



**UNIVERSIDAD POLITÉCNICA SALESIANA**  
**SEDE CUENCA**  
**CARRERA DE INGENIERÍA MECATRÓNICA**

DISEÑO DE UN SISTEMA DE DETECCIÓN Y DIAGNÓSTICO DE  
NIVELES DE SEVERIDAD DE FALLOS BASADO EN UN MODELO  
MATEMÁTICO PARA UNA CAJA DE ENGRANAJES RECTOS

Trabajo de titulación previo a la obtención  
del título de Ingeniero Mecatrónico

AUTOR: DEIVER PAÚL JIMÉNEZ SANTÍN

TUTOR: ING. MARIELA CERRADA LOZADA, Ph.D.

Cuenca – Ecuador

2022

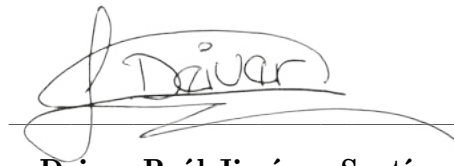
# **CERTIFICADO DE RESPONSABILIDAD Y AUTORÍA DEL TRABAJO DE TITULACIÓN**

Yo, Deiver Paúl Jiménez Santín con documento de identificación N° 1105196123 manifiesto que:

Soy el autor y responsable del presente trabajo; y, autorizo a que sin fines de lucro la Universidad Politécnica Salesiana pueda usar, difundir, reproducir o publicar de manera total o parcial el presente trabajo de titulación.

Cuenca, 29 de julio del 2022

Atentamente,

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Deiver', with a large, sweeping flourish underneath.

**Deiver Paúl Jiménez Santín**  
**1105196123**

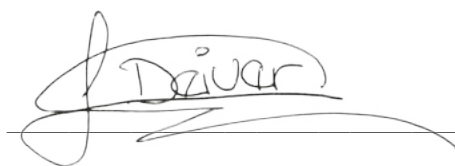
# **CERTIFICADO DE CESIÓN DE DERECHOS DE AUTOR DEL TRABAJO DE TITULACIÓN A LA UNIVERSIDAD POLITÉCNICA SALESIANA**

Yo, Deiver Paúl Jiménez Santín con documento de identificación N° 1105196123, expreso mi voluntad y por medio del presente documento cedo a la Universidad Politécnica Salesiana la titularidad sobre los derechos patrimoniales en virtud de que soy autor del Proyecto Técnico: "Diseño de un sistema de detección y diagnóstico de niveles de severidad de fallos basado en un modelo matemático para una caja de engranajes rectos", el cual ha sido desarrollado para optar por el título de: Ingeniero Mecatrónico, en la Universidad Politécnica Salesiana, quedando la Universidad facultada para ejercer plenamente los derechos cedidos anteriormente.

En concordancia con lo manifestado, suscribo este documento en el momento que hago la entrega del trabajo final en formato digital a la Biblioteca de la Universidad Politécnica Salesiana.

Cuenca, 29 de julio del 2022

Atentamente,



**Deiver Paúl Jiménez Santín**

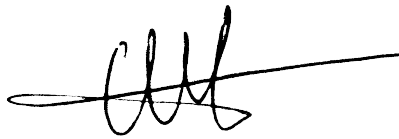
**1105196123**

# **CERTIFICADO DE DIRECCIÓN DEL TRABAJO DE TITULACIÓN**

Yo, Mariela Cerrada Lozada con documento de identificación N° 0151771813, docente de la Universidad Politécnica Salesiana, declaro que bajo mi tutoría fue desarrollado el trabajo de titulación: DISEÑO DE UN SISTEMA DE DETECCIÓN Y DIAGNÓSTICO DE NIVELES DE SEVERIDAD DE FALLOS BASADO EN UN MODELO MATEMÁTICO PARA UNA CAJA DE ENGRANAJES RECTOS, realizado por Deiver Paúl Jiménez Santín con documento de identificación N° 1105196123, obteniendo como resultado final el trabajo de titulación bajo la opción Proyecto Técnico que cumple con todos los requisitos determinados por la Universidad Politécnica Salesiana.

Cuenca, 29 de julio del 2022

Atentamente,



---

**Ing. Mariela Cerrada Lozada, Ph.D**  
**0151771813**

## **Dedicatoria**

Quiero dedicar este trabajo a Dios, quien me ha guiado y me ha brindado fortaleza para cumplir las metas que me he propuesto.

A mis padres Deiver y Judith, quienes con su cariño, esfuerzo y apoyo incondicional me han orientado y acompañado en cada paso y objetivo cumplido en mi vida.

Finalmente, a mi familia y amigos que han formado parte del proceso y me han brindado su apoyo de una u otra forma.

## **Agradecimientos**

A Dios por brindarme salud e impartirme sabiduría y fortaleza, mismas que me han permitido cumplir esta anhelada meta. A mis padres Deiver y Judith, que son un pilar fundamental en mi vida, por brindarme apoyo y cariño incondicional, por inculcarme los valores y principios que me han formado como persona y como profesional y por ayudarme con los recursos necesarios para culminar mi carrera universitaria. A mi hermano Mateo por su apoyo permanente y por ser una motivación para ser mejor cada día. A mi familia en general que de una u otra forma estuvo cerca de mi durante este proceso y me dieron su apoyo.

A mi tutor de tesis, Ing. Mariela Cerrada, quien me guió con mucha voluntad en este proceso, sus orientaciones, conocimiento y paciencia han sido fundamentales para finalizar este trabajo de titulación. A los docentes miembros del grupo de investigación GIDTEC, Ing. Vinicio Sánchez, Ing. Diego Cabrera e Ing. Mariela Cerrada, quienes me extendieron todo su apoyo, y al resto de miembros del grupo y de manera especial al Ing. Ariel Berrezueta e Ing. Renato Ortega, quienes me recibieron con calidez y supieron resolver mis dudas y brindar sugerencias.

A Kelly, Adriana y Erick que con su amistad son una alegría para mi vida y me han ayudado a crecer como persona.

Este documento fue realizado enteramente en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X

# Índice

<b>Certificado de responsabilidad y autoría del trabajo de titulación</b>	<b>I</b>
<b>Certificado de cesión de derechos de autor del trabajo de titulación a la Universidad Politécnica Salesiana</b>	<b>II</b>
<b>Certificado de dirección del trabajo de titulación</b>	<b>III</b>
<b>Dedicatoria</b>	<b>IV</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>V</b>
<b>Resumen</b>	<b>XV</b>
<b>Abstract</b>	<b>XVI</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Problema</b>	<b>1</b>
2.1. Antecedentes . . . . .	1
2.2. Descripción del problema . . . . .	4
2.3. Importancia y alcances . . . . .	5
2.4. Delimitación . . . . .	6
2.4.1. Espacial o geográfica . . . . .	6
2.4.2. Temporal . . . . .	6
2.4.3. Sectorial o institucional . . . . .	6
2.5. Problema general . . . . .	7
2.6. Problemas específicos . . . . .	7
<b>3. Objetivos</b>	<b>7</b>
3.1. Objetivo general . . . . .	7
3.2. Objetivos específicos . . . . .	7
<b>4. Marco Teórico</b>	<b>8</b>
4.1. Sistemas de detección y diagnóstico de fallos . . . . .	8
4.1.1. Sistemas de detección y diagnóstico de fallos basados en modelos . . . . .	8
4.1.2. Modelado de fallos . . . . .	10



4.1.3.	Filtros de detección basados en observadores de Luenberger . . . . .	12
4.1.4.	Filtros de diagnóstico basados en observadores . . . . .	13
4.1.5.	Algoritmo de aproximación algebraica para la solución de las condiciones de Luenbeger . . . . .	15
4.2.	Modelos dinámicos de cajas de engranajes . . . . .	16
4.3.	Rigidez del diente en cajas de engranajes . . . . .	19
4.4.	Amortiguamiento en cajas de engranajes . . . . .	22
4.5.	Modelado de fallos en cajas de engranajes . . . . .	23
4.5.1.	Modos de fallo en cajas de engranajes . . . . .	23
4.5.2.	Modelado de diente roto . . . . .	25
4.6.	Adquisición de datos . . . . .	26
4.6.1.	Plan experimental . . . . .	26
4.6.2.	Modo de fallo diente roto y niveles de severidad . . . . .	30
4.7.	Análisis de vibraciones de cajas de engranajes en el dominio de la frecuencia	31
<b>5.</b>	<b>Marco Metodológico</b>	<b>33</b>
5.1.	Metodología de la investigación . . . . .	33
5.2.	Metodología del proceso . . . . .	34
5.2.1.	Caracterización de los modelos de rigidez y amortiguamiento para la definición del modelo matemático en condiciones de fallo de diente roto	34
5.2.1.1.	Consideraciones del modelo . . . . .	34
5.2.1.2.	Definición del modelo matemático del sistema nominal en representación de espacio de estados . . . . .	36
5.2.1.3.	Caracterización de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento ante diferentes severidades de diente roto . . . . .	46
5.2.1.4.	Definición del modelo matemático del sistema sujeto a fallo de diente roto . . . . .	57
5.2.2.	Configuración del filtro de detección basado en observadores . . . . .	64
5.2.2.1.	Observabilidad del sistema . . . . .	64
5.2.2.2.	Diseño del filtro de detección basado en observadores . . . . .	68
5.2.3.	Configuración de los filtros de diagnóstico generadores de residuales .	72
5.2.3.1.	Índice de observabilidad . . . . .	72
5.2.3.2.	Desarrollo de un observador de diagnóstico con un algoritmo de aproximación algebraica . . . . .	79

5.2.4.	Evaluación del diseño del sistema de detección y diagnóstico a través de la sensibilidad de la señal residual . . . . .	87
5.2.4.1.	Evaluación del observador detector de fallos . . . . .	89
5.2.4.2.	Evaluación de los observadores de diagnóstico generadores de residuales . . . . .	90
5.2.4.3.	Evaluación del diseño del sistema de detección y diagnóstico a través de la sensibilidad de la señal residual . . . . .	91
<b>6.</b>	<b>Resultados</b>	<b>94</b>
6.1.	Validación del modelo matemático del sistema de caja de engranajes en condiciones de fallo de diente roto . . . . .	94
6.1.1.	Validación de frecuencias características del modelo . . . . .	94
6.1.2.	Comparación de los espectros de la FFT teóricos y experimentales . . . . .	97
6.1.3.	Comparación de las series temporales teóricas y experimentales . . . . .	100
6.2.	Validación del filtro de detección basado en observadores . . . . .	102
6.3.	Validación del filtro de diagnóstico generador de residuales . . . . .	109
6.4.	Evaluación del diseño del sistema de detección y diagnóstico a través de la sensibilidad de la señal residual . . . . .	117
<b>7.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>121</b>
<b>8.</b>	<b>Recomendaciones</b>	<b>123</b>
	<b>Referencias</b>	<b>129</b>
	<b>ANEXOS</b>	<b>130</b>

## Lista de Tablas

1.	Características del motor del banco experimental. . . . .	27
2.	Especificaciones del equipo mecánico del banco experimental. . . . .	27
3.	Características de la caja de engranajes del banco experimental. . . . .	28
4.	Niveles de severidad para el modo de fallo diente roto. . . . .	30
5.	Parámetros geométricos y asociados con el material de la caja de engranajes.	35
6.	Par de carga $T_2$ y velocidad de giro $N$ para diferentes condiciones de carga. .	35
7.	Intervalos de operación para los subsistemas invariantes en el tiempo. . . . .	37
8.	Rango de la matriz de observabilidad de los 6 subsistemas en función del número de salidas disponibles. . . . .	68
9.	Polos del subsistema 1 y subsistema 5 y polos deseados para el observador detector de fallos. . . . .	69
10.	Polos del subsistema 2 y subsistema 6 y polos del observador detector de fallos.	70
11.	Polos del subsistema 3 y polos del observador detector de fallos. . . . .	71
12.	Polos del subsistema 4 y polos del observador detector de fallos. . . . .	72
13.	Índices de observabilidad para los 6 subsistemas. . . . .	78
14.	Métrica de similitud entre las matrices $V$ y $W$ de los filtros de diagnóstico de los 6 subsistemas. . . . .	86
15.	Comparación de los valores entre las frecuencias características y frecuencias en el espectro de la FFT con condiciones de operación L3 y distintas severidades de fallo de diente roto. . . . .	96
16.	Comparación de los valores entre las frecuencias características experimentales y frecuencias en el espectro de la FFT del modelo simulado con condiciones de operación L3 y distintas severidades de fallo de diente roto. . . . .	99
17.	Máximos y mínimos del residual 2 para las condiciones de carga L1, L2 y L3 con diversas severidades de fallo. . . . .	109
18.	Máximos y mínimos del residual procesado a través del filtro de media móvil para las condiciones de carga L1, L2 y L3 con diversas severidades de fallo. .	117
19.	Umbral para clasificación de la severidad de rotura de diente para el sistema de detección y diagnóstico de fallos. . . . .	119
20.	Matriz de consistencia . . . . .	131
21.	Comparación de los valores entre las frecuencias características y frecuencias en el espectro de la FFT con condiciones de operación L1 y distintas severidades de fallo de diente roto. . . . .	133

22.	Comparación de los valores entre las frecuencias características y frecuencias en el espectro de la FFT con condiciones de operación L2 y distintas severidades de fallo de diente roto. . . . .	135
23.	Comparación de los valores entre las frecuencias características experimentales y frecuencias en el espectro de la FFT del modelo simulado con condiciones de operación L1 y distintas severidades de fallo de diente roto. . . . .	137
24.	Comparación de los valores entre las frecuencias características experimentales y frecuencias en el espectro de la FFT del modelo simulado con condiciones de operación L2 y distintas severidades de fallo de diente roto. . . . .	139

## Lista de Figuras

1.	Ubicación de la Universidad Politécnica Salesiana. . . . .	6
2.	Clasificación de métodos de diagnóstico de fallos. . . . .	9
3.	Principio de detección y diagnóstico basado en modelos. . . . .	10
4.	Esquema de generación de residuales de un observador de diagnóstico. . . . .	15
5.	Clasificación de modelos dinámicos para cajas de engranajes. . . . .	17
6.	Esquema de la caja de engranajes para modelo de dos grados de libertad. . . . .	18
7.	Rigidez y amortiguamiento entre dientes. . . . .	19
8.	Rigidez variante en el tiempo. . . . .	20
9.	Clasificación de modos de fallo en cajas de engranajes . . . . .	24
10.	Esquemático diente roto. . . . .	25
11.	Banco de vibraciones. . . . .	26
12.	Disposición del sistema electromecánico. . . . .	28
13.	Ubicación de los sensores en el banco experimental. . . . .	29
14.	Ubicación de los sensores en el banco experimental. . . . .	30
15.	Niveles de severidad para el modo de fallo diente roto. . . . .	31
16.	Patrón de vibraciones con frecuencias características. . . . .	33
17.	Definición gráfica de los aportes y disminución de rigidez y amortiguamiento de la Ecuación (80) . . . . .	47
18.	Proceso de engranaje para un par de ruedas dentadas sanas. . . . .	48
19.	Coefficientes de rigidez y amortiguamiento para dientes sanos. . . . .	49
20.	Proceso de engranaje para un par de ruedas dentadas donde una de ellas presenta rotura del 100% de un diente. . . . .	50
21.	Coefficientes de rigidez y amortiguamiento para un par de ruedas dentadas donde una de ellas presenta rotura del 100% de un diente. . . . .	53
22.	Proceso de engranaje para un par de ruedas dentadas donde una de ellas presenta un porcentaje de rotura determinado de un diente. . . . .	54
23.	Coefficientes de rigidez y amortiguamiento para un par de ruedas dentadas donde una de ellas presenta un porcentaje de rotura determinado en un diente. . . . .	56
24.	Residuales obtenidos de los cuatro filtros de diagnóstico propuestos tras etapa de post-filtrado con filtro de media móvil. . . . .	87
25.	Velocidad del engranaje de entrada resultante de la simulación del modelo del sistema sujeto a fallo de diente roto con severidad del 50% . . . . .	89

26.	Segundo residual del filtro de detección resultante de la simulación del modelo del sistema sujeto a fallo de diente roto con severidad del 50% . . . . .	90
27.	Primer residual del filtro de diagnóstico resultante de la simulación del modelo del sistema sujeto a fallo de diente roto con severidad del 50% . . . . .	91
28.	Diagrama Simulink del sistema de detección y diagnóstico de fallos . . . . .	92
29.	Interfaz del sistema de detección y diagnóstico de fallos para una caja de engranajes rectos. . . . .	93
30.	Espectro de la FFT de la señal simulada para la carga L3 con una severidad de fallo de diente roto del 50% . . . . .	95
31.	Frecuencias características en el espectro de la FFT de la señal del acelerómetro A4 para la carga L3 con una severidad de fallo de diente roto del 50% . . . .	98
32.	Series temporales simuladas y experimentales de la caja de engranajes operando bajo condiciones de carga L1 con diversas severidades de fallo de diente roto	101
33.	Flujograma para validación del filtro de detección basado en observadores . .	102
34.	Residuales generados por el filtro de detección operando en paralelo a la caja de engranajes bajo condiciones de carga L1 con una severidad de fallo de diente roto de 50%. . . . .	103
35.	Residuales generados por el filtro de detección operando en paralelo a la caja de engranajes bajo condiciones de carga L2 con una severidad de fallo de diente roto de 50%. . . . .	104
36.	Residuales generados por el filtro de detección operando en paralelo a la caja de engranajes bajo condiciones de carga L3 con una severidad de fallo de diente roto de 50%. . . . .	105
37.	Residual 2 generados por el filtro de detección operando en paralelo a la caja de engranajes bajo condiciones de carga L1 con diversas severidades de fallo.	106
38.	Residual 2 generados por el filtro de detección operando en paralelo a la caja de engranajes bajo condiciones de carga L2 con diversas severidades de fallo.	107
39.	Residual 2 generados por el filtro de detección operando en paralelo a la caja de engranajes bajo condiciones de carga L3 con diversas severidades de fallo.	108
40.	Flujograma para validación del filtro de diagnóstico generador de residuales .	110
41.	Residuales generados por el filtro de diagnóstico bajo condiciones de carga L1, L2 y L3 con una severidad de fallo de diente roto de 50%. . . . .	111
42.	Comparativa de residuales del filtro de diagnóstico previo y luego del procesado a través de filtro de media móvil. . . . .	113

43.	Residual generado por el filtro de diagnóstico y procesado a través del filtro de media móvil para carga L1 con diversas severidades de fallo. . . . .	114
44.	Residual generado por el filtro de diagnóstico y procesado a través del filtro de media móvil para carga L2 con diversas severidades de fallo. . . . .	115
45.	Residual generado por el filtro de diagnóstico y procesado a través del filtro de media móvil para carga L3 con diversas severidades de fallo. . . . .	116
46.	Flujograma para validación del sistema de detección y diagnóstico de fallos .	118
47.	Interfaz de detección y diagnóstico de fallos para sistema de caja de engranajes bajo condiciones de carga L3 y diversas severidades de fallo. . . . .	120
48.	Espectro de la FFT de la señal simulada para la carga L1 con una severidad de fallo de diente roto del 50% . . . . .	132
49.	Espectro de la FFT de la señal simulada para la carga L2 con una severidad de fallo de diente roto del 50% . . . . .	134
50.	Frecuencias características en espectro de la FFT de la señal del acelerómetro A4 para la carga L1 con una severidad de fallo de diente roto del 50% . . . .	136
51.	Frecuencias características en el espectro de la FFT de la señal del acelerómetro A4 para la carga L2 con una severidad de fallo de diente roto del 50% . . . .	138
52.	Series temporales simuladas y experimentales de la caja de engranajes operando bajo condiciones de carga L2 con diversas severidades de fallo de diente roto	140
53.	Series temporales simuladas y experimentales de la caja de engranajes operando bajo condiciones de carga L3 con diversas severidades de fallo de diente roto	141

## Resumen

**E**l proyecto técnico con enfoque general titulado “Diseño de un sistema de detección y diagnóstico de niveles de severidad de fallos basado en un modelo matemático para una caja de engranajes rectos”, presenta el diseño de un conjunto de filtros de detección y diagnóstico de fallos para una caja de engranajes de dientes rectos cuyo banco de pruebas se encuentra disponible en el laboratorio de vibraciones de la Universidad Politécnica Salesiana, Sede Cuenca.

La introducción a la temática de estudio se presenta en la Sección 1 en la cual se analiza la importancia de una oportuna detección y diagnóstico de fallos en las cajas de engranajes. Por su parte, el problema de estudio, sus antecedentes e importancia, así como los objetivos que guían este proyecto se exponen en la Sección 2 y Sección 3, respectivamente.

El marco teórico se detalla en la Sección 4, en el cual se presentan las bases conceptuales de relevancia para el desarrollo de esta investigación, tales como el diseño de sistemas de detección y diagnóstico de fallos y el modelado dinámico de cajas de engranaje.

En la Sección 5 se expone la metodología de la investigación y la metodología del proceso. La metodología del proceso abarca la caracterización de los modelos de rigidez y amortiguamiento para la definición del modelo matemático en condiciones de fallo de diente roto, la configuración del filtro de detección, la configuración del filtro de diagnóstico y la evaluación del diseño del sistema de detección y diagnóstico a través de la sensibilidad de la señal residual ante diferentes niveles de severidad de fallo analizado.

Finalmente, en la Sección 6 se valida el modelo matemático de la caja de engranajes sujeta a fallos a través de la comparación de sus frecuencias características del espectro de la FFT con las frecuencias características calculadas y obtenidas de señales experimentales. De igual forma, se comprueba la validez del filtro de detección y del filtro de diagnóstico a través de la sensibilidad de las señales residuales obtenidas. De los análisis efectuados se concluye que el sistema de detección y diagnóstico propuesto es adecuado para el sistema sujeto a estudio bajo las condiciones de operación establecidas.

**Palabras clave:** Caja de engranajes, modelado matemático, diente roto, filtros de detección, filtros de diagnóstico, sistemas de detección y diagnóstico de fallos.



## Abstract

The technical project with a general approach entitled "State observer-based approaches to design fault severity level detection and diagnosis systems for a spur gearbox" presents the design of a set of fault detection and diagnosis filters for a spur gearbox whose test bed is available in the vibrations laboratory of Universidad Politécnica Salesiana, sede Cuenca.

The introduction to the study topic is presented in Section 1, which analyzes the importance of timely detection and diagnosis of failures in industrial systems, and specifically in gearboxes. Afterwards, the problem of study, its background and importance, as well as the objectives that guide this project are set out in Section 2 and Section 3, respectively.

The theoretical study is detailed in Section 4, in which the relevant conceptual basis for the development of this research are presented, such as the design of fault detection and diagnosis systems and the spur gearboxes dynamic modeling.

The methodological framework is presented in Section 5, it includes the research methodology and process methodology. The process methodology covers the characterization of stiffness and damping models for the definition of the mathematical model under broken tooth fault conditions, the configuration of the detection filter, the configuration of the diagnostic filter and the evaluation of the design of the detection and diagnosis system through the sensitivity of the residual signal under different fault levels of the analyzed failure mode.

Finally, in the Section 6 the validation of the mathematical model of the faulty gearbox by comparing its characteristic frequencies of the FFT spectrum with the characteristic frequencies calculated and obtained from experimental signals is performed. Likewise, the validity of the detection filter and the diagnostic filter is verified through the sensitivity of the residual signals obtained. From the analyses carried out, it is concluded that the proposed detection and diagnostic system is suitable for the system under the established operating conditions.

**Keywords:** Spur gearbox, mathematical modeling, broken tooth, detection filters, diagnostic filters, detection and diagnosis fault systems.

# 1. Introducción

En las últimas décadas, con el avance tecnológico, las funciones de mantenimiento han evolucionado significativamente. Bajo este contexto, las estrategias de mantenimiento se han transformado de una perspectiva correctiva a una predictiva. Dentro de este último enfoque se encuentra el mantenimiento basado en la condición, mismo que consiste en una serie de acciones fundamentadas en la adquisición de la condición del equipo en tiempo real o cercano a ello, a través de sensores y/o pruebas y mediciones externas. Una mayor capacidad de medición y monitoreo mediante estas metodologías proporcionará una reducción en el tiempo de inactividad de las máquinas y por ende generará mayor productividad (Rastegari, 2017).

Las maquinarias rotativas, entre ellas las cajas de engranajes, son ampliamente utilizadas en la mayoría de procesos industriales debido a la necesidad de transmisión de potencia. Mantener operativos estos elementos ante la presencia de fallos podría resultar en vastas pérdidas económicas y graves daños al equipo involucrado en el proceso. Lo antes expuesto se establece como la principal razón para diseñar un sistema de detección y diagnóstico de fallos para una caja de engranajes y así viabilizar estrategias de mantenimiento basado en la condición que permitan reducir costos, mejorar la productividad y garantizar la seguridad industrial.

Este trabajo está orientado hacia la clasificación de la severidad de rotura del diente en una de las ruedas dentadas de una caja de engranajes rectos. El proceso mencionado se realiza con base en el análisis del residual proveniente de la aplicación de un enfoque de detección y diagnóstico de fallos basado en un modelo matemático del sistema, específicamente de observadores de estados, o inspirados en estos.

## 2. Problema

### 2.1. Antecedentes

Dentro del área industrial, los sistemas son vulnerables a la aparición de fallos. El desgaste de los componentes internos, acciones de control incorrectas, entre otros factores pueden provocar una avería completa e incluso la detención total del proceso productivo, debido a la degradación de la eficiencia y seguridad de operación. Es por ello que, la detección y el diagnóstico de fallos resultan necesarios para mejorar la confiabilidad de los sistemas (Blanke, Kinnaert, Lunze, y Staroswiecki, 2016).

