0(k), w_1(k), \dots, w_{N-1}(k)]^T$ , dado que estas variables están en el dominio del tiempo son intervenidas por el algoritmo adaptativo. El objetivo esta centrado en que la señal de ingreso y la señal deseada tengan relación como tal, por lo tanto, se aplica filtros de manera recursiva es decir un filtro IIR (Respuesta al impulso infinita) este filtro se puede retroalimentar de una o varias etapas, y filtro FIR (Respuesta al impulso finito) el cual no tiene retroalimentación entre la señal de ingreso y salida.

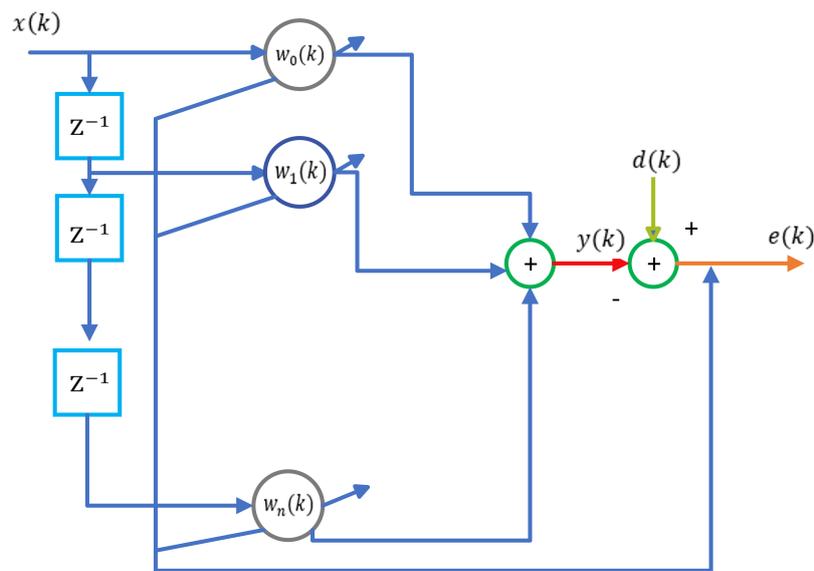


Figura 1.2: Estructura de Filtro FIR.

Como se observa en la Figura 1.2 los retrasos son representados como  $Z^{-1}$ , por lo tanto, esto nos indica que este filtro es de manera no recursiva dado que realiza la toma de muestras previas y presentes.

Mientras que un filtro IIR viene dado con la siguiente ecuación:

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i(n)x(n-i) + \sum_{i=1}^{M-1} b_i(n)y(n-i) \quad (1.3)$$

En donde los coeficientes de manera progresiva y con retroalimentación son  $a_i(n)$  y  $b_i(n)$ .

No obstante, los filtros IIR pueden tener tendencia a ser inestables dado que los polos pueden salir del círculo unitario, la forma de arreglo de inestabilidad es con la comprobación de los coeficientes del filtro, es decir se debe de tener una limitación

en cuanto a rango, para lograr que el filtro permanezca estable [6].

## 1.3. Fundamentos de Filtrado Adaptativo

El propósito del filtrado adaptativo es la estimación y compensación de efectos como interferencia y ruido los cuales se pueden presentar en una señal, para esto utiliza un algoritmo que realiza un cálculo de los pesos del filtro basándose de la función de error, cuya diferencia es la señal de ingreso y la señal obtenida.

Los filtros adaptativos son sistemas de diseño propio los cuales pueden acoplarse a cualquier entorno, existen varias aplicaciones como es el procesamiento de señales, cancelación de interferencias entre otras. Los parámetros del filtro realiza actualizaciones mediante mediciones de señales implícitas las cuales se aplican al algoritmo del filtrado adaptativo de tal manera que la variación entre la salida del filtro y la respuesta esperada tenga un valor mínimo y esta sea en sentido estadístico o determinista [6].

### 1.3.1. Variable Aleatoria

Sea una variable aleatoria  $X(A)$  la cual represente una función, es decir una relación entre un evento aleatorio  $A$  y un número real, por lo tanto, se puede incorporar la variable aleatoria con  $X$  para expresar de manera implícita la dependencia funcional de  $A$ , la variable aleatoria puede ser discontinua o continua [7].

Una variable estocástica  $X$  se puede considerar como una función la cual toma todos los espacios muestrales ya sean de una recta o en ciertas partes [8].

- Variable Aleatoria Discreta: es aquella variable la cual adquiere valores discretos, su espacio muestral puede tomar valores discretos, continuos o discretos y continuos.
- Variable Aleatoria Continua: denominada aquella función la cual tiene un intervalo continuo de valores, su principal característica es que no se pueden tomar valores discretos de un espacio muestral.

### 1.3.2. Valor Esperado

El valor esperado o también denominado media muestral contiene una variable estocástica, se denomina con la notación  $E[X]$  que se lee como la esperanza matemática de  $X$  [8].

Por lo tanto, el valor esperado o la esperanza matemática son todos los valores que puede adquirir la variable estocástica en un determinado espacio muestral.

El valor esperado viene dado por la siguiente ecuación:

$$E[X] = \bar{X} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x) dx \quad (1.4)$$

En donde  $x f_x(x)$  es la función de la variable aleatoria  $X$ .

### 1.3.3. Matriz de Correlación

La matriz de Correlación es definida de la siguiente manera [2]:

$$\mathbf{R} = E \left[ \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^H(k) \right] \quad (1.5)$$

En donde  $\mathbf{x}^H(k)$  es la transposición Hermitiana de  $\mathbf{x}(k)$ , una de las características más importantes de la matriz de correlación es que sus propiedades toman un papel importante para la comprensión de la mayor parte de los filtros adaptativos, dentro de estas características provienen de la naturaleza del filtrado adaptativo mientras que existen otras propiedades que se derivan netamente de álgebra lineal.

La matriz de correlación viene dada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \begin{bmatrix} E \left[ |x_1(k)|^2 \right] & E \left[ x_1(k) x_2^*(k) \right] & \cdots & E \left[ x_1(k) x_N^*(k) \right] \\ E \left[ x_2(k) x_1^*(k) \right] & E \left[ |x_2(k)|^2 \right] & \cdots & E \left[ x_2(k) x_N^*(k) \right] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E \left[ x_N(k) x_1^*(k) \right] & E \left[ x_N(k) x_2^*(k) \right] & \cdots & E \left[ |x_N(k)|^2 \right] \end{bmatrix} \\ &= E \left[ \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^H(k) \right] \end{aligned} \quad (1.6)$$

Dentro de las características de la matriz tenemos:

- Que la matriz  $R$  es semidefinida positiva excepto cuando las señales conforman el vector de entrada sean linealmente independientes, por lo general las señales dependientes de linealidad no se encuentran con frecuencia en la práctica.
- Otra propiedad importante es que la matriz  $R$  sea simétrica como se puede observar:

$$\mathbf{R}^H = E \left\{ \left[ \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^H(k) \right]^H \right\} = E \left[ \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^H(k) \right] = \mathbf{R}$$

- La Matriz  $R$  es de Toeplitz cuando los componentes están conformados por la diagonal primaria y alguna diagonal secundaria son similares. Y cuando el vector de ingreso tiene ciertos retrasos es decir  $x_i(n) = x_0(n - i)$ , para  $i = 1, 2, \dots, N$  toma un proceso **WSS** (de sus siglas en ingles Wide Sense Stationary, proceso estacionario en sentido amplio) [2].

### 1.3.4. Matriz de Autocorrelación

La función de autocorrelación de un proceso estocástico  $X(n)$  es la correlación de  $E[x_1 X_2]$  de dos variables probabilísticas  $X_1 = X(n)$  y  $X_2 = X(m)$ , definidas por el proceso en instantes  $n$  y  $m$  respectivamente [8].

Si  $x[(0), x(1), \dots, x(p)]^T$  es un vector que tiene sucesión finita aleatoria, la matriz de autocorrelación se expresa, por lo tanto, se debe de considerar que el vector columna es transpuesto y que es un vector fila con los componentes idénticos como se puede ver a continuación [9]:

$$R_x = E \{ \mathbf{x} \mathbf{x}^T \} \begin{bmatrix} E x(0)x(0) & E x(0)x(1) & \dots & E x(0)x(p) \\ E x(1)x(0) & E x(1)x(1) & \dots & E x(1)x(p) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ E x(p)x(0) & E x(p)x(1) & \dots & E x(p)x(p) \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

$$\begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(-1) & \dots & r_x(p) \\ r_x(1) & r_x(0) & \dots & r_x(-p+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_x(p) & r_x(p-1) & \dots & r_x(0) \end{bmatrix}$$

## 1.4. Función de Correlación Cruzada

La función de correlación cruzada de los procesos  $x(y)$  e  $y(t)$  se puede escribir de la manera [8]:

$$R_{XY}(t, t + \tau) = E[X(t)Y(t + \tau)] \quad (1.8)$$

En donde  $t_1$  es igual a  $t$  y  $\tau$  es igual a la diferencia entre  $t_2 - t_1$ , si los dos procesos aleatorios cumplen la condición de ser al menos independientes del tiempo absoluto se puede escribir de la manera:

$$R_{XY}(\tau) = E[X(t)Y(t + \tau)] \quad (1.9)$$

## 1.5. Varianza

La varianza es la dispersión de las muestras de la variable aleatoria, es decir si las muestras se acumulan alrededor de la media el valor de la varianza será mínimo, mientras que si los valores tienen una distribución alejada al valor de la media la varianza tendrá un valor grande [10].

Se le denomina como la medida de variación más importante la cual toma una variable aleatoria  $X$  se le denota como  $\text{var}(x)$ , con el símbolo  $\sigma^2 x$  o simplemente  $\sigma^2$ .

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E[(Z - \mu)^2] = \sum_z (z - \mu)^2 f(z), & \text{si } Z \text{ es discreta, y} \\ \sigma^2 &= E[(Z - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (z - \mu)^2 f(z) dz, & \text{si } Z \text{ es continua.} \end{aligned}$$

Adicionalmente la raíz cuadrada de sigma se le denomina la desviación típica de la variable aleatoria  $z$  [11].

## 1.6. Covarianza

La covarianza se encarga de analizar la relación que tienen las variables estocásticas  $A$  y  $B$  que no son independientes, si suponemos que  $A$  y  $B$  tienen una fuerte relación positiva significa que los valores de la variable  $A$  tiende a ocurrir en

valores reducidos de la variable B, de igual manera los valores pequeños de A con los valores reducidos de B. Mientras que si A y B no están correlacionadas su covarianza estaría cerca de 0 [12].

La covarianza de dos variables aleatorias A y B es:

$$\text{Cov}(A, B) = E[(A - \mu_A)(B - \mu_B)] \quad (1.10)$$

En donde  $A - \mu_A$  y  $B - \mu_B$  son las desviaciones de las variables con respecto a sus valores medios respectivamente.

## 1.7. Proceso Estocástico:

Un proceso estocástico hace referencia al conjunto de variables probabilísticas  $\{X(t) : t \in \mathcal{T}\}$  las cuales están definidas en un espacio muestral, la variable  $T$  se podría en primera instancia asociar al conjunto de puntos en el tiempo y la variable  $X(t)$  como el valor o el estado de un proceso estocástico en el tiempo el mismo que se puede clasificar en tiempo continuo o tiempo discreto esto va a depender de  $T$  [13].

De igual manera se puede definir como una regla a cada resultado generado por un experimento aleatorio el cual está en función del número de variables. Dentro de las características de un proceso estocástico es analizar la variable temporal y las variables aleatorias que estén involucradas [14]:

- Proceso Estocástico Continuo: la variable  $t$  es continua, mientras que las otras variables  $x(t)$  son aquellas que adquieren valores en un rango el cual es continuo.
- Proceso Estocástico Discreto: de igual manera la variable  $t$  es continua, pero la diferencia es que las variables probabilísticas son discretas.
- Secuencia Aleatoria Continua: la variable de inclusión temporal será discreta, mientras que las variables probabilísticas adquieren un rango de valores continuos.
- Secuencia Aleatoria Discreta: define a las variables probabilísticas discretas y tiempo discreto.

# Capítulo 2

## Algoritmos de Gradiente Estocástico

Los algoritmos de gradiente estocástico se refieren al conjunto de técnicas que emplean la optimización, generalmente se utiliza para encontrar parámetros óptimos los cuales se logran mediante la actualización de pesos tomando solo una muestra aleatoria en cada iteración, su principal objetivo es minimizar el error cuadrático medio.

### 2.1. Criterio y Conceptos del Error Cuadrático Medio

#### 2.1.1. Filtrado de Wiener

Su finalidad es reducir el ruido aditivo presente en la señal obtenida, se realizan métodos estadísticos los cuales permiten que el filtro tenga similitud con la señal de entrada es decir que este exenta de ruido, el filtro realiza una determinación de la señal esperada con la aplicación de un filtro lineal y tiempo-invariante [15].

Por lo tanto, sean  $w$  los coeficientes del filtro deseado, es decir este filtro será el encargado del procesamiento del valor real el cual pertenece a un proceso estacionario  $x(n)$  para generar una estimación  $\hat{d}(n)$  de la señal deseada cuyo valor es real  $d(n)$ , si se asume que los coeficientes del filtro no cambian es igual a la convolución de la entrada y los coeficientes del filtro, por lo tanto obtenemos [9]:

$$\hat{d}(n) = \sum_{m=0}^{M-1} w_m x(n-m) = \mathbf{w}^T \mathbf{x}(n) \quad (2.1)$$

Donde  $M$  es el número de factores del filtro y:

$$\hat{d}(n) = \sum_{m=0}^{M-1} w_m x(n-m) = \mathbf{w}^T \mathbf{x}(n) \quad (2.2)$$

Mientras que el MSE (Error cuadrático medio) viene dado:

$$\begin{aligned} I(\mathbf{w}) &= E \left\{ e^2(n) \right\} - E \left\{ \left[ d(n) - \mathbf{w}^T \mathbf{x}(n) \right]^2 \right\} \\ &\quad - E \left\{ \left[ d(n) - \mathbf{w}^T \mathbf{x}(n) \right] \left[ d(n) - \mathbf{w}^T \mathbf{x}(n) \right]^T \right\} \\ &\quad - E \left\{ d^2(n) - \mathbf{w}^T \mathbf{x}(n) d(n) - d(n) \mathbf{x}^T(n) \mathbf{w} + \mathbf{w}^T \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^T(n) \mathbf{w} \right\} \\ &\quad - E \left\{ d^2(n) \right\} - 2 \mathbf{w}^T E \left\{ d(n) \mathbf{x}(n) \right\} + \mathbf{w}^T E \left\{ \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^T(n) \right\} \mathbf{w} \\ &= \sigma_d^2 - 2 \mathbf{w}^T \mathbf{p}_{dx} + \mathbf{w}^T \mathbf{R}_x \mathbf{w} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Donde:

$$\mathbf{w}^T \mathbf{x}(n) = \mathbf{x}^T(n) \mathbf{w} = \text{escalar}$$

$$\sigma_d^2 = \text{varianza de la señal deseada, } d(n)$$

$$\mathbf{p}_{dx} = [p_{dx}(0) p_{dx}(1) \cdots p_{dx}(M-1)]^T$$

$$= \text{vector de correlación cruzada entre } d(n) \text{ y } \mathbf{x}(n)$$

$$p_{dx}(0) = r_{dx}(0), p_{dx}(1) = r_{dx}(1), \cdots, p_{dx}(M-1) = r_{dx}(M-1)$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_x &= E \left\{ \begin{bmatrix} x(n) \\ x(n-1) \\ \vdots \\ x(n-M+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(n) & x(n-1) & \cdots & x(n-M+1) \end{bmatrix} \right\} \\
 &= \begin{bmatrix} E\{x(n)x(n)\} & E\{x(n)x(n-1)\} & \cdots & E\{x(n)x(n-M+1)\} \\ E\{x(n-1)x(n)\} & E\{x(n-1)x(n-1)\} & \cdots & E\{x(n-1)x(n-M+1)\} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E\{x(n-M+1)x(n)\} & E\{x(n-M+1)x(n-1)\} & \cdots & E\{x(n-M+1)x(n-M+1)\} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(1) & \cdots & r_x(M-1) \\ r_x(-1) & r_x(0) & \cdots & r_x(M-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_x(-M+1) & r_x(-M+2) & \cdots & r_x(0) \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

Esta matriz es de correlación de entrada de los datos, es simétrica porque se supone que el sistema es aleatorio y estacionario, por lo tanto tenemos esa igualdad en la matriz.

Como se puede observar en la Figura 2.1 tenemos la estructura del filtrado de Wiener:

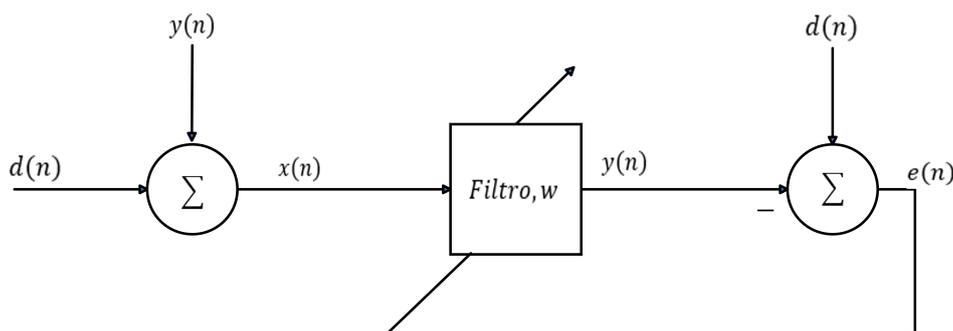


Figura 2.1: Estructura de Filtrado de Wiener.

## 2.2. Principio de Ortogonalidad

Al tener un conjunto de muestras  $x(n)$  y  $d(n)$  resultantes de un proceso estacionario de sentido amplio (WSS) con media cero. Se asume que se desea encontrar

una estimación lineal de  $d(n)$  basada en las  $L$  muestras más recientes de  $x(n)$ , por lo tanto [16]:

$$\hat{d}(n) = \mathbf{w}^T \mathbf{x}(n) = \sum_{l=0}^{L-1} w_l x(n-l), \quad \mathbf{w}, \mathbf{x}(n) \in \mathbb{R}^L \quad \text{and} \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.5)$$

El criterio para cuantificar la estimación  $d(n)$  mediante  $\hat{d}(n)$  incidirá en cómo se calcularán los coeficientes  $w_l$ . Se plantea utilizar el error cuadrático medio (MSE), que se define por:

$$J_{\text{MSE}}(\mathbf{w}) = E \left[ |e(n)|^2 \right] = E \left[ |d(n) - \hat{d}(n)|^2 \right] \quad (2.6)$$

En donde  $E[\cdot]$  es el operador de expectativa y  $e(n)$  es el error de estimación. De esta manera el problema de estimación puede verse como encontrar el vector  $w$ , el cual minimice la función de costo  $J_{\text{MSE}}(\mathbf{w})$

Usando 2.3 en 2.4, se puede calcular el gradiente como:

$$\frac{\partial J_{\text{MSE}}}{\partial \mathbf{w}} = 2E \left[ e(n) \frac{\partial e(n)}{\partial \mathbf{w}} \right] = -2E[e(n)\mathbf{x}(n)] \quad (2.7)$$

La condición a cumplir es:

$$E [e_{\text{mín}}(n)x(n-l)] = 0, \quad l = 0, 1, \dots, L-1 \quad (2.8)$$

Esto se denomina principio de ortogonalidad e involucra que la condición óptima se logra si y solo si el error  $e(n)$  no tenga correlación con las muestras  $x(n-l), l = 0, 1, \dots, L-1$ .