Para la detección y diagnóstico de fallos se han establecido dos enfoques, uno cimentado en el aprendizaje basado en datos y el otro en el procesamiento de señales. El primero reconoce patrones de fallo específicos a través de modelos basados en el aprendizaje automático, estos se obtienen del análisis de conjuntos de datos. El segundo aplica técnicas a las señales sin procesar para extraer características que revelen el patrón de fallo en el dominio del tiempo o frecuencia (Cerrada y cols., 2018).

Los métodos basados en el aprendizaje demandan de la existencia de un histórico del funcionamiento del sistema en condiciones de no fallo, así como en presencia de averías. Lo antes mencionado es debido a la necesidad de tener una base de datos para la extracción de las características de los patrones de fallo. Asimismo, para identificar automáticamente los niveles de severidad de fallo en los engranajes, es necesario desarrollar métodos inteligentes de reconocimiento (Wang, 2016). Sánchez Loja (2018) propone un sistema basado en la fusión de datos de señales de corriente, vibración y emisiones acústica para el diagnóstico de fallos para cajas de engranajes rectos. Lo anteriormente expuesto se suma a la aplicación del algoritmo K-vecinos más cercanos (KNN) para la clasificación de los fallos. Este sistema permite diagnosticar la severidad de cuatro modos de fallos de engranajes rectos y 31 condiciones de severidad de fallo de una caja de engranajes. Dentro de la misma línea investigativa, Chen, Gryllias, y Li (2019) presentan un nuevo enfoque de diagnóstico de fallos para engranajes y rodamientos en maquinaria rotativa que integra Redes Neuronales Convolucionales (CNN) y Extreme Learning Machine (ELM). Este sistema puede detectar diferentes tipos de fallos y supera a otros métodos en cuanto a la precisión de la clasificación. Por último, otros enfoques de detección y diagnóstico de fallos basados en datos para distintas aplicaciones se han reportado en la literatura, entre ellos, para cajas de engranajes (Cabrera, Sancho, Cerrada, Sánchez, y Li, 2020; Cerrada, Sánchez, y cols., 2016; Cerrada, Zurita, y cols., 2016; Macancela y cols., 2019; Medina y cols., 2020) y para maquinaria recíproca (Cabrera, Guamán, y cols., 2020; Cerrada y cols., 2020).

Ante la ausencia de bases de datos de la operación del sistema, metodologías basadas en el procesamiento de señales resultan adecuadas para la implementación de sistemas de detección y diagnóstico de fallos. Una de ellas es la basada en modelos matemáticos de observadores de estado. Este enfoque hace uso explícito de un modelo del proceso, a partir del cual se implementan algoritmos para analizar los datos que se recogen y registran, en tiempo real, durante el funcionamiento del sistema (Ding, 2008).

Desde principios de los años 70, el diseño de sistemas de detección y diagnóstico de fallos basados en modelos ha recibido gran atención y se ha estudiado, desarrollando así una gran variedad de metodologías (Simani, Fantuzzi, y Patton, 2003). Isermann (2005) presenta una recopilación de diversos enfoques, entre ellos se incluye la detección de fallos a través de estimación de parámetros, por medio del uso de observadores y mediante ecuaciones de paridad. En lo referente a la detección y diagnóstico basado en modelos para cajas de engranajes, dentro de la literatura se reporta que Hao, Kang, Li, y Zhao (2012) presentan un enfoque de ingeniería inversa para la identificación de la iniciación y propagación de fisuras a través de la evaluación residual. En este caso de estudio se utiliza el modelo físico de una caja de engranajes en una serie de ensayos con diversos grados de fallo y se extrae los parámetros característicos de la señal de vibración. Estos resultados junto con los parámetros obtenidos de la planta operando con un fallo no identificado son usados para la generación de una señal residual. Si el resultado es cercano a cero se establece que la avería ha sido identificada. Otro caso de estudio es presentado por Liu, Yang, y Zhang (2018), en este exponen el diagnóstico de fallos basado en el modelo de señal de vibración resultante de un tren de engranajes planetarios con una fractura de diente incipiente en el engranaje solar. En este trabajo se propone un modelo dinámico analítico que introduce la rigidez inducida por las fisuras para la posterior obtención de las señales de vibración del sistema. Si bien las señales de vibración inducidas por las fisuras incipientes resultan demasiado débiles, se concluye que estos fallos pueden ser detectadas a partir del espectro frecuencial.

Asimismo, resulta de interés destacar que la metodología de diagnóstico basados en observadores es una de las formas generadoras de residuales más utilizada y estudiada. Entre sus ventajas figuran su estructura flexible y similitud con el observador de Luenberger (Ding, 2008). Si bien dentro de la literatura no se ha reportado el uso de enfoques de diagnóstico basados en observadores para la detección y diagnóstico de fallos en cajas de engranajes, estos han sido aplicados en problemáticas variadas, entre ellas los sistemas de distribución de aguas y la estimación de torque. En el primer caso, Criollo Arévalo y Valdez Solís (2021) proponen el diseño y la implementación de un conjunto de filtros de detección de fallos para un sistema de tanques interconectados. En este trabajo se considera siete fallos: cuatro fallos internos del proceso y tres fallos en los sensores y actuadores. En el segundo, Morfín y cols. (2018) exponen el uso de observadores asintóticos para la estimación del torque de carga en un motor de inducción de jaula de ardilla para su inclusión en un modelo completo del elemento. De su investigación concluyen la validez del método a través de la comparación de

datos experimentales obtenidos del motor trabajando con condiciones de carga variables y los generados por el modelo matemático propuesto.

Finalmente, resulta primordial resaltar que para el diseño de sistemas de detección y diagnóstico basados en redundancia analítica es necesario contar con un modelo preciso y el conocimiento de cómo los fallos suscitados afectan al mismo (Simani y cols., 2003). En lo concerniente al modelado de cajas de engranajes se presentan propuestas como las de Kahraman y Blankenship (1997), Ma y Chen (2012) y Berrezueta Parra (2021) que permiten obtener el espectro de la Transformada rápida de Fourier (FFT) de la solución del modelo para comparar con el espectro de la FFT de datos experimentales. Este hecho resulta esencial para la validación del modelo y establecer la factibilidad de su uso en actividades de detección y diagnóstico de fallos.

En este trabajo de titulación, se propone el diseño de un sistema de detección y diagnóstico de niveles de severidad de fallos de diente roto mediante el uso de observadores de estado para una caja de engranajes recto, temática de interés en el área de supervisión de maquinaria rotativa.

## **2.2. Descripción del problema**

En el ámbito industrial es necesario mantener los equipos en estados óptimos de operación por lo que los problemas de disponibilidad, costo, eficiencia, rentabilidad y seguridad son de gran importancia. Asimismo, dentro del sector industrial, en sistemas que no son críticos se busca mejorar la eficiencia de la planta, la mantenibilidad, disponibilidad y confiabilidad (Jie Chen y Patton, 1998).

En el caso de la maquinaria rotativa, la presencia de fallos puede causar pérdidas masivas de producción y daños catastróficos. Se estima que un 60 % de los fallos en cajas de cambios se producen por fallos suscitados en los engranajes, siendo el más grave la rotura de los dientes (Sánchez Loja, 2018). Adicionalmente, por lo general, las cajas de engranajes están cerradas para reducir el ruido generado, así como también para prevenir la fuga del lubricante (Davis, 2005). Este hecho complica las labores de inspección del estado de las ruedas dentadas sin detener el sistema, motivo por el cual es necesario establecer una estrategia de monitoreo que prescinda de este requerimiento.

Finalmente, no es un hecho que se puede disponer de bases de datos de señales en condiciones sanas y de fallos, por lo que la aplicación de técnicas y metodologías basadas en datos es limitada en la práctica, reduciéndose a un problema de detección de anomalías, pero no de diagnóstico o de identificación de niveles de severidad del fallo.

### **2.3. Importancia y alcances**

La creciente competencia global ha generado cambios notorios en la manera en la que opera el sector industrial. Estos cambios han afectado a las tareas de mantenimiento y han hecho que su papel tome aún más importancia para asegurar el éxito empresarial. Sin embargo, las estrategias tradicionales de mantenimiento, como el mantenimiento correctivo e incluso el mantenimiento preventivo, ya no son suficientes para satisfacer las exigentes necesidades industriales, así como para reducir al máximo las fallas y degradaciones de los sistemas de fabricación y que sean efectivos en costo. Por ello, estrategias y conceptos como el mantenimiento basado en la condición han evolucionado para coadyuvar este ideal (Rastegari, 2017). Ante dichos avances se determina que dentro de este último tipo de mantenimiento existe la posibilidad de explorar nuevas alternativas para el monitoreo.

El mantenimiento basado en la condición cada vez gana más reconocimiento como la estrategia más eficiente para realizar actividades de mantenimiento en una amplia variedad de maquinaria, incluyendo a uno de los elementos más utilizados en la industria como son las cajas de engranajes. Bajo este contexto, el desarrollo de un sistema de detección y diagnóstico de niveles de severidad de fallo para una caja de engranajes rectos se establece como una actividad fundamental para el monitoreo de las variables de interés durante la operación de estos dispositivos a nivel industrial.

La contribución de este proyecto de titulación consiste en proporcionar una alternativa para llevar a cabo la detección y diagnóstico de severidad de fallo en una caja de engranajes rectos. Este aporte podría resultar beneficioso para la industria local que emplee cajas de cambios en sus procesos productivos, ya que a través de una correcta interpretación de los indicadores de salud de la maquinaria es posible identificar los elementos que se hallen degradados y su nivel de severidad. Esto permitirá llevar las acciones de mantenimiento correspondientes antes de que la maquinaria sufra un daño más grave.

## 2.4. Delimitación

El problema de estudio se delimitará en las siguientes dimensiones:

### 2.4.1. Espacial o geográfica

El proyecto va a tener lugar en la Universidad Politécnica Salesiana que se encuentra ubicada en la provincia del Azuay cantón Cuenca en la Calle Vieja 12-30 y Elia Liut, ver Figura 1. Específicamente, este proyecto se refiere al caso de estudio de detección y diagnóstico de niveles de severidad de fallos basado en modelos matemáticos para una caja de engranajes rectos, cuyo plan experimental y señales de vibración se encuentran disponibles en el laboratorio de vibraciones del Grupo de Investigación y Desarrollo en Tecnologías Industriales (GIDTEC) de esta universidad.

### Figura 1

*Ubicación de la Universidad Politécnica Salesiana.*



*Nota:* Adaptado de Google (s.f.).

### 2.4.2. Temporal

El período seleccionado para la investigación y desarrollo del proyecto es 6 meses.

### 2.4.3. Sectorial o institucional

La Universidad Politécnica Salesiana sede Cuenca es privada y se localiza en el barrio El Vecino, parroquia El Vecino.

## **2.5. Problema general**

- ¿Es posible diseñar un sistema de detección y diagnóstico de niveles de severidad de fallos de diente roto basado en un modelo matemático para una caja de engranajes rectos?

## **2.6. Problemas específicos**

- ¿Es posible caracterizar los modelos de rigidez y amortiguamiento para la definición del modelo matemático de una caja de engranajes en condiciones de fallo de diente roto?
- ¿Se podrá configurar un filtro de detección basado en observadores para una caja de engranajes rectos con base en su modelo matemático?
- ¿Se podrá configurar filtros de diagnóstico generadores de residuales para una caja de engranajes rectos con base en su modelo matemático?
- ¿Es posible evaluar el diseño del sistema de detección y diagnóstico de niveles de severidad de fallos basado en un modelo matemático para una caja de engranajes rectos a través de la sensibilidad de la señal residual ante diferentes fallos?

# **3. Objetivos**

## **3.1. Objetivo general**

- Diseñar un sistema de detección y diagnóstico de niveles de severidad de fallos basado en un modelo matemático para una caja de engranajes rectos.

## **3.2. Objetivos específicos**

- Caracterizar los modelos de rigidez y amortiguamiento para la definición del modelo matemático de una caja de engranajes en condiciones de fallo de diente roto.
- Configurar un filtro de detección basado en observadores para una caja de engranajes rectos con base en su modelo matemático.
- Configurar filtros de diagnóstico generadores de residuales para una caja de engranajes rectos con base en su modelo matemático.



- Evaluar el diseño del sistema de detección y diagnóstico de niveles de severidad de fallos basado en un modelo matemático para una caja de engranajes rectos a través de la sensibilidad de la señal residual ante diferentes fallos.

## 4. Marco Teórico

### 4.1. Sistemas de detección y diagnóstico de fallos

Un sistema de detección y diagnóstico de fallos recibe distintas denominaciones en función de su rendimiento. La forma más sencilla es la de los sistemas de detección de fallos, sus salidas corresponden a una señal de alarma que indica la ocurrencia de una avería. Los esquemas más complejos como los sistemas de detección, aislamiento y análisis de fallos generan una señal de alarma clasificada para mostrar qué fallo ha ocurrido o datos específicos sobre su tipo y magnitud. En general, para el diagnóstico de fallos se llevan a cabo tres acciones fundamentales (Ding, 2008):

- **Detección de fallos:** detección de la ocurrencia de fallos en las unidades funcionales del proceso que conducen a un comportamiento no deseado o intolerable de todo el sistema.
- **Aislamiento de fallos:** localización (clasificación) de diferentes fallos.
- **Análisis o identificación de fallos:** determinación del tipo, magnitud y causa de la avería.

En la Figura 2 se detalla la clasificación de los diferentes enfoques desarrollados para el diagnóstico de fallos.

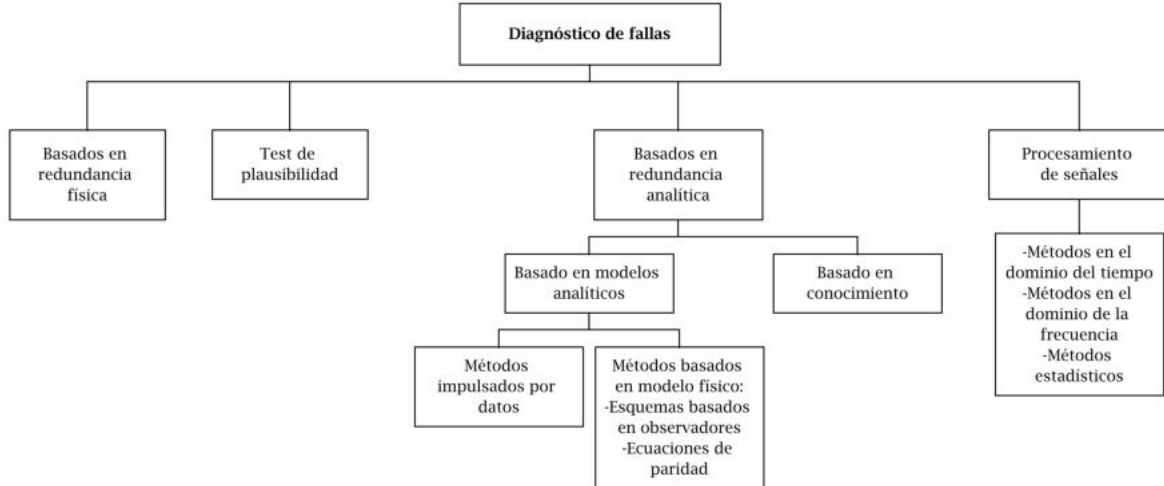
#### 4.1.1. Sistemas de detección y diagnóstico de fallos basados en modelos

En caso de que se espere verificar ciertas relaciones edificadas bajo un modelo del sistema en los estados de operación nominal, la detección y diagnóstico se lleva a cabo bajo el enfoque de redundancia analítica. Esta metodología hace uso de un modelo matemático explícito que es ejecutado en paralelo al proceso y es operado por las mismas señales de entrada. Las variables de proceso estimadas por el modelo de la planta deben seguir adecuadamente a las variables de proceso reales durante los estados libres de fallos. Asimismo, estas tendrán que exhibir desviaciones al existir un fallo en el proceso (Ding, 2008).

Este principio de detección y diagnóstico de fallos pretende determinar, a través del uso de un modelo matemático y dada una entrada  $U$ , la secuencia de salida  $Y$ . Bajo este principio

**Figura 2**

*Clasificación de métodos de diagnóstico de fallos.*



**Nota:** Adaptado de Ding (2008).

es posible verificar la consistencia del sistema con el modelo en cada instante  $t$  por medio de la relación residual  $r(t)$  que se define según la Ecuación (1):

$$r(t) = y(t) - \hat{y}(t) \quad (1)$$

En los estados de funcionamientos libres de fallos, el residual se aproxima a cero. Un residuo diferente de cero indica la existencia de un fallo en el sistema (Blanke y cols., 2016).

La estructura general de los sistemas de detección y diagnóstico de fallos basado en la generación de residuales se ilustra en la Figura 3. De ella se advierte que los sistemas de detección y diagnóstico basados en modelos se componen de dos etapas (Blanke y cols., 2016; Simani y cols., 2003):

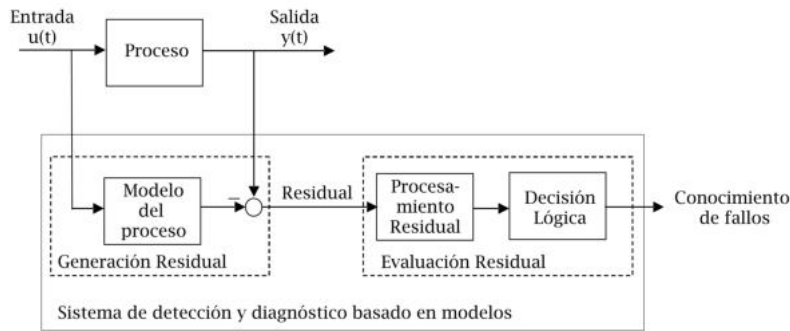
- **Generación residual:** El modelo y el par de entrada/salida se usan para determinar los residuales que describen el grado de coherencia entre el comportamiento del sistema y el modelo. Los métodos de generación residual más comunes se llevan a cabo mediante observadores de estado, ecuaciones de paridad e identificación y estimación de parámetros.

- **Evaluación residual:** Los residuales se evalúan para detectar, aislar e identificar los fallos. Los métodos de evaluación residual típicos incluyen filtros pasa banda, análisis espectral, estimación por máxima entropía, estimación de media y varianza, entre otros.

En ambas acciones es necesario considerar la incertidumbre del modelo, las perturbaciones y el ruido de las mediciones (Blanke y cols., 2016; Simani y cols., 2003).

### Figura 3

*Principio de detección y diagnóstico basado en modelos.*



**Nota:** Adaptado de Blanke y cols. (2016).

#### 4.1.2. Modelado de fallos

Dado que el fundamento para el desarrollo de este tipo de filtros es un modelo matemático, se considera un sistema de variables continuas en el dominio del tiempo. Este tipo de sistemas pueden ser representados a través de funciones de transferencia, ecuaciones de estado o un modelo dinámico de las mismas que describen un vector de variables de estado  $[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$ . Estas variables son las que establecen el comportamiento futuro de un sistema cuando se conoce el vector de las condiciones iniciales de los estados  $[x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)]$  y las señales de entrada al sistema (Blanke y cols., 2016). En base a lo antes expuesto, un modelo de espacio de estados genérico para un sistema de variable continua se puede describir por el modelo dinámico de la Ecuación (2):

$$\dot{x}(t) = g(x(t), u(t)) \quad y(t) = h(x(t), u(t)) \quad (2)$$

donde:

Los estados del sistema se denotan por  $x(t)$ .

El vector de salida se denota por  $y(t)$ .

El vector de entradas se denota por  $u(t)$ .

Las funciones  $f(\cdot)$  y  $g(\cdot)$  pueden ser lineales o no lineales. Si son lineales e invariantes en el tiempo, la representación del sistema se describe por la Ecuación (3):

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (3)$$

De la descripción del sistema dada en la Ecuación (3), que sin perder generalidad no considerará a la matriz  $D$ , es posible distinguir tres subsistemas: la estructura principal representada por  $A$ , los actuadores que se describen por  $B$  y los sensores representados por  $C$ . Estos subsistemas se encuentran sujetos a la aparición de situaciones anómalas en relación a las características establecidas en el diseño. De forma que es necesario diseñar los esquemas de monitoreo para la generación de residuales que permitan detectar los posibles fallos en cada unidad funcional (Ríos Bolívar, 2003).

Los fallos presentados en el sistema se pueden describir en relación con el modelo adoptado. Por lo que los fallos en los actuadores, que se describen como los fallos que provocan cambios en los elementos de actuación del sistema, pueden ser modelados como entradas aditivas a la dinámica del proceso (Ding, 2008; Ríos Bolívar, 2003). Esto se describe en la Ecuación (4) (Ríos Bolívar, 2003) :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_f f_a \quad y(t) = Cx(t) \quad (4)$$

Por su parte, los fallos en los sensores, que se definen como los fallos que actúan directamente sobre los elementos de medición del sistema, se pueden modelar como entradas aditivas en la salida del proceso (Ding, 2008; Ríos Bolívar, 2003). Esto se describe en la Ecuación (5) (Ríos Bolívar, 2003):

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad y(t) = Cx(t) + C_f f_s \quad (5)$$

De igual forma, los fallos en la planta, que se definen como los fallos internos del proceso producto de un cambio en los parámetros del sistema, se pueden modelar como entradas aditivas a la dinámica del proceso (Ding, 2008; Ríos Bolívar, 2003). Esto se describe en la Ecuación (6) (Ríos Bolívar, 2003):

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_f x(t) + Bu(t) \quad y(t) = Cx(t) \quad (6)$$

Si se considera que  $A_f x = A_f f_p$ , entonces los modos de fallo adoptados  $f_a, f_p, f_s$  son funciones vectoriales temporales que se presentan en un determinado tiempo  $t \geq t_0, t_0 > 0$ . De igual forma,  $B_f, C_f$  y  $A_f$  son matrices vectoriales que indican la dirección de los fallos (Ríos Bolívar, 2003). Finalmente, un sistema sujeto a fallos en cualquiera de sus subsistemas se describe por la Ecuación (7) (Ríos Bolívar, 2003):

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_f f_p + Bu(t) + B_f f_a \quad y(t) = Cx(t) + C_f f_s \quad (7)$$

#### 4.1.3. Filtros de detección basados en observadores de Luenberger

La detección de fallos comprende la etapa de generación de residuos que posteriormente serán sujetos a evaluación. Para un sistema dinámico descrito por la Ecuación (3) donde sin perder generalidad no se considerará la existencia de la matriz D, el observador de Luenberger de orden completo es un subsistema capaz de estimar los estados del sistema mediante la Ecuación (8) (Nise, 2015):

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L[y(t) - C\hat{x}(t)] \quad \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \quad (8)$$

Donde  $\hat{x}(t)$  son los estados estimados, mientras que  $\hat{y}(t)$  son las salidas estimadas. Las entradas al observador son las salidas tanto estimada  $\hat{y}(t)$  como medida  $y(t)$  y la entrada a la planta  $u(t)$ . Asimismo, la matriz L corresponde a la ganancia del observador y debe ser seleccionada de modo que permita que la dinámica de este subsistema sea asintóticamente estable (Nise, 2015; Ogata, 2010).

Si se considera el sistema sujeto a fallos modelado por la Ecuación (7) y el observador de Luenberger de la Ecuación (8) se obtienen las ecuaciones generadoras de residuales descritas en la Ecuación (9), donde  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  (Ríos Bolívar, 2003).

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t) + A_f f_p + B_f f_a + LC_f f_s \quad r(t) = Ce(t) + C_f f_s \quad (9)$$

Si en las ecuaciones generadoras de residuales de la Ecuación (9) el vector de ganancias del observador  $L$  es elegido de tal forma que  $A - LC$  sea estable,  $\hat{x}(t)$  proporcionará una estimación insesgada de  $x(t)$ , es decir (Ríos Bolívar, 2003):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - \hat{x}(t)) = 0 \quad (10)$$

Debido a que en la Ecuación (9) para  $t < t_0$  el proceso tiene un funcionamiento libre

de fallos,  $r(t)$  exhibe el comportamiento propio de un residual (Ríos Bolívar, 2003). La característica más importante de un residual en ausencia de fallos se expresa en la Ecuación (11):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = 0 \text{ para todo } u(t), x(0) \text{ y } y(0) \neq 0 \quad (11)$$

En caso de presentarse un fallo, entonces  $r(t) \neq 0$  y se logra la detección del fallo (Ding, 2008). Pese a que se ha presentado, a través de un observador de orden completo, la implementación de un filtro de detección de fallos, el problema del diagnóstico aún está presente.

#### 4.1.4. Filtros de diagnóstico basados en observadores

El diagnóstico de fallos comprende la generación y evaluación residual, con el fin de detectar y diagnosticar los fallos ocurridos en un sistema. Para este propósito resulta de interés el observador de diagnóstico, mismo que se caracteriza por su estructura flexible y similitud con el observador de Luenberger. Estas características lo convierten en una de las formas de generación residual más investigadas. A continuación, se describirá el proceso de formulación para un filtro de diagnóstico basado en observadores (Ding, 2008).

El núcleo de un observador de diagnóstico es un observador de tipo Luenberger (salida), su formulación se detalla en la Ecuación (12):

$$\dot{z} = Gz + Hu + Ly \quad \hat{y} = \bar{W}z + \bar{V}y + \bar{Q}u \quad (12)$$

donde en  $z \in R^s$ ,  $s$  denota el orden del observador y puede ser igual, menor o mayor que el orden del sistema  $n$ . Asimismo, se considera que el sistema lineal es controlable y observable. Por consiguiente, las matrices  $G$ ,  $H$ ,  $L$ ,  $\bar{Q}$ ,  $\bar{V}$  y  $\bar{W}$  de la Ecuación (12) sumado a una matriz  $T \in R^{s \times n}$  tienen que cumplir una serie de condiciones conocidas como condiciones de Luenberger. Estas se describen a continuación:

$$I. G \text{ es estable} \quad (13)$$

$$II. TA - GT = LC \quad H = TD - LB \quad (14)$$

$$III. C = \bar{W}T + \bar{V}C \quad \bar{Q} = D - \bar{V}D \quad (15)$$

Bajo las condiciones (13) - (15), el sistema descrito por la Ecuación (12) ofrece una estimación insesgada para  $y$ , de modo que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - \hat{y}(t)) = 0 \quad (16)$$

A continuación, se ahondará en la aplicación del observador de diagnóstico de tipo Luenberger de la Ecuación (12) en la generación de residuales. Se considera un sistema dinámico con  $e = Tx - z$  como su vector de estado y  $y - \hat{y}$  como su salida. Resulta que de acuerdo a las condiciones (13)-(15):

$$\dot{e} = Ge \quad y - \hat{y} = \bar{W}e \quad (17)$$

que asegura la condición (16). Con base en (17), el residual  $r(t)$  se describe por la Ecuación (18):

$$r = V^*(y - \hat{y}) \quad V^* \neq 0 \quad (18)$$

El vector residual descrito por la Ecuación (18) tiene una dinámica descrita por la Ecuación (19) y la Ecuación (20):

$$\dot{z} = Gz + Hu + Ly \quad (19)$$

$$r = V^*y - V^*\bar{W}z - V^*\bar{V}y - V^*\bar{Q}u = Vy - Wz - Qu \quad (20)$$

donde

$$V = V^*(I - \bar{V}) \quad W = V^*\bar{W} \quad Q = V^*\bar{Q} \quad (21)$$

Por lo que, la condición de diseño del generador residual III dada por (15) debería ser reemplazada por:

$$III. VC - WT = 0 \quad Q = VD \quad (22)$$

La Ecuación (19) y la Ecuación (20) describen un esquema de diseño para la generación de residuales que puede ser formulada como un observador y un postfiltro, tal como se ilustra en la Figura 4. Por lo que resulta de interés encontrar una matriz de ganancia para el observador, así como también revelar las relaciones entre las matrices  $G$ ,  $L$ ,  $T$ ,  $V$  y  $W$  resolviendo las condiciones expuestas en (13), (14) y (22).

La comparativa entre el observador de diagnóstico y el filtro de detección de fallos plantea algunas consideraciones (Ding, 2008):

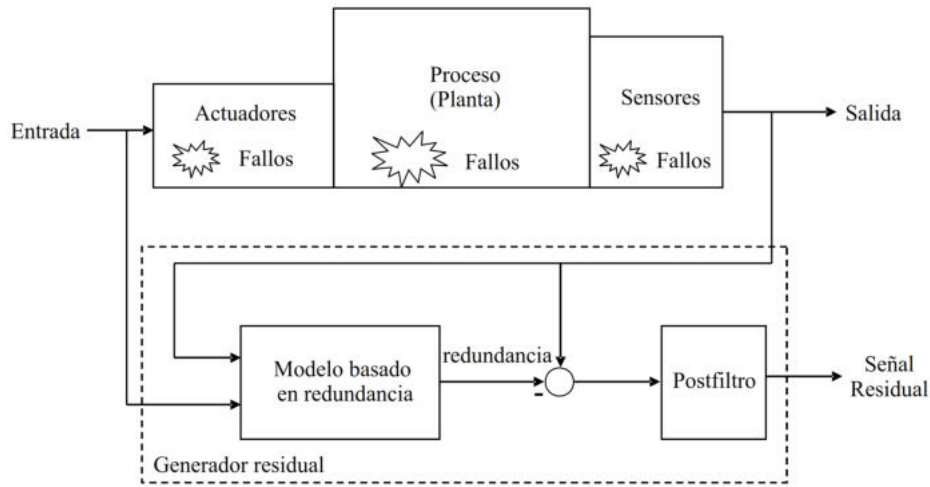
- El esquema del observador de diagnóstico puede conducir a un generador residual de orden reducido, que es deseable y útil para la implementación en línea.

- El observador de diagnóstico brinda un mayor grado de libertad de diseño.
- El diseño del observador de diagnóstico es más complicado.

Una vez establecidas las condiciones de Luenberger, descritas por (13), (14) y (22), y su importancia resulta necesario definir sus soluciones.

**Figura 4**

*Esquema de generación de residuales de un observador de diagnóstico.*



**Nota:** Adaptado de Ding (2008).

#### 4.1.5. Algoritmo de aproximación algebraica para la solución de las condiciones de Luenberger

La solución de las matrices que cumplen con las condiciones de Luenberger, a través del algoritmo de aproximación algebraica, se resume en el siguiente Teorema, mismo que es demostrado en Ding (2008).

**Teorema:** Considerando el modelo del sistema  $G_{yu}(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$  y  $s \geq \sigma_{min}$ , en el que  $\sigma_{min}$  es el mínimo índice de observabilidad del sistema, entonces las matrices  $L$ ,  $T$ ,  $V$  y  $W$  se definen por:

$$L = -c(G)X \quad T = YJ \quad (23)$$

$$V = WTC^T(CC^T)^{-1} \quad WTC_N^T = 0 \quad (24)$$



La Ecuación (23) y la Ecuación (24) satisfacen las condiciones de Luenberger, en las que la matriz  $G$  tiene que elegirse estable, la matriz  $X \in R^{s \times m}$  se establece de forma arbitraria, y:

$$C_N \in R^{(n-m) \times n} \text{ y rango } \begin{bmatrix} C \\ C_N \end{bmatrix} = n \quad CC_N^T = 0 \quad (25)$$

$$Y = [X \quad GX \quad \dots \quad G^{m-1}X] \quad (26)$$

$$c(s) = \det(sI - A) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \quad (27)$$

$$c(G) = a_n G^n + a_{n-1} G^{n-1} + \dots + a_1 G + a_0 I \quad (28)$$

$$J = \begin{bmatrix} a_n C A^{n-1} + a_{n-1} C A^{n-2} + \dots + a_2 C A + a_1 C \\ a_n C A^{n-2} + a_{n-1} C A^{n-3} + \dots + a_2 C \\ \vdots \\ a_n C \end{bmatrix} \quad (29)$$

Considerando lo antes expuesto, se provee el algoritmo para la solución de las condiciones de Luenberger a través de aproximación algebraica (Ding, 2008).

- **Paso 1:** Establecer las matrices  $G$  y  $X$ .
- **Paso 2:** Calcular  $c(s) = \det(sI - A)$  para obtener los coeficientes del polinomio característico  $a_0, a_1, \dots, a_n$ .
- **Paso 3:** Calcular las matrices  $L$  y  $T$  según la Ecuación (23).
- **Paso 4:** Resolver  $WTC_N^T = 0$  para  $W$ .
- **Paso 5:** Establecer  $V$  según la Ecuación (24).

## 4.2. Modelos dinámicos de cajas de engranajes

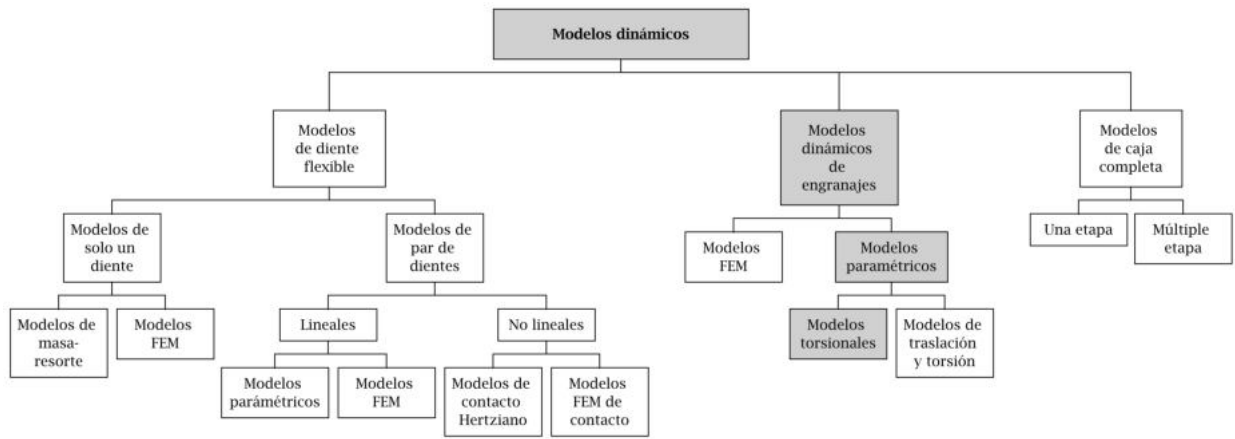
El problema de vibraciones y ruido de los engranajes se halla presente en la mayoría de entornos industriales. Por ello, se han desarrollado una gran cantidad de modelos dinámicos para sistemas de cajas de engranajes con el fin de realizar análisis de vibraciones y control de ruido. Asimismo, temáticas como tensiones de flexión y contacto, error de transmisión, ruido irradiado, cargas en otros elementos del sistema, regiones de estabilidad, frecuencias naturales, fiabilidad y fatiga han motivado el desarrollo de diferentes modelos matemáticos para cajas de engranajes. Cabe destacar que dichos modelos han sido obtenidos considerando

diferentes supuestos básicos y simplificaciones para reducir un proceso físico complejo a un problema matemático manejable (Du, 1997).

En la Figura 5 se presenta la clasificación propuesta por Du (1997), en la cual se resalta la clasificación a la que pertenece el modelo torsional de dos grados de libertad que se ha empleado en este caso de estudio.

**Figura 5**

*Clasificación de modelos dinámicos para cajas de engranajes.*



**Nota:** Adaptado de Du (1997).

En la Figura 6 se ilustra un par de engranajes como un sistema de dos grados de libertad. Este sistema se modela a través de un modelo dinámico de engranajes paramétrico torsional. Para ello se considerado la variación de rigidez en el tiempo, el error de transmisión y la posible pérdida de contacto. Las ecuaciones de movimiento que describen este sistema se detallan en la Ecuación (30) (Yu, 2017):

$$\begin{cases} J_1\ddot{\theta}_1 + rb_1C(t)(rb_1\dot{\theta}_1 - rb_2\dot{\theta}_2) + rb_1K(t)g(x(t)) = T_1 \\ J_2\ddot{\theta}_1 + rb_2C(t)(rb_1\dot{\theta}_1 - rb_2\dot{\theta}_2) + rb_2K(t)g(x(t)) = -T_2 \end{cases} \quad (30)$$

en las que el error dinámico de transmisión  $x(t)$  es igual a  $x(t) = rb_1\theta_1 - rb_2\theta_2 + e(t)$ . Por su parte  $g(x(t))$  es la función de pérdida de contacto por juego entre los engranajes y su modelado se presenta en la Ecuación (31) (Yu, 2017):

$$g(x(t)) = \begin{cases} x(t) - b & \text{cuando } x(t) > b \\ 0 & \text{cuando } -b < x(t) < b \\ x(t) + b & \text{cuando } x(t) < -b \end{cases} \quad (31)$$

donde:

El par de entrada se denota por  $T_1$ .

El par de salida se denota por  $T_2$ .

El coeficiente de rigidez se denota por  $K(t)$ .

El coeficiente de amortiguamiento se denota por  $C(t)$ .

El juego entre engranajes se denota por  $b$ .

El error dinámico de transmisión se denota por  $x(t)$ .

El error de estático de transmisión variante en el tiempo se denota por  $e(t)$ .

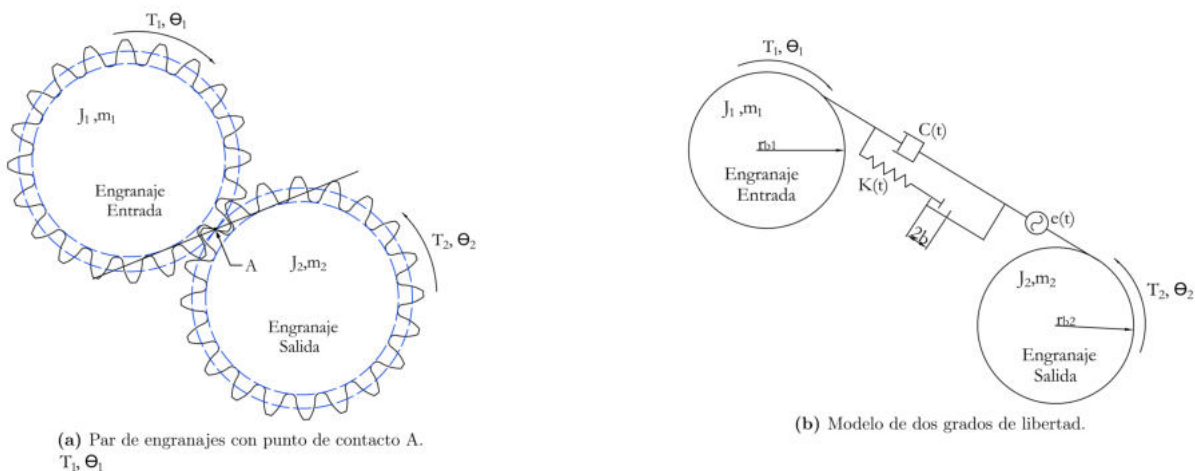
Los radios base de los engranajes de entrada y salida se denotan por  $rb_1$  y  $rb_2$ , correspondientemente.

Las masas de los engranajes de entrada y salida se denotan por  $m_1$  y  $m_2$ , correspondientemente.

Los momentos de inercia de masa de los engranajes de entrada y salida se denotan por  $J_1$  y  $J_2$ , correspondientemente.

### Figura 6

*Esquema de la caja de engranajes para modelo de dos grados de libertad.*



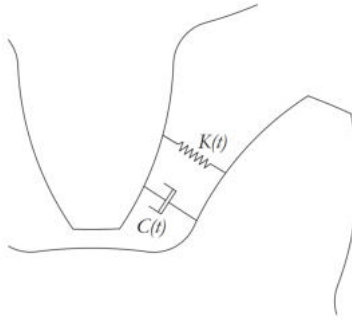
**Nota:** Adaptado de Yu (2017).

### 4.3. Rigidez del diente en cajas de engranajes

La rigidez se define como la capacidad de un elemento de almacenar y liberar energía potencial en un sistema. En un par de engranajes, su magnitud no se considera constante debido al cambio periódico del número de pares de dientes en contacto. En virtud de esta condición y la posición de contacto de los dientes, la rigidez se modela a través de una función periódica en el tiempo conocida como rigidez variante en el tiempo. Para el análisis analítico del coeficiente de rigidez en un par de engranajes se tiene en consideración que entre cada par de dientes un elemento de rigidez  $K(t)$  y elemento amortiguador  $C(t)$  como se ilustra en la Figura 7 (Balachandran y Magrab, 2009; Liang, Zuo, y Patel, 2014; Yu, 2017).

**Figura 7**

*Rigidez y amortiguamiento entre dientes.*



**Nota:** Tomado de Berrezueta Parra (2021).

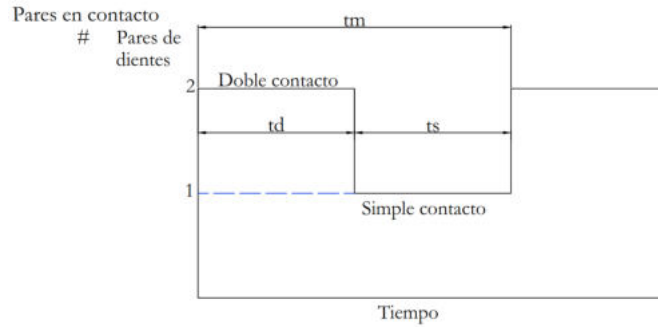
Para estimar la rigidez variante en el tiempo uno de los enfoques comúnmente utilizado es el método analítico basado en el principio de energía potencial. Esto debido a que constituye una metodología simple y efectiva que puede ser aplicada en el análisis de la rigidez en engranajes sanos, así como sujetos a fallos como grietas y rotura de dientes. Para evaluar la rigidez mediante esta metodología se considera la contribución de tres factores: la deflexión por contacto hertziano, la deflexión básica del diente de engranaje y la deflexión por flexión del filete raíz (Liang y cols., 2014; Yu, Shao, y Mechefske, 2015).

En Berrezueta Parra (2021) se plantea el modelado de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento para una caja de engranajes en condiciones de operación nominal considerando los tres aportes previamente descritos. De este estudio se determina que no se puede considerar una función de rigidez constante en el tiempo debido a que los engranajes poseen un número

variante de pares de dientes en contacto. Además, propone que la rigidez se modele a través de una función periódica variable en el tiempo con período  $t_m$ , tal como se ilustra en la Figura 8, donde  $t_d$  es el tiempo de doble contacto y  $t_s$  es el tiempo de simple contacto (Fakhfakh, Chaari, y Haddar, 2005).

**Figura 8**

*Rigidez variante en el tiempo.*



**Nota:** Tomado de Berrezueta Parra (2021).

De igual forma, en Berrezueta Parra (2021) se establece que aproximación adecuada de la función de rigidez variante en el tiempo  $K(t)$  es modelada por la Ecuación (32) (Chaari, Baccar, Abbas, y Haddar, 2008):

$$K(t) = \begin{cases} K_{max} & nt_m \leq t \leq (n + \epsilon_\alpha - 1)t_m \\ K_{min} & (n + \epsilon_\alpha - 1)t_m \leq t \leq (n + 1)t_m \end{cases} \quad (32)$$

donde:

El coeficiente de rigidez variante en el tiempo se denota por  $K(t)$ .

La rigidez en simple contacto se denota por  $K_{min}$ .

La rigidez en doble contacto se denota por  $K_{max}$ .

El tiempo total de contacto entre un par de dientes se denota por  $t_m$ .

El juego entre engranajes se denota por  $b$ .

La relación de contacto radial se denota por  $\epsilon_\alpha$ .

El número de pares que han completado su tiempo de contacto  $t_m$  se denotan por  $n$ .

$K_{min}$  y  $K_{max}$  se pueden estimar a través de la Ecuación (33) y (34) (Mohammed, Rantatalo, y Aidanpää, 2015). Mientras que para los engranajes de dientes rectos de perfil de involuta

$t_m$ ,  $t_s$  y  $t_d$  se calculan mediante las Ecuaciones (35)-(37), respectivamente:

$$K_{min} = \frac{1}{\frac{1}{k_h} + \frac{1}{k_{a1}} + \frac{1}{k_{a2}} + \frac{1}{k_{b1}} + \frac{1}{k_{b2}} + \frac{1}{k_{f1}} + \frac{1}{k_{f2}} + \frac{1}{k_{s1}} + \frac{1}{k_{s2}}} \quad (33)$$

$$K_{max} = 2K_{min} \quad (34)$$

$$t_m = \frac{60}{NZ} \quad (35)$$

$$t_s = (\epsilon_\alpha - 1)t_m \quad (36)$$

$$t_d = (2 - \epsilon_\alpha)t_m \quad (37)$$

donde:

La rigidez por contacto hertziano se denota por  $K_h$ .

La rigidez debido a la compresión axial de los engranajes de entrada y salida se denotan por  $K_{a1}$  y  $K_{a2}$ , correspondientemente.

La rigidez debido a la flexión de los engranajes de entrada y salida se denotan por  $K_{b1}$  y  $K_{b2}$ , correspondientemente.

La rigidez debido al esfuerzo cortante de los engranajes de entrada y salida se denotan por  $K_{s1}$  y  $K_{s2}$ , correspondientemente.

La rigidez debido a la deflexión en el filete del diente de los engranajes de entrada y salida se denotan por  $K_{f1}$  y  $K_{f2}$ , correspondientemente.

La velocidad de giro del engranaje en RPM se denota por  $N$ .

El número de dientes del engranaje se denota por  $Z$ .

La relación de contacto radial se denota por  $\epsilon_\alpha$  y se calcula mediante la Ecuación (38):

$$\epsilon_\alpha = \frac{\sqrt{\frac{d_{a1}^2}{2} - \frac{d_{b1}^2}{2} + \frac{d_{a2}^2}{2} - \frac{d_{b2}^2}{2}} - a_x \sin(\alpha_w)}{\pi m \cos \alpha_w} \quad (38)$$

donde:

Los diámetros exteriores del engranaje de entrada y salida se denotan por  $d_{a1}$  y  $d_{a2}$ .

Los diámetros exteriores del engranaje de entrada y salida se denotan por  $d_{b1}$  y  $d_{b2}$ .

La distancia de centros del par de engranajes se denota por  $a_x$ .

El módulo de los engranajes se denota por  $m$ .

El ángulo de presión se denota por  $\alpha_w$ .

#### 4.4. Amortiguamiento en cajas de engranajes

El amortiguamiento se define como la propiedad de un material para disipar la energía interna bajo deformación cíclica. Usualmente el coeficiente de amortiguamiento se define según la Ecuación (39) (Ali, Mohammad, y Yahya, 2015):

$$C_s = 2\zeta\sqrt{Km_e} \quad (39)$$

donde:

El coeficiente de amortiguamiento se denota por  $C_s$ .

La razón de amortiguamiento se denota por  $\zeta$ .

La rigidez se denota por  $K$ .

La masa media se denota por  $m_e$ .

Para el caso de un par de engranajes el amortiguamiento variante en el tiempo se calcula según la Ecuación (40) (Kasuba y Evans, 1981; Lin y Huston, 1986):

$$C(t) = 2\zeta_g\sqrt{K(t)m_{eg}} \quad (40)$$

donde:

El coeficiente de amortiguamiento variante en el tiempo se denota por  $C(t)$ .

La razón de amortiguamiento del material se denota por  $\zeta_g$ .

El coeficiente de rigidez variante en el tiempo se denota por  $K(t)$ .

La masa media equivalente entre engranajes se denota por  $m_{eg}$  y se calcula mediante la Ecuación (41) (Kasuba y Evans, 1981; Lin y Huston, 1986):

$$m_{eg} = \frac{r_{b1}^2 r_{b2}^2 J_1 J_2}{r_{b1}^2 J_1 + r_{b2}^2 J_2} \quad (41)$$

donde:

$J_1, J_2$  son los momentos de inercias del engranaje de entrada y salida respectivamente.

$r_{b1}, r_{b2}$  son los radios base del engranaje de entrada y salida respectivamente.

Finalmente, se obtiene la siguiente expresión para el amortiguamiento variante en el tiempo (Kasuba y Evans, 1981; Lin y Huston, 1986):

$$C(t) = 2\zeta_g \sqrt{\frac{K(t)r_{b1}^2 r_{b2}^2 J_1 J_2}{r_{b1}^2 J_1 + r_{b2}^2 J_2}} \quad (42)$$

La expresión de la Ecuación (42) correspondiente al amortiguamiento variante en el tiempo también se puede formular como en la Ecuación (43):

$$C(t) = \begin{cases} C_{max} & nt_m \leq t \leq (n + \epsilon_\alpha - 1)t_m \\ C_{min} & (n + \epsilon_\alpha - 1)t_m \leq t \leq (n + 1)t_m \end{cases} \quad (43)$$

## 4.5. Modelado de fallos en cajas de engranajes

### 4.5.1. Modos de fallo en cajas de engranajes

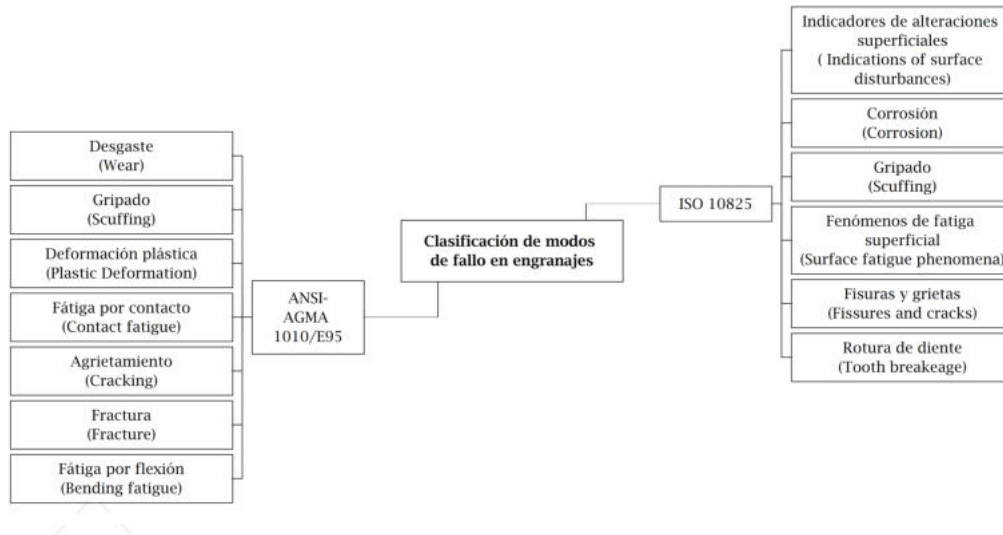
Se estima que un 60% de las fallos en cajas de cambios se producen por fallos suscitados en los engranajes (Sánchez Loja, 2018). Es por ello que, a continuación, se brindará una breve descripción de los modos de fallo en engranajes según lo expuesto en la norma ISO 10825 y la norma ANSI-AGMA 1010/E95. La norma ISO 10825, titulada “*Gears - Wear and damage to gear teeth - Terminology*”, agrupa en seis categorías a varios tipos y subtipos de fallo (International Organization for Standardization, 1995). En cambio, la norma ANSI-AGMA 1010/E95, titulada “*Appearance of GearTeeth - Terminology of Wear and Failure*”, divide en siete categorías a distintos tipos y subtipos de fallo (American Gear Manufacturers Association, 1995). La clasificación se ilustra en la Figura 9.