## 2.3. Algoritmos Adaptativos de Gradiente Estocástico

Los algoritmos de gradiente estocástico es un método popular aplicado en el aprendizaje automático, cuyo objetivo es minimizar una función de costo mediante el ajuste interactivo de cada uno de los pesos de un modelo como tal. Los algoritmos de gradiente estocástico utilizan una muestra aleatoria de los datos para realizar el cálculo del descenso en lugar de utilizar un conjunto completo de datos, dado que al momento de trabajar con grandes muestras de datos implica costos de tiempo y

memoria.

### 2.3.1. Algoritmo Mínimo Cuadrático Promediado (Least Mean Square)

El algoritmo de mínimos cuadrados tiene una gran aplicación debido a su simplicidad y robustez, como resultado se tiene una compensación entre velocidad de convergencia y el error cuadrático medio (MSE) [17].

El principio del algoritmo es que mediante el uso de iteraciones existan valores del filtro los cuales tengan convergencia a valores óptimos, el algoritmo puede expresarse mediante la siguiente recursión [18]:

$$\begin{cases} y(n) = W^H(n)X(n) \\ e(n) = t(n) - y(n) \\ W(n+1) = W(n+2) + 2\mu X(n)e^*(n) \end{cases} \quad (2.9)$$

El valor de  $\mu$  será más grande si se requiere que sea más rápida la tasa de convergencia y se tenga mayor error, por lo tanto, el algoritmo LMS se puede ajustar controlando el factor de peso. Con la ecuación 2.7 se puede calcular por el método de iteración cíclico para obtener el mínimo cuadrado medio, es decir:

$$W(n+1) = W(n+2) + 2\mu X(n) [t(n) - W^H(n)X(n)]^* \quad (2.10)$$

El algoritmo tiene  $2N$  operaciones de multiplicación,  $2N$  operaciones de suma, una operación de resta y  $N$  operaciones de desplazamiento, el algoritmo es de circuito cerrado porque cada valor de peso debe terminar en un ciclo de datos correspondiente.

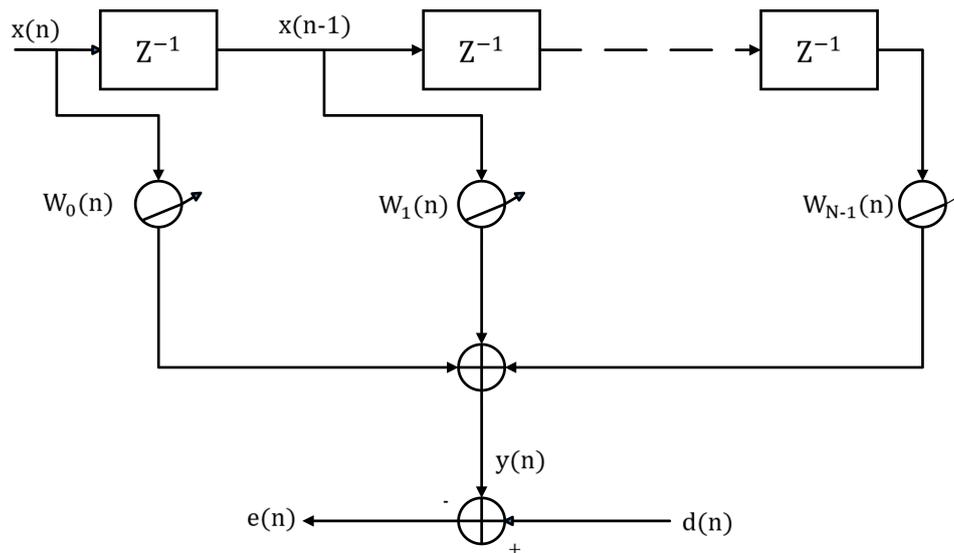


Figura 2.2: Diagrama del Algoritmo LMS.

### 2.3.2. Algoritmo Mínimo Cuadrado Recursivo (Recursive Least Square)

El algoritmo RLS es aquel que calcula la solución de Wiener aplicando métodos de mínimos cuadrados el cual se refiere a un método que reduce al mínimo la suma de los errores cuadráticos durante un intervalo determinado de tiempo [19].

$$\min_w \{J_{LS}\} = \min_w \sum_{i=1}^k \beta(n) |e(n)|^2 \quad (2.11)$$

$\beta(n)$  es el factor de adaptación y  $e(n)$  es la diferencia entre la señal esperada  $d(n)$  y la señal de salida  $y(n) = w^H x(n)$ , por lo tanto, la señal de olvido es aquella que provee diferentes pesos en instantes de tiempo, es decir toma los datos recientes y los anteriores da por olvidado.

$$\beta(n) = \lambda^{(n-1)}, n = 0, 1, \dots, n_0 < \lambda \leq 1 \quad (2.12)$$

Si existe el caso en donde  $\lambda = 1$  los datos anteriores y actuales tomarán el mismo peso esto de acuerdo con un sistema de memoria ilimitada, al sustituir las ecuaciones 2.11 en 2.12 se tiene:

$$J_{LS} = \sum_{i=1}^n \lambda^{(n-1)} |d(n) - w^H x(n)|^2 \quad (2.13)$$

El vector de pesos se obtiene realizando la diferencia de la función de ajuste con respecto a cada peso igualado a cero:

$$\frac{\partial J_{LS}}{\partial w} = - \sum_{i=1}^n \lambda^{(n-1)} d(n)x(n) + \sum_{i=1}^n x(n)x(n)^H w(n) = 0 \quad (2.14)$$

$$w_{opt}(n) = \sum_{i=1}^n \lambda^{(n-1)} d(n)x(n) \left[ \sum_{i=1}^n \lambda^{(n-1)} x(n)x(n)^H w(n) \right]^{-1} \quad (2.15)$$

Considerando las matrices de correlación  $\mathbf{R}(\mathbf{n}) = \sum_{i=1}^n \lambda^{(n-1)} x(n)x(n)^H$  y correlación cruzada  $\mathbf{P}(\mathbf{n}) = \sum_{i=1}^n \lambda^{(n-1)} x(n)d^*(n)$ , por lo tanto, la ecuación 2.14 quedaría:

$$w_{opt}(n) = \mathbf{R}^{-1}(n)\mathbf{P}(n) \quad (2.16)$$

Es necesario aplicar la matriz inversa de la correlación, para que de esta manera se defina el vector ganancia:

$$k(n) = \lambda^{-1}R^{-1}(n-1)x(n) - k(n)\lambda^{-1}x(n)^H R^{-1}(n-1)x(n) \quad (2.17)$$

Si se reescribe de manera repetitiva la ecuación de la matriz de correlación para reemplazarla por la ecuación de la ganancia, se tendría:

$$k(n) = R^{-1}(n)x(n) \quad (2.18)$$

Por lo tanto, la ecuación de peso óptimo queda de la siguiente manera:

$$w_{opt} = w(n+1) + k(n)\epsilon^*(n) \quad (2.19)$$

Donde  $\epsilon(n) = d(n) - w^H(n-1)x(n)$  es la aproximación de error. Las ecuaciones del algoritmo RLS quedan de la siguiente manera:

$$k(n) = \frac{\lambda^{-1}R^{-1}(n-1)x(n)}{1 + \lambda^{-1}x(n)\lambda^{-1}} \quad (2.20)$$

$$\epsilon(n) = d(n) - w^H(n-1)x(n) \quad (2.21)$$

$$w(n) = w(n-1) + k(n)\epsilon * (n) \quad (2.22)$$

$$R^{-1}(n) = \lambda^{-1}R^{-1}(n-1) - \lambda^{-1}k(n)x(n)^HR^{-1}(n-1) \quad (2.23)$$

### Curva de Aprendizaje

En el algoritmo RLS, existen dos tipos de error: el error de estimación a priori  $\zeta(n)$  y el error de estimación a posteriori  $e(n)$ , estos valores varían de manera diferente con el tiempo  $n$ . En el instante  $n = 1$ , el valor cuadrático medio de  $\zeta(n)$  es elevado, igual al valor cuadrático medio de la respuesta deseada  $d(n)$ , posteriormente decae al aumentar  $n$ . En otro instante el valor cuadrático medio de  $e(n)$ , adquiere un valor en  $n = 1$  y por consiguiente se aumenta  $n$ , hasta que  $n$  tome un valor grande, por lo tanto  $e(n)$  es igual a  $\zeta(n)$ . En consecuencia, la elección de  $\zeta(n)$  como el error de interés produce una curva de aprendizaje para el algoritmo RLS que tiene la misma forma general que la del algoritmo LMS. Al elegir  $\zeta(n)$ , se efectúa una comparación gráfica directa entre las curvas de aprendizaje de los algoritmos RLS y LMS. Por lo tanto, basado en un cálculo de la curva de aprendizaje promedio del conjunto del algoritmo RLS en la estimación a priori de error  $\zeta(n)$ , como sigue [20]:

$$J'(n) = \mathbb{E} \left[ |\zeta(n)|^2 \right] \quad (2.24)$$

En donde  $J'(n)$  diferencia el valor cuadrático medio de  $j(n)$  del de  $e(n)$ .

Por lo tanto, podemos expresar el error de estimación a priori

$$\begin{aligned} \zeta(n) &= e_o(n) + [\mathbf{w}_o - \hat{\mathbf{w}}(n-1)]^H \mathbf{u}(n) \\ &= e_o(n) + \epsilon^H(n-1) \mathbf{u}(n), \end{aligned} \quad (2.25)$$

## 2.4. Aplicación de Filtrado Adaptativo a Modulación PCM

### 2.4.1. Filtro Predictor

En la figura 2.3 se tiene el diagrama de bloque de un filtro predictor de error, el cual se basa en el ingreso de una señal de mensaje la cual será muestreada a  $T_s$ , posteriormente ingresa al bloque predictor y la salida de esta señal entra en un comparador como resultado final se obtiene un error de predicción.

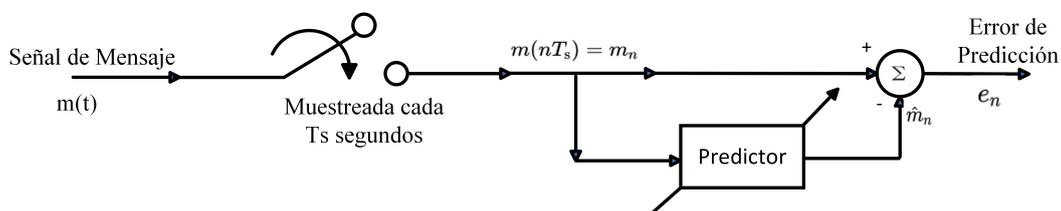


Figura 2.3: Diagrama de bloque de un filtro predictor de error.

En la Figura 2.4 se tiene un predictor directo que consta de un filtro de respuesta de impulso de duración finita (FIR) con  $M$  pesos de derivación  $[(w_{f,1}^*), (w_{f,2}^*), (w_{f,M-1}^*), (w_{f,M}^*)]$  y entradas de derivación  $[u(n), u(n-1), u(n-2), u(n-M+1), u(n-M)]$ , respectivamente. Suponemos que estas entradas de derivación se toman de un proceso estocástico estacionario de sentido amplio de media cero. Adicionalmente suponemos que los pesos están optimizados en el sentido del error cuadrático medio de acuerdo con la teoría del filtro de Wiener [20].

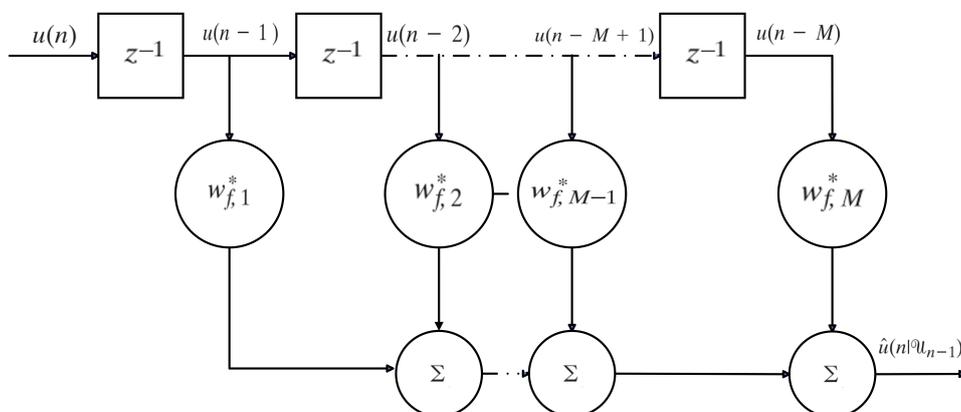


Figura 2.4: Diagrama de Bloques de un filtro FIR predictor de error .

Los pesos están optimizados en el sentido del error cuadrático medio, basado en la teoría del filtro de Wiener.

El valor predicho es:

$$\hat{u}(n | u_{n-1}) = \sum_{k=1}^M w_{f,k}^* u(n-k), \quad (2.26)$$

Como se puede observar el \* indica conjugación compleja. Para la situación descrita aquí, la respuesta deseada  $d(n)$  es igual a  $u(n)$ , representando la muestra real del proceso de entrada en el tiempo  $n$ .

$$\hat{u}(n | u_{n-1}) = \sum_{k=1}^M w_{f,k}^* u(n-k), \quad (2.27)$$

Se puede escribir de la siguiente manera:

$$d(n) = u(n) \quad (2.28)$$

El error de predicción es igual a la diferencia entre la muestra de entrada  $u(n)$  y su valor predicho  $\hat{u}(n | u_{n-1})$ . Denotamos el error de predicción hacia adelante por  $f_M(n)$ , por lo tanto:

$$f_M(n) = u(n) - \hat{u}(n | u_{n-1}). \quad (2.29)$$

La minimización del error de predicción se logra cuando se determinan los pesos óptimos del filtro, los cuales son obtenidos mediante la ecuación de Wiener-hopf [21] dada por :

$$\mathbf{W}_o = \mathbf{R}_M^{-1} \mathbf{r}_M \quad (2.30)$$

Donde  $\mathbf{R}_M^{-1}$  es la matriz inversa de la matriz de autocorrelación de la señal original de mensaje, mientras que  $\mathbf{r}_M$  es un vector fila de autocorrelación de la misma señal. En este caso, se asume que la matriz de autocorrelación tiene inversa, y es posible calcularla. No obstante, esto no siempre es posible. Para resolver este inconveniente se utilizará el diseño del filtro FIR predictor el algoritmo RLS, siendo este uno de los más robustos y de convergencia rápida a comparación de los algoritmos LMS y NLMS, el cual mediante un proceso iterativo es capaz de determinar los valores óptimos de los pesos del sistema, para analizar el rendimiento del sistema se realizarán pruebas con

diferentes errores de tasa de muestreo.

### 2.4.2. Modulación PCM

La modulación PCM (Pulse Code Modulation) se responsabiliza de convertir la señal analógica en señal digital en donde la cuantificación se encarga de proporcionar un valor en tiempo discreto mediante un valor redondeado de cada muestra, posterior a esto la señal es codificada en secuencia de pulsos digitales los cuales representan valores de amplitud de la señal original.

En una modulación de código de pulso primero la señal analógica es muestreada con una tasa mayor que la de Nyquist, para posteriormente cuantificar las muestras, en donde el número de cuantificación es grande. Si los niveles de cuantificación son iguales hablamos de una PCM uniforme, mientras que si la cuantificación es desigual es un caso de PCM no uniforme [22].

Los elementos básicos de un transmisor PCM es la fuente analógica que es la encargada de la producción de una señal de tiempo continuo y valor continuo, el filtrado hace uso de un Filtro Paso Bajo (de las siglas en inglés Low Pass Filter, LPF) el cual permite atenuar las señales de alta frecuencia originales, estos no son necesarios para evitar el sobre muestreo, el muestreo se encarga de proporcionar una señal de tiempo continuo en tiempo discreto, la codificación es donde se traducen los valores de muestra en números binarios [23].

Dentro de los elementos importantes esta el muestreo en donde provee una señal de banda limitada utilizando pulsos rectangulares ajustados a una velocidad de al menos el doble de la frecuencia filtrada [23].

Los elementos básicos de de un transmisor PCM que se pueden encontrar son:

- Fuente analógica: obtención de una señal de tiempo continuo y valor continuo.
- Filtrado: uso de un filtro paso bajo para atenuar las ondas de frecuencia alta de la señal original para evitar el efecto de interferencia de alias en el proceso de muestreo.
- Muestreo: provee una señal de valor continuo en tiempo discreto mediante el muestreo de la señal de banda limitada, utilizando pulsos rectangulares

estrechos a una velocidad de al menos dos veces de la frecuencia más alta presente en la señal filtrada.

Si  $m(t)$  es una señal limitada en banda de valor real, entonces puede determinarse de manera única a partir de sus valores  $m(nT_s)$  muestreados a intervalos uniformes  $T_s [\leq 1 / (2f_M)]$  Por lo tanto,  $m(t)$  es dada por:

$$m(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_s) \frac{\sin \omega_M (t - nT_s)}{\omega_M (t - nT_s)} \quad (2.31)$$

En donde  $T_s$  es el tiempo de muestreo y su inversa  $f_s = 1/T_s$  como la tasa de muestreo. Por lo tanto, el teorema de muestreo establece que una señal limitada en banda no tiene componentes de frecuencia superiores a  $f_M$  Hz puede recuperarse completamente de un conjunto de muestras tomadas a una velocidad de  $f_s (\geq 2f_M)$  muestras por segundo. La tasa de muestreo mínima,  $2f_M$  muestras por segundo, se denomina tasa de Nyquist; es recíproco  $1 / (2f_M)$  se denomina intervalo de Nyquist. El requerimiento de que la frecuencia de muestreo sea igual o superior al doble de la frecuencia más alta se aplica a las señales de banda base o de paso bajo. Sin embargo, cuando se van a muestrear señales de paso de banda, a veces se pueden usar frecuencias de muestreo más bajas [24].

Por lo tanto una señal muestreada ideal es la multiplicación de  $m(t)$  por un tren de impulsos unitarios  $\delta_T(t)$ .

$$m_s(t) = m(t)\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_s) \delta(t - nT_s) \quad (2.32)$$

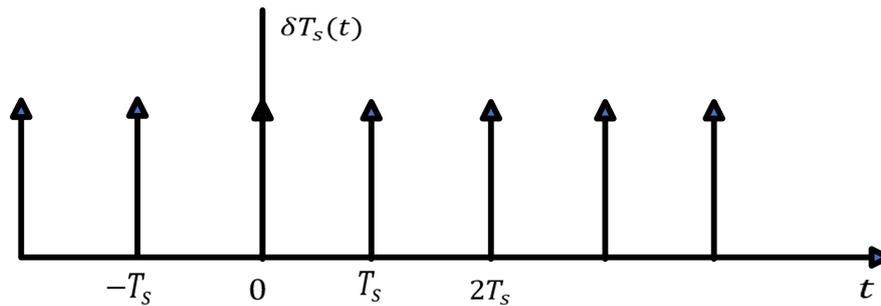


Figura 2.5: Tren de Impulsos Unitarios.

- Cuantificación: proporciona una señal de tiempo discreto y valor discreto redondeando el valor de cada muestra.