- **Desgaste (Wear):** Es la remoción o desprendimiento de material como resultado de factores mecánicos, químicos o por la presencia de contaminantes en el lubricante. Se subdivide en desgaste por adhesión (*adhesion*), abrasión (*abrasion*), pulido (*polishing*), corrosión (*corrosion*), escalado (*scaling*), cavitación (*cavitation*), erosión (*erosion*), descarga eléctrica (*electrical discharge*), ondulación (*rippling*) y por interferencia (*interference wear*).
- **Gripado (Scuffing):** Es la adherencia de material que causa la transferencia de metal de una superficie de diente a otra debido a soldaduras y desgarros. Las áreas afectadas presentan una textura rugosa o mate. Su aparición es debido a malas condiciones de lubricación que llevan a la rotura de la película de lubricante.
- **Deformación permanente (Permanent deformation):** Son las depresiones en los flancos de los dientes provocadas por el paso de un cuerpo extraño sobre el engranaje. Estas



**Figura 9**

*Clasificación de modos de fallo en cajas de engranajes*



**Nota:** Adaptado de American Gear Manufacturers Association (1995); International Organization for Standardization (1995).

ocurren debido a que los esfuerzos superan la resistencia última del material. Se subdivide en muesca (*indentation*), material frío y caliente (*cold and hot flow*), laminación (*rolling*), impacto de diente (*tooth hammer*), ondulación (*rippling*), cresta (*ridging*), rebaba (*burr*) e interferencia del diente (*tip-to-root interference*).

- **Fatiga superficial (*Superficial fatigue*):** Son daños provocados por las tensiones superficiales debido a la aplicación repetida de fuerzas. Producen desprendimiento de material y formación de cavidades. Se subdivide en picadura (*pitting*), escamado (*flake pitting*), desprendimiento (*spalling*) y trituración de los flancos (*case crushing*).
- **Fisuras y agrietamientos (*Fissures and cracks*):** Son provocadas por tensiones internas excesivamente elevadas de origen mecánico o térmico. Estas se subdividen en grietas por endurecimiento (*hardening cracks*), grietas por abrasión (*grinding cracks*) y grietas por fatiga (*fatigue cracks*).
- **Diente roto (*Tooth breakage*):** Se produce por sobrecargas sobre el diente ya sea por un diseño deficiente o por la aplicación de cargas demasiado altas. Se subdivide en rotura

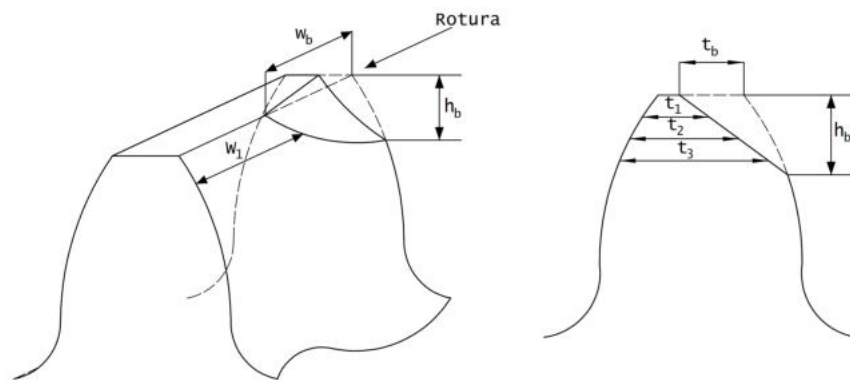
por sobrecarga (*overload breakage*), cizallamiento de dientes (*tooth shear*), rotura tras deformación plástica (*breakage after plastic deformation*) y rotura por fatiga (*fatigue breakage*).

#### 4.5.2. Modelado de diente roto

La rotura se caracteriza por la fractura total o de una parte sustancial del diente. Este fallo causa un decremento en la zona de contacto entre los dientes, así como el incremento en la deflexión y reducción en el coeficiente de rigidez (Chaari y cols., 2008). La Figura 10 ilustra el esquemático de diente roto.

**Figura 10**

*Esquemático diente roto.*



**Nota:** Adaptado de Chaari y cols. (2008).

Para simplificar el modelado la forma de la rotura ha sido aproximada a través de líneas punteadas y es delimitada por la altura  $h_b$ , la profundidad  $t_b$ , el ancho  $w_b$  y la profundidad del diente  $\{t_1, t_2, t_3, \dots, etc.\}$ . El ancho del contacto cambia a medida que la línea de contacto se mueve y es evaluado instantáneamente por (Chaari y cols., 2008):

$$W_1 = W - w_b \quad (44)$$

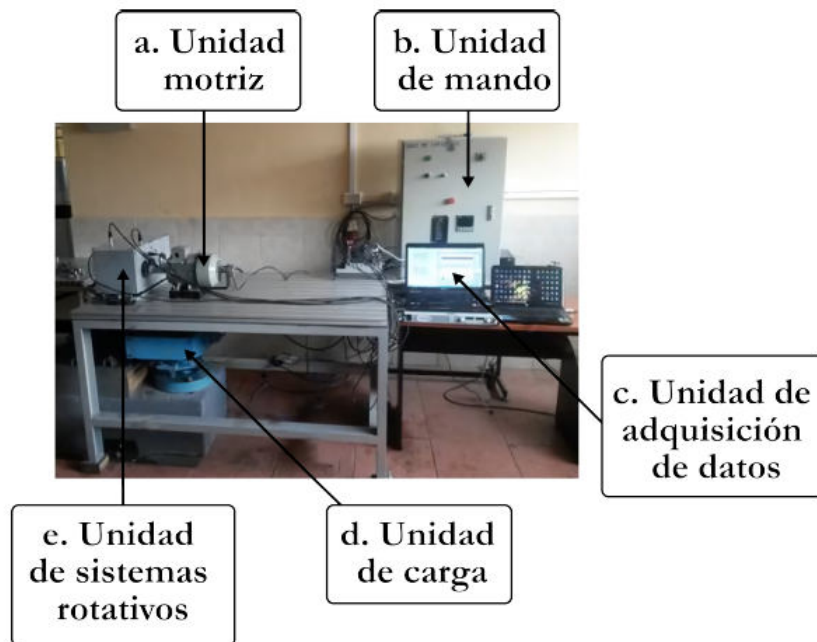
La rigidez del diente se calcula de acuerdo con las Ecuaciones (33) y (34) teniendo en cuenta los cambios geométricos debidos a la rotura del diente y actualizando los valores de ancho, área de sección transversal y momento de inercia del área ilustrados en la Figura 10.

## 4.6. Adquisición de datos

El banco de vibraciones de la Universidad Politécnica Salesiana sede Cuenca posee todos los equipos necesarios para la simulación de fallos en la maquinaria rotativa que, generalmente, ocurren en el ámbito industrial. Dentro de ellos se encuentran: desalineación, desbalanceo y combinaciones de fallos de rodamientos y las ruedas dentadas. La adquisición de datos se lleva a cabo en un prototipo experimental considerando condiciones de operación reales controladas, así como la adquisición de señales de velocidad de entrada y salida, vibración, tensión, corriente y emisiones acústicas. En la Figura 11 se ilustran las partes constitutivas del banco de pruebas.

**Figura 11**

*Banco de vibraciones.*



**Nota:** Obtenido de Chingal Imaicela (2018).

### 4.6.1. Plan experimental

Con el fin de generar una base de datos a partir del banco experimental se posee un motor, una caja de engranajes rectos de una sola etapa, una polea trapezoidal y un freno

magnético. Dentro de los elementos de adquisición de señales se encuentran un tacómetro, cuatro acelerómetros, seis sensores de emisión acústica, seis sensores de voltaje, un encoder láser y dos micrófonos de condensador que se comunican a una computadora mediante un chasis de adquisición de datos. La adquisición de la base de datos ha sido realizada en condición de operación de fallo de diente roto en distintas severidades y bajo la aplicación de pares de carga constantes denominados L1, L2 y L3 (Sánchez Loja, 2018).

El modelado matemático del motor empleado en el banco experimental fue previamente desarrollado por Ortega Lucero (2021) y sus características se presentan en la Tabla 1.

**Tabla 1**

*Características del motor del banco experimental.*

Características del motor			
<b>Marca:</b>	Siemens	<b>Denominación:</b>	11A7 096-6YA60
<b>Tipo de motor:</b>	Trifásico	<b>Velocidad:</b>	1110 RPM
<b>Potencia nominal:</b>	2 HP	<b>Conexiones:</b>	YY / Y

**Nota:** Obtenido de Ortega Lucero (2021).

En la Tabla 2 se detallan las especificaciones del equipo mecánico empleado en el banco experimental.

**Tabla 2**

*Especificaciones del equipo mecánico del banco experimental.*

Especificaciones del equipo mecánico			
<b>Caja de engranajes:</b>	Una fase con engranajes rectos	<b>Rodamientos:</b>	NTN 6005 Z2C3
<b>Tipo de correa:</b>	Correa trapezoidal	<b>Tipo de lubricación:</b>	Baño de aceite
<b>Aceite:</b>	Gulf HARMONY AW ISO VG 68	<b>Cantidad de aceite:</b>	1.8 gal

**Nota:** Obtenido de Ortega Lucero (2021).

Asimismo, en la Tabla 3 se detallan las características de la caja de engranajes del banco experimental.

**Tabla 3**

*Características de la caja de engranajes del banco experimental.*

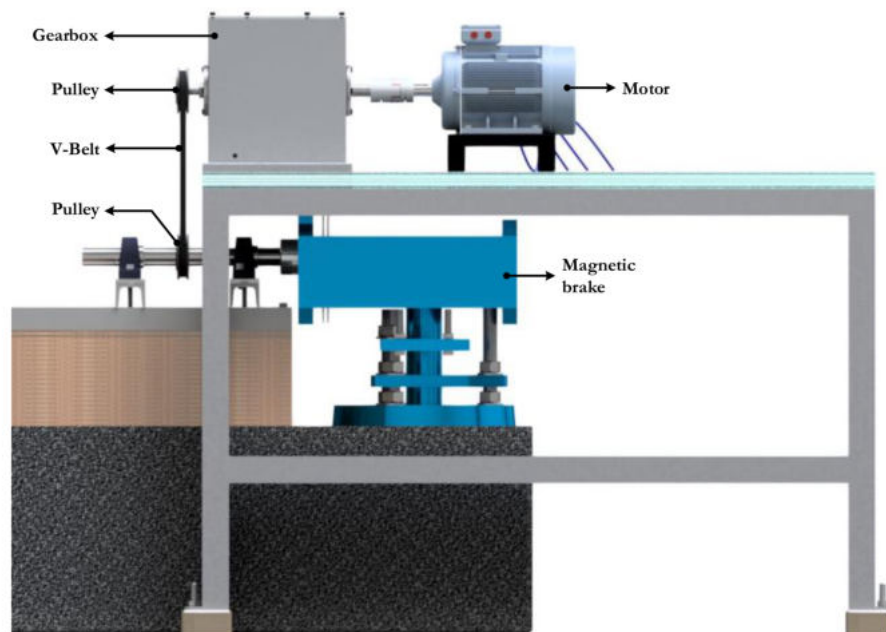
Características de la caja de engranajes					
Tipo de engranajes:	Rectos	Número de etapas:	1	Módulo:	2.25 [mm]
Ángulo de presión:	20°	Ancho de diente:	20.7 [mm]	Número de dientes:	32/48

**Nota:** Obtenido de Ortega Lucero (2021).

En la Figura 12 se detalla la disposición de los elementos del sistema electromecánico del banco experimental.

**Figura 12**

*Disposición del sistema electromecánico.*

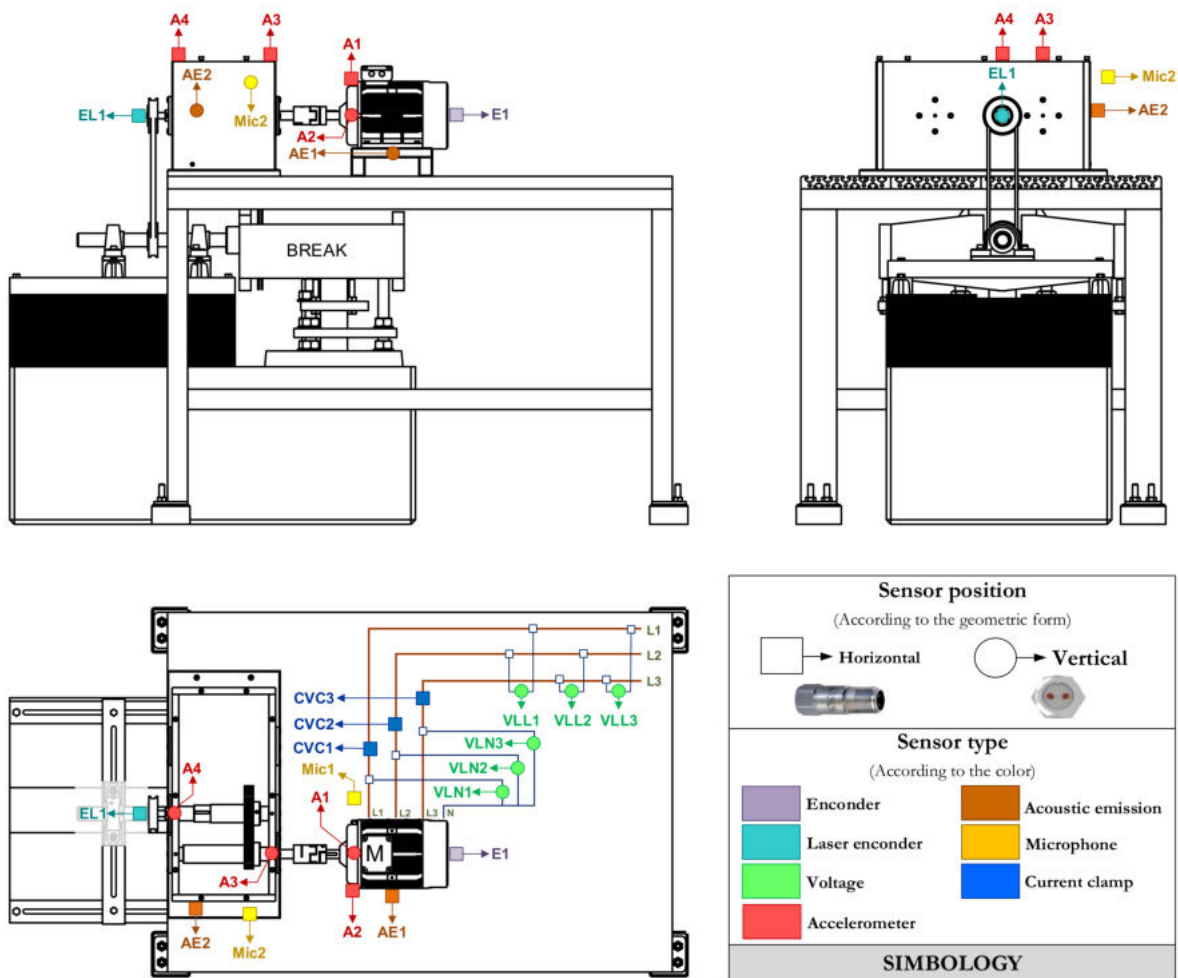


**Nota:** Obtenido de Ortega Lucero (2021).

En la Figura 13 se ilustra la ubicación de los sensores en el sistema, con su respectiva codificación.

**Figura 13**

*Ubicación de los sensores en el banco experimental.*

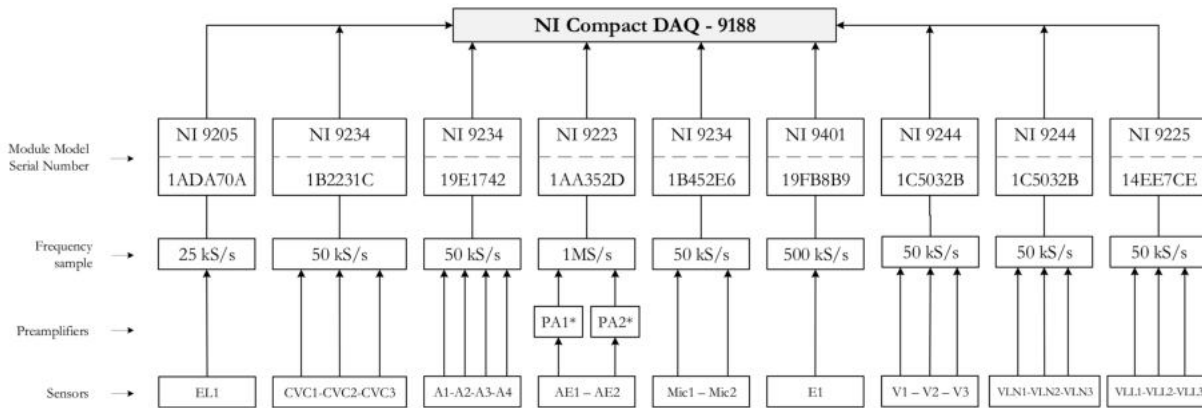


**Nota:** Obtenido de Ortega Lucero (2021).

Por su parte, en la Figura 14, se presenta la configuración de los sensores y módulos para la adquisición de la base de datos.

**Figura 14**

*Ubicación de los sensores en el banco experimental.*



**Nota:** Obtenido de Ortega Lucero (2021).

#### 4.6.2. Modo de fallo diente roto y niveles de severidad

En la Tabla 4 y en la Figura 15 se detallan los patrones de fallo para diente roto y sus distintos niveles de severidad, implementados en el prototipo experimental.

**Tabla 4**

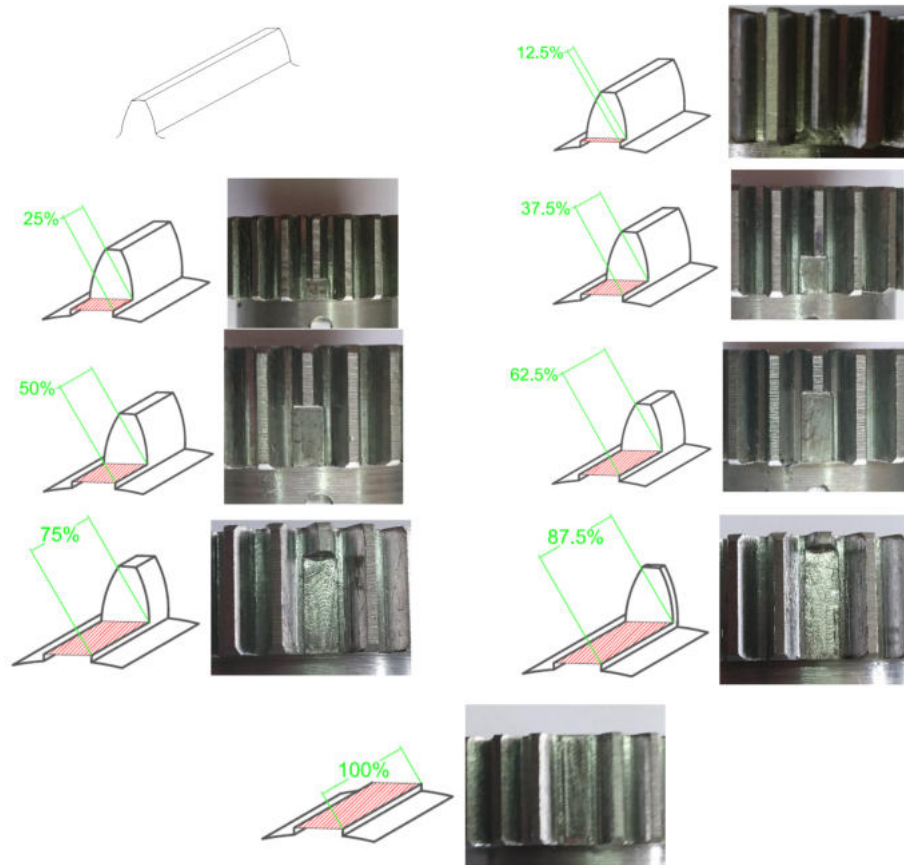
*Niveles de severidad para el modo de fallo diente roto.*

Severidad engranaje Z1	Severidad engranaje Z2	Descripción del fallo	Severidad engranaje Z1	Severidad engranaje Z2	Descripción del fallo
Normal	Normal	Sin rotura	5	Normal	Rotura 62.5%
1	Normal	Rotura 12.5%	6	Normal	Rotura 75%
2	Normal	Rotura 25%	7	Normal	Rotura 87.5%
3	Normal	Rotura 37.5%	8	Normal	Rotura 100%
4	Normal	Rotura 50%			

**Nota:** Obtenido de Sánchez Loja (2018).

**Figura 15**

*Niveles de severidad para el modo de fallo diente roto.*



**Nota:** Obtenido de Sánchez Loja (2018).

#### **4.7. Análisis de vibraciones de cajas de engranajes en el dominio de la frecuencia**

Las cajas de engranajes presentan patrones en su espectro de vibración que determinan el estado o condición de las mismas, por lo que una alteración en estos puede ser síntomas del acontecimiento de fallos (Randall, 2011). Para una caja de engranajes, las frecuencias características de su espectro de vibración son (Fernández, 2017):

- **Frecuencia de engranaje  $f_m$ :** es la frecuencia característica de cada engranaje y aparece en el espectro independientemente del estado del engranaje. Su amplitud es dependiente



de la carga. Se obtiene mediante la Ecuación (45):

$$f_m = f_g Z_g \quad (45)$$

en la que  $f_g$  es la frecuencia de entrada y  $Z_g$  es el número de dientes del engranaje de entrada.

- **Frecuencia de entrada  $f_g$ :** es la frecuencia que se produce debido al motor de entrada. Se obtiene mediante la Ecuación (46):

$$f_g = \frac{N_g}{60} \quad (46)$$

donde  $N_g$  es la velocidad de giro de entrada en RPM.

- **Frecuencia de salida  $f_p$ :** es la frecuencia del engranaje de salida. Se obtiene mediante la Ecuación (47):

$$f_p = \frac{f_g Z_g}{Z_p} \quad (47)$$

donde  $f_g$  es la frecuencia de entrada,  $Z_g$  es el número de dientes del engranaje de entrada y  $Z_p$  es el número de dientes del engranaje de salida.

- **Frecuencia de bandas laterales  $f_{1,i}$  y  $f_{2,i}$ :** son frecuencias localizadas equidistantes a la frecuencia de engranaje. Se obtiene mediante la Ecuación (48) y la Ecuación (49):

$$f_{1,i} = f_m + f_g \quad (48)$$

$$f_{2,i} = f_m + f_p \quad (49)$$

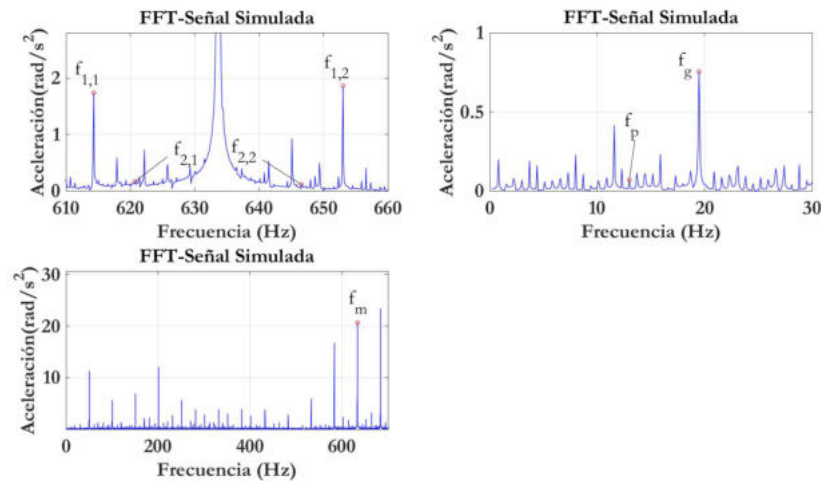
donde  $f_m$  es la frecuencia de engranaje,  $f_g$  es la frecuencia de entrada y  $f_p$  es la frecuencia de salida.

Para la extracción de las características frecuenciales se parte del espectro de la señal de vibración. La Transformada Rápida de Fourier es una de las metodologías que permite su obtención (Smith, 1999). Este enfoque consiste en un algoritmo muy eficiente en el cálculo de coeficientes de la Transformada Discreta de Fourier y puede reducir una gran cantidad de complejidad computacional.

En la Figura 16 se ilustra un patrón de vibración de una caja de engranajes con sus frecuencias características en donde se resaltan las diferentes magnitudes en dichas frecuencias.

**Figura 16**

*Patrón de vibraciones con frecuencias características.*



**Nota:** Tomado de Berrezueta Parra (2021).

## 5. Marco Metodológico

### 5.1. Metodología de la investigación

El trabajo de titulación denominado “Diseño de un sistema de detección y diagnóstico de niveles de severidad de fallos basado en un modelo matemático para una caja de engranajes rectos” se basa en un enfoque cuantitativo debido a la caracterización numérica que presentan los datos, tales como: velocidad, par eléctrico y coeficientes de rigidez y amortiguamiento sujetos a estudio. Asimismo, incluye un enfoque cualitativo dado el análisis y descripción de diferentes severidades de diente roto que pueden suscitarse en la caja de engranajes examinada y las señales relacionadas.

Inicialmente, el alcance de este trabajo de titulación es de tipo exploratorio. Esto debido a que si bien los sistemas de detección y diagnóstico de fallos basados en observadores han sido utilizados para el monitoreo de un sinnúmero de procesos, dentro de la literatura no se

ha reportado su aplicación en sistemas de cajas de engranajes. Posteriormente, el alcance de la investigación se caracteriza por ser de tipo descriptivo dada la aplicación de la teoría de detección y diagnóstico basada en observadores sobre el sistema especificado. Asimismo, presenta un enfoque correlacional y explicativo puesto que se interpreta y evalúa la sensibilidad de la señal residual generada para asociarla con un nivel específico de diente roto dentro de la caja de engranajes.

Finalmente, en lo referente al tipo de investigación, este trabajo de titulación se caracteriza por ser de tipo aplicado. Esto en virtud de que el producto final serán enfoques para la detección y diagnóstico de fallos para una caja de engranajes rectos, mismos que puede ser utilizados en el monitoreo de procesos dentro del sector industrial.

## **5.2. Metodología del proceso**

En esta sección se explicará detalladamente el procedimiento para el diseño del sistema de detección y diagnóstico de fallos basado en un modelo matemático para el caso de estudio de una caja de engranajes rectos. El desarrollo se ha distribuido en varios apartados, donde cada uno de ellos se establece como un paso específico de la metodología empleada.

### **5.2.1. Caracterización de los modelos de rigidez y amortiguamiento para la definición del modelo matemático en condiciones de fallo de diente roto**

#### **5.2.1.1. Consideraciones del modelo**

El modelado del sistema de caja de engranajes rectos se lleva a cabo considerando la caracterización de sus parámetros para así ajustarlo a la caja de vibraciones del plan experimental propuesto en el marco teórico.

En lo referente a las características de operación se han definido tres condiciones de carga diferentes. De acuerdo a Ortega Lucero (2021) para cada condición de carga se estiman el par del motor  $T_1$ , el par de carga  $T_2$  y la velocidad de giro  $N$ . En lo concerniente a las pares de motor y carga, estos se hallan asociados con la aplicación de un par de carga constante y un par del motor variante en el tiempo que se obtendrá a través de la respuesta dinámica del modelo matemático del motor para la caja de engranes, el cual se detalla en el plan experimental de la Sección 4.6.1 y ha sido modelado previamente por Ortega Lucero (2021). En la Tabla 5 se exponen los parámetros geométricos y asociados con el material de los elementos de la caja de engranajes obtenidos por Berrezueta Parra (2021).

**Tabla 5**

*Parámetros geométricos y asociados con el material de la caja de engranajes.*

Parámetros	Engranaje 1	Engranaje 2
Número de dientes	32	48
Módulo [mm]	2.25	
Ancho del diente [mm]	20.7	
Relación de contacto	1.71	
Ángulo de presión	20°	
Módulo de Young [N/mm <sup>2</sup> ]	2.05 × 10 <sup>5</sup>	
Coefficiente de Poisson	0.3	
Masa [kg]	0.5903	1.4092
Momento de inercia de la masa [kg·m <sup>2</sup> ]	3.82 × 10 <sup>-3</sup>	2.05 × 10 <sup>-3</sup>
Juego [mm]	5 × 10 <sup>-3</sup>	

**Nota:** Obtenido de Berrezueta Parra (2021).

Asimismo, en la Tabla 6 se detallan los valores para el par de carga  $T_2$  y la velocidad de giro  $N$  para las condiciones de operación establecidas.

**Tabla 6**

*Par de carga  $T_2$  y velocidad de giro  $N$  para diferentes condiciones de operación.*

	$T_2$ [N·m]	$N$ [rpm]
L1	0.00934	1188
L2	2.603	1176
L3	6.503	1158

**Nota:** Obtenido de Ortega Lucero (2021).

De igual forma, se establecen una serie de consideraciones dadas por Berrezueta Parra (2021):

- Es un modelo de dos grados de libertad, torsional paramétrico.
- El error estático de transmisión variante en el tiempo  $e(t)$  es igual a cero.
- El coeficiente de rigidez y el coeficiente de amortiguamiento son variantes en el tiempo.
- Existe una posible pérdida de contacto por el juego entre los engranajes, modelada en la Ecuación (31).

### 5.2.1.2. Definición del modelo matemático del sistema nominal en representación de espacio de estados

Las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) que definen la dinámica de la caja de engranajes rectos en condición de operación nominal se detallan en las Ecuación (30). Con el fin de obtener un modelo matemático más preciso en cuanto a los fenómenos físicos que determinan la dinámica del sistema se incluirá un término correspondiente a las pérdidas de potencia vinculadas a las fuerzas de fricción. Por lo que la Ecuación (30) se redefine como se detalla en la Ecuación (50):

$$\begin{cases} J_1\ddot{\theta}_1 + rb_1C(t)(rb_1\dot{\theta}_1 - rb_2\dot{\theta}_2) + rb_1K(t)g(x(t)) + k_{loss}\dot{\theta}_1 = T_1 \\ J_2\ddot{\theta}_1 + rb_2C(t)(rb_1\dot{\theta}_1 - rb_2\dot{\theta}_2) + rb_2K(t)g(x(t)) = -T_2 \end{cases} \quad (50)$$

donde:

$k_{loss}$  es el coeficiente de pérdidas por fricción y para la caja de engranajes modelada  $k_{loss} = 2.9148 \times 10^{-3} \text{ [Nm/s/rad]}$  (Ortega, Cerrada, Cabrera, y Sánchez, 2021).

$J_1$  incluye los momentos de inercia de masa del motor, eje y engranaje.

$J_2$  incluye los momentos de inercia de masa del engranaje, eje y polea.

Dado que el sistema es variante en el tiempo, la obtención de las matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $W$  para la representación en espacio de estados se realizará en los tres intervalos definidos para la función de error de transmisión  $g(x(t))$  expuesta en la Ecuación (31). Además, dada la caracterización del coeficiente de rigidez dado por la Ecuación (32) y del coeficiente de amortiguamiento expresado en la Ecuación (42) en las que se definen valores constantes para doble y simple contacto, cada subsistema previamente definido se expresará para estos dos tipos de períodos de contacto. Por lo que se tendrán seis subsistemas modelando cada intervalo; dentro de estos intervalos la dinámica de la caja de engranajes corresponde a la de un sistema invariante en el tiempo, hecho que permitirá el diseño del sistema de detección y diagnóstico de fallos bajo el enfoque propuesto en este proyecto. Es importante resaltar

que la dinámica total se verá modelada por la operación conjunta de estos seis subsistemas: el subsistema de doble contacto y el de simple contacto para los intervalos de la función de error de transmisión. Los intervalos de operación de cada subsistema se detallan en la Tabla 7, donde  $b = 5 \times 10^{-5}$  [N/ms].

**Tabla 7**

*Intervalos de operación para los subsistemas invariantes en el tiempo.*

Subsistema	Intervalo	Error de transmisión $g(x(t))$
Subsistema 1 y 2	$x(t) > b$	$rb_1\theta_1 - rb_2\theta_2 - b$
Subsistema 3 y 4	$-b < x(t) < b$	0
Subsistema 5 y 6	$x(t) < -b$	$rb_1\theta_1 - rb_2\theta_2 + b$

**Nota:** Intervalos de operación y valores de error de transmisión  $g(x(t))$  para cada subsistema según la Ecuación (31).

Asimismo, se espera que cada subsistema corresponda a un par de ecuaciones matriciales como las formuladas en la Ecuación (3) en ausencia de fallos y en la Ecuación (6) en presencia de fallo de diente roto, se asume que no hay fallos en los actuadores ni sensores. Adicionalmente, aparece un vector  $W$ , debido al término constante del error de transmisión. Por lo que en ausencia de fallos, cada subsistema se representa por la Ecuación (51):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + W \\ y &= Cx + Du\end{aligned}\tag{51}$$

Para la definición en espacio de estados de cada subsistema se inicia definiendo el vector de entradas  $u$  y el vector de estados  $x$ . Estos son comunes a todos los subsistemas y se exponen en las Ecuaciones (52) y (53), respectivamente.

$$\mathbf{u} = [T_1 \quad T_2]^T\tag{52}$$

$$\mathbf{x} = [\dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2 \quad \theta_1 \quad \theta_2]^T\tag{53}$$

■ **Subsistemas 1 y 2.**

Se parte de la Ecuación (50) y del valor para el error de transmisión para los subsistemas 1 y 2 definido en la Tabla 7. Luego, se opera cada ecuación de modo que se consigan los

coeficientes asociados con cada estado y entrada. Culminado el proceso antes expuesto se obtienen las EDOs de la Ecuación (54) y Ecuación (55), mismas que se encuentran relacionadas con las matrices  $A$  y  $B$  y  $W$  detalladas en las Ecuaciones (56), (57) y (58), respectivamente.

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{rb_1^2 C(t) + k_{loss}}{J_1} \dot{\theta}_1 + \frac{rb_1 rb_2 C(t)}{J_1} \dot{\theta}_2 - \frac{rb_1^2 K(t)}{J_1} \theta_1 + \frac{rb_1 rb_2 K(t)}{J_1} \theta_2 + \frac{rb_1 K(t) b}{J_1} + \frac{T_1}{J_1} \quad (54)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{rb_1 rb_2 C(t)}{J_2} \dot{\theta}_1 - \frac{rb_2^2 C(t)}{J_2} \dot{\theta}_2 + \frac{rb_1 rb_2 K(t)}{J_2} \theta_1 - \frac{rb_2^2 K(t)}{J_2} \theta_2 - \frac{rb_2 K(t) b}{J_2} - \frac{T_2}{J_2} \quad (55)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{rb_1^2 C(t) + k_{loss}}{J_1} & \frac{rb_1 rb_2 C(t)}{J_1} & -\frac{rb_1^2 K(t)}{J_1} & \frac{rb_1 rb_2 K(t)}{J_1} \\ \frac{rb_1 rb_2 C(t)}{J_2} & -\frac{rb_2^2 C(t)}{J_2} & \frac{rb_1 rb_2 K(t)}{J_2} & -\frac{rb_2^2 K(t)}{J_2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (56)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{J_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J_2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (57)$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \frac{rb_1 K(t) b}{J_1} \\ -\frac{rb_2 K(t) b}{J_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (58)$$

Dado que las matrices  $A$  y  $W$  contienen elementos que dependen de la rigidez y amortiguamiento, a continuación, se redefinirán para los períodos de simple y doble contacto.

- **Subsistema 1.**

Las matrices  $A$  y  $W$  para simple contacto durante el intervalo de operación establecidos en la Tabla 7 quedan definidas por la Ecuación (59) y Ecuación (60), respectivamente.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{rb_1^2 C_{min} + k_{loss}}{J_1} & \frac{rb_1 rb_2 C_{min}}{J_1} & -\frac{rb_1^2 K_{min}}{J_1} & \frac{rb_1 rb_2 K_{min}}{J_1} \\ \frac{rb_1 rb_2 C_{min}}{J_2} & -\frac{rb_2^2 C_{min}}{J_2} & \frac{rb_1 rb_2 K_{min}}{J_2} & -\frac{rb_2^2 K_{min}}{J_2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (59)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1.186 \times 10^3 & 1.778 \times 10^3 & -3.389 \times 10^7 & 5.084 \times 10^7 \\ 1.891 \times 10^3 & -2.837 \times 10^3 & 5.408 \times 10^7 & -8.112 \times 10^7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \frac{rb_1 K_{min} b}{J_1} \\ -\frac{rb_2 K_{min} b}{J_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (60)$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 5.010 \times 10^4 \\ -7.994 \times 10^4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



- **Subsistema 2.**

Las matrices  $A$  y  $W$  para doble contacto durante el intervalo de operación establecido en la Tabla 7 quedan definidas por la Ecuación (61) y Ecuación (62), respectivamente.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{rb_1^2 C_{max} + k_{loss}}{J_1} & \frac{rb_1 rb_2 C_{max}}{J_1} & -\frac{rb_1^2 K_{max}}{J_1} & \frac{rb_1 rb_2 K_{max}}{J_1} \\ \frac{rb_1 rb_2 C_{max}}{J_2} & -\frac{rb_2^2 C_{max}}{J_2} & \frac{rb_1 rb_2 K_{max}}{J_2} & -\frac{rb_2^2 K_{max}}{J_2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (61)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1.677 \times 10^3 & 2.514 \times 10^3 & -6.779 \times 10^7 & 1.017 \times 10^8 \\ 2.674 \times 10^3 & -4.011 \times 10^3 & 1.082 \times 10^8 & -1.622 \times 10^8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \frac{rb_1 K_{max} b}{J_1} \\ -\frac{rb_2 K_{max} b}{J_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (62)$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1.002 \times 10^5 \\ -1.599 \times 10^5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- **Subsistemas 3 y 4.**

Se parte de la Ecuación (50) y del valor para el error de transmisión para los subsistemas 3 y 4 definido en la Tabla 7. Luego, se opera cada ecuación de modo que se consigan los coeficientes asociados con cada estado y entrada. Culminado el proceso antes expuesto

se obtienen las EDOs de la Ecuación (63) y Ecuación (64), mismas que se encuentran relacionadas con las matrices  $A$  y  $B$  y  $W$  detalladas en las Ecuaciones (65), (66) y (67), respectivamente.

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{rb_1^2 C(t)}{J_1} \dot{\theta}_1 + \frac{rb_1 rb_2 C(t)}{J_1} \dot{\theta}_2 + \frac{T_1}{J_1} \quad (63)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{rb_1 rb_2 C(t)}{J_2} \dot{\theta}_1 - \frac{rb_2^2 C(t)}{J_2} \dot{\theta}_2 - \frac{T_2}{J_2} \quad (64)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{rb_1^2 C(t) + k_{loss}}{J_1} & \frac{rb_1 rb_2 C(t)}{J_1} & 0 & 0 \\ \frac{rb_1 rb_2 C(t)}{J_2} & -\frac{rb_2^2 C(t)}{J_2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (65)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{J_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J_2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (66)$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (67)$$

Dado que la matriz  $A$  contiene elementos que dependen del amortiguamiento, a continuación, se redefinirá para los períodos de simple y doble contacto.

- **Subsistema 3.**

La matriz  $A$  para simple contacto durante el intervalo de operación establecido en la Tabla 7 queda definida por la Ecuación (68).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{rb_1^2 C_{min} + k_{loss}}{J_1} & \frac{rb_1 rb_2 C_{min}}{J_1} & 0 & 0 \\ \frac{rb_1 rb_2 C_{min}}{J_2} & -\frac{rb_2^2 C_{min}}{J_2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (68)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1.186 \times 10^3 & 1.778 \times 10^3 & 0 & 0 \\ 1.891 \times 10^3 & -2.837 \times 10^3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Subsistema 4.**

La matriz  $A$  para doble contacto durante el intervalo de operación definido en la Tabla 7 queda definida por la Ecuación (69).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{rb_1^2 C_{max} + k_{loss}}{J_1} & \frac{rb_1 rb_2 C_{max}}{J_1} & 0 & 0 \\ \frac{rb_1 rb_2 C_{max}}{J_2} & -\frac{rb_2^2 C_{max}}{J_2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (69)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1.677 \times 10^3 & 2.514 \times 10^3 & 0 & 0 \\ 2.674 \times 10^3 & -4.011 \times 10^3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Subsistemas 5 y 6.**

Se parte de la Ecuación (50) y del valor para el error de transmisión para los subsistemas 5 y 6 definido en la Tabla 7. Luego, se opera cada ecuación de modo que se consigan los coeficientes asociados con cada estado y entrada. Culminado el proceso antes expuesto

se obtienen las EDOs de la Ecuación (70) y Ecuación (71), mismas que se encuentran relacionadas con las matrices  $A$  y  $B$  y  $W$  detalladas en las Ecuaciones (72), (73) y (74), respectivamente.

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{rb_1^2 C(t) + k_{loss}}{J_1} \dot{\theta}_1 + \frac{rb_1 rb_2 C(t)}{J_1} \dot{\theta}_2 - \frac{rb_1^2 K(t)}{J_1} \theta_1 + \frac{rb_1 rb_2 K(t)}{J_1} \theta_2 - \frac{rb_1 K(t) b}{J_1} + \frac{T_1}{J_1} \quad (70)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{rb_1 rb_2 C(t)}{J_2} \dot{\theta}_1 - \frac{rb_2^2 C(t)}{J_2} \dot{\theta}_2 + \frac{rb_1 rb_2 K(t)}{J_2} \theta_1 - \frac{rb_2^2 K(t)}{J_2} \theta_2 + \frac{rb_2 K(t) b}{J_2} - \frac{T_2}{J_2} \quad (71)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{rb_1^2 C(t) + k_{loss}}{J_1} & \frac{rb_1 rb_2 C(t)}{J_1} & -\frac{rb_1^2 K(t)}{J_1} & \frac{rb_1 rb_2 K(t)}{J_1} \\ \frac{rb_1 rb_2 C(t)}{J_2} & -\frac{rb_2^2 C(t)}{J_2} & \frac{rb_1 rb_2 K(t)}{J_2} & -\frac{rb_2^2 K(t)}{J_2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (72)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{J_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J_2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (73)$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} -\frac{rb_1 K(t) b}{J_1} \\ \frac{rb_2 K(t) b}{J_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (74)$$

Dado que las matrices  $A$  y  $W$  contienen elementos que dependen de la rigidez y amortiguamiento, a continuación, se redefinirán para los períodos de simple y doble contacto.

- **Subsistema 5.**

Las matrices  $A$  y  $W$  para simple contacto durante el intervalo de operación establecido en la Tabla 7 quedan definidas por la Ecuación (75) y Ecuación (76), respectivamente.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{rb_1^2 C_{min} + k_{loss}}{J_1} & \frac{rb_1 rb_2 C_{min}}{J_1} & -\frac{rb_1^2 K_{min}}{J_1} & \frac{rb_1 rb_2 K_{min}}{J_1} \\ \frac{rb_1 rb_2 C_{min}}{J_2} & -\frac{rb_2^2 C_{min}}{J_2} & \frac{rb_1 rb_2 K_{min}}{J_2} & -\frac{rb_2^2 K_{min}}{J_2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (75)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1.186 \times 10^3 & 1.778 \times 10^3 & -3.389 \times 10^7 & 5.084 \times 10^7 \\ 1.891 \times 10^3 & -2.837 \times 10^3 & 5.408 \times 10^7 & -8.112 \times 10^7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} -\frac{rb_1 K_{min} b}{J_1} \\ \frac{rb_2 K_{min} b}{J_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (76)$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} -5.010 \times 10^4 \\ 7.994 \times 10^4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- **Subsistema 6.**

Las matrices  $A$  y  $W$  para doble contacto durante el intervalo de operación establecido en la Tabla 7 quedan definidas por la Ecuación (77) y Ecuación (78), respectivamente.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{rb_1^2 C_{max} + k_{loss}}{J_1} & \frac{rb_1 rb_2 C_{max}}{J_1} & -\frac{rb_1^2 K_{max}}{J_1} & \frac{rb_1 rb_2 K_{max}}{J_1} \\ \frac{rb_1 rb_2 C_{max}}{J_2} & -\frac{rb_2^2 C_{max}}{J_2} & \frac{rb_1 rb_2 K_{max}}{J_2} & -\frac{rb_2^2 K_{max}}{J_2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (77)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1.677 \times 10^3 & 2.514 \times 10^3 & -6.779 \times 10^7 & 1.017 \times 10^8 \\ 2.674 \times 10^3 & -4.011 \times 10^3 & 1.082 \times 10^8 & -1.622 \times 10^8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} -\frac{rb_1 K_{max} b}{J_1} \\ \frac{rb_2 K_{max} b}{J_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (78)$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1.002 \times 10^5 \\ -1.599 \times 10^5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por su parte, la matriz  $C$  para los 6 subsistemas queda definida en función de las salidas disponibles. En caso de contar con las mediciones de velocidad y posición angular para los engranajes de entrada y salida, entonces  $C$  corresponde a la Ecuación (79):

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (79)$$

Por simple inspección se determina que la matriz  $B$  para los 6 subsistemas expresada por la Ecuación (57), Ecuación (66) y Ecuación (73) es la misma. De igual forma, la matriz  $A$  para los subsistemas 1 y 5 expresada por la Ecuación (59) y la Ecuación (75), así como para los subsistemas 2 y 6 detalladas en la Ecuación (61) y la Ecuación (77) es la misma para cada par de subsistemas.

### 5.2.1.3. Caracterización de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento ante diferentes severidades de diente roto

Para dar inicio al modelado del fallo de diente roto se establece que este modo de fallo se caracteriza por involucrar un cambio  $\Delta K(t)$  y  $\Delta C(t)$  en los parámetros  $K(t)$  formulado en la Ecuación (32) y  $C(t)$  detallado en la Ecuación (43) del sistema en condiciones de operación nominal. El cambio será proporcional a la severidad del fallo ocurriendo una reducción de la rigidez y amortiguamiento durante el período de contacto del diente que se encuentra roto. Lo antes expresado se modela a través de la Ecuación (80):

$$\begin{aligned} K_{\delta}(t) &= K(t) - \Delta K(t) \\ C_{\delta}(t) &= C(t) - \Delta C(t) \end{aligned} \quad (80)$$

donde:

$K_{\delta}(t)$  es la rigidez resultante en el modelo con fallo y sustituye a  $K(t)$  en la Ecuación (50).

$K(t)$  es la rigidez del modelo nominal.

$\Delta K(t)$  es la reducción de rigidez en el modelo con fallo y es proporcional a la severidad.

$C_{\delta}(t)$  es el amortiguamiento resultante en el modelo con fallo y sustituye a  $C(t)$  en la Ecuación (50).

$C(t)$  es la amortiguación del modelo nominal.

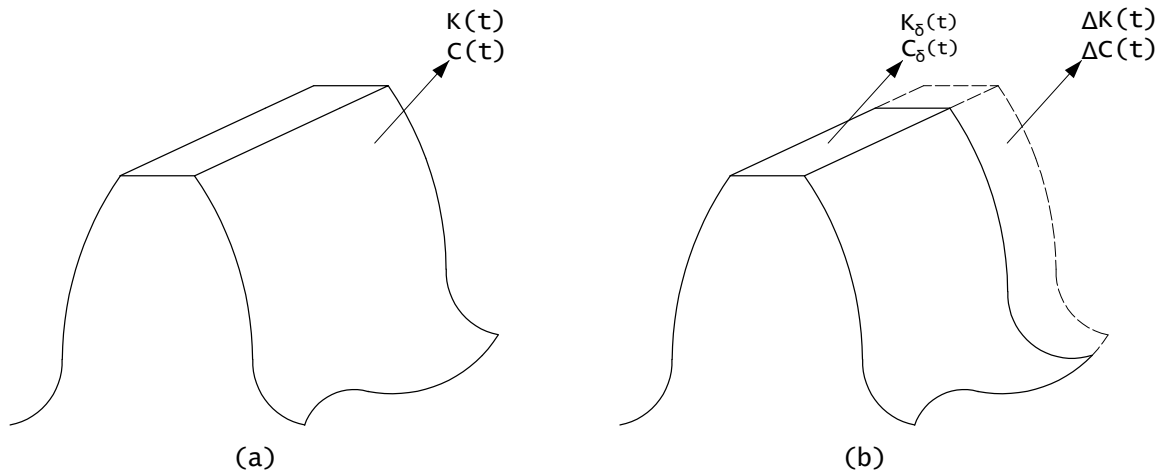
$\Delta C(t)$  es la reducción del amortiguamiento en el modelo con fallo y es proporcional a la severidad.

Los términos de la Ecuación (80) que corresponden a los aportes de amortiguamiento y rigidez en condición nominal, a los aportes de rigidez y amortiguamiento en condiciones

de fallo de diente roto y a la reducción de estos parámetros debido a la rotura transversal de un diente se exponen gráficamente en la Figura 17. La ilustración (a) corresponde al caso de operación libre de fallos donde tanto rigidez y amortiguamiento tienen sus valores nominales  $K(t)$  y  $C(t)$ . En la ilustración (b) se establece que la rotura del diente produce una disminución  $\Delta K(t)$  y  $\Delta C(t)$  en los parámetros de rigidez y amortiguamiento, mientras que los valores resultantes en fallo se denominan  $K_{\delta}(t)$  y  $C_{\delta}(t)$ .

**Figura 17**

*Definición gráfica de los aportes y disminución de rigidez y amortiguamiento de la Ecuación (80).*



**Nota:** Elaborado por el autor.

Una vez establecida la formulación base para el análisis de los efectos del modo de fallo de diente roto sobre los parámetros de rigidez y amortiguamiento se procede a analizar gráfica y analíticamente el período de contacto para un diente sano, luego para el caso extremo de un diente con una rotura del 100% y finalmente se generalizará para un diente que presenta un porcentaje de rotura determinado.