Para analizar la cuantificación uniforme suponemos que la amplitud de  $m(t)$  está en el rango  $(-m_p, m_p)$ . Como se ilustra en la Figura 2.6, este rango se divide en zonas L, cada uno con tamaño  $\Delta$ , dado por :

$$\Delta = \frac{2m_p}{L} \quad (2.33)$$

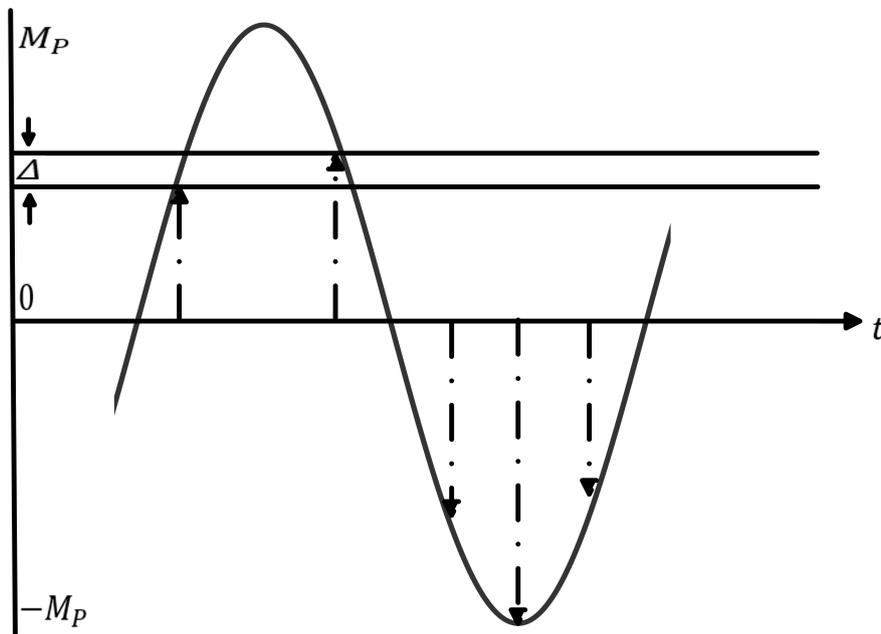


Figura 2.6: Cuantificación Uniforme

- Codificación: bloque encargado de traducir cada uno de los valores de muestra

cuantificados en un número binario único. Adicionalmente para comprensión de la codificación tenemos los datos digitales aquellos que se transmiten mediante varias formas de onda de pulso, a estas formas de onda de pulso se denominan códigos de línea. La Figura 2.7 muestra varios formatos de señal para la transmisión de datos binarios 10110001 [24].

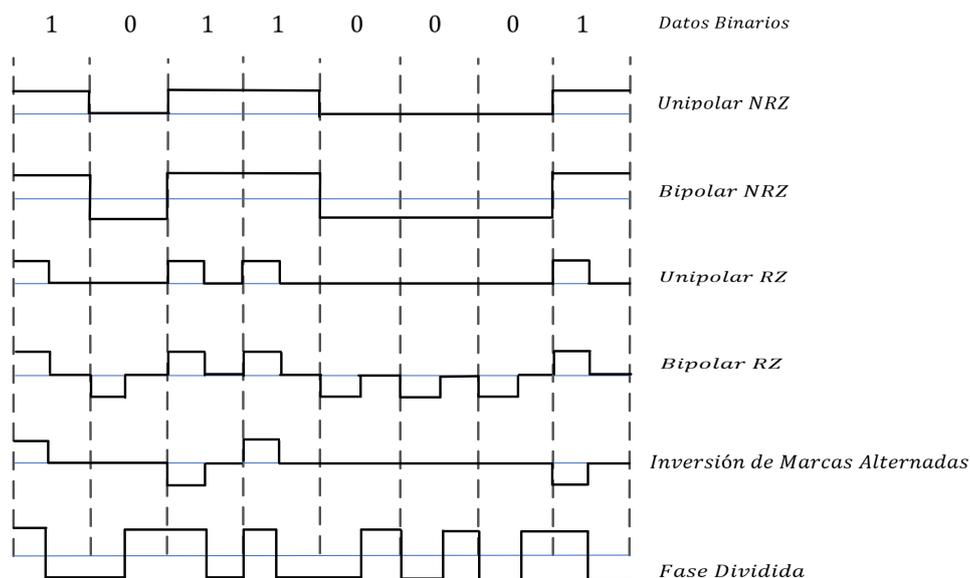


Figura 2.7: Formatos de señalización binaria.

- Señalización unipolar sin retorno a cero (NRZ): la transmisión de un pulso de amplitud constante durante todo el lapso del intervalo de bit se representa con el símbolo 1, y el símbolo 0 se expresa sin pulso. NRZ indica que el nivel de amplitud asignado se mantiene durante todo el intervalo de bits.
- Señalización bipolar NRZ: los símbolos 1 y 0 están representados por pulsos de similar amplitud positiva y negativa. En cualquier caso, el nivel de amplitud de pulso asignado se mantiene durante todo el intervalo de bits.
- Señalización unipolar de retorno a cero (RZ): el símbolo 1 se encuentra representado por un pulso positivo que vuelve a cero antes del final del intervalo de bit, y el símbolo 0 se expresa por la inexistencia de pulso.
- Señalización bipolar RZ: utiliza pulsos que presentan una amplitud equivalente en sus componentes positivos y negativos para los símbolos 1 y 0. En cualquier caso, el pulso vuelve a 0 antes del final del intervalo de bits.

- Señalización RZ de inversión de marca alternada (AMI): los pulsos positivos y negativos (de igual amplitud) se utilizan alternativamente para el símbolo 1, sin embargo con el símbolo 0 ningún pulso se usa. En cualquier caso, el pulso vuelve a 0 antes del final del intervalo de bit.
- Señalización de fase dividida (Manchester): el símbolo 1 está representado por un pulso positivo continuo de un pulso negativo, por lo tanto, ambos pulsos de igual amplitud y duración de medio bit; para el símbolo 0, las polaridades de estos pulsos están invertidas.

En la Figura 2.8 se tiene un diagrama básico de modulación PCM

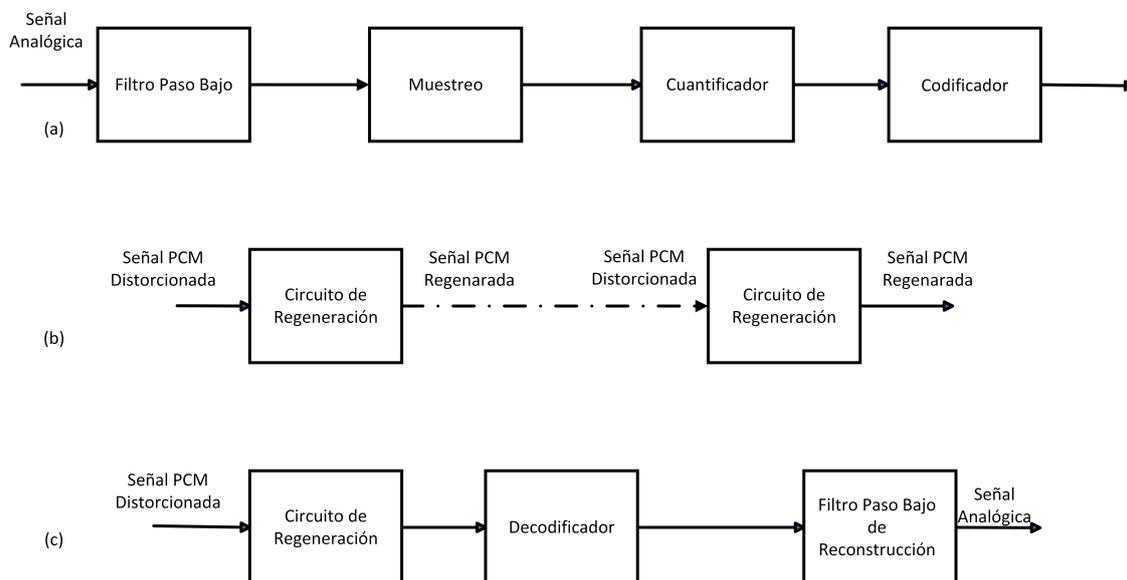


Figura 2.8: Esquema de Modulación PCM a) Transmisor b) Ruta de transmisión c) Receptor PCM .

# Capítulo 3

## Resultados

Para la obtención de los resultados se trabajó con tres tipos de señales: Sinusoidal, Dirichlet y señal de audio, para las dos primeras señales se realizó 48 experimentos variando los parámetros delta, SNR y el número de muestras tal como se observa en la tabla 3.1. Para efectos de análisis del desempeño del filtro predictor RLS, se consideraron tan solo ocho experimentos divididos en cuatro con condiciones altas de ruido y el resto con condiciones de ruido casi nulas. Para el análisis de la señal de audio se realizó 8 experimentos como se puede observar en la tabla 3.2 se utilizó una señal de dos minutos , adicionalmente para el análisis del desempeño del filtro predictor RLS, se consideró una tasa de muestreo de 1500 muestras por segundo, y una condición de ruido alta, para efectos de visualización se tomo seis milisegundos de la señal total.

Tabla 3.1: Tabla de experimentos para señales Sinusoidal y Dirichlet

Delta	Snr	Muestras	Experimentos
0.001	100	2	1
0.001	100	4	2
0.001	100	8	3
0.001	100	16	4
0.001	0.5	2	5
0.001	0.5	4	6
0.001	0.5	8	7
0.001	0.5	16	8
0.001	0.3	2	9
0.001	0.3	4	10
0.001	0.3	8	11
0.001	0.3	16	12
0.001	0.1	2	13
0.001	0.1	4	14
0.001	0.1	8	15
0.001	0.1	16	16
0.01	100	2	17
0.01	100	4	18
0.01	100	8	19
0.01	100	16	20
0.01	0.5	2	21
0.01	0.5	4	22
0.01	0.5	8	23
0.01	0.5	16	24
0.01	0.3	2	25
0.01	0.3	4	26
0.01	0.3	8	27
0.01	0.3	16	28
0.01	0.1	2	29
0.01	0.1	4	30
0.01	0.1	8	31
0.01	0.1	16	32
0.1	100	2	33
0.1	100	4	34
0.1	100	8	35
0.1	100	16	36
0.1	0.5	2	37
0.1	0.5	4	38
0.1	0.5	8	39
0.1	0.5	16	40
0.1	0.3	2	41
0.1	0.3	4	42
0.1	0.3	8	43
0.1	0.3	16	44
0.1	0.1	2	45
0.1	0.1	4	46
0.1	0.1	8	47
0.1	0.1	16	48

Tabla 3.2: Tabla de experimentos para señal de audio

Experimentos	Delta Factor de Iniciación	SNR (dB)	fs/s	Lambda Factor de Olvido
1	0,1	0,1	1.500	0.99
2	0,1	0,1	3000	0.99
3	0,1	0,1	4500	0.99
4	0,1	0,1	6000	0.99
5	0,1	100	7500	0.99
6	0,1	100	9000	0.99
7	0,1	100	10500	0.99
8	0,1	100	12000	0.99
9	0,1	0.1	7500	0.5
10	0,1	0.1	9000	0.5
11	0,1	0.1	10500	0.5
12	0,1	0.1	12000	0.5

### 3.1. Resultado de Gráficas con Señal Sinusoidal

#### 3.1.1. Resultados de Señal Sinusoidal con 2 muestras y SNR de 100dB

En la figura 3.1 se muestra los resultados obtenidos de la señal sinusoidal original que se desea recuperar con una condición de ruido casi nula, para este experimento se tomó solo 2 muestras para la señal de ingreso dando como resultado la señal recuperada de la primera etapa, posteriormente se realizó seis etapas más de filtrado para poder recuperar la señal de mejor manera obteniendo como resultado final la señal recuperada de la etapa siete. Para estas evaluaciones se consideró 256 pesos para el filtro adaptativo RLS, este valor fue determinado con base en el desempeño del error cuadrático promedio obtenido del filtro al recuperar la señal deseada. Para la obtención del error cuadrático promedio se aplicó la siguiente formula:  $e_n = \frac{\|X_i - X_j\|^2}{N}$ , en donde  $\|\cdot\|^2$  denota la norma al cuadrado de la diferencia de la señal recuperada menos la señal original dividido para el número de muestras, por lo tanto, el error comparativo entre la señal original y la señal recuperada de la primera etapa es 0.158, mientras que el error comparativo de la señal original y la señal recuperada es de 0.000, lo cual indica que son similares.

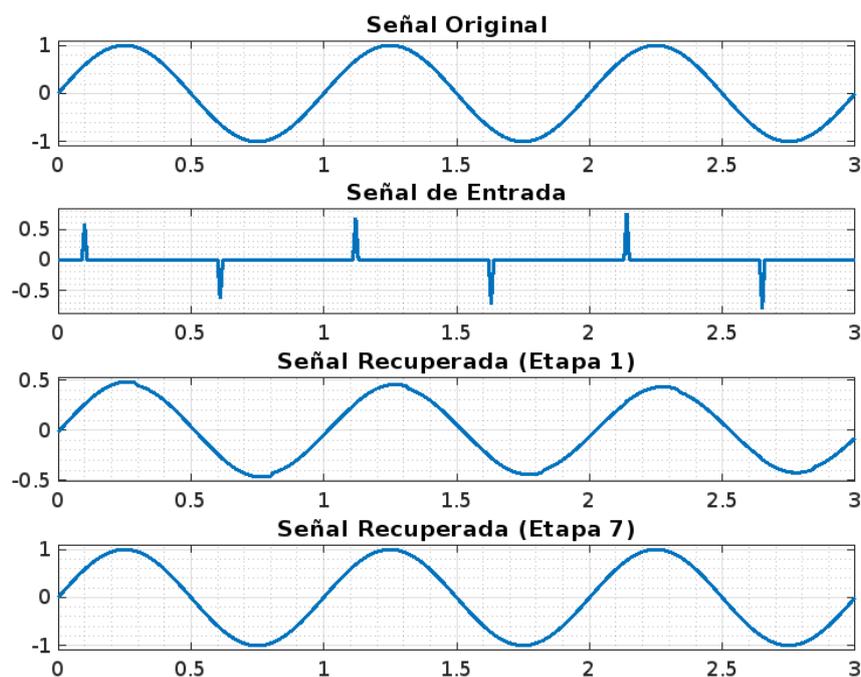


Figura 3.1: SNR=100 dB, Muestras=2, Delta=0.001

En la figura 3.2, la primera columna ilustra la señal original y su codificación respectiva, mientras que la segunda columna ilustra la señal que no tiene un proceso adecuado de muestreo, incumpliendo el criterio de Nyquist y que fue enviada tanto al filtro predictor como al sistema de modulación PCM, dando como resultado una codificación PCM errónea al no ser procesada por el sistema predictor en primera instancia. Por otro lado, la tercera columna ilustra la señal que se obtiene del filtro predictor y que posteriormente fue enviada al sistema de modulación PCM, obteniendo una codificación adecuada del sistema PCM, como si se hubiese utilizado la señal original con su frecuencia de muestreo adecuada.

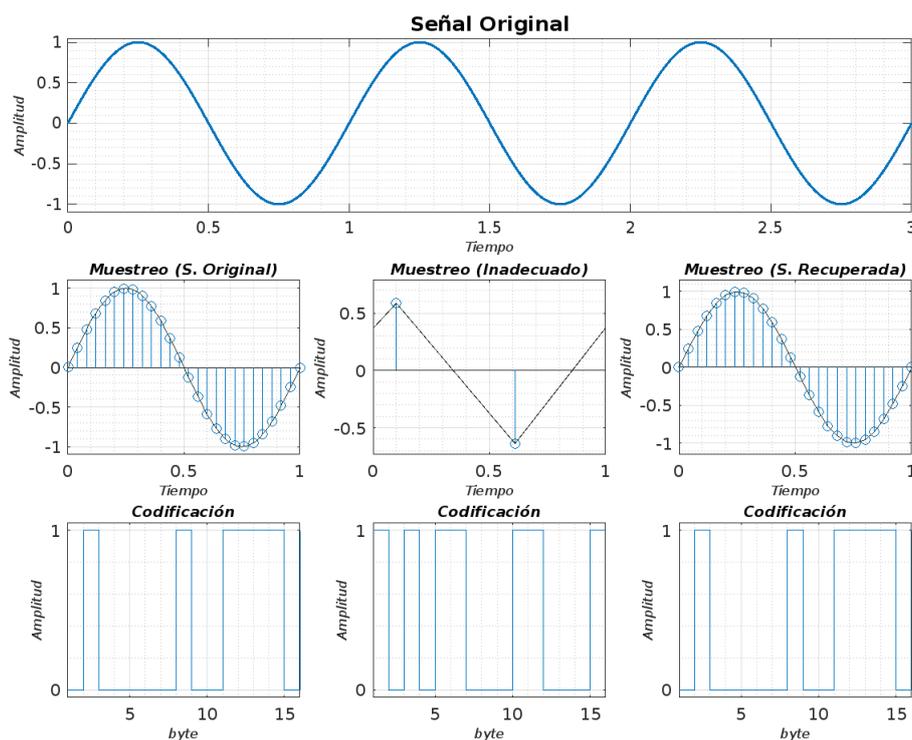


Figura 3.2: SNR=100 dB, Muestras=2, Delta=0.001

### 3.1.2. Resultados de Señal Sinusoidal con 4 muestras y SNR de 100dB

En la figura 3.3 se muestra los resultados obtenidos de la señal sinusoidal original que se desea recuperar con una condición de ruido casi nula, para este experimento se tomó solo 4 muestras para la señal de ingreso dando como resultado la señal recuperada de la primera etapa, posteriormente se realizó seis etapas más de filtrado para poder recuperar la señal de mejor manera obteniendo como resultado final la señal recuperada de la etapa siete. Para estas evaluaciones se consideró 256 pesos para el filtro adaptativo RLS, este valor fue determinado con base en el desempeño del error cuadrático promedio obtenido del filtro al recuperar la señal deseada. De acuerdo a los resultados obtenidos el error comparativo entre la señal original y la señal recuperada de la primera etapa es 0.024, mientras que el error comparativo de la señal original y la señal recuperada es de 0.000, lo cual indica que son similares.

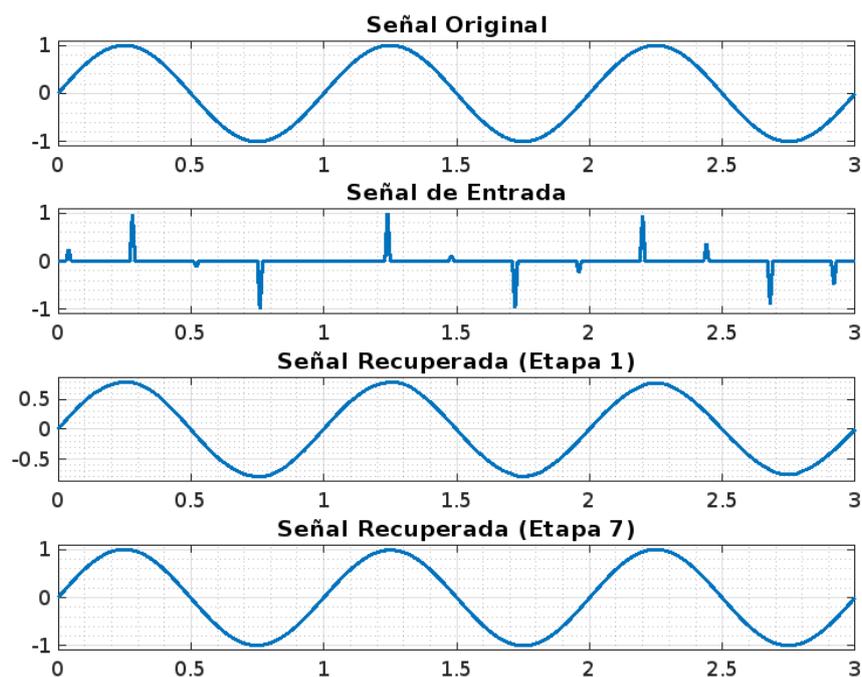


Figura 3.3: SNR=100 dB, Muestras=4, Delta=0.001

En la figura 3.4, la primera columna ilustra la señal original y su codificación respectiva, mientras que la segunda columna ilustra la señal que no tiene un proceso adecuado de muestreo, incumpliendo el criterio de Nyquist y que fue enviada tanto al filtro predictor como al sistema de modulación PCM, dando como resultado una codificación PCM errónea al no ser procesada por el sistema predictor en primera instancia. Por otro lado, la tercera columna ilustra la señal que se obtiene del filtro predictor y que posteriormente fue enviada al sistema de modulación PCM, obteniendo una codificación adecuada del sistema PCM, como si se hubiese utilizado la señal original con su frecuencia de muestreo adecuada.

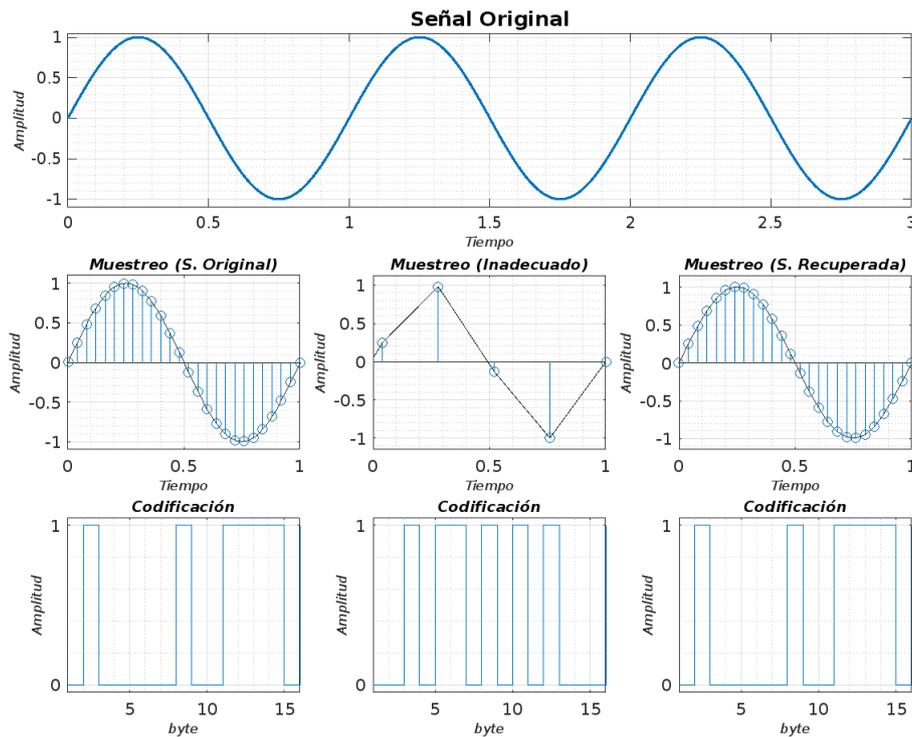


Figura 3.4: SNR=100 dB, Muestras=4, Delta=0.001

### 3.1.3. Resultados de Señal Sinusoidal con 8 muestras y SNR de 100dB

En la figura 3.5 se muestra los resultados obtenidos de la señal sinusoidal original que se desea recuperar con una condición de ruido casi nula, para este experimento se tomó solo 8 muestras para la señal de ingreso dando como resultado la señal recuperada de la primera etapa, posteriormente se realizó seis etapas más de filtrado para poder recuperar la señal de mejor manera obteniendo como resultado final la señal recuperada de la etapa siete. Para estas evaluaciones se consideró 256 pesos para el filtro adaptativo RLS, este valor fue determinado con base en el desempeño del error cuadrático promedio obtenido del filtro al recuperar la señal deseada. De acuerdo a los resultados obtenidos el error comparativo entre la señal original y la señal recuperada de la primera etapa es 0.000, mientras que el error comparativo de la señal original y la señal recuperada es de 0.000, lo cual indica que son similares.

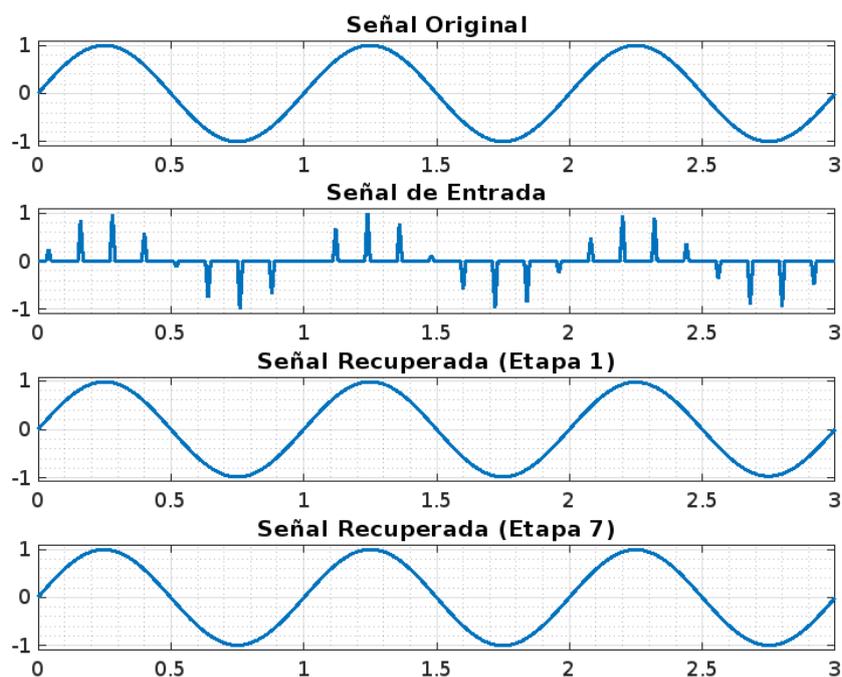


Figura 3.5: SNR=100 dB, Muestras=8, Delta=0.001

En la figura 3.6, la primera columna ilustra la señal original y su codificación respectiva, mientras que la segunda columna ilustra la señal que no tiene un proceso adecuado de muestreo, incumpliendo el criterio de Nyquist y que fue enviada tanto al filtro predictor como al sistema de modulación PCM, dando como resultado una codificación PCM errónea al no ser procesada por el sistema predictor en primera instancia. Por otro lado, la tercera columna ilustra la señal que se obtiene del filtro predictor y que posteriormente fue enviada al sistema de modulación PCM, obteniendo una codificación adecuada del sistema PCM, como si se hubiese utilizado la señal original con su frecuencia de muestreo adecuada.

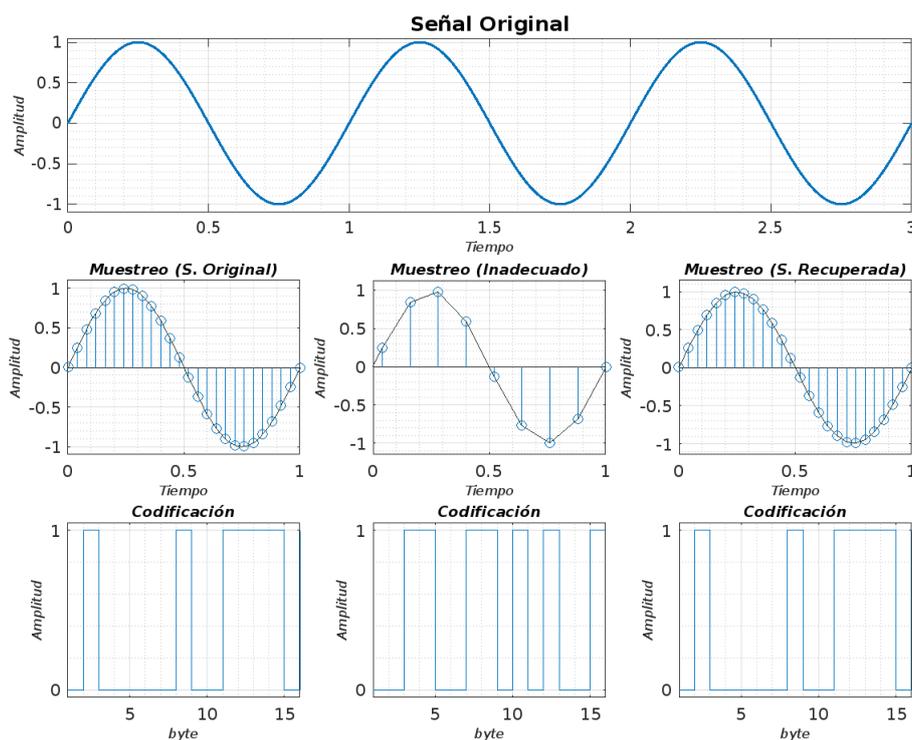


Figura 3.6: SNR=100 dB, Muestras=8, Delta=0.001

### 3.1.4. Resultados de Señal Sinusoidal con 16 muestras y SNR de 100dB

En la figura 3.7 se muestra los resultados obtenidos de la señal sinusoidal original que se desea recuperar con una condición de ruido casi nula, para este experimento se tomó solo 16 muestras para la señal de ingreso dando como resultado la señal recuperada de la primera etapa, posteriormente se realizó seis etapas más de filtrado para poder recuperar la señal de mejor manera obteniendo como resultado final la señal recuperada de la etapa siete. Para estas evaluaciones se consideró 256 pesos para el filtro adaptativo RLS, este valor fue determinado con base en el desempeño del error cuadrático promedio obtenido del filtro al recuperar la señal deseada. De acuerdo a los resultados obtenidos el error comparativo entre la señal original y la señal recuperada de la primera etapa es 0.000, mientras que el error comparativo de la señal original y la señal recuperada es de 0.000, lo cual indica que son similares.

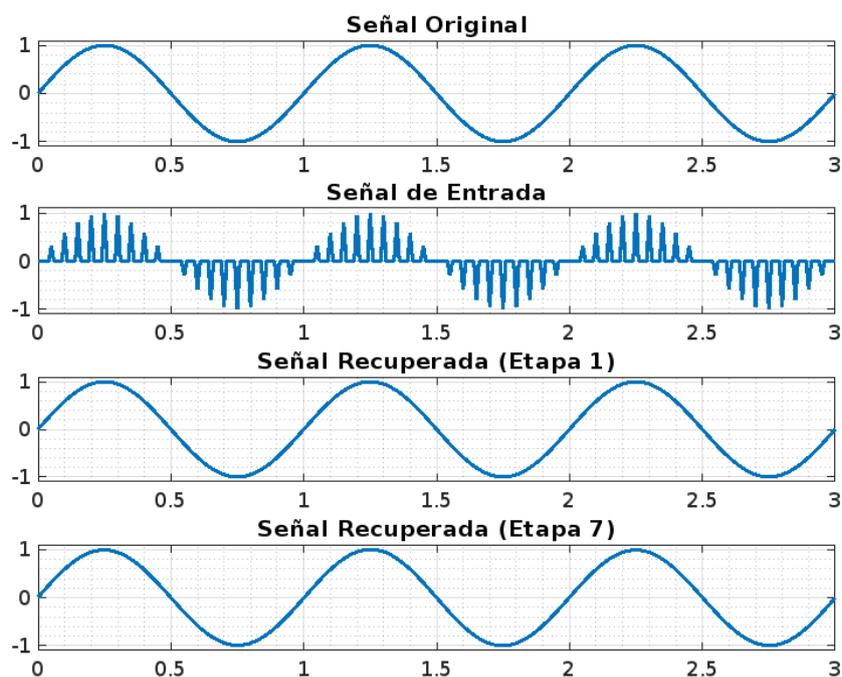


Figura 3.7: SNR=100 dB, Muestras=16, Delta=0.001

En la figura 3.8, la primera columna ilustra la señal original y su codificación respectiva, mientras que la segunda columna ilustra la señal que no tiene un proceso adecuado de muestreo, incumpliendo el criterio de Nyquist y que fue enviada tanto al filtro predictor como al sistema de modulación PCM, dando como resultado una codificación PCM errónea al no ser procesada por el sistema predictor en primera instancia. Por otro lado, la tercera columna ilustra la señal que se obtiene del filtro predictor y que posteriormente fue enviada al sistema de modulación PCM, obteniendo una codificación adecuada del sistema PCM, como si se hubiese utilizado la señal original con su frecuencia de muestreo adecuada.

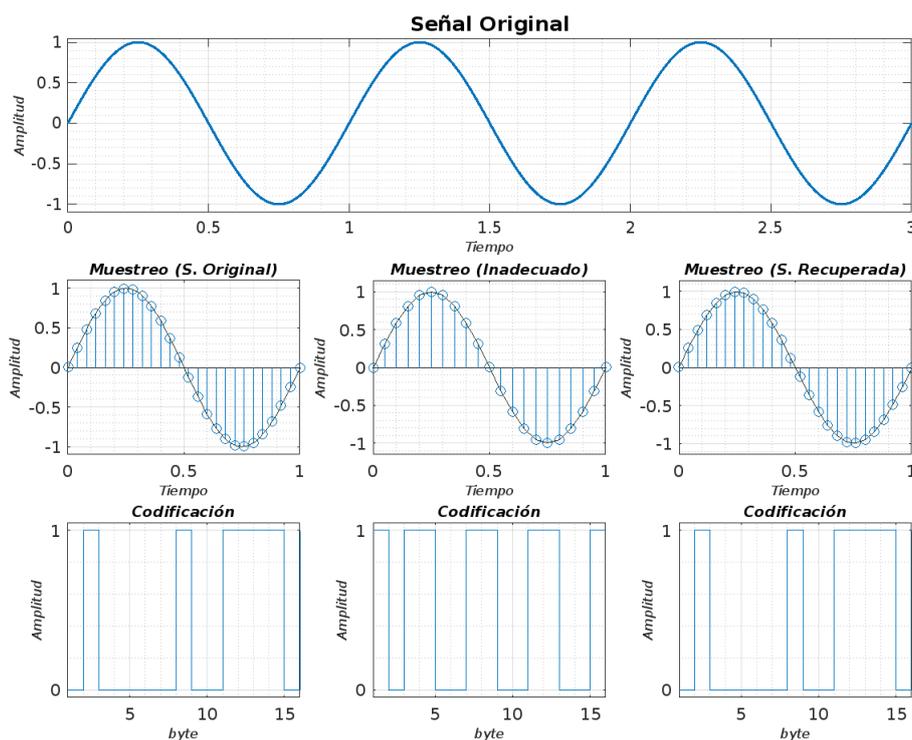


Figura 3.8: SNR=100 dB, Muestras=16, Delta=0.001

### 3.1.5. Resultados de Señal Sinusoidal con 2 muestras y SNR de 0.1dB

En la figura 3.9 se muestra los resultados obtenidos de la señal sinusoidal original que se desea recuperar con condición de ruido, para este experimento se tomó solo 2 muestras para la señal de ingreso dando como resultado la señal recuperada de la primera etapa, posteriormente se realizó seis etapas más de filtrado para poder recuperar la señal de mejor manera obteniendo como resultado final la señal recuperada de la etapa siete. Para estas evaluaciones se consideró 256 pesos para el filtro adaptativo RLS, este valor fue determinado con base en el desempeño del error cuadrático promedio obtenido del filtro al recuperar la señal deseada. De acuerdo a los resultados obtenidos el error comparativo entre la señal original y la señal recuperada de la primera etapa es 0.383, mientras que el error comparativo de la señal original y la señal recuperada es de 0.000, lo cual indica que son similares.

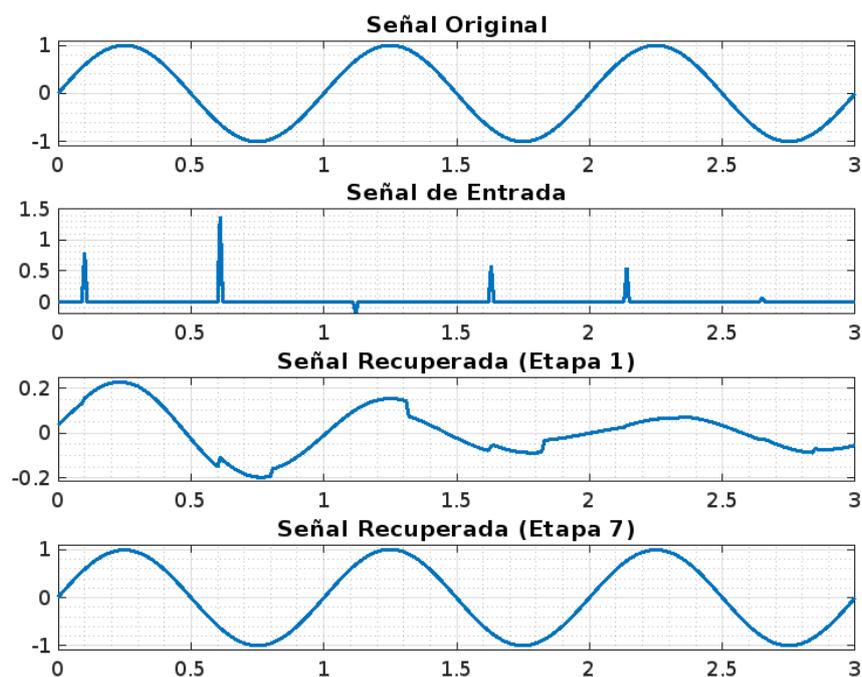


Figura 3.9: SNR=0.1 dB, Muestras=2, Delta=0.1

En la figura 3.10, la primera columna ilustra la señal original y su codificación respectiva, mientras que la segunda columna ilustra la señal que no tiene un proceso adecuado de muestreo, incumpliendo el criterio de Nyquist y que fue enviada tanto al filtro predictor como al sistema de modulación PCM, dando como resultado una codificación PCM errónea al no ser procesada por el sistema predictor en primera instancia. Por otro lado, la tercera columna ilustra la señal que se obtiene del filtro predictor y que posteriormente fue enviada al sistema de modulación PCM, obteniendo una codificación adecuada del sistema PCM, como si se hubiese utilizado la señal original con su frecuencia de muestreo adecuada.

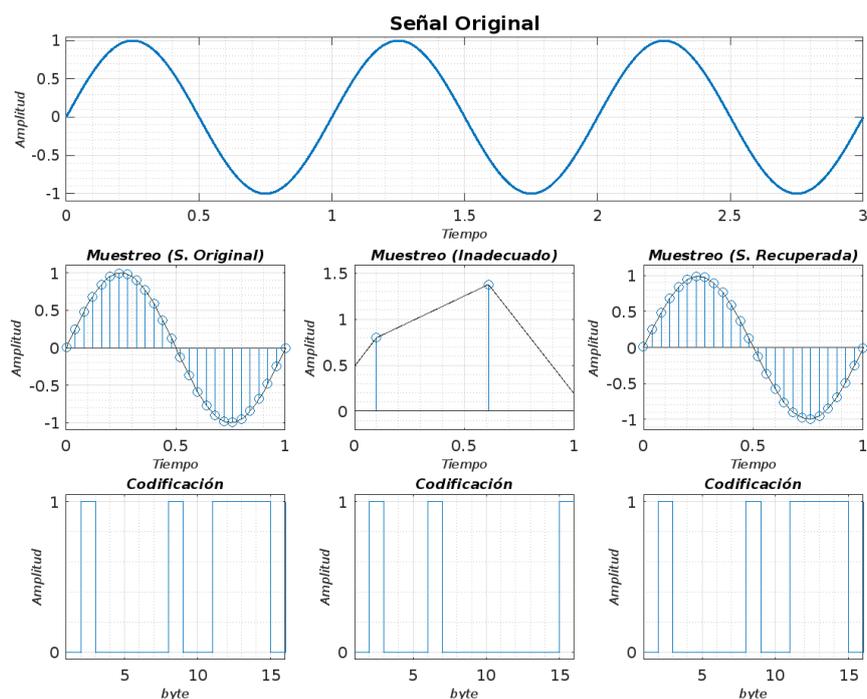


Figura 3.10: SNR=0.1 dB, Muestras=2, Delta=0.1

### 3.1.6. Resultados de Señal Sinusoidal con 4 muestras y SNR de 0.1dB

En la figura 3.11 se muestra los resultados obtenidos de la señal sinusoidal original que se desea recuperar con condición de ruido, para este experimento se tomó solo 4 muestras para la señal de ingreso dando como resultado la señal recuperada de la primera etapa, posteriormente se realizó seis etapas más de filtrado para poder recuperar la señal de mejor manera obteniendo como resultado final la señal recuperada de la etapa siete. Para estas evaluaciones se consideró 256 pesos para el filtro adaptativo RLS, este valor fue determinado con base en el desempeño del error cuadrático promedio obtenido del filtro al recuperar la señal deseada. De acuerdo a los resultados obtenidos el error comparativo entre la señal original y la señal recuperada de la primera etapa es 0.039, mientras que el error comparativo de la señal original y la señal recuperada es de 0.000, lo cual indica que son similares.