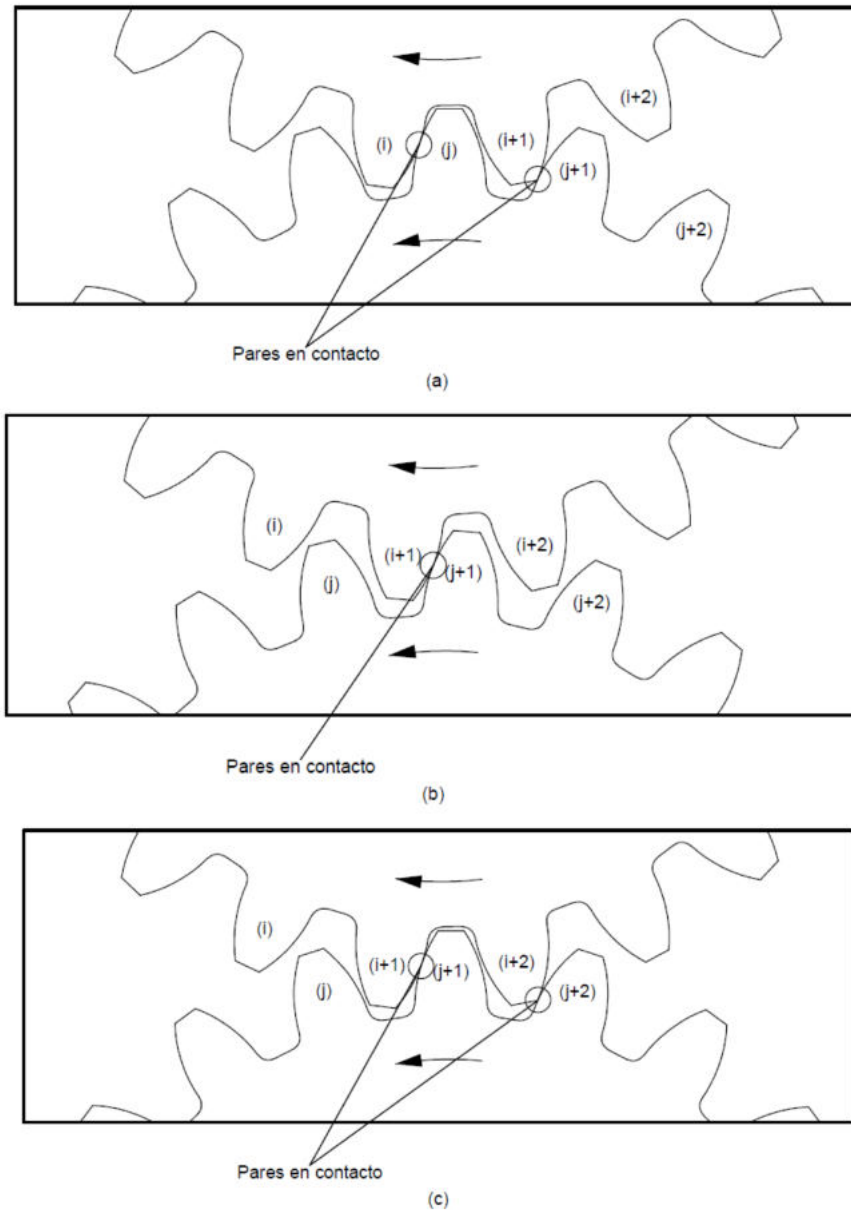
- **Análisis de pares en contacto y caracterización de rigidez y amortiguamiento para ruedas dentadas con dientes sanos.**

En la Figura 18 se ilustra el proceso de engranaje para un par de ruedas dentadas con dientes sanos.



## Figura 18

*Proceso de engranaje para un par de dientes sanos.*



**Nota:** Elaborado por el autor.

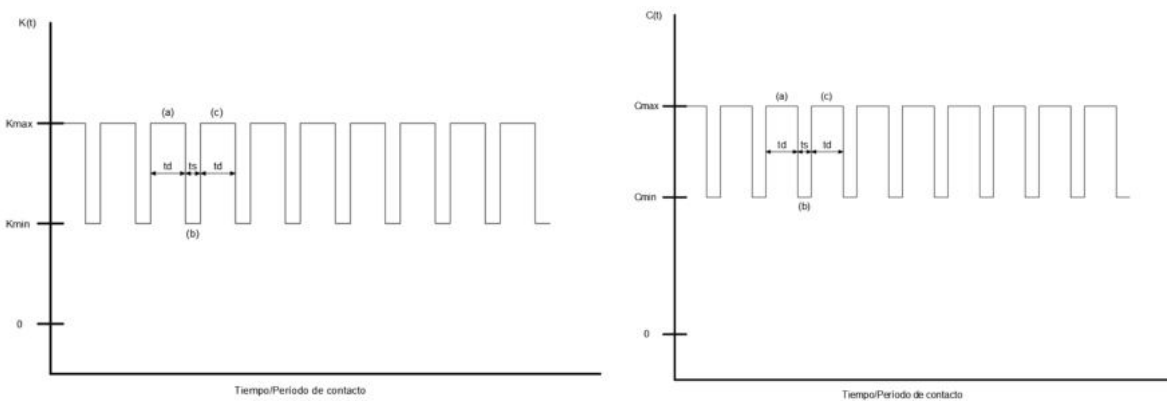
De acuerdo a lo desarrollado en Berrezueta Parra (2021), el tiempo de contacto entre un par de dientes  $t_m$  se divide en dos períodos. El primero de ellos se presenta en la Figura

18(a) que corresponde al tiempo de doble contacto  $t_d$ , durante este intervalo de tiempo la rigidez y amortiguamiento quedan definidos por sus valores máximos nominales correspondientes a  $K_{max}$  y  $C_{max}$ , respectivamente. El segundo período se exhibe en la Figura 18(b) que corresponde al tiempo de simple contacto  $t_s$ , durante este intervalo de tiempo la rigidez y amortiguamiento quedan definidos por sus valores mínimos nominales correspondientes a  $K_{min}$  y  $C_{min}$ , respectivamente. Luego de completado el tiempo de contacto entre un par de diente se inicia nuevamente con otro período de contacto, el tiempo de doble contacto  $t_d$  del siguiente par se ilustra en la Figura 18(c).

La caracterización de la rigidez  $K(t)$  y el amortiguamiento  $C(t)$  bajo estas condiciones se ilustra en la Figura 19. En dichas gráficas se establece los períodos de doble contacto  $t_d$  y simple contacto  $t_s$ , así como también se indican los valores de rigidez y amortiguamiento para los períodos de contacto de las situaciones (a), (b) y (c) de la Figura 18.

**Figura 19**

*Coefficientes de rigidez y amortiguamiento para un par de ruedas dentadas sanas.*



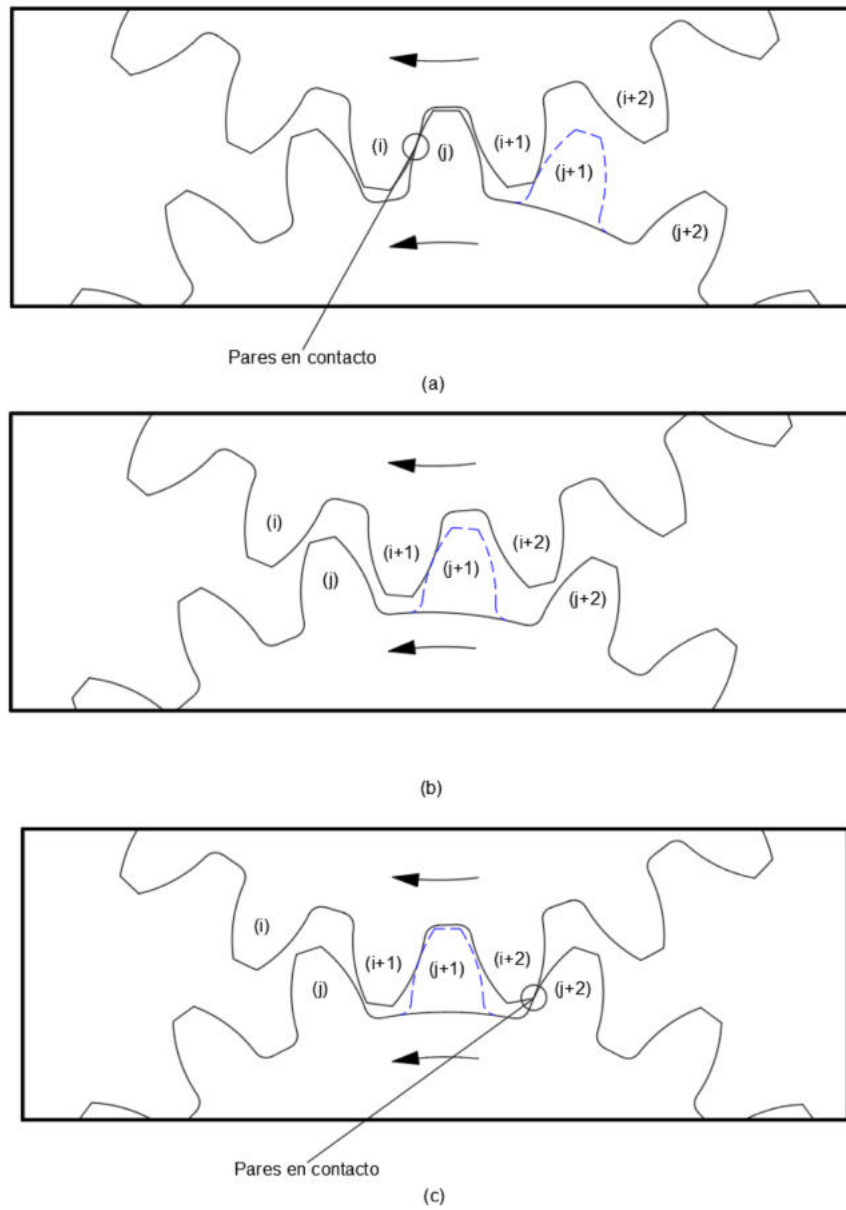
**Nota:** Elaborado por el autor.

- **Análisis de pares en contacto y caracterización de rigidez y amortiguamiento para ruedas dentadas con rotura del 100% en un diente.**

En la Figura 20 se ilustra el proceso de engranaje para un par de ruedas dentadas donde una de ellas presenta rotura del 100% de un diente, mismo que se indica con línea azul punteada.

**Figura 20**

*Proceso de engranaje para un par de ruedas dentadas donde una de ellas presenta rotura del 100% de un diente.*



**Nota:** Proceso de engranaje para un par de ruedas dentadas donde una de ellas presenta rotura del 100% de un diente. Elaborado por el autor.

En el caso especificado anteriormente, el tiempo de contacto entre un par de dientes

$t_m$  se divide en dos períodos. El primero de ellos se presenta en la Figura 20(a) que corresponde al tiempo de doble contacto  $t_d$ . Sin embargo, debido a que el diente se encuentra totalmente roto, solo existirá un par de engranajes en contacto durante este intervalo. Durante este período de tiempo la rigidez y amortiguamiento quedan definidos por sus valores máximos nominales correspondientes a  $K_{max}$  y  $C_{max}$  a los cuales se les restará una variación  $\Delta K_{max}$  y  $\Delta C_{max}$  según lo expresado en la Ecuación (80). Esta variación en los parámetros es proporcional a la severidad del fallo y para el caso de un diente totalmente roto se definen según la Ecuación (81):

$$\begin{aligned}\Delta K_{max} &= K_{min} \\ \Delta C_{max} &= C_{max} - C_{\delta max}\end{aligned}\tag{81}$$

donde:

$\Delta K_{max}$  es la reducción de rigidez en el período de doble contacto en el modelo con fallo y es proporcional a la severidad.

$\Delta C_{max}$  es la reducción de amortiguamiento en el período de doble contacto en el modelo con fallo y es proporcional a la severidad.

El segundo que período se exhibe en la Figura 20(b) corresponde al tiempo de simple contacto  $t_s$ , durante este intervalo de tiempo la rigidez y amortiguamiento quedan definidos por sus valores mínimos nominales correspondientes a  $K_{min}$  y  $C_{min}$  a los cuales se les restará una variación  $\Delta K_{min}$  y  $\Delta C_{min}$  según lo expresado en la Ecuación (80). Esta variación en los parámetros es proporcional a la severidad del fallo y para el caso de un diente totalmente roto se definen según la Ecuación (82):

$$\begin{aligned}\Delta K_{min} &= K_{min} \\ \Delta C_{min} &= C_{min} - C_{\delta min}\end{aligned}\tag{82}$$

donde:

$\Delta K_{min}$  es la reducción de rigidez en el período de simple contacto en el modelo con fallo y es proporcional a la severidad.

$\Delta C_{min}$  es la reducción de amortiguamiento en el período de simple contacto en el modelo con fallo y es proporcional a la severidad.

Dado que  $C_{max}$  y  $C_{\delta max}$  son funciones de  $K_{max}$  y  $K_{\delta max}$ , la variación de amortigua-

miento en el período de doble contacto se puede formular en términos de la rigidez. Por lo que la segunda expresión de la Ecuación (81) queda definida según la Ecuación (83):

$$\Delta C_{max} = 2\zeta_g \sqrt{K_{max} m_{eg}} - 2\zeta_g \sqrt{K_{min} m_{eg}} \quad (83)$$

Asimismo, dado que  $C_{min}$  y  $C_{\delta min}$  son funciones de  $K_{min}$  y  $K_{\delta min}$ , la variación de amortiguamiento en el período de simple contacto se puede formular en términos de la rigidez. Por lo que la segunda expresión de la Ecuación (82) queda definida según la Ecuación (84):

$$\Delta C_{min} = 2\zeta_g \sqrt{K_{min} m_{eg}} \quad (84)$$

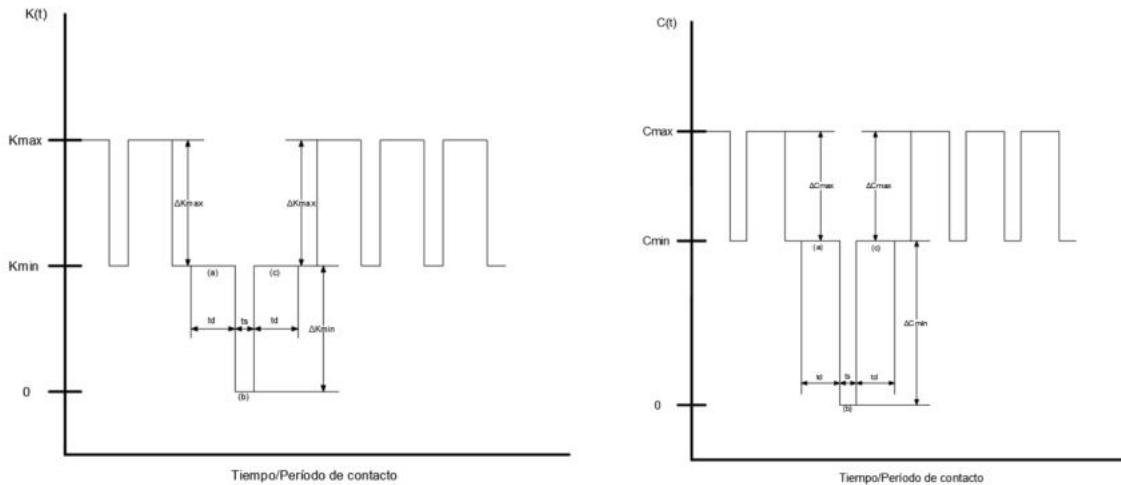
Luego de completado el tiempo de contacto  $t_m$  se inicia nuevamente con otro período, el tiempo de doble contacto  $t_d$  del siguiente par se ilustra en la Figura 20(c). Sin embargo, debido a que el diente se encuentra totalmente roto, solo existirá un par de dientes en contacto durante este intervalo. En este período de tiempo la rigidez y amortiguamiento quedan definidos por sus valores máximos nominales correspondientes a  $K_{max}$  y  $C_{max}$ , a los cuales se les restará una variación  $\Delta K_{max}$  y  $\Delta C_{max}$  según lo expresado en la Ecuación (80). Los valores de  $\Delta K_{max}$  y  $\Delta C_{max}$  son los mismo que en la situación estudiada para la Figura 20(a) y formulados en la Ecuación (81) y Ecuación (83).

Posterior a las tres situaciones analizadas, el contacto se dará entre dientes sanos por lo que los valores de rigidez  $K(t)$  y amortiguamiento  $C(t)$  corresponderán a los valores nominales hasta que se vuelva a cumplir el proceso de engranaje del diente totalmente roto y se genere nuevamente la disminución en los parámetros nominales. Esto se reproducirá periódicamente en función del número total de dientes de la rueda dentada afectada.

La caracterización de la rigidez  $K_{\delta}(t)$  y el amortiguamiento  $C_{\delta}(t)$  bajo estas condiciones se ilustra en la Figura 21. En dichas gráficas se establece los períodos de doble contacto  $t_d$  y simple contacto  $t_s$ , así como también se indican los valores de rigidez y amortiguamiento para los períodos de contacto de las situaciones (a), (b) y (c) de la Figura 20. Cabe destacar que para el caso de un diente 100% roto en los períodos de simple contacto la rigidez y amortiguamiento son iguales a cero, mientras que en los períodos de doble contacto estos parámetros tienen un valor equivalente a los obtenidos en simple contacto para condiciones de operación libre de fallos.

**Figura 21**

*Coefficientes de rigidez y amortiguamiento para un par de ruedas dentadas donde una de ellas presenta rotura del 100% de un diente.*



**Nota:** Elaborado por el autor.

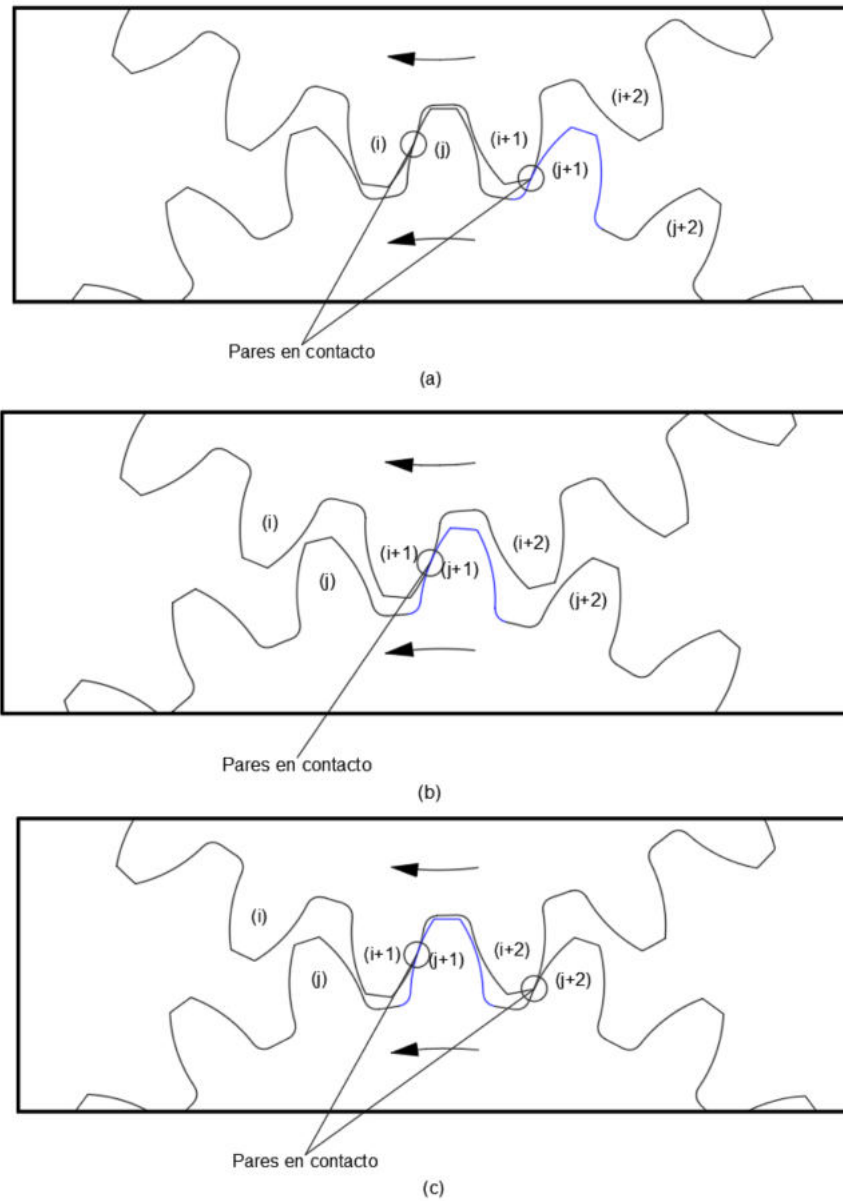
■ **Análisis de pares en contacto y caracterización de rigidez y amortiguamiento para ruedas dentadas con un porcentaje de rotura determinado en un diente.**

En la Figura 22 se ilustra el proceso de engranaje para un par de ruedas dentadas donde una de ellas presenta un porcentaje de rotura determinado en un diente, el cual se indica con línea azul punteada y constituye una rotura transversal que abarca toda la altura del mismo según lo especificado en la Figura 15. En la Figura 22, análogamente a lo antes expuesto para el caso de un diente con porcentaje de rotura del 100%, el tiempo de contacto entre un par de dientes  $t_m$  se divide en dos períodos: el primero de ellos se presenta en la Figura 22(a) y corresponde al tiempo de doble contacto  $t_d$ , mientras que el segundo se exhibe en la Figura 22(b) y corresponde al tiempo de simple contacto  $t_s$ . Así mismo, luego de completado el tiempo de contacto  $t_m$  se inicia nuevamente con otro período, el tiempo de doble contacto  $t_d$  del siguiente par se ilustra en la Figura 22(c). Posterior a las tres situaciones analizadas, el contacto se dará entre dientes sanos hasta que se vuelva a cumplir el proceso de engranaje del diente que presenta un porcentaje de rotura determinado.

Previo al modelado de la reducción de los parámetros de rigidez y amortiguamiento

## Figura 22

Proceso de engranaje para un par de ruedas dentadas donde una de ellas presenta un porcentaje de rotura determinado en un diente.



**Nota:** Elaborado por el autor.

debido a la rotura de un diente en un porcentaje determinado se analiza lo expresado en la Ecuación (34). De ella se destaca que durante los períodos de doble contacto el valor

del coeficiente de rigidez constituye dos veces el valor de la rigidez en simple contacto, es decir, durante este intervalo cada diente en contacto aporta a la rigidez total el valor  $K_{min}$  calculado según la Ecuación (33).

En base a lo antes expuesto, y considerado que se ha asumido que existe un único diente roto, se determina que tanto para los períodos de doble contacto como para los de simple contacto del diente con un porcentaje de rotura determinado, la rigidez queda definida por sus valores nominales correspondientes  $K_{max}$  y  $K_{min}$ , a los cuales se les restará una variación  $\Delta K$  cuyo cálculo se detalla en la Ecuación (85):

$$\Delta K = K_{min} - K_{\delta min} \quad (85)$$

donde  $\Delta K$  constituye la reducción de rigidez cuando engrana el diente roto tanto en doble como simple contacto y es proporcional a la severidad del fallo. Por su parte,  $K_{min}$  se calcula según lo propuesto por Berrezueta Parra (2021) y  $K_{\delta min}$ , al constituir un coeficiente de rigidez del diente, se obtiene a partir de la Ecuación (33) en la que los términos de rigidez por contacto hertziano, rigidez debido a la compresión axial, rigidez debido a la flexión, rigidez debido al esfuerzo cortante y rigidez debido a la deflexión del filete consideran el ancho del diente. Con base en lo antes expuesto, es necesario tener en cuenta la disminución del ancho del diente para la formulación de la rigidez resultante en fallo  $K_{\delta min}$ . A partir de la Ecuación (44) y considerando una disminución porcentual del ancho nominal, este parámetro se calcula según la Ecuación (86):

$$W_{\delta} = (1 - \alpha)W \quad (86)$$

donde:

$W_{\delta}$  es el ancho del diente sujeto a fallo de rotura.

$\alpha$  es el porcentaje de rotura del diente en formato decimal que va de 0 a 1.

$W$  es el ancho del diente sano.

Por su parte, el coeficiente de amortiguamiento para los períodos de doble contacto del diente con un porcentaje de rotura determinado se define por su valor máximo nominal  $C_{max}$  al cual se le resta una variación  $\Delta C_{max}$ . Considerando que  $C_{max}$  y  $C_{\delta max}$  son funciones de  $K_{max}$  y  $K_{\delta max}$ , la variación de amortiguamiento en este intervalo se puede expresar en términos de la rigidez. Su formulación se detalla en la Ecuación (87):



$$\Delta C_{max} = C_{max} - C_{\delta max}$$

$$\Delta C_{max} = 2\zeta_g \sqrt{K_{max} m_{eg}} - 2\zeta_g \sqrt{(K_{max} - \Delta K) m_{eg}} \quad (87)$$

Análogamente, el coeficiente de amortiguamiento para los períodos de simple contacto del diente con un porcentaje de rotura determinado se define por su valor mínimo nominal  $C_{min}$  al cual se le resta una variación  $\Delta C_{min}$ . Así mismo, debido a que  $C_{min}$  y  $C_{\delta min}$  son funciones de  $K_{min}$  y  $K_{\delta min}$ , la variación de amortiguamiento en el período de simple contacto se puede expresar en términos de la rigidez. Su formulación se expone en la Ecuación (88):

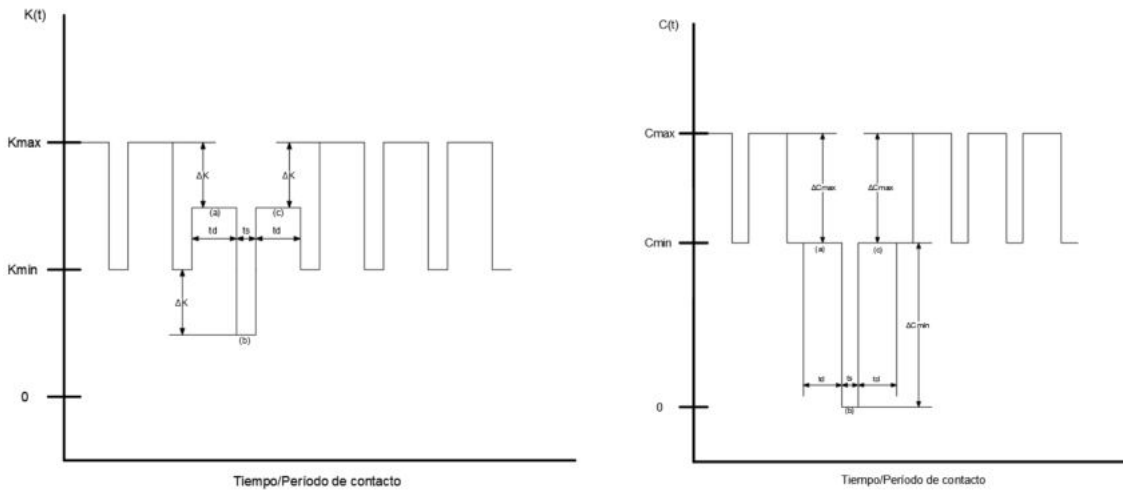
$$\Delta C_{min} = C_{min} - C_{\delta min}$$

$$\Delta C_{min} = 2\zeta_g \sqrt{K_{min} m_{eg}} - 2\zeta_g \sqrt{(K_{min} - \Delta K) m_{eg}} \quad (88)$$

La caracterización de la rigidez  $K_{\delta}(t)$  y el amortiguamiento  $C_{\delta}(t)$  bajo estas condiciones se ilustra en la Figura 23. En dichas gráficas se establece los períodos de doble  $t_d$  y simple contacto  $t_s$ , así como también se indican los valores de rigidez y amortiguamiento para los períodos de contacto de las situaciones (a), (b) y (c) de la Figura 22.