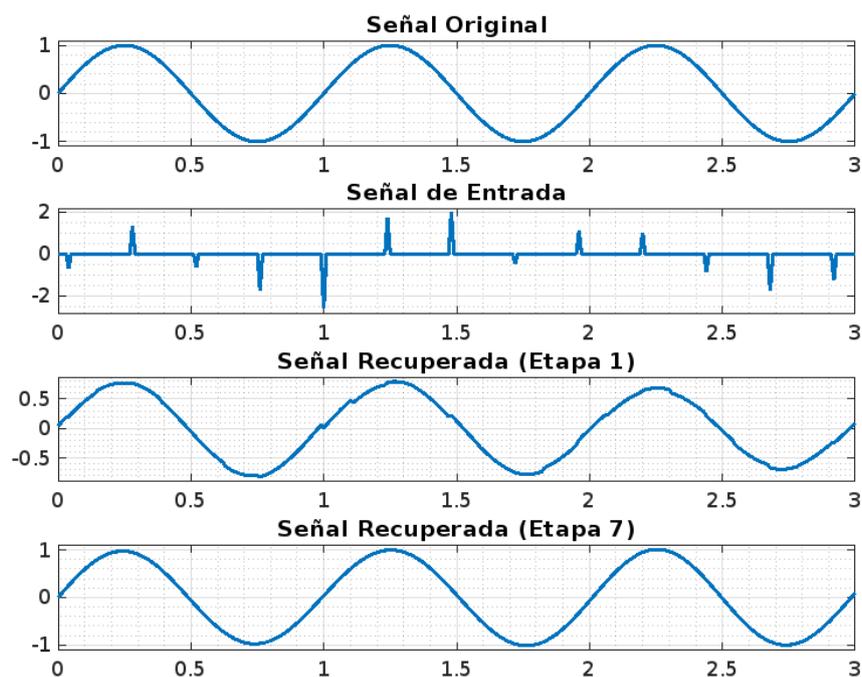


Figura 3.11: SNR=0.1 dB, Muestras=4, Delta=0.1

En la figura 3.12, la primera columna ilustra la señal original y su codificación respectiva, mientras que la segunda columna ilustra la señal que no tiene un proceso adecuado de muestreo, incumpliendo el criterio de Nyquist y que fue enviada tanto al filtro predictor como al sistema de modulación PCM, dando como resultado una codificación PCM errónea al no ser procesada por el sistema predictor en primera instancia. Por otro lado, la tercera columna ilustra la señal que se obtiene del filtro predictor y que posteriormente fue enviada al sistema de modulación PCM, obteniendo una codificación adecuada del sistema PCM, como si se hubiese utilizado la señal original con su frecuencia de muestreo adecuada.

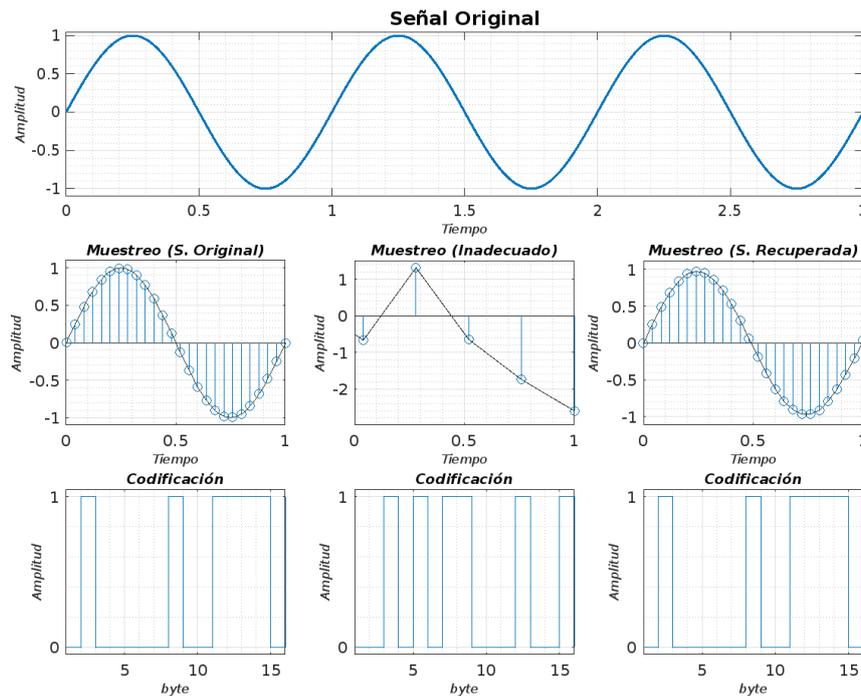


Figura 3.12: SNR=0.1 dB, Muestras=4, Delta=0.1

### 3.1.7. Resultados de Señal Sinusoidal con 8 muestras y SNR de 0.1dB

En la figura 3.13 se muestra los resultados obtenidos de la señal sinusoidal original que se desea recuperar con condición de ruido, para este experimento se tomó solo 8 muestras para la señal de ingreso dando como resultado la señal recuperada de la primera etapa, posteriormente se realizó seis etapas más de filtrado para poder recuperar la señal de mejor manera obteniendo como resultado final la señal recuperada de la etapa siete. Para estas evaluaciones se consideró 256 pesos para el filtro adaptativo RLS, este valor fue determinado con base en el desempeño del error cuadrático promedio obtenido del filtro al recuperar la señal deseada. De acuerdo a los resultados obtenidos el error comparativo entre la señal original y la señal recuperada de la primera etapa es 0.002, mientras que el error comparativo de la señal original y la señal recuperada es de 0.000, lo cual indica que son similares.

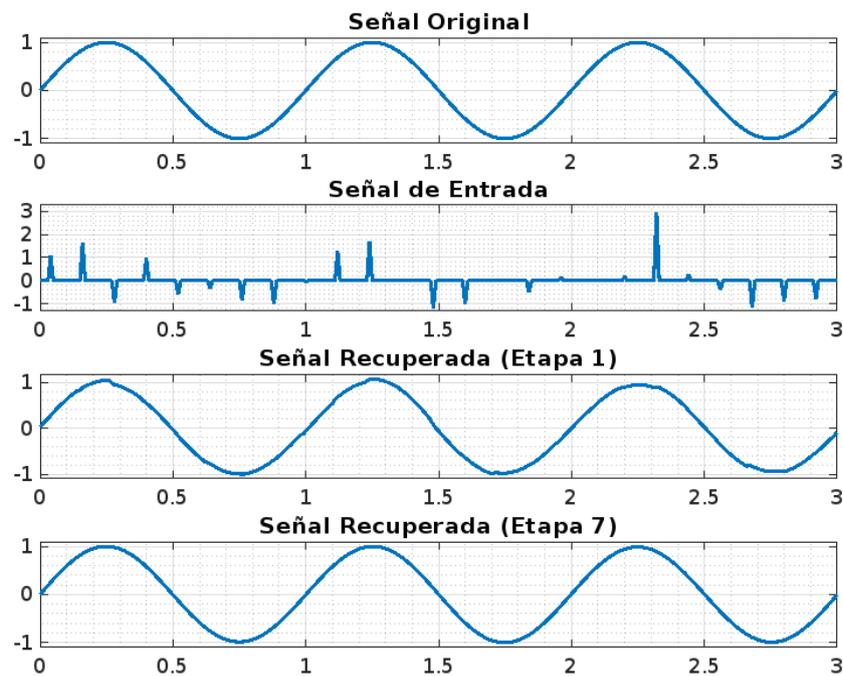


Figura 3.13: SNR=0.1 dB, Muestras=8, Delta=0.1

En la figura 3.14, la primera columna ilustra la señal original y su codificación respectiva, mientras que la segunda columna ilustra la señal que no tiene un proceso adecuado de muestreo, incumpliendo el criterio de Nyquist y que fue enviada tanto al filtro predictor como al sistema de modulación PCM, dando como resultado una codificación PCM errónea al no ser procesada por el sistema predictor en primera instancia. Por otro lado, la tercera columna ilustra la señal que se obtiene del filtro predictor y que posteriormente fue enviada al sistema de modulación PCM, obteniendo una codificación adecuada del sistema PCM, como si se hubiese utilizado la señal original con su frecuencia de muestreo adecuada.

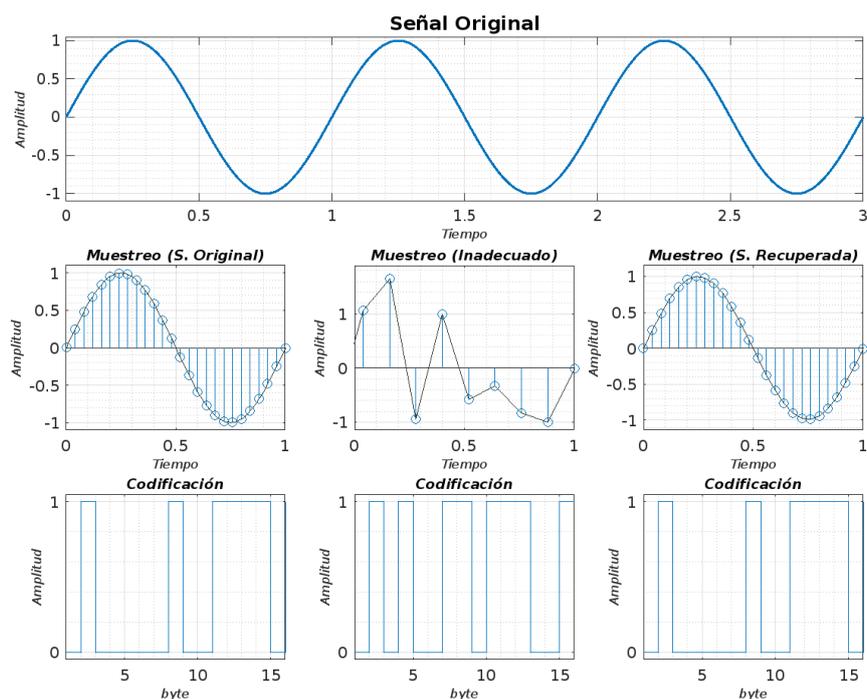


Figura 3.14: SNR=0.1 dB, Muestras=8, Delta=0.1

### 3.1.8. Resultados de Señal Sinusoidal con 16 muestras y SNR de 0.1dB

En la figura 3.15 se muestra los resultados obtenidos de la señal sinusoidal original que se desea recuperar con condición de ruido, para este experimento se tomó solo 16 muestras para la señal de ingreso dando como resultado la señal recuperada de la primera etapa, posteriormente se realizó seis etapas más de filtrado para poder recuperar la señal de mejor manera obteniendo como resultado final la señal recuperada de la etapa siete. Para estas evaluaciones se consideró 256 pesos para el filtro adaptativo RLS, este valor fue determinado con base en el desempeño del error cuadrático promedio obtenido del filtro al recuperar la señal deseada. De acuerdo a los resultados obtenidos el error comparativo entre la señal original y la señal recuperada de la primera etapa es 0.003, mientras que el error comparativo de la señal original y la señal recuperada es de 0.000, lo cual indica que son similares.

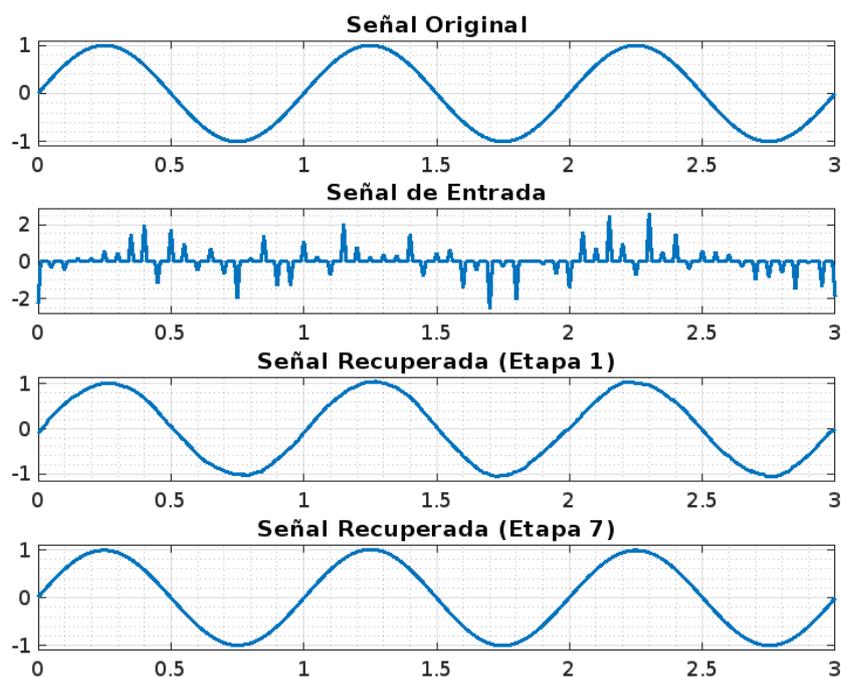


Figura 3.15: SNR=0.1 dB, Muestras=16, Delta=0.1

En la figura 3.16, la primera columna ilustra la señal original y su codificación respectiva, mientras que la segunda columna ilustra la señal que no tiene un proceso adecuado de muestreo, incumpliendo el criterio de Nyquist y que fue enviada tanto al filtro predictor como al sistema de modulación PCM, dando como resultado una codificación PCM errónea al no ser procesada por el sistema predictor en primera instancia. Por otro lado, la tercera columna ilustra la señal que se obtiene del filtro predictor y que posteriormente fue enviada al sistema de modulación PCM, obteniendo una codificación adecuada del sistema PCM, como si se hubiese utilizado la señal original con su frecuencia de muestreo adecuada.

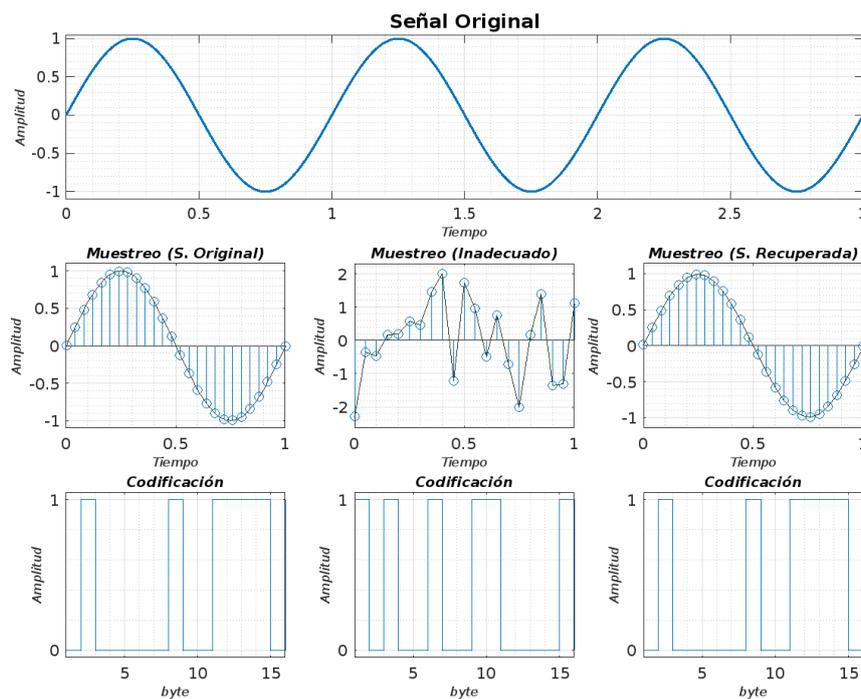


Figura 3.16: SNR=0.1 dB, Muestras=16, Delta=0.1

## 3.2. Resultados Señal de Dirichlet

### 3.2.1. Resultados Señal de Dirichlet con 2 muestras y SNR de 100dB

En la figura 3.17 se muestra los resultados obtenidos de la señal de dirichlet original que se desea recuperar con una condición de ruido casi nula, para este experimento se tomó solo 2 muestras para la señal de ingreso dando como resultado la señal recuperada de la primera etapa, posteriormente se realizó seis etapas más de filtrado para poder recuperar la señal de mejor manera obteniendo como resultado final la señal recuperada de la etapa siete. Para estas evaluaciones se consideró 256 pesos para el filtro adaptativo RLS, este valor fue determinado con base en el desempeño del error cuadrático promedio obtenido del filtro al recuperar la señal deseada. De acuerdo a los resultados obtenidos el error comparativo entre la señal original y la señal recuperada de la primera etapa es 0.164, mientras que el error comparativo de la señal original y la señal recuperada es de 0.000, lo cual indica que son similares.

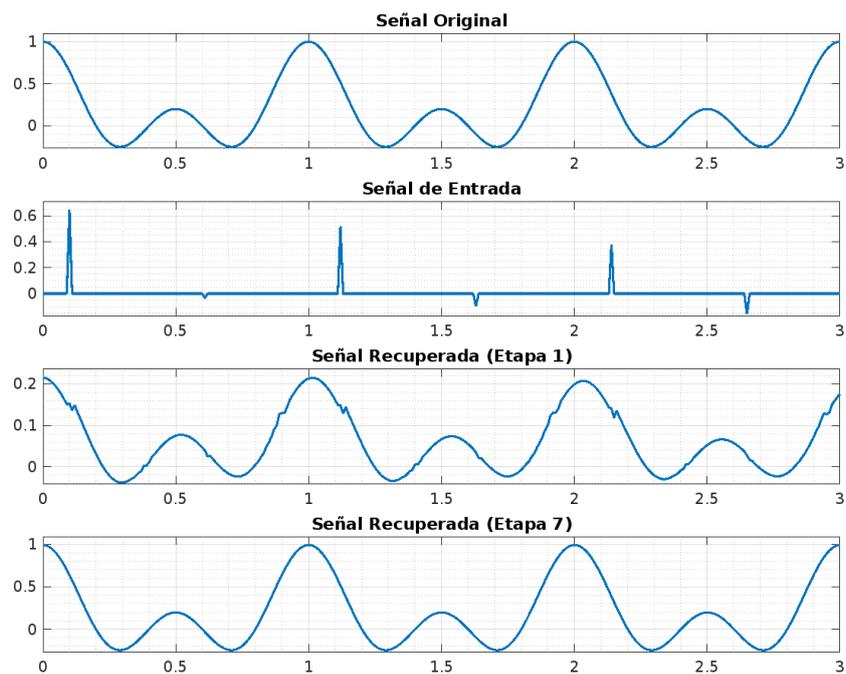


Figura 3.17: SNR=100 dB, Muestras=2, Delta=0.001

En la figura 3.18, la primera columna ilustra la señal original y su codificación respectiva, mientras que la segunda columna ilustra la señal que no tiene un proceso adecuado de muestreo, incumpliendo el criterio de Nyquist y que fue enviada tanto al filtro predictor como al sistema de modulación PCM, dando como resultado una codificación PCM errónea al no ser procesada por el sistema predictor en primera instancia. Por otro lado, la tercera columna ilustra la señal que se obtiene del filtro predictor y que posteriormente fue enviada al sistema de modulación PCM, obteniendo una codificación adecuada del sistema PCM, como si se hubiese utilizado la señal original con su frecuencia de muestreo adecuada.

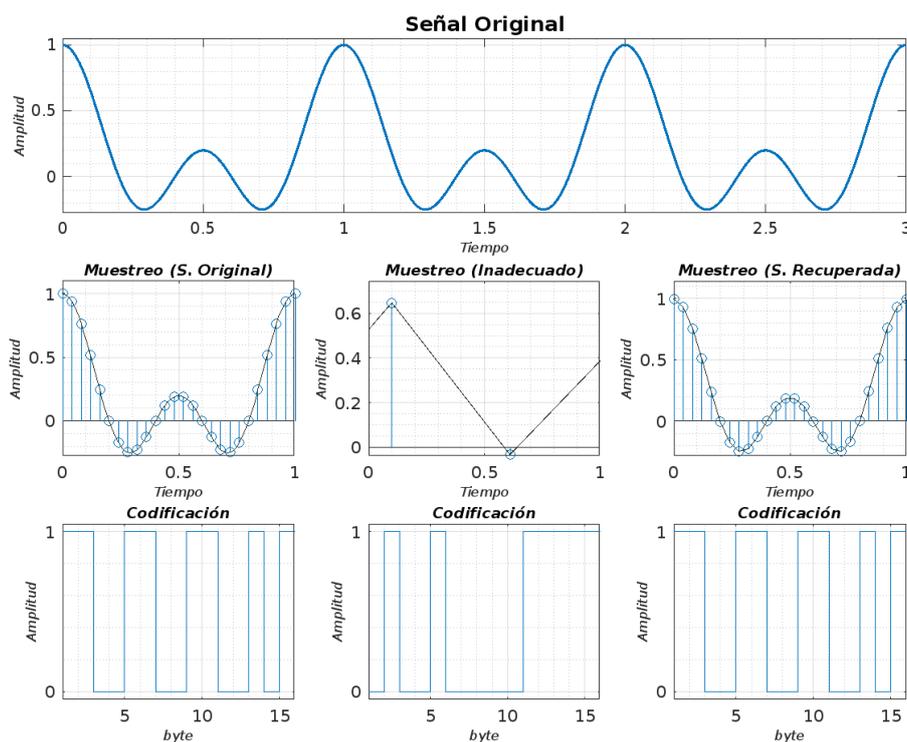


Figura 3.18: SNR=100 dB, Muestras=2, Delta=0.001

### 3.2.2. Resultados Señal de Dirichlet con 4 muestras y SNR de 100dB

En la figura 3.19 se muestra los resultados obtenidos de la señal de dirichlet original que se desea recuperar con una condición de ruido casi nula, para este experimento se tomó solo 4 muestras para la señal de ingreso dando como resultado la señal recuperada de la primera etapa, posteriormente se realizó seis etapas más de filtrado para poder recuperar la señal de mejor manera obteniendo como resultado final la señal recuperada de la etapa siete. Para estas evaluaciones se consideró 256 pesos para el filtro adaptativo RLS, este valor fue determinado con base en el desempeño del error cuadrático promedio obtenido del filtro al recuperar la señal deseada. De acuerdo a los resultados obtenidos el error comparativo entre la señal original y la señal recuperada de la primera etapa es 0.099, mientras que el error comparativo de la señal original y la señal recuperada es de 0.000, lo cual indica que son similares.

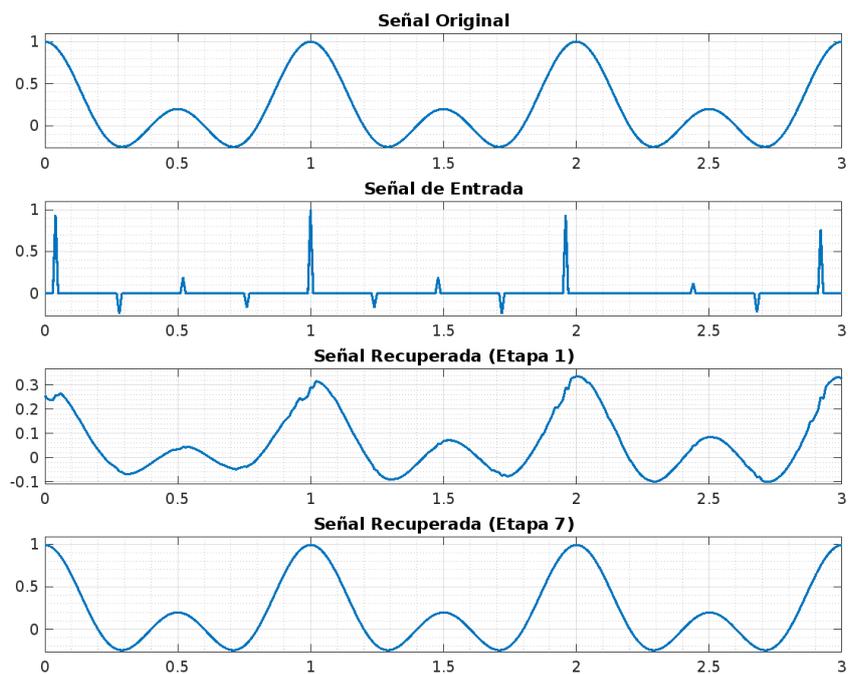


Figura 3.19: SNR=100 dB, Muestras=4, Delta=0.1

En la figura 3.20, la primera columna ilustra la señal original y su codificación respectiva, mientras que la segunda columna ilustra la señal que no tiene un proceso adecuado de muestreo, incumpliendo el criterio de Nyquist y que fue enviada tanto al filtro predictor como al sistema de modulación PCM, dando como resultado una codificación PCM errónea al no ser procesada por el sistema predictor en primera instancia. Por otro lado, la tercera columna ilustra la señal que se obtiene del filtro predictor y que posteriormente fue enviada al sistema de modulación PCM, obteniendo una codificación adecuada del sistema PCM, como si se hubiese utilizado la señal original con su frecuencia de muestreo adecuada.

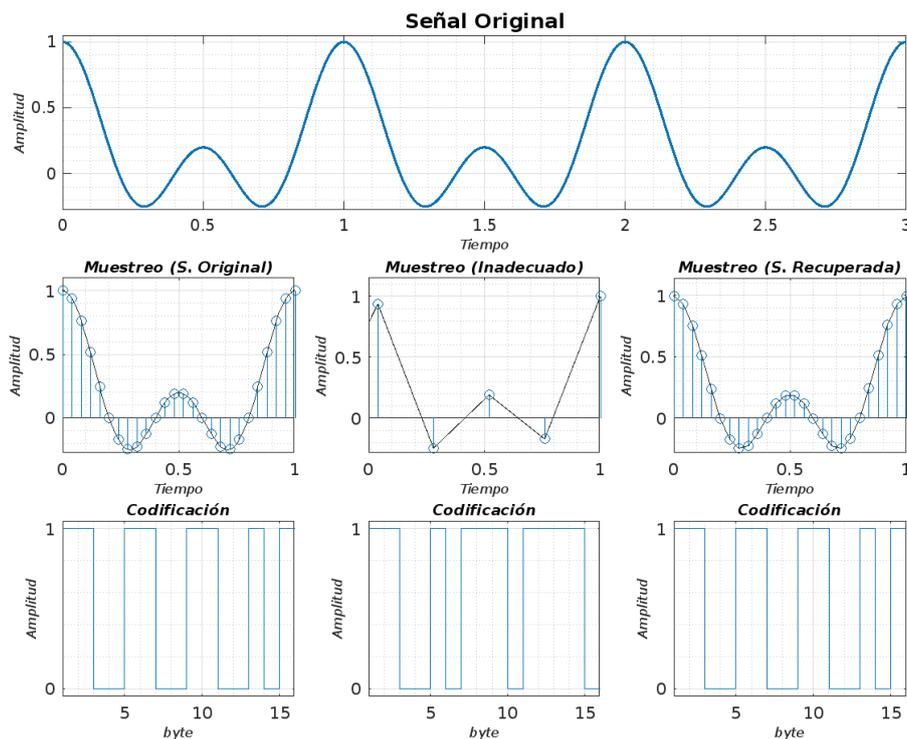


Figura 3.20: SNR=100 dB, Muestras=4, Delta=0.001

### 3.2.3. Resultados Señal de Dirichlet con 8 muestras y SNR de 100dB

En la figura 3.21 se muestra los resultados obtenidos de la señal de dirichlet original que se desea recuperar con una condición de ruido casi nula, para este experimento se tomó solo 8 muestras para la señal de ingreso dando como resultado la señal recuperada de la primera etapa, posteriormente se realizó seis etapas más de filtrado para poder recuperar la señal de mejor manera obteniendo como resultado final la señal recuperada de la etapa siete. Para estas evaluaciones se consideró 256 pesos para el filtro adaptativo RLS, este valor fue determinado con base en el desempeño del error cuadrático promedio obtenido del filtro al recuperar la señal deseada. De acuerdo a los resultados obtenidos el error comparativo entre la señal original y la señal recuperada de la primera etapa es 0.025, mientras que el error comparativo de la señal original y la señal recuperada es de 0.000, lo cual indica que son similares.

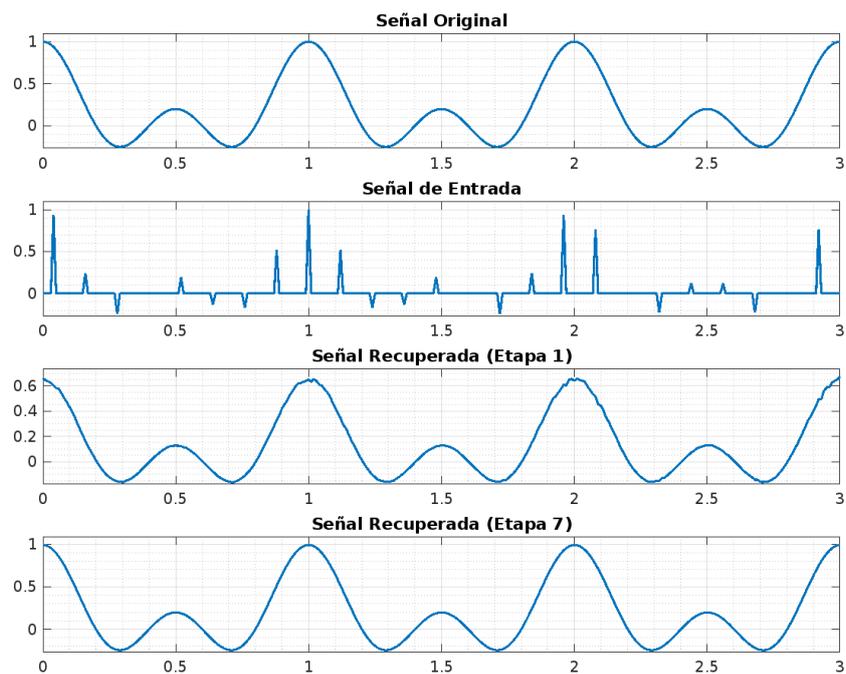


Figura 3.21: SNR=100 dB, Muestras=8, Delta=0.001

En la figura 3.22, la primera columna ilustra la señal original y su codificación respectiva, mientras que la segunda columna ilustra la señal que no tiene un proceso adecuado de muestreo, incumpliendo el criterio de Nyquist y que fue enviada tanto al filtro predictor como al sistema de modulación PCM, dando como resultado una codificación PCM errónea al no ser procesada por el sistema predictor en primera instancia. Por otro lado, la tercera columna ilustra la señal que se obtiene del filtro predictor y que posteriormente fue enviada al sistema de modulación PCM, obteniendo una codificación adecuada del sistema PCM, como si se hubiese utilizado la señal original con su frecuencia de muestreo adecuada.

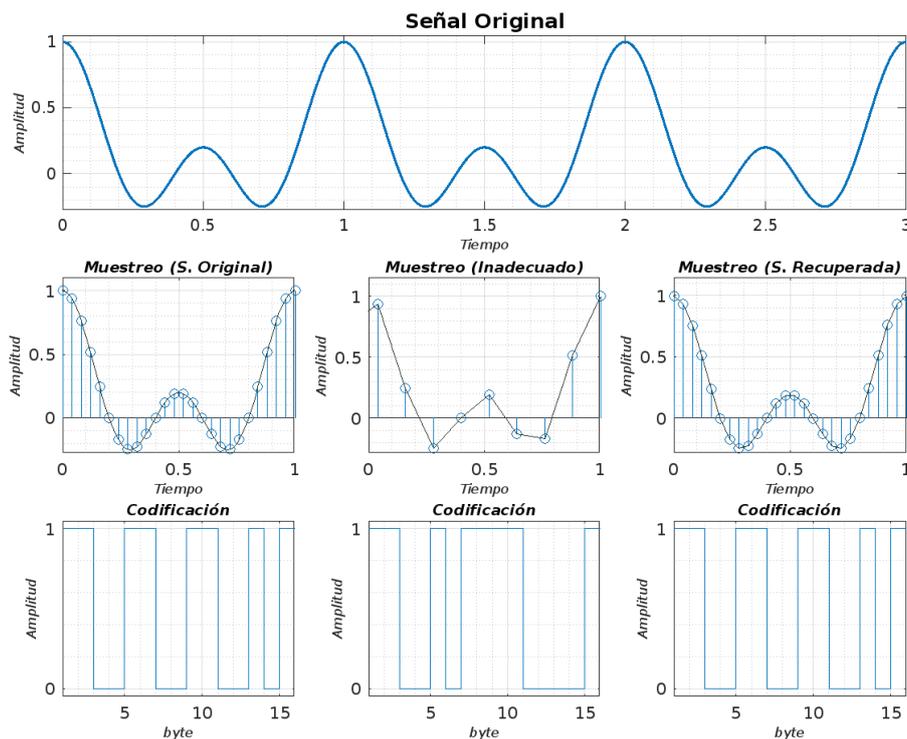


Figura 3.22: SNR=100 dB, Muestras=8, Delta=0.001

### 3.2.4. Resultados Señal de Dirichlet con 16 muestras y SNR de 100dB

En la figura 3.23 se muestra los resultados obtenidos de la señal de dirichlet original que se desea recuperar con una condición de ruido casi nula, para este experimento se tomó solo 16 muestras para la señal de ingreso dando como resultado la señal recuperada de la primera etapa, posteriormente se realizó seis etapas más de filtrado para poder recuperar la señal de mejor manera obteniendo como resultado final la señal recuperada de la etapa siete. Para estas evaluaciones se consideró 256 pesos para el filtro adaptativo RLS, este valor fue determinado con base en el desempeño del error cuadrático promedio obtenido del filtro al recuperar la señal deseada. De acuerdo a los resultados obtenidos el error comparativo entre la señal original y la señal recuperada de la primera etapa es 0.025, mientras que el error comparativo de la señal original y la señal recuperada es de 0.000, lo cual indica que son similares.

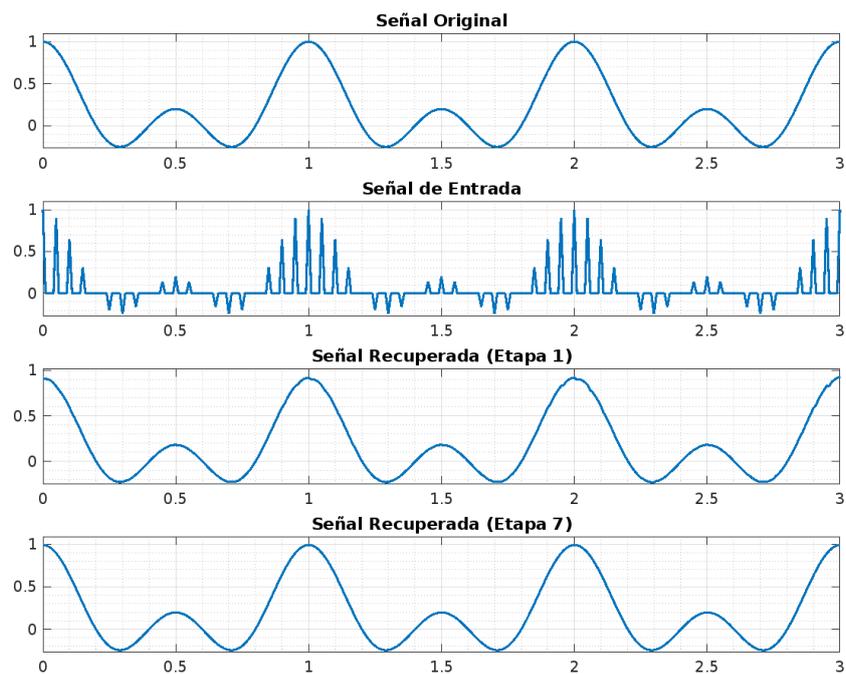


Figura 3.23: SNR=100 dB, Muestras=16, Delta=0.001

En la figura 3.24, la primera columna ilustra la señal original y su codificación respectiva, mientras que la segunda columna ilustra la señal que no tiene un proceso adecuado de muestreo, incumpliendo el criterio de Nyquist y que fue enviada tanto al filtro predictor como al sistema de modulación PCM, dando como resultado una codificación PCM errónea al no ser procesada por el sistema predictor en primera instancia. Por otro lado, la tercera columna ilustra la señal que se obtiene del filtro predictor y que posteriormente fue enviada al sistema de modulación PCM, obteniendo una codificación adecuada del sistema PCM, como si se hubiese utilizado la señal original con su frecuencia de muestreo adecuada.

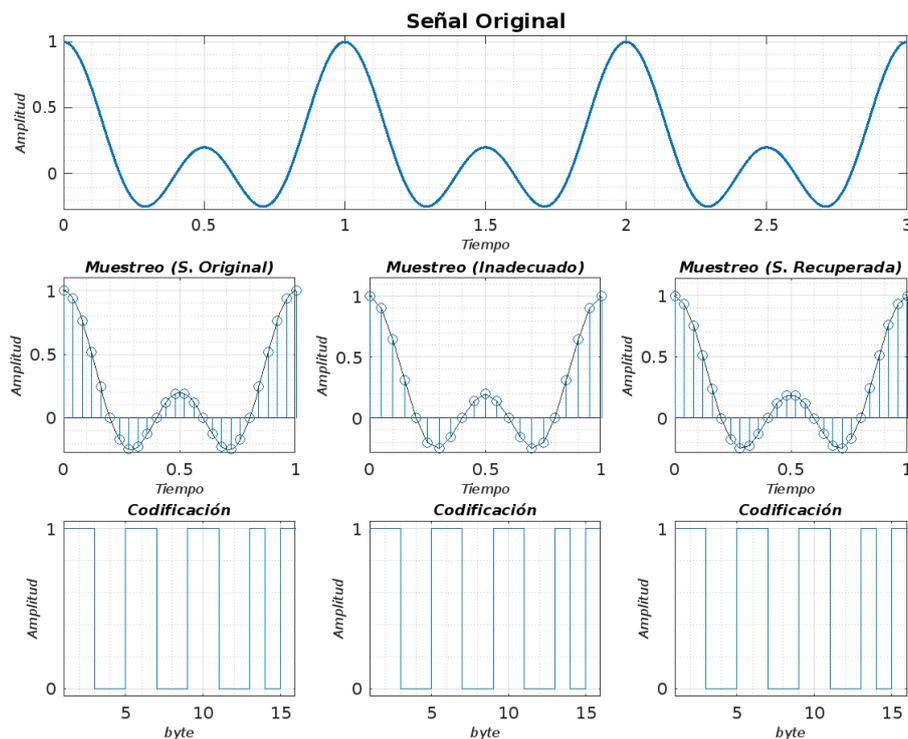


Figura 3.24: SNR=100 dB, Muestras=16, Delta=0.001

### 3.2.5. Resultados Señal de Dirichlet con 2 muestras y SNR de 0.1dB

En la figura 3.25 se muestra los resultados obtenidos de la señal de dirichlet original que se desea recuperar con condición de ruido, para este experimento se tomó solo 2 muestras para la señal de ingreso dando como resultado la señal recuperada de la primera etapa, posteriormente se realizó seis etapas más de filtrado para poder recuperar la señal de mejor manera obteniendo como resultado final la señal recuperada de la etapa siete. Para estas evaluaciones se consideró 256 pesos para el filtro adaptativo RLS, este valor fue determinado con base en el desempeño del error cuadrático promedio obtenido del filtro al recuperar la señal deseada. De acuerdo a los resultados obtenidos el error comparativo entre la señal original y la señal recuperada de la primera etapa es 0.155, mientras que el error comparativo de la señal original y la señal recuperada es de 0.000, lo cual indica que son similares.