### Figura 23

*Coefficientes de rigidez y amortiguamiento para un par de ruedas dentadas donde una de ellas presenta un porcentaje de rotura determinado en un diente.*



**Nota:** Elaborado por el autor.

Una vez definida la caracterización de la rigidez y amortiguamiento durante el período de contacto de un diente con un porcentaje de rotura determinado se procederá a definir una función periódica que defina las variaciones  $\Delta K(t)$  y  $\Delta C(t)$  a lo largo del tiempo.

Se establece como  $t_m$  al tiempo total de contacto entre un par de dientes, por lo que el tiempo total de contacto transcurrido en una revolución de una de las ruedas dentadas corresponde a  $Z_n t_m$ , donde  $Z_n$  corresponde al número de dientes de la rueda dentada. Considerando que, dentro de la caracterización física de la caja de engranajes sujeta a estudio, la rueda dentada Z1 es la que tiene el diente roto y esta posee 32 dientes, el tiempo total de contacto se determina como  $32t_m$ . En función de lo antes expuesto se define la reducción de rigidez y amortiguamiento periódicamente cada  $32t_m$ .

Si se determina que el diente que presenta un porcentaje de rotura determinado es el último, entonces se tendrán 30 períodos de contacto entre pares de dientes sanos y 2 períodos de contacto que presentarán una disminución en los parámetros de rigidez y amortiguamiento caracterizada por la Ecuación (85), la Ecuación (87) y la Ecuación (88). Bajo estas consideraciones, la disminución de rigidez y de amortiguamiento variantes en el tiempo se definen a través de la Ecuación (89) y la Ecuación (90), respectivamente.

$$\Delta K(t) = \begin{cases} \Delta K & \text{cuando } (n+1)t_m \leq t \leq nt_m + (\epsilon_\alpha - 1)t_m \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \quad (89)$$

$$\Delta C(t) = \begin{cases} \Delta C_{max} & \text{cuando } nt_m \leq t \leq nt_m + (\epsilon_\alpha - 1)t_m \\ \Delta C_{min} & \text{cuando } nt_m + (\epsilon_\alpha - 1)t_m \leq t \leq (n+1)t_m \\ \Delta C_{max} & \text{cuando } (n+1)t_m \leq t \leq (n+1)t_m + (\epsilon_\alpha - 1)t_m \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \quad (90)$$

donde  $\Delta K$  se calcula tomando en cuenta las consideraciones previamente expuestas y  $n$  es el número de pares que han completado su tiempo de contacto  $t_m$  y además  $n \in N$  donde  $N = \{0, 30, 60, 90, 120, \dots\}$ .

#### 5.2.1.4. Definición del modelo matemático del sistema sujeto a fallo de diente roto

Una vez definida la representación en espacio de estados del sistema en condiciones de operación nominal, así como la formulación matemática de los efectos que genera el modo de fallo de diente roto sobre los parámetros del sistema es momento de establecer el modelo del sistema ante la presencia de fallos.

Dado que las matrices  $A$  y  $W$  del sistema nominal dependen de los parámetros rigidez  $K(t)$  y amortiguamiento  $C(t)$  se definirán las matrices de fallo  $A_f$  y  $W_f$ . Por lo que el sistema sujeto a fallos se define según la Ecuación (91):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + A_f x + Bu + W + W_f \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (91)$$

donde  $A_f$  y  $W_f$  son las matrices de fallo que involucran la reducción de los parámetros de rigidez  $\Delta K(t)$  y amortiguamiento  $\Delta C(t)$  proporcionales a la severidad del fallo.

Debido a que la dinámica completa del sistema nominal se ha definido a través de 6 subsistemas invariantes en el tiempo es necesario establecer las matrices de fallo para cada uno de ellos.

■ **Subsistemas 1 y 2.**

Las matrices  $A_f$  y  $W_f$  para los subsistemas 1 y 2 quedan definidas según las Ecuaciones (92) y (93), respectivamente:

$$\mathbf{A}_f = \begin{bmatrix} \frac{rb_1^2 \Delta C(t) + k_{loss}}{J_1} & -\frac{rb_1 rb_2 \Delta C(t)}{J_1} & \frac{rb_1^2 \Delta K(t)}{J_1} & -\frac{rb_1 rb_2 \Delta K(t)}{J_1} \\ -\frac{rb_1 rb_2 \Delta C(t)}{J_2} & \frac{rb_2^2 \Delta C(t)}{J_2} & -\frac{rb_1 rb_2 \Delta K(t)}{J_2} & \frac{rb_2^2 \Delta K(t)}{J_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (92)$$

$$\mathbf{W}_f = \begin{bmatrix} -\frac{rb_1 \Delta K(t) b}{J_1} \\ \frac{rb_2 \Delta K(t) b}{J_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (93)$$

Dada la caracterización de  $\Delta K(t)$  formulada en la Ecuación (89) y  $\Delta C(t)$  detallada en la Ecuación (90) se establece que durante los períodos de contacto de los dientes sanos las matrices  $A_f$  y  $W_f$  serán igual a cero, mientras que durante el contacto del diente roto existirá una variación en los parámetros de rigidez y amortiguamiento con un valor determinado para los períodos de simple contacto y doble contacto. Las matrices que modelan las reducciones correspondientes a estos intervalos para el subsistema 1 y el subsistema 2 se detallan a continuación.

- **Subsistema 1.**

Las matrices  $A_f$  y  $W_f$  para el modelo de fallo de diente roto en simple contacto durante el intervalo de operación establecido en la Tabla 7 quedan definidas por la Ecuación (94) y Ecuación (95), respectivamente.

$$\mathbf{A}_f = \begin{bmatrix} \frac{rb_1^2 \Delta C_{min} + k_{loss}}{J_1} & -\frac{rb_1 rb_2 \Delta C_{min}}{J_1} & \frac{rb_1^2 \Delta K_{min}}{J_1} & -\frac{rb_1 rb_2 \Delta K_{min}}{J_1} \\ -\frac{rb_1 rb_2 \Delta C_{min}}{J_2} & \frac{rb_2^2 \Delta C_{min}}{J_2} & -\frac{rb_1 rb_2 \Delta K_{min}}{J_2} & \frac{rb_2^2 \Delta K_{min}}{J_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (94)$$

$$\mathbf{W}_f = \begin{bmatrix} -\frac{rb_1 \Delta K_{min} b}{J_1} \\ \frac{rb_2 \Delta K_{min} b}{J_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (95)$$

- **Subsistema 2.**

Las matrices  $A_f$  y  $W_f$  para el modelo de fallo de diente roto en doble contacto durante el intervalo de operación establecido en la Tabla 7 quedan definidas por la Ecuación (96) y Ecuación (97), respectivamente.

$$\mathbf{A}_f = \begin{bmatrix} \frac{rb_1^2 \Delta C_{max} + k_{loss}}{J_1} & -\frac{rb_1 rb_2 \Delta C_{max}}{J_1} & \frac{rb_1^2 \Delta K_{max}}{J_1} & -\frac{rb_1 rb_2 \Delta K_{max}}{J_1} \\ -\frac{rb_1 rb_2 \Delta C_{max}}{J_2} & \frac{rb_2^2 \Delta C_{max}}{J_2} & -\frac{rb_1 rb_2 \Delta K_{max}}{J_2} & \frac{rb_2^2 \Delta K_{max}}{J_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (96)$$

$$\mathbf{W}_f = \begin{bmatrix} -\frac{rb_1 \Delta K_{max} b}{J_1} \\ \frac{rb_2 \Delta K_{max} b}{J_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (97)$$

■ **Subsistemas 3 y 4.**

Las matrices  $A_f$  y  $W_f$  para los subsistemas 3 y 4 quedan definidas según las Ecuaciones (98) y (99), respectivamente:

$$\mathbf{A}_f = \begin{bmatrix} \frac{rb_1^2 \Delta C(t) + k_{loss}}{J_1} & -\frac{rb_1 rb_2 \Delta C(t)}{J_1} & 0 & 0 \\ -\frac{rb_1 rb_2 \Delta C(t)}{J_2} & \frac{rb_2^2 \Delta C(t)}{J_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (98)$$

$$\mathbf{W}_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (99)$$

De igual forma que para los subsistemas previamente analizados, dada la caracterización

de  $\Delta K(t)$  formulada en la Ecuación (89) y  $\Delta C(t)$  detallada en la Ecuación en la Ecuación (90) se establece que durante los períodos de contacto de los dientes sanos la matriz  $A_f$  será igual a cero, mientras que durante el contacto del diente roto existirá una variación en los parámetros de rigidez y amortiguamiento con un valor determinado en los períodos para simple contacto y doble contacto. Las matrices que modelan las reducciones correspondientes a estos intervalos para el subsistema 3 y el subsistema 4 se detallan a continuación.

- **Subsistema 3.**

La matriz  $A_f$  para el modelo de fallo de diente roto en simple contacto durante el intervalo de operación establecido en la Tabla 7 queda definida por la Ecuación (100).

$$\mathbf{A}_f = \begin{bmatrix} \frac{rb_1^2 \Delta C_{min} + k_{loss}}{J_1} & -\frac{rb_1 rb_2 \Delta C_{min}}{J_1} & 0 & 0 \\ -\frac{rb_1 rb_2 \Delta C_{min}}{J_2} & \frac{rb_2^2 \Delta C_{min}}{J_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (100)$$

- **Subsistema 4.**

La matriz  $A_f$  para el modelo de fallo de diente roto en doble contacto durante el intervalo de operación establecido en la Tabla 7 queda definida por la Ecuación (101).

$$\mathbf{A}_f = \begin{bmatrix} \frac{rb_1^2 \Delta C_{max} + k_{loss}}{J_1} & -\frac{rb_1 rb_2 \Delta C_{max}}{J_1} & 0 & 0 \\ -\frac{rb_1 rb_2 \Delta C_{max}}{J_2} & \frac{rb_2^2 \Delta C_{max}}{J_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (101)$$

- **Subsistemas 5 y 6.**

Las matrices  $A_f$  y  $W_f$  para los subsistemas 3 y 4 quedan definidas según las Ecuaciones (102) y (103), respectivamente:

$$\mathbf{A}_f = \begin{bmatrix} \frac{rb_1^2 \Delta C(t) + k_{loss}}{J_1} & -\frac{rb_1 rb_2 \Delta C(t)}{J_1} & \frac{rb_1^2 \Delta K(t)}{J_1} & -\frac{rb_1 rb_2 \Delta K(t)}{J_1} \\ -\frac{rb_1 rb_2 \Delta C(t)}{J_2} & \frac{rb_2^2 \Delta C(t)}{J_2} & -\frac{rb_1 rb_2 \Delta K(t)}{J_2} & \frac{rb_2^2 \Delta K(t)}{J_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (102)$$

$$\mathbf{W}_f = \begin{bmatrix} \frac{rb_1 \Delta K(t) b}{J_1} \\ -\frac{rb_2 \Delta K(t) b}{J_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (103)$$

De igual forma, dada la caracterización de  $\Delta K(t)$  y  $\Delta C(t)$  durante los períodos de contacto de los dientes sanos las matrices  $A_f$  y  $W_f$  serán igual a cero, mientras que durante el contacto del diente roto existirá una variación en los parámetros de rigidez y amortiguamiento con un valor determinado para los períodos de simple contacto y doble contacto. Las matrices que modelan las reducciones correspondientes a estos intervalos para el subsistema 5 y el subsistema 6 se detallan a continuación.

■ **Subsistema 5.**

Las matrices  $A_f$  y  $W_f$  para el modelo de fallo de diente roto en simple contacto durante el intervalo de operación establecido en la Tabla 7 quedan definidas por la Ecuación (104) y Ecuación (105), respectivamente.

$$\mathbf{A}_f = \begin{bmatrix} \frac{rb_1^2 \Delta C_{min} + k_{loss}}{J_1} & -\frac{rb_1 rb_2 \Delta C_{min}}{J_1} & \frac{rb_1^2 \Delta K_{min}}{J_1} & -\frac{rb_1 rb_2 \Delta K_{min}}{J_1} \\ -\frac{rb_1 rb_2 \Delta C_{min}}{J_2} & \frac{rb_2^2 \Delta C_{min}}{J_2} & -\frac{rb_1 rb_2 \Delta K_{min}}{J_2} & \frac{rb_2^2 \Delta K_{min}}{J_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (104)$$

$$\mathbf{W}_f = \begin{bmatrix} \frac{rb_1 \Delta K_{min} b}{J_1} \\ -\frac{rb_2 \Delta K_{min} b}{J_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (105)$$

■ **Subsistema 6.**

Las matrices  $A_f$  y  $W_f$  para el modelo de fallo de diente roto en doble contacto durante el intervalo de operación establecido en la Tabla 7 quedan definidas por la Ecuación (106) y Ecuación (107), respectivamente.

$$\mathbf{A}_f = \begin{bmatrix} \frac{rb_1^2 \Delta C_{max} + k_{loss}}{J_1} & -\frac{rb_1 rb_2 \Delta C_{max}}{J_1} & \frac{rb_1^2 \Delta K_{max}}{J_1} & -\frac{rb_1 rb_2 \Delta K_{max}}{J_1} \\ -\frac{rb_1 rb_2 \Delta C_{max}}{J_2} & \frac{rb_2^2 \Delta C_{max}}{J_2} & -\frac{rb_1 rb_2 \Delta K_{max}}{J_2} & \frac{rb_2^2 \Delta K_{max}}{J_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (106)$$

$$\mathbf{W}_f = \begin{bmatrix} \frac{rb_1 \Delta K_{max} b}{J_1} \\ -\frac{rb_2 \Delta K_{max} b}{J_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (107)$$

Por simple inspección se determina que la matriz  $A_f$  para el subsistema 1 y subsistema 5 detalladas en la Ecuación (95) y Ecuación (105) es la misma. De igual forma, la matriz  $A_f$  para el subsistema 2 y el subsistema 6 expresadas en la Ecuación (97) y Ecuación (107) es la misma.



## 5.2.2. Configuración del filtro de detección basado en observadores

Para el desarrollo del filtro de detección basado en un observador de Luenberger se debe considerar que el sistema, originalmente de caracterización variante en el tiempo, ha sido representado a través de 6 subsistemas invariantes en el tiempo. Por ello es necesario verificar el cumplimiento de todas las condiciones por parte de los 6 subsistemas en cada una de las fases de diseño. Primeramente, se debe verificar bajo qué restricciones los 6 subsistemas cumplen con el criterio de observabilidad completa.

### 5.2.2.1. Observabilidad del sistema

La observabilidad es la capacidad de estimar las variables de estado a partir del conocimiento de la entrada  $u(t)$  y la salida  $y(t)$ . La reubicación de los polos para un observador es una técnica de diseño viable solo para sistemas que son totalmente observables (Nise, 2015). Un sistema es totalmente observable si la matriz de observabilidad definida según la Ecuación (108) es de rango  $n$ .

$$\mathbf{O}_M = [C \quad CA \quad \dots \quad CA^{n-1}]^T \quad (108)$$

donde  $A$  es la matriz de estados,  $C$  es la matriz de salidas y  $n$  es el orden del sistema.

Para el análisis de observabilidad del sistema la matriz  $C$  se determinará en primera instancia para una salida disponible, luego para dos y así sucesivamente hasta verificar con alguna de ellas la condición de observabilidad total de los 6 subsistemas. Lo que se procura es encontrar la configuración de la representación en espacio de estados del sistema que menor cantidad de mediciones de velocidad y posición angular demande para el diseño del filtro de detección basado en observadores.

#### ■ Subsistema 1 y subsistema 5.

##### • Con una salida disponible.

Se considera la disponibilidad de la velocidad angular del engranaje de entrada  $\dot{\theta}_1$ , por lo que la matriz  $C$  se define según la Ecuación (109):

$$\mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad (109)$$

La matriz  $A$  para este par de subsistemas queda definida según la Ecuación (75).

La matriz de observabilidad resultante se presenta en la Ecuación (110):

$$\mathbf{O}_M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1.185 \times 10^3 & 1.778 \times 10^3 & -3.390 \times 10^7 & 5.084 \times 10^7 \\ -2.913 \times 10^7 & 4.370 \times 10^7 & 1.363 \times 10^{11} & -2.045 \times 10^{11} \\ 2.535 \times 10^{11} & -3.802 \times 10^{11} & 3.350 \times 10^{15} & -5.0256 \times 10^{15} \end{bmatrix} \quad (110)$$

El rango de la matriz de observabilidad de la Ecuación (110) es  $rank(O_M) = 4$ . Debido a que el rango calculado es igual al orden del sistema se concluye que para una salida disponible el subsistema 1 y el subsistema 5 son totalmente observables.

- **Con dos salidas disponibles.**

Se considera la disponibilidad de las dos velocidades angulares de los engranajes de entrada  $\dot{\theta}_1$  y de salida  $\dot{\theta}_2$ , por lo que la matriz  $C$  se define según la Ecuación (111):

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (111)$$

La matriz  $A$  para este par de subsistemas queda definida según la Ecuación (75). La matriz de observabilidad resultante se presenta en la Ecuación (112):

$$\mathbf{O}_M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1.185 \times 10^3 & 1.778 \times 10^3 & -3.3890 \times 10^7 & 5.084 \times 10^7 \\ 1.891 \times 10^3 & -2.837 \times 10^3 & 5.408 \times 10^7 & -8.113 \times 10^7 \\ -2.913 \times 10^7 & 4.370 \times 10^7 & 1.363 \times 10^{11} & -2.045 \times 10^{11} \\ 4.648 \times 10^7 & -6.972 \times 10^7 & -2.175 \times 10^{11} & 3.263 \times 10^{11} \\ 2.535 \times 10^{11} & -3.802 \times 10^{11} & 3.350 \times 10^{15} & -5.026 \times 10^{15} \\ -4.044 \times 10^{11} & 6.066 \times 10^{11} & -5.346 \times 10^{15} & 8.019 \times 10^{15} \end{bmatrix} \quad (112)$$

El rango de la matriz de observabilidad de la Ecuación (112) es  $rank(O_M) = 4$ . Debido a que el rango calculado es igual al orden del sistema se concluye que para dos salidas disponibles el subsistema 1 y el subsistema 5 son totalmente observables.

- **Con tres salidas disponibles.**

Se considera la disponibilidad de las dos velocidades angulares de los engranajes de entrada  $\dot{\theta}_1$  y de salida  $\dot{\theta}_2$ , así como la posición angular del engranaje de entrada  $\theta_1$ . Por lo que la matriz  $C$  se define según la Ecuación (113):

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (113)$$

La matriz  $A$  para este par de subsistemas queda definida según la Ecuación (75).  
La matriz de observabilidad resultante se presenta en la Ecuación (114):

$$\mathbf{O}_M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1.185 \times 10^3 & 1.778 \times 10^3 & -3.3890 \times 10^7 & 5.084 \times 10^7 \\ 1.891 \times 10^3 & -2.837 \times 10^3 & 5.408 \times 10^7 & -8.113 \times 10^7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2.913 \times 10^7 & 4.370 \times 10^7 & 1.363 \times 10^{11} & -2.045 \times 10^{11} \\ 4.648 \times 10^7 & -6.972 \times 10^7 & -2.175 \times 10^{11} & 3.263 \times 10^{11} \\ -1.185 \times 10^3 & 1.778 \times 10^3 & -3.3890 \times 10^7 & 5.084 \times 10^7 \\ 2.535 \times 10^{11} & -3.802 \times 10^{11} & 3.350 \times 10^{15} & -5.026 \times 10^{15} \\ -4.044 \times 10^{11} & 6.066 \times 10^{11} & -5.346 \times 10^{15} & 8.019 \times 10^{15} \\ -2.913 \times 10^7 & 4.370 \times 10^7 & 1.363 \times 10^{11} & -2.045 \times 10^{11} \end{bmatrix} \quad (114)$$

El rango de la matriz de observabilidad de la Ecuación (114) es  $rank(O_M) = 4$ . Debido a que el rango calculado es igual al orden del sistema se concluye que para tres salidas disponibles el subsistema 1 y el subsistema 5 son totalmente observables.

- **Con cuatro salidas disponibles.**

Se considera la disponibilidad de las dos velocidades angulares de los engranajes de entrada  $\dot{\theta}_1$  y de salida  $\dot{\theta}_2$ , así como la posición angular del engranaje de entrada  $\theta_1$  y de salida  $\theta_2$ . Por lo que la matriz  $C$  se define según la Ecuación (115):

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (115)$$

La matriz  $A$  para este par de subsistemas queda definida según la Ecuación (75).  
La matriz de observabilidad resultante se presenta en la Ecuación (116):

$$\mathbf{O}_M = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
-1.185 \times 10^3 & 1.778 \times 10^3 & -3.3890 \times 10^7 & 5.084 \times 10^7 \\
1.891 \times 10^3 & -2.837 \times 10^3 & 5.408 \times 10^7 & -8.113 \times 10^7 \\
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
-2.913 \times 10^7 & 4.370 \times 10^7 & 1.363 \times 10^{11} & -2.045 \times 10^{11} \\
4.648 \times 10^7 & -6.972 \times 10^7 & -2.175 \times 10^{11} & 3.263 \times 10^{11} \\
-1.185 \times 10^3 & 1.778 \times 10^3 & -3.3890 \times 10^7 & 5.084 \times 10^7 \\
1.891 \times 10^3 & -2.837 \times 10^3 & 5.408 \times 10^7 & -8.113 \times 10^7 \\
2.535 \times 10^{11} & -3.802 \times 10^{11} & 3.350 \times 10^{15} & -5.026 \times 10^{15} \\
-4.044 \times 10^{11} & 6.066 \times 10^{11} & -5.346 \times 10^{15} & 8.019 \times 10^{15} \\
-2.913 \times 10^7 & 4.370 \times 10^7 & 1.363 \times 10^{11} & -2.045 \times 10^{11} \\
4.648 \times 10^7 & -6.972 \times 10^7 & -2.175 \times 10^{11} & 3.263 \times 10^{11}
\end{bmatrix} \quad (116)$$

El rango de la matriz de observabilidad de la Ecuación (116) es  $rank(\mathbf{O}_M) = 4$ . Debido a que el rango calculado es igual al orden del sistema se concluye que para cuatro salidas disponibles el subsistema 1 y el subsistema 5 son totalmente observables.

Este proceso se realiza para el resto de los subsistemas. El rango de la matriz de observabilidad obtenida para los 6 subsistemas se resumen en la Tabla 8.

Una vez analizada la observabilidad para los 6 subsistemas se establece que la dinámica completa del sistema de caja de engranajes es totalmente observable si y solo si se tienen disponibles las mediciones de las cuatro salidas, estas corresponden a las velocidades y posiciones angulares de las ruedas dentadas de entrada y salida. Bajo esta consideración la observabilidad total del sistema es asegurada, de modo que se cumple con uno de los requisitos para el diseño del filtro de detección basado en un observador de Luenberger de orden completo y se asegura la generación de residuales asintóticamente estables.

**Tabla 8**

*Rango de la matriz de observabilidad de los 6 subsistemas en función del número de salidas disponibles.*

	1 salida	2 salidas	3 salidas	4 salidas
<b>Subsistema 1 y subsistema 5</b>	4	4	4	4
<b>Subsistema 2 y subsistema 6</b>	4	4	4	4
<b>Subsistema 3</b>	2	2	3	4
<b>Subsistema 4</b>	2	2	3	4

**Nota:** Elaborado por el autor.

### 5.2.2.2. Diseño del filtro de detección basado en observadores

Partiendo del modelo del observador de estado de orden completo dado en la Ecuación (8) y de la Ecuación (9) extendida con el término  $W$  de la Ecuación (51) que son las generadoras de residuales y que incluyen la matriz de fallas  $A_f$  detalladas en la Ecuación (94), Ecuación (96), Ecuación (100) y Ecuación (101) para los 6 subsistemas, el error de estimación se define según la Ecuación (117):

$$\dot{e} = (A - LC)e + A_f x + W_f \quad (117)$$

donde la matriz  $A - LC$  debe ser una matriz estable para que el vector de error converja a cero para cualquier vector de error inicial  $e(0)$ . Asimismo, se debe considerar que en caso de ingreso de perturbaciones, tal como en el caso de una falla periódica, ganancias altas en el observador incrementan el riesgo de que la estimación de estados se vea afectada por el impacto de perturbaciones altas (Baranowski, 2006).

Para el diseño del observador se considerarán disponibles las mediciones de velocidad y posición angular de los engranajes de entrada y salida. Considerando lo antes expuesto es posible elegir la matriz  $L$  tal que  $A - LC$  tenga autovalores arbitrariamente deseados. Para el caso de estudio expuesto en este trabajo la selección de los valores para  $L$  se dará en base a que el tiempo de respuesta del observador debe ser aproximadamente 0.44 segundos. Bajo este planteamiento se procederá a obtener las ganancias del observador de modo que se tenga una matriz  $L$  tal como se detalla en la Ecuación (118):

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 & L_4 \\ L_5 & L_6 & L_7 & L_8 \\ L_9 & L_{10} & L_{11} & L_{12} \\ L_{13} & L_{14} & L_{15} & L_{16} \end{bmatrix} \quad (118)$$

donde  $L_1$  a  $L_{16}$  son las ganancias del observador detector de fallos.