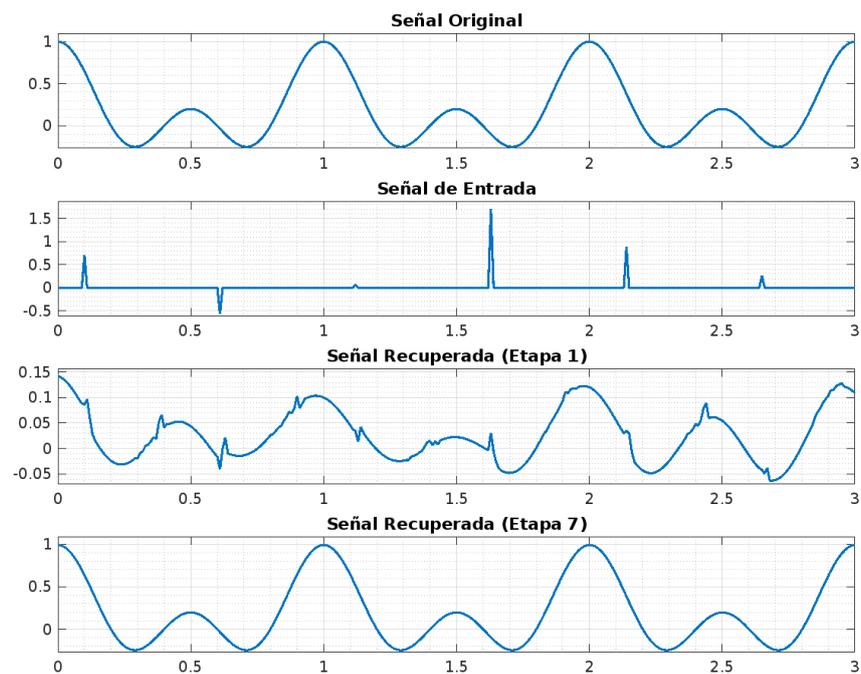


Figura 3.25: SNR=0.1 dB, Muestras=2, Delta=0.1

En la figura 3.26, la primera columna ilustra la señal original y su codificación respectiva, mientras que la segunda columna ilustra la señal que no tiene un proceso adecuado de muestreo, incumpliendo el criterio de Nyquist y que fue enviada tanto al filtro predictor como al sistema de modulación PCM, dando como resultado una codificación PCM errónea al no ser procesada por el sistema predictor en primera instancia. Por otro lado, la tercera columna ilustra la señal que se obtiene del filtro predictor y que posteriormente fue enviada al sistema de modulación PCM, obteniendo una codificación adecuada del sistema PCM, como si se hubiese utilizado la señal original con su frecuencia de muestreo adecuada.

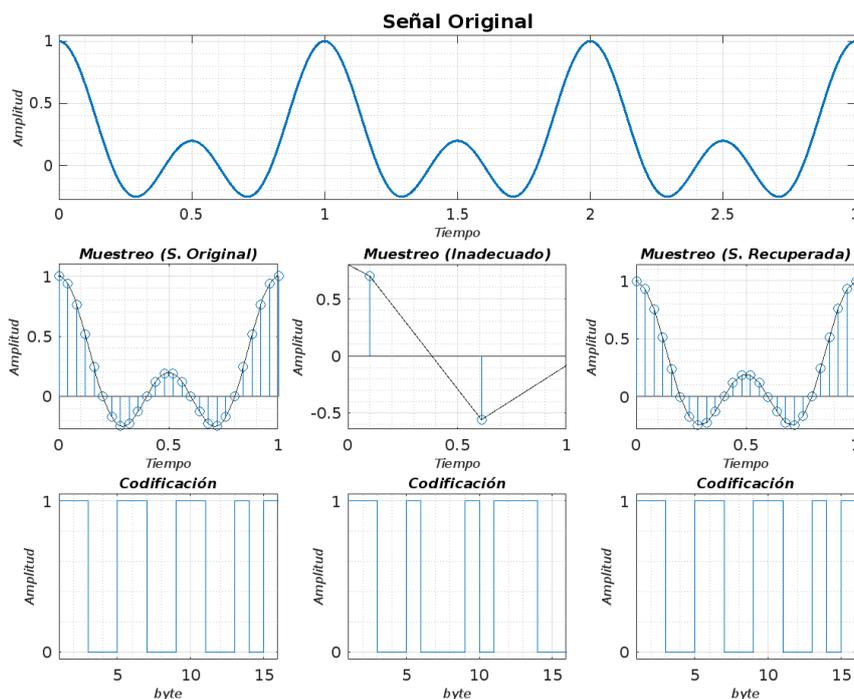


Figura 3.26: SNR=0.1 dB, Muestras=2, Delta=0.1

### 3.2.6. Resultados Señal de Dirichlet con 4 muestras y SNR de 0.1dB

En la figura 3.27 se muestra los resultados obtenidos de la señal de dirichlet original que se desea recuperar con condición de ruido, para este experimento se tomó solo 4 muestras para la señal de ingreso dando como resultado la señal recuperada de la primera etapa, posteriormente se realizó seis etapas más de filtrado para poder recuperar la señal de mejor manera obteniendo como resultado final la señal recuperada de la etapa siete. Para estas evaluaciones se consideró 256 pesos para el filtro adaptativo RLS, este valor fue determinado con base en el desempeño del error cuadrático promedio obtenido del filtro al recuperar la señal deseada. De acuerdo a los resultados obtenidos el error comparativo entre la señal original y la señal recuperada de la primera etapa es 0.092, mientras que el error comparativo de la señal original y la señal recuperada es de 0.000, lo cual indica que son similares.

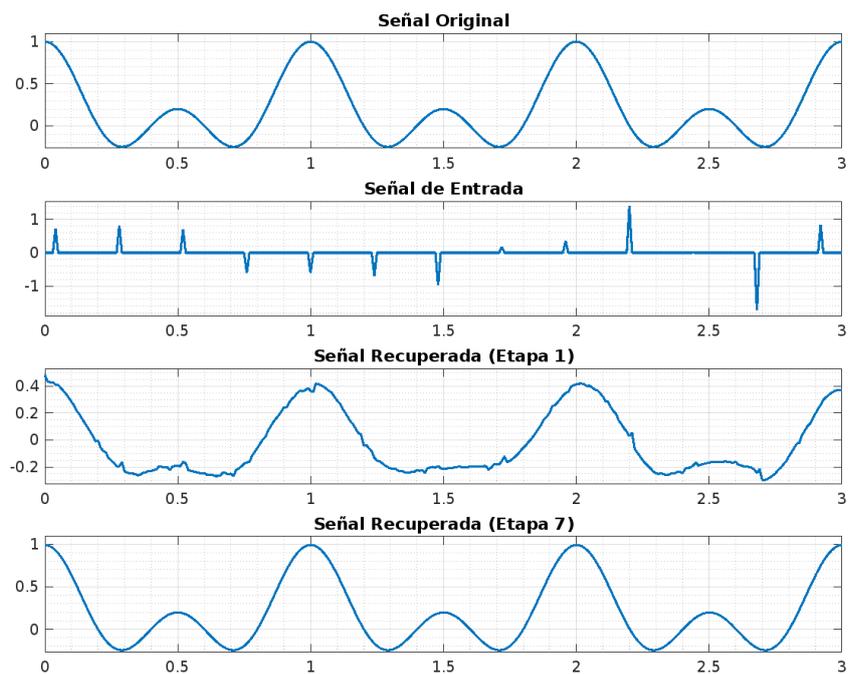


Figura 3.27: SNR=0.1 dB, Muestras=4, Delta=0.1

En la figura 3.28, la primera columna ilustra la señal original y su codificación respectiva, mientras que la segunda columna ilustra la señal que no tiene un proceso adecuado de muestreo, incumpliendo el criterio de Nyquist y que fue enviada tanto al filtro predictor como al sistema de modulación PCM, dando como resultado una codificación PCM errónea al no ser procesada por el sistema predictor en primera instancia. Por otro lado, la tercera columna ilustra la señal que se obtiene del filtro predictor y que posteriormente fue enviada al sistema de modulación PCM, obteniendo una codificación adecuada del sistema PCM, como si se hubiese utilizado la señal original con su frecuencia de muestreo adecuada.

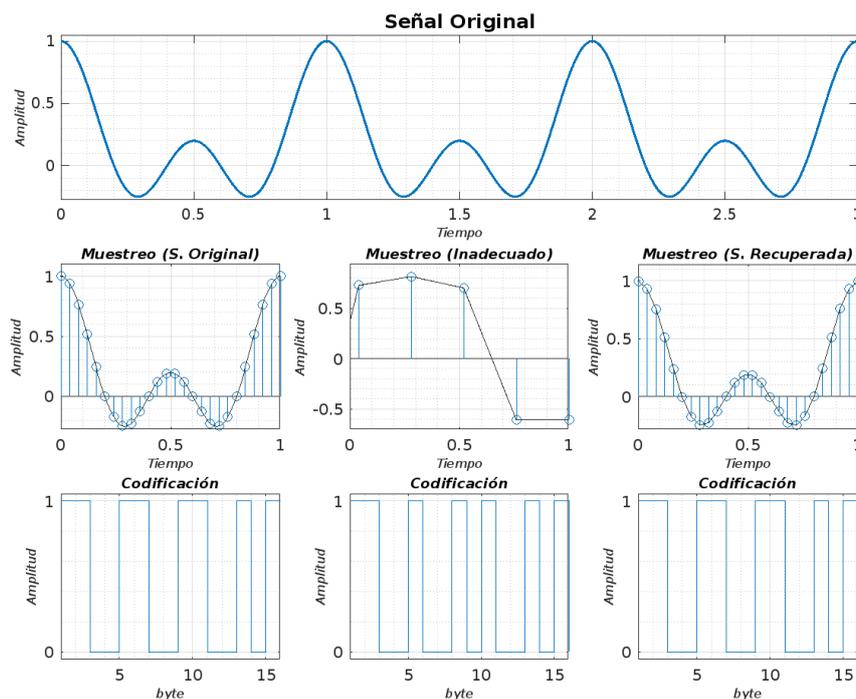


Figura 3.28: SNR=0.1 dB, Muestras=4, Delta=0.1

### 3.2.7. Resultados Señal de Dirichlet con 8 muestras y SNR de 0.1dB

En la figura 3.29 se muestra los resultados obtenidos de la señal de dirichlet original que se desea recuperar con condición de ruido, para este experimento se tomó solo 8 muestras para la señal de ingreso dando como resultado la señal recuperada de la primera etapa, posteriormente se realizó seis etapas más de filtrado para poder recuperar la señal de mejor manera obteniendo como resultado final la señal recuperada de la etapa siete. Para estas evaluaciones se consideró 256 pesos para el filtro adaptativo RLS, este valor fue determinado con base en el desempeño del error cuadrático promedio obtenido del filtro al recuperar la señal deseada. De acuerdo a los resultados obtenidos el error comparativo entre la señal original y la señal recuperada de la primera etapa es 0.013, mientras que el error comparativo de la señal original y la señal recuperada es de 0.000, lo cual indica que son similares.

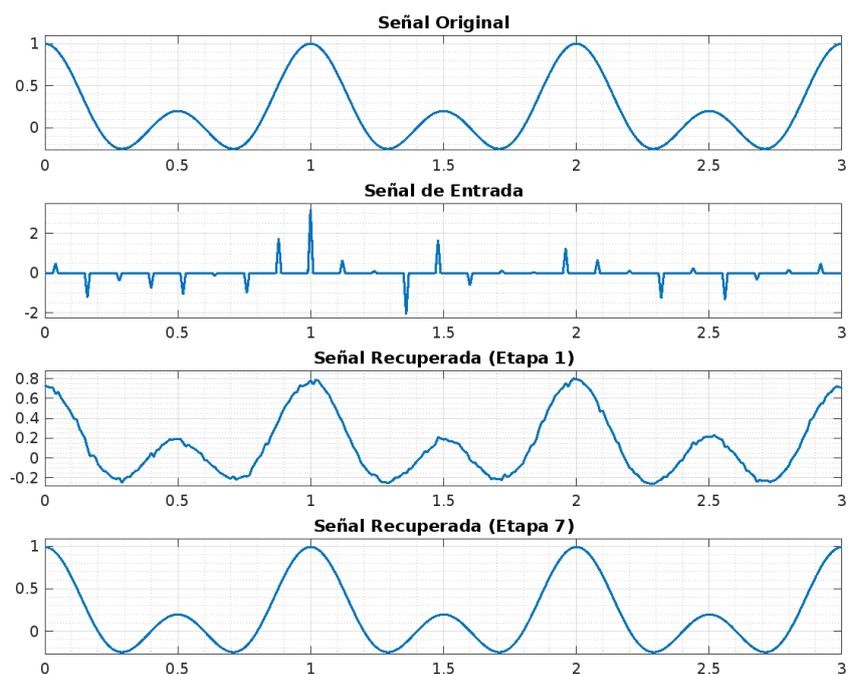


Figura 3.29: SNR=0.1 dB, Muestras=8, Delta=0.1

En la figura 3.30, la primera columna ilustra la señal original y su codificación respectiva, mientras que la segunda columna ilustra la señal que no tiene un proceso adecuado de muestreo, incumpliendo el criterio de Nyquist y que fue enviada tanto al filtro predictor como al sistema de modulación PCM, dando como resultado una codificación PCM errónea al no ser procesada por el sistema predictor en primera instancia. Por otro lado, la tercera columna ilustra la señal que se obtiene del filtro predictor y que posteriormente fue enviada al sistema de modulación PCM, obteniendo una codificación adecuada del sistema PCM, como si se hubiese utilizado la señal original con su frecuencia de muestreo adecuada.

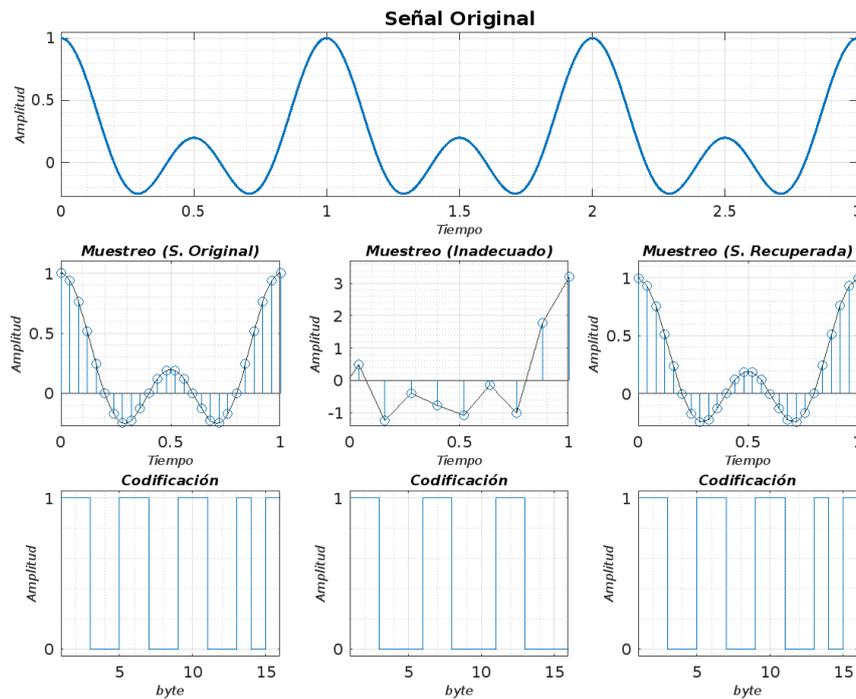


Figura 3.30: SNR=0.1 dB, Muestras=8, Delta=0.1

### 3.2.8. Resultados Señal de Dirichlet con 16 muestras y SNR de 0.1dB

En la figura 3.31 se muestra los resultados obtenidos de la señal de dirichlet original que se desea recuperar con condición de ruido, para este experimento se tomó solo 16 muestras para la señal de ingreso dando como resultado la señal recuperada de la primera etapa, posteriormente se realizó seis etapas más de filtrado para poder recuperar la señal de mejor manera obteniendo como resultado final la señal recuperada de la etapa siete. Para estas evaluaciones se consideró 256 pesos para el filtro adaptativo RLS, este valor fue determinado con base en el desempeño del error cuadrático promedio obtenido del filtro al recuperar la señal deseada. De acuerdo a los resultados obtenidos el error comparativo entre la señal original y la señal recuperada de la primera etapa es 0.006, mientras que el error comparativo de la señal original y la señal recuperada es de 0.000, lo cual indica que son similares.

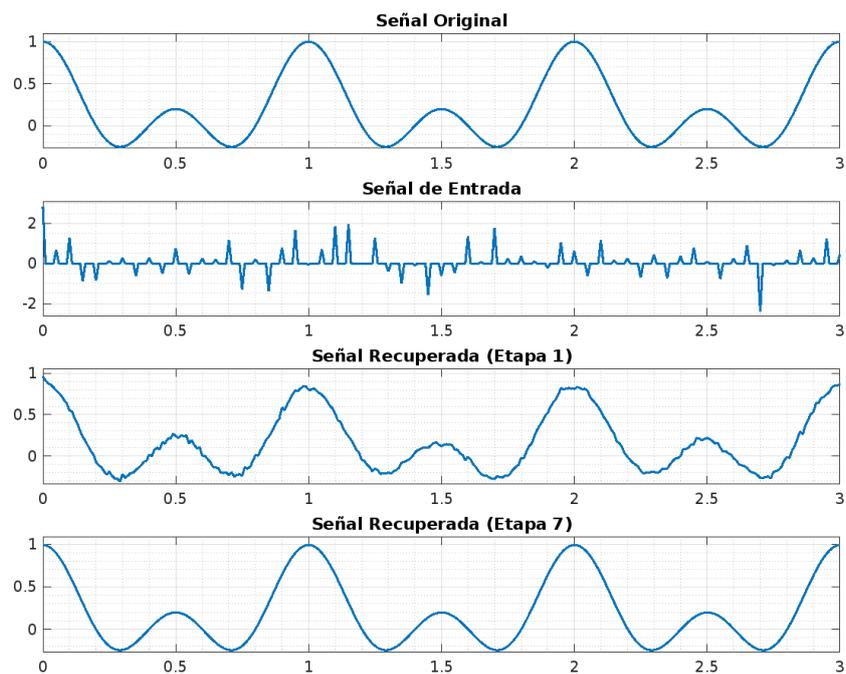


Figura 3.31: SNR=0.1 dB, Muestras=16, Delta=0.1

En la figura 3.32, la primera columna ilustra la señal original y su codificación respectiva, mientras que la segunda columna ilustra la señal que no tiene un proceso adecuado de muestreo, incumpliendo el criterio de Nyquist y que fue enviada tanto al filtro predictor como al sistema de modulación PCM, dando como resultado una codificación PCM errónea al no ser procesada por el sistema predictor en primera instancia. Por otro lado, la tercera columna ilustra la señal que se obtiene del filtro predictor y que posteriormente fue enviada al sistema de modulación PCM, obteniendo una codificación adecuada del sistema PCM, como si se hubiese utilizado la señal original con su frecuencia de muestreo adecuada.

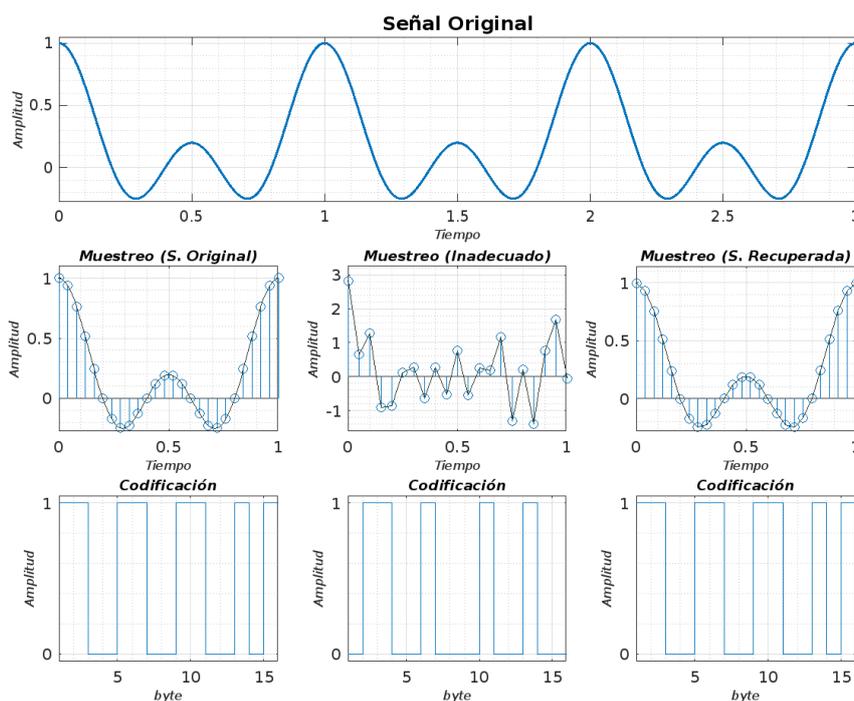


Figura 3.32: SNR=0.1 dB, Muestras=16, Delta=0.1

### 3.3. Señal de Audio

#### 3.3.1. Señal de Audio con $f_s=1500$ , SNR=0.1, Delta=0.1, Lambda=0.5

En la figura 3.33 se muestra los resultados obtenidos de la señal de audio original que se desea recuperar con condición de ruido, para este experimento se tomó solo 1500 muestras sobre segundo para la señal de ingreso dando como resultado la señal recuperada de la primera etapa, posteriormente se realizó seis etapas más de filtrado para poder recuperar la señal de mejor manera obteniendo como resultado final la señal recuperada de la etapa siete. Para estas evaluaciones se consideró 512 pesos para el filtro adaptativo RLS, este valor fue determinado con base en el desempeño del error cuadrático promedio obtenido del filtro al recuperar la señal deseada. De acuerdo a los resultados obtenidos el error comparativo entre la señal original y la señal recuperada de la primera etapa es 1.634, mientras que el error comparativo de la señal original y la señal recuperada es de 0.000, lo cual indica que son similares.

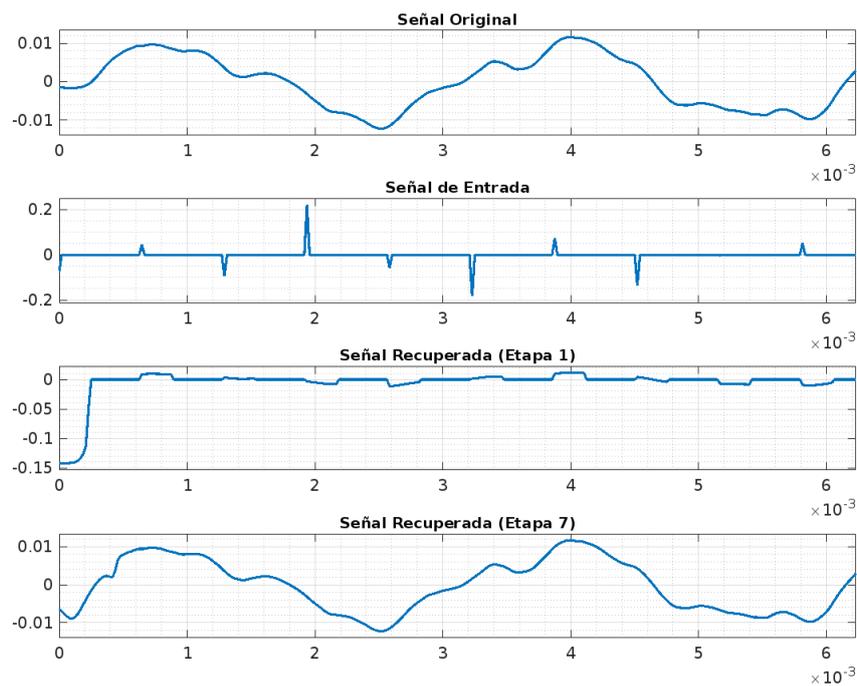


Figura 3.33:  $f_s=1500$ ,  $SNR=0.1$ ,  $\Delta=0.1$ ,  $\Lambda=0.5$

En la figura 3.34, la primera columna ilustra la señal original y su codificación respectiva, mientras que la segunda columna ilustra la señal que no tiene un proceso adecuado de muestreo, incumpliendo el criterio de Nyquist y que fue enviada tanto al filtro predictor como al sistema de modulación PCM, dando como resultado una codificación PCM errónea al no ser procesada por el sistema predictor en primera instancia. Por otro lado, la tercera columna ilustra la señal que se obtiene del filtro predictor y que posteriormente fue enviada al sistema de modulación PCM, obteniendo una codificación adecuada del sistema PCM, como si se hubiese utilizado la señal original con su frecuencia de muestreo adecuada.

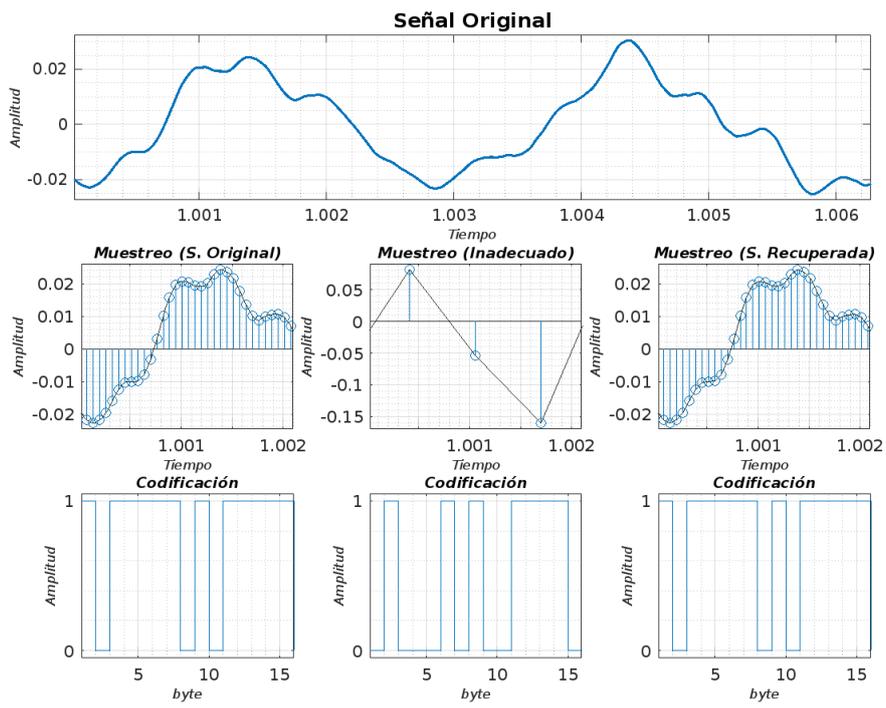


Figura 3.34:  $f_s=1500$ ,  $SNR=0.1$ ,  $\Delta=0.1$ ,  $\Lambda=0.5$

# Capítulo 4

## Conclusiones y Trabajos Futuros

### 4.0.1. Conclusiones

Conforme a los resultados obtenidos de las señales de Sinusoidal y Dirichlet, la peor condición para la modulación PCM de la señal resulta ser cuando se toma en consideración tan solo 2 muestras por segundo de la señal original con un SNR de 0.1 dB. En este caso particular, la codificación de la señal modulada es completamente diferente a la codificación de la señal original debido a que la tasa de muestreo de la señal que ingresa es errónea y además la señal está contaminada por ruido, provocando una mala interpretación por parte del sistema de modulación PCM. En este caso particular, al usar una sola etapa de filtro predictor fue necesario implementar una cantidad considerable de pesos en el algoritmo adaptativo RLS, mayor a 256, para tratar recuperar la señal, la cual no fue óptimo. Como alternativa, se implementó un sistema de filtros en cascada con una cantidad máxima de 256 pesos por etapa, dando como resultando el uso de 7 etapas, que al final lograron recuperar la señal original. Si bien en el proceso de predicción y recuperación fue necesario incluir más etapas, no obstante, el tiempo de procesamiento fue menos que al usar una sola etapa con una cantidad mayor a 256 pesos, esto se debe a que las etapas del filtrado en cascada requieren un menor número de iteraciones para obtener la señal original. Como análisis del desempeño del sistema predictor, se contempla que, para las señales de prueba senoidal y Dirichlet, el factor de olvido que regula la convergencia y rapidez del algoritmo debió ser establecido en un valor cercano a uno,

lo cual mejoro el desempeño del filtro para las señales de características periódicas. Por el contrario, al trabajar con la señal de audio, el parámetro de olvido fue establecido en 0.5, obteniendo mejores resultados para señales aperiódicas.

En el proceso de adaptación de los pesos del algoritmo, se observa que la condición del factor de iniciación del filtro es importante, ya que para las señales periódicas de prueba fue necesario un valor cercano a cero, 0.01, para obtener una convergencia suave de los pesos, mientras que para la señal de audio este parámetro tuvo que ser fijado en 0.1 ya que con el valor anterior no fue adecuado. Para el proceso de predicción de la señal de audio, la cual originalmente consta de 48000 muestras por segundo y con una duración de dos minutos, se consideró tan solo 1500 muestras por segundo para su aplicación al sistema predictor, además de considerar un alto grado de contaminación de ruido, de tal manera que se pudo simular la distorsión de la señal de ingreso al sistema de modulación PCM. En este experimento, los resultados determinaron que fue necesario nuevamente emplear siete etapas de filtrado para recuperar la señal de audio, obteniendo un error cuadrático promedio cercano a cero, a diferencia de la primera etapa de filtrado cuyo valor es elevado y además de que se obtuvo una señal distorsionada. En el caso de la predicción de la señal de audio se estableció una cantidad de 512 pesos con factor de olvido de 0.5 y un factor de iniciación de 0.1, con estos valores la calidad de recuperación fue favorable, manteniendo un total de 7 etapas de filtrado para disminuir el error cuadrático medio entre la señal original y recuperada.

Al momento de establecer el proceso de recuperación de la señal de audio, se realizó dos consideraciones, en la primera de ellas una vez que el sistema adaptativo lleo a convergencia con sus pesos establecidos en la última iteración, estos fueron multiplicados por la señal a recuperar obteniéndose resultados no favorables, es decir una señal distorsionada con ruido y no reconocible. Por el contrario, el usar la segunda consideración, en la cual el valor de los pesos es multiplicado por cada muestra de la señal en cada iteración y no al final, se obtuve una recuperación satisfactoria de la señal de audio. Es importante, mencionar que en este sentido la primera consideración si fue útil para las dos señales periódicas. En conclusión, si bien el sistema predictor requiere un costo computacional alto y un periodo de procesamiento en promedio de

10 horas para recuperar la señal de audio y de 20 minutos para las señales de menor complejidad, no obstante se han obtenidos resultados satisfactorios que pueden ser considerados para ingreso al sistema de modulación PCM.

#### **4.0.2. Trabajos Futuros**

Como trabajos futuros se puede considerar el uso del sistema predictor con sistemas de modulaciones digitales complejas como modulación por cambio de fase (PSK) y modulación de amplitud en cuadratura (QAM), evaluar su rendimiento en diversas condiciones de ruido y distorsión, y compararlo con el algoritmo de filtrado adaptativo de mínimos cuadrados (LMS). Además, es posible crear una técnica para optimizar los parámetros del filtro RLS adaptativo de acuerdo con las propiedades de la señal y el canal de transmisión e investigar la posibilidad de combinarlo con técnicas de procesamiento de señales más sofisticadas, como el filtrado adaptativo multicanal y filtrado adaptativo. Análisis de tiempo-frecuencia y estudios de sus aplicaciones en redes de comunicaciones inalámbricas, incluidas las redes de comunicaciones móviles y las redes de sensores inalámbricos.

Además, podría investigarse el uso del sistema predictor en el procesamiento de imágenes y videos para mejorar la calidad de la imagen y reducir el ruido y la distorsión. Su rendimiento puede evaluarse bajo diferentes condiciones de iluminación y contraste y compararse con otros algoritmos de filtrado adaptativo. También se puede desarrollar un método para optimizar los parámetros del filtro adaptativo RLS en función de las características de la imagen y el video, como el detalle y la complejidad de la escena. También podría ser posible combinar el filtro RLS adaptativo con técnicas avanzadas de procesamiento de imágenes y videos, como filtrado adaptativo de varios pasos y filtrado adaptativo de frecuencia de tiempo, y aplicarlo a sistemas de visión por computadora, como detección y seguimiento de objetos, detección y seguimiento de rostros. investigar reconocimiento y segmentación de imágenes.

# Glosario

**FIR** Respuesta Finita al Impulso – Finite Impulse Response.

**LMS** Mínimo Cuadrático Promediado – Least Mean Square.

**NLMS** Normalizado de Mínimos Cuadrados –Normalized Least Mean Square.

**PCM** Modulación de Código de Pulso – Pulse Code Modulation.

**RLS** Mínimos Cuadrados Recursivos – Recursive Least Squares.

**VoIP** Voz sobre Ip – Voice Over Internet Protocol.

**WSS** Proceso Estacionario – Wide-Sense Stationary.

# Referencias

- [1] Haykin, *Principles-Of-Communication-CommunicationSystems-4ed-Haykin*. 2001.
- [2] P. S. Diniz, *Adaptive filtering: Algorithms and practical implementation*. Springer US, nov. de 2013, vol. 9781461441069, págs. 1-652, ISBN: 9781461441069. DOI: 10.1007/978-1-4614-4106-9.
- [3] E. Alfonso y C. Diaz, «INFRAESTRUCTURA DE RED QUE PERMITA LA COMUNICACIÓN DEL SISTEMA DIAGNÓSTICO DE FRENO DE DISCO ENTRE VEHÍCULOS, A TRAVÉS DE REDES VEHICULARES AD-HOC (VANET),» 2019.
- [4] V. H. Nascimento y M. T. Silva, *Adaptive Filters*. 2014, págs. 619-761. DOI: 10.1016/B978-0-12-396502-8.00012-7. dirección: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/B9780123965028000127>.
- [5] V. K. Madisetti, *The Digital Signal Processing Handbook SECOND EDITION Digital Signal Processing Fundamentals*. 2010.
- [6] B. Farhang y Boroujeny, *Adaptive Filters*. 2013.
- [7] B. Sklar, *Digital Communications*. 1988. dirección: [www.phptr.com](http://www.phptr.com).
- [8] Z. Peyton y J. Peebles, *Principios de probabilidad, variables aleatorias y señales alaeatorias*. 2006.
- [9] A. Poularikas y Z. Ramadan, *Electrical Engineering Primer Series*. 2006.
- [10] M. R. Spiegel, *Teoría y problemas de probabilidad y estadística*. McGraw-Hill, 1976, ISBN: 0070909229.
- [11] E. Walpole, H. Myers y L. Myers, *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias*. 2012.
- [12] J. L. Devore, *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias Octava edición*. 2012.
- [13] R. Nelson, *Probability, Stochastic Processes, and Queueing Theory*. Springer New York, 1995. DOI: 10.1007/978-1-4757-2426-4.

- [14] C. Lopez, *Probabilidad, variables aleatorias y procesos estocásticos, una introducción orientada a las T.* 2004.
- [15] F. J. R. Díaz, A. R. Gutiérrez, G. H. Sierra, J. Ramón y C. D. Lara, «Wiener filtering to noise reduction for speaker verification,» *Revista Cubana de Ciencias Informáticas*, vol. 12, págs. 152-162, 3 2018, ISSN: 2227-1899. dirección: <http://rcci.uci.cu>.
- [16] L. R. Vega y H. Rey, *A Rapid Introduction to Adaptive Filtering*. Springer Berlin Heidelberg, 2013, ISBN: 978-3-642-30298-5. DOI: 10.1007/978-3-642-30299-2. dirección: <https://link.springer.com/10.1007/978-3-642-30299-2>.
- [17] L. Morales, *Adaptive Filtering*. InTech, 2011, ISBN: 9789533071589.
- [18] Z. Zhu, X. Gao, L. Cao, D. Pan, Y. Cai e Y. Zhu, «Analysis on the adaptive filter based on LMS algorithm,» *Optik*, vol. 127, págs. 4698-4704, 11 jun. de 2016, ISSN: 00304026. DOI: 10.1016/j.ijleo.2016.02.005.
- [19] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory-Prentice Hall*. 1996.
- [20] S. S. Haykin, *Adaptive filter theory*. 2014, pág. 889, ISBN: 9780132671453.
- [21] B. Widrow y S. Stearns, *Adaptive Signal Processing*. 1985.
- [22] J. G. Proakis, M. Salehi y G. Bauch, *Contemporary Communication Systems Using MATLAB® Third Edition*. 2011. dirección: [www.cengage.com/highered](http://www.cengage.com/highered).
- [23] A. Grami, *Introduction to digital communications*. 2016, ISBN: 9780124076822.
- [24] H. P. ( P. Hsu, *Schaum's outline of theory and problems of analog and digital communications*. McGraw-Hill, 2003, pág. 330, ISBN: 0071402284.

# Anexos

Algoritmo RLS base utilizado:

```
1 x -> Senal de entrada
2 d -> Senal deseada
3 M=16;
4 lambda=0.99;
5 delta=0.001;
6 w=zeros(M,1);
7 P = delta*eye(M);
8 N=length(x);
9 y = zeros(size(x));
10 x0=[x(1:M-1) x];
11 for n=M:N+M-1
12     x_topletz=x0(n:-1:n-M+1);
13     y(n-M+1)=x_topletz*w;
14     e(n)=d(n-M+1)-y(n-M+1); %Error de cada muestra
15     P=(1/lambda)*(P-(((1/lambda)*((P*x_topletz'*x_topletz*P)))...
16         /(1+((1/lambda)*(x_topletz*P*x_topletz')))));
17     % Actualizacion de los factores de iniciacion
18     w=w+(P*x_topletz')*(e(n)); %Actualizacion de los pesos
19     w_cdIter(:,n)=w; %Pesos de cada iteracion
20 end
```