Debido a que la dinámica total del sistema se desglosa en 6 subsistemas invariantes en el tiempo, el diseño del observador inicia con el planteamiento de los polos deseados para el subsistema 1 y el subsistema 5. Luego, con ellos se obtendrá la matriz de ganancias  $L$  que posibilite la reubicación de los polos para estos subsistemas. Finalmente, se verificará que dichas ganancias permitan obtener la respuesta temporal deseada con el resto de subsistemas.

▪ **Subsistema 1 y subsistema 5.**

En la Tabla 9 se detallan los polos de los subsistemas originales y los polos deseados para el observador para el subsistema 1 y subsistema 5.

**Tabla 9**

*Polos del subsistema 1 y subsistema 5 y polos deseados para el observador detector de fallos.*

Subsistema	Polos del subsistema	Polos deseados para el observador
Subsistema 1 y 5	$p_{1,2} = -2010.920 \pm 10534.503i$ $p_3 = -0.438$ $p_4 = 0$	$p_{1,2} = -2019.903 \pm 10524.918i$ $p_3 = -9.345$ $p_4 = -9.123$

**Nota:** Elaborado por el autor.

Los autovalores que rigen la dinámica del observador se calculan con la Ecuación (119):

$$\det[sI - (A - LC)] = 0 \quad (119)$$

donde  $A$  corresponde a la Ecuación (75),  $L$  a la Ecuación (118) y  $C$  a la Ecuación (115). Con las especificaciones antes expuestas, al aplicar la Ecuación (119), se obtiene el polinomio característico del observador. Los coeficientes del polinomio obtenido,

que serán funciones de  $L_1$  hasta  $L_{16}$ , deberán ser igualados al polinomio característico deseado de la Ecuación (120) que se obtiene de los polos del observador detallados en la Tabla 9. Este proceso se realiza con la finalidad de generar una serie de ecuaciones que permitan despejar los valores de las ganancias de la matriz  $L$ .

$$s^4 + 4.058 \times 10^3 s^3 + 1.149 \times 10^8 s^2 + 2.122 \times 10^9 s + 9.797 \times 10^9 \quad (120)$$

Teniendo en cuenta las consideraciones previamente establecidas y el sistema de ecuaciones que se genera, la matriz de ganancias del observador resultante se formula en la Ecuación (121):

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 9 & 0.02 & 0.02 & 0.02 \\ 0.02 & 9 & 0.02 & 0.02 \\ 0.02 & 0.02 & 9 & 0.02 \\ 0.02 & 0.02 & 0.02 & 9 \end{bmatrix} \quad (121)$$

■ **Subsistema 2 y subsistema 6.**

Los autovalores que rigen el comportamiento dinámico del observador se obtienen mediante la Ecuación (119) donde  $A$  corresponde a la Ecuación (77),  $L$  a la Ecuación (121) y  $C$  a la Ecuación (115). Con las especificaciones antes expuestas, al aplicar la Ecuación (119), se obtiene el polinomio característico del observador expresado en la Ecuación (122) del cual se obtienen los polos del observador detallados en la Tabla 10.

$$s^4 + 5.724 \times 10^3 s^3 + 2.298 \times 10^8 s^2 + 4.243 \times 10^9 s + 1.959 \times 10^{10} \quad (122)$$

**Tabla 10**

*Polos del subsistema 2 y subsistema 6 y polos del observador detector de fallos.*

Subsistema	Polos del subsistema	Polos del observador
Subsistema 2 y 6	$p_{1,2} = -2843.833 \pm 14898.045i$	$p_{1,2} = -2852.816 \pm 14884.488i$
	$p_3 = -0.438$	$p_3 = -9.350$
	$p_4 = 0$	$p_4 = -9.123$

**Nota:** Elaborado por el autor.

■ **Subsistema 3.**

Los autovalores que rigen el comportamiento dinámico del observador se obtienen mediante la Ecuación (119) donde  $A$  corresponde a la Ecuación (68),  $L$  a la Ecuación (121) y  $C$  a la Ecuación (115). Con las especificaciones antes expuestas, al aplicar la Ecuación (119), se obtiene el polinomio característico del observador expresado en la Ecuación (123) del cual se obtienen los polos del observador detallados en la Tabla 11.

$$s^4 + 5.233 \times 10^3 s^3 + 1.434 \times 10^5 s^2 + 1.313 \times 10^6 s + 4.006 \times 10^6 \quad (123)$$

**Tabla 11**

*Polos del subsistema 3 y polos del observador detector de fallos.*

Subsistema	Polos del subsistema	Polos del observador
<b>Subsistema 3</b>	$p_1 = -5196.7301$	$p_1 = -8.98$
	$p_2 = -0.480$	$p_2 = -9.113$
	$p_3 = 0$	$p_3 = -9.404$
	$p_4 = 0$	$p_3 = -5205.713$

**Nota:** Elaborado por el autor.

■ **Subsistema 4.**

Los autovalores que rigen el comportamiento dinámico del observador se obtienen mediante la Ecuación (119) donde  $A$  corresponde a la Ecuación (69),  $L$  a la Ecuación (121) y  $C$  a la Ecuación (115). Con las especificaciones antes expuestas, al aplicar la Ecuación (119), se obtiene el polinomio característico del observador expresado en la Ecuación (124) del cual se obtienen los polos del observador detallados en la Tabla 12.

$$s^4 + 5.724 \times 10^3 s^3 + 1.567 \times 10^5 s^2 + 1.432 \times 10^6 s + 4.365 \times 10^6 \quad (124)$$

Debido a que para los 6 subsistemas las ganancias previamente calculadas para el observador generan una dinámica estable y con un tiempo de respuesta de aproximadamente 0.44 segundos, tal y como se había definido en las condiciones de diseño, se establece que la matriz  $L$  queda definida según la Ecuación (121).



**Tabla 12**

*Polos del subsistema 4 y polos del observador detector de fallos.*

Subsistema	Polos del subsistema	Polos del observador
Subsistema 4	$p_1 = -5687.666$	$p_1 = -8.98$
	$p_2 = -0.438$	$p_2 = -9.133$
	$p_3 = 0$	$p_3 = -9.343$
	$p_4 = 0$	$p_3 = -5696.648$

**Nota:** Elaborado por el autor.

### 5.2.3. Configuración de los filtros de diagnóstico generadores de residuales

Se diseñará un filtro de diagnóstico mediante el seguimiento de los pasos del algoritmo algebraico dado en la Sección 4.1.4. Previo al diseño del filtro es necesario calcular los índices de observabilidad de los 6 subsistemas y determinar el valor mínimo para el sistema completo.

#### 5.2.3.1. Índice de observabilidad

Para el diseño del observador de diagnóstico se debe determinar el valor  $s$  el cual se debe escoger de acuerdo a  $s \geq \sigma_{min}$  y a las condiciones de la Ecuación (125):

$$\sum_{i=1}^m \sigma_i = n \quad (125)$$

$$\sigma_{min} = \min_i \sigma_i$$

donde:

$\sigma_i$  son los índices de observabilidad de cada submatriz de la matriz de observabilidad.

$\sigma_{min}$  es el mínimo valor de observabilidad.

$m$  es el número de salidas del sistema.

$n$  es el número de estados del sistema.

Se obtendrán las matrices de observabilidad que se definen como en la Ecuación (126), mismas que deben cumplir con la igualdad dada por los rangos según la Ecuación (127):

$$\mathbf{O}_v = [C \quad CA \quad \dots \quad CA^{v-1}]^T \quad \text{nótese que } v \leq n \quad (126)$$

$$\text{rango}(O_v) = \text{rango}(O_{v+1}) \quad (127)$$

La metodología aplicada para el cálculo del mínimo valor de observabilidad consiste en determinar la matriz  $C$ , en primera instancia para una salida disponible, luego para dos y así sucesivamente hasta verificar la condición de la Ecuación (127). Lo que se procura es encontrar la configuración de la representación en espacio de estados del sistema que menor cantidad de mediciones de velocidad y posición angular de los engranajes de entrada y salida demande para el diseño del filtro de diagnóstico. Asimismo, debido a que la dinámica total del sistema ha sido desglosada en 6 subsistemas invariantes en el tiempo se realiza el análisis considerando cada uno de los subsistemas y se valida el resultado favorable que es común a todos.

A continuación, se presenta el cálculo del índice de observabilidad para los subsistemas 1 y subsistema 5.

▪ **Subsistema 1 y subsistema 5.**

• **Con una salida disponible.**

Se considera la disponibilidad de la velocidad angular del engranaje de entrada  $\dot{\theta}_1$ , por lo que la matriz  $C$  se define según la Ecuación (109). Por su parte, la matriz  $A$  para este par de subsistemas queda definida según la Ecuación (75). Se comienza con el cálculo con  $v = 1$ , se obtienen los resultados de las Ecuaciones (128) y (129):

$$\mathbf{O}_v = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (128)$$

**rango de  $\mathbf{O}_v = 1$**

$$\mathbf{O}_{v+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1.185 \times 10^3 & 1.778 \times 10^3 & -3.390 \times 10^7 & 5.084 \times 10^7 \end{bmatrix} \quad (129)$$

**rango de  $\mathbf{O}_v = 2$**

Se aprecia que con  $v = 1$  no se cumple la igualdad de la Ecuación (127), en virtud de ello, aún no se ha logrado definir el mínimo grado de observabilidad. A continuación, se procede a realizar el cálculo con  $v = 2$ , se obtienen los resultados de las Ecuaciones (130) y (131):

$$\mathbf{O}_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1.185 \times 10^3 & 1.778 \times 10^3 & -3.390 \times 10^7 & 5.084 \times 10^7 \end{bmatrix} \quad (130)$$

**rango de  $\mathbf{O}_v = 2$**

$$\mathbf{O}_{v+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1.185 \times 10^3 & 1.778 \times 10^3 & -3.390 \times 10^7 & 5.084 \times 10^7 \\ -2.913 \times 10^7 & 4.370 \times 10^7 & 1.363 \times 10^{11} & -2.045 \times 10^{11} \end{bmatrix} \quad (131)$$

**rango de  $\mathbf{O}_v = 3$**

De igual forma, se advierte que con  $v = 2$  no se cumple la igualdad de la Ecuación (127), en vista de ello, aún no se ha logrado definir el mínimo grado de observabilidad. A continuación, se lleva a cabo el cálculo con  $v = 3$ , se obtienen los resultados de las Ecuaciones (132) y (133):

$$\mathbf{O}_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1.185 \times 10^3 & 1.778 \times 10^3 & -3.390 \times 10^7 & 5.084 \times 10^7 \\ -2.913 \times 10^7 & 4.370 \times 10^7 & 1.363 \times 10^{11} & -2.045 \times 10^{11} \end{bmatrix} \quad (132)$$

**rango de  $\mathbf{O}_v = 3$**

$$\mathbf{O}_{v+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1.185 \times 10^3 & 1.778 \times 10^3 & -3.390 \times 10^7 & 5.084 \times 10^7 \\ -2.913 \times 10^7 & 4.370 \times 10^7 & 1.363 \times 10^{11} & -2.045 \times 10^{11} \\ 2.535 \times 10^{11} & -3.802 \times 10^{11} & 3.350 \times 10^{15} & -5.0256 \times 10^{15} \end{bmatrix} \quad (133)$$

**rango de  $\mathbf{O}_v = 4$**

Dado que ya se han realizado todos los cálculos posibles bajo la condición  $v \leq n$  se determina que si se cuenta con la disponibilidad de una salida entonces no es posible establecer un mínimo índice de observabilidad para el subsistema 1 y el subsistema 5.

- **Con dos salidas disponibles.**

Se considera la disponibilidad de las dos velocidades angulares de los engranajes de entrada  $\dot{\theta}_1$  y de salida  $\dot{\theta}_2$ , por lo que la matriz  $C$  se define según la Ecuación (111). Por su parte, la matriz  $A$  para este par de subsistemas queda definida según la Ecuación (75). Se comienza con el cálculo con  $v = 1$ , se obtienen los resultados de las Ecuaciones (134) y (135):

$$\mathbf{O}_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (134)$$

**rango de  $\mathbf{O}_v = 2$**

$$\mathbf{O}_{v+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1.185 \times 10^3 & 1.778 \times 10^3 & -3.3890 \times 10^7 & 5.084 \times 10^7 \\ 1.891 \times 10^3 & -2.837 \times 10^3 & 5.408 \times 10^7 & -8.113 \times 10^7 \end{bmatrix} \quad (135)$$

**rango de  $\mathbf{O}_v = 4$**

Se aprecia que con  $v = 1$  no se cumple la igualdad de la Ecuación (127), en vista de ello, aún no se ha logrado definir el mínimo grado de observabilidad. A continuación, se procede a realizar el cálculo con  $v = 2$ , se obtienen los resultados de las Ecuaciones (136) y (137):

$$\mathbf{O}_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1.185 \times 10^3 & 1.778 \times 10^3 & -3.3890 \times 10^7 & 5.084 \times 10^7 \\ 1.891 \times 10^3 & -2.837 \times 10^3 & 5.408 \times 10^7 & -8.113 \times 10^7 \end{bmatrix} \quad (136)$$

**rango de  $\mathbf{O}_v = 4$**

$$\mathbf{O}_{v+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1.185 \times 10^3 & 1.778 \times 10^3 & -3.3890 \times 10^7 & 5.084 \times 10^7 \\ 1.891 \times 10^3 & -2.837 \times 10^3 & 5.408 \times 10^7 & -8.113 \times 10^7 \\ -2.913 \times 10^7 & 4.370 \times 10^7 & 1.363 \times 10^{11} & -2.045 \times 10^{11} \\ 4.648 \times 10^7 & -6.972 \times 10^7 & -2.175 \times 10^{11} & 3.263 \times 10^{11} \end{bmatrix} \quad (137)$$

**rango de  $\mathbf{O}_v = 4$**

Se advierte que con  $v = 2$  se cumple la igualdad de la Ecuación (127) por lo que si se cuenta con la disponibilidad de dos salidas el mínimo grado de observabilidad

para el subsistema 1 y el subsistema 5 es  $\sigma_{min} = 2$ .

- **Con tres salidas disponibles.**

Se considera la disponibilidad de las dos velocidades angulares de los engranajes de entrada  $\dot{\theta}_1$  y de salida  $\dot{\theta}_2$ , así como la posición angular del engranaje de entrada  $\theta_1$ . Por lo que la matriz  $C$  se define según la Ecuación (113). Por su parte, la matriz  $A$  para este par de subsistemas queda definida según la Ecuación (75). Se comienza con el cálculo con  $v = 1$ , se obtienen los resultados de las Ecuaciones (138) y (139):

$$\mathbf{O}_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (138)$$

$$\text{rango de } \mathbf{O}_v = 3$$

$$\mathbf{O}_{v+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1.185 \times 10^3 & 1.778 \times 10^3 & -3.3890 \times 10^7 & 5.084 \times 10^7 \\ 1.891 \times 10^3 & -2.837 \times 10^3 & 5.408 \times 10^7 & -8.113 \times 10^7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (139)$$

$$\text{rango de } \mathbf{O}_v = 4$$

Se aprecia que con  $v = 1$  no se cumple la igualdad de la Ecuación (127), en virtud de ello, aún no se ha logrado definir el mínimo grado de observabilidad. A continuación, se procede a realizar el cálculo con  $v = 2$ , se obtienen los resultados de las Ecuaciones (140) y (141):

$$\mathbf{O}_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1.185 \times 10^3 & 1.778 \times 10^3 & -3.3890 \times 10^7 & 5.084 \times 10^7 \\ 1.891 \times 10^3 & -2.837 \times 10^3 & 5.408 \times 10^7 & -8.113 \times 10^7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (140)$$

$$\text{rango de } \mathbf{O}_v = 4$$

$$\mathbf{O}_{v+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1.185 \times 10^3 & 1.778 \times 10^3 & -3.3890 \times 10^7 & 5.084 \times 10^7 \\ 1.891 \times 10^3 & -2.837 \times 10^3 & 5.408 \times 10^7 & -8.113 \times 10^7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2.913 \times 10^7 & 4.370 \times 10^7 & 1.363 \times 10^{11} & -2.045 \times 10^{11} \\ 4.648 \times 10^7 & -6.972 \times 10^7 & -2.175 \times 10^{11} & 3.263 \times 10^{11} \\ -1.185 \times 10^3 & 1.778 \times 10^3 & -3.3890 \times 10^7 & 5.084 \times 10^7 \end{bmatrix} \quad (141)$$

**rango de  $\mathbf{O}_v = 4$**

Se advierte que con  $v = 2$  se cumple la igualdad de la Ecuación (127) por lo que si se cuenta con la disponibilidad de tres salidas el mínimo grado de observabilidad para el subsistema 1 y el subsistema 5 es  $\sigma_{min} = 2$ .

- **Con cuatro salidas disponibles.**

Se considera la disponibilidad de las dos velocidades angulares de los engranajes de entrada  $\dot{\theta}_1$  y de salida  $\dot{\theta}_2$ , así como la posición angular del engranaje de entrada  $\theta_1$  y de salida  $\theta_2$ . Por lo que la matriz  $C$  se define según la Ecuación (115). Por su parte, la matriz  $A$  para este par de subsistemas queda definida según la Ecuación (75). Se comienza con el cálculo con  $v = 1$ , se obtienen los resultados de las Ecuaciones (143) y (142):

$$\mathbf{O}_{v+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1.185 \times 10^3 & 1.778 \times 10^3 & -3.3890 \times 10^7 & 5.084 \times 10^7 \\ 1.891 \times 10^3 & -2.837 \times 10^3 & 5.408 \times 10^7 & -8.113 \times 10^7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (142)$$

**rango de  $\mathbf{O}_v = 4$**

$$\mathbf{O}_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (143)$$

rango de  $\mathbf{O}_v = 4$

Se advierte que con  $v = 1$  se cumple la igualdad de la Ecuación (127) por lo que si se cuenta con la disponibilidad de cuatro salidas el mínimo grado de observabilidad para el subsistema 1 y el subsistema 5 es  $\sigma_{min} = 1$ .

Este proceso se realiza para el resto de subsistemas. Los índices de observabilidad obtenidos para los 6 subsistemas se resumen en la Tabla 13:

**Tabla 13**

*Índices de observabilidad para los 6 subsistemas en función del número de salidas disponibles.*

	1 salida	2 salidas	3 salidas	4 salidas
<b>Subsistema 1 y subsistema 5</b>	-	2	2	1
<b>Subsistema 2 y subsistema 6</b>	-	2	2	1
<b>Subsistema 3</b>	2	1	1	1
<b>Subsistema 4</b>	2	1	1	1

**Nota:** Elaborado por el autor.

Una vez analizada la condición del índice de mínima observabilidad para los 6 subsistemas se define que el diseño del filtro de diagnóstico se puede llevar a cabo con dos, tres o cuatro salidas disponibles ya que se puede elegir  $s$  tal que  $s \geq \sigma_{min}$ . Como criterio de selección se ha tomado en cuenta las consideraciones de diseño que involucren prescindir de la mayor cantidad de señales de salida disponibles, motivo por el cual se selecciona la condición de diseño que necesita la medición de dos señales de salida, las cuales corresponden a las velocidades angulares. En la práctica, estas señales pueden ser obtenidas a través del uso de sensores tales como tacómetros o encoders incrementales y el posterior procesamiento de las series temporales obtenidas. Cabe desatacar que si bien con dos salidas disponibles el sistema no es completamente observable y por lo tanto  $e = Tx - z$  no se cumple más que para dos estados,

esto no se considera un problema debido a que no se está realizando tareas de control, para actividades de detección y diagnóstico es suficiente contar con residuales estables. En base a lo antes expuesto, el índice mínimo de observabilidad para todo el sistema es  $\sigma_{min} = 2$ .

A partir del conocimiento que el índice mínimo de observabilidad es 2 y que  $s \geq \sigma_{min}$  se establece  $s = 4$ , esto con el fin de brindar un mayor grado de libertad al momento de llevar a cabo el desarrollo del observador de diagnóstico con un algoritmo de aproximación algebraica. Asimismo, para el diseño del observador de diagnóstico se establece que su comportamiento dinámico se halle fundamentado en los polos previamente definidos para el subsistema 1 y el subsistema 5 en el observador detector de fallos, esto debido a que dichos polos involucran una dinámica estable con un tiempo de respuesta adecuado para los propósitos de detección y diagnóstico de fallos en el sistema de caja de engranajes. Los valores de estos polos y el polinomio característico asociado a ellos se detallan en la Ecuación (144) y Ecuación (145), respectivamente:

$$p_{1,2} = -2852.816 \pm 14884.488i \quad p_3 = -9.350 \quad p_4 = -9.123 \quad (144)$$

$$s^4 + 5.724 \times 10^3 s^3 + 2.298 \times 10^8 s^2 + 4.243 \times 10^9 s + 1.959 \times 10^{10} \quad (145)$$

### 5.2.3.2. Desarrollo de un observador de diagnóstico con un algoritmo de aproximación algebraica

Una vez establecidos los parámetros iniciales para el diseño del observador de diagnóstico, tales como el valor de  $s$  y los polos deseados, se continua con el desarrollo aplicando el algoritmo de aproximación algebraica de la Sección 4.1.5.

- **Paso 1:** Establecer la matriz  $X$  instanciada con valores aleatorios que se detallan en la Ecuación (146), donde  $m$  es el número de salidas del sistema y es igual a 2. Asimismo, se debe establecer la matriz  $G$  descrita en la Ecuación (147) obtenida a partir de los coeficientes del polinomio característico de la Ecuación (145).

$$X \in R^{s \times m}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0.815 \times 10^{-15} & 0.632 \times 10^{-15} \\ 0.906 \times 10^{-15} & 0.098 \times 10^{-15} \\ 0.127 \times 10^{-15} & 0.279 \times 10^{-15} \\ 0.913 \times 10^{-15} & 0.547 \times 10^{-15} \end{bmatrix} \quad (146)$$



$$\mathbf{G} = [G_O \quad g] \quad \mathbf{G}_O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in R^{s \times s-1} \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_s \end{bmatrix} \in R^s \quad (147)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1.959 \times 10^{10} \\ 1 & 0 & 0 & -4.243 \times 10^9 \\ 0 & 1 & 0 & -2.298 \times 10^8 \\ 0 & 0 & 1 & -5.724 \times 10^3 \end{bmatrix}$$

- **Paso 2:** Calcular  $c(s) = \det(sI - A)$  para obtener los coeficientes del polinomio característico  $a_0, a_1, \dots, a_n$ . La matriz  $A$  usada en el cálculo se detalla en la Ecuación (77). El polinomio resultante se formula en la Ecuación (148), mientras que sus coeficientes se detallan en la Ecuación (149):

$$c(s) = \det(sI - A) \quad (148)$$

$$c(s) = s^4 + 4.022 \times 10^3 s^3 + 1.150 \times 10^8 s^2 + 5.042 \times 10^7 s$$

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 5.042 \times 10^7 \\ a_2 &= 1.150 \times 10^8 \\ a_3 &= 4.022 \times 10^3 \\ a_4 &= 1 \end{aligned} \quad (149)$$

- **Paso 3:** Calcular las matrices  $Y$ ,  $J$ ,  $L$  y  $T$  según la Ecuación (23), Ecuación (26) y Ecuación (29). Se inicia calculando la matriz  $Y$  a partir de la matriz aleatoria  $X$  y la matriz  $G$  previamente descritas. El resultado se detalla en la Ecuación (150).

Posteriormente, se calcula la matriz  $J$  considerando que el sistema tiene como salida la velocidad angular del engranaje de entrada y del engranaje de salida. Debido a lo antes expuesto la matriz  $C$  se define según la Ecuación (111). La matriz  $J$  resultante se presenta en la Ecuación (151).

$$\mathbf{Y} = [X \quad GX \quad G^2X \quad G^3X]$$

$$\mathbf{Y} = [Y_1 \quad Y_2]$$

$$\mathbf{Y}_1 = \begin{bmatrix} 8.147 \times 10^{-16} & 6.324 \times 10^{-16} & -1.790 \times 10^{-5} & -1.071 \times 10^{-5} \\ 9.058 \times 10^{-16} & 9.754 \times 10^{-17} & -3.876 \times 10^{-6} & -2.321 \times 10^{-6} \\ 1.263 \times 10^{-16} & 2.785 \times 10^{-16} & -2.099 \times 10^{-7} & -1.257 \times 10^{-7} \\ 9.134 \times 10^{-16} & 5.469 \times 10^{-16} & -5.228 \times 10^{-12} & -3.130 \times 10^{-12} \end{bmatrix} \quad (150)$$

$$\mathbf{Y}_2 = \begin{bmatrix} 1.024 \times 10^{-1} & 6.133 \times 10^{-2} & 3.526 \times 10^3 & 2.111 \times 10^3 \\ 2.217 \times 10^{-2} & 1.327 \times 10^{-2} & 7.638 \times 10^2 & 4.573 \times 10^2 \\ 1.198 \times 10^{-3} & 7.170 \times 10^{-3} & 4.138 \times 10^1 & 2.477 \times 10^1 \\ -1.800 \times 10^{-7} & -1.078 \times 10^{-7} & 2.228 \times 10^{-3} & 1.333 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} a_4CA^3 + a_3CA^2 + a_2CA + a_1C \\ a_4CA^2 + a_3CA + a_2C \\ a_4CA + a_3C \\ a_4C \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -2.656 \times 10^1 & 3.984 \times 10^1 & 1.757 \times 10^5 & -2.636 \times 10^5 \\ 4.238 \times 10^1 & -6.357 \times 10^1 & -2.804 \times 10^5 & 4.206 \times 10^5 \\ 1.623 \times 10^8 & 1.017 \times 10^8 & -3.090 \times 10^1 & 4.636 \times 10^1 \\ 1.082 \times 10^8 & 6.779 \times 10^7 & 6.723 \times 10^7 & -1.004 \times 10^8 \\ 4.012 \times 10^3 & 2.514 \times 10^1 & -6.779 \times 10^7 & 1.017 \times 10^8 \\ 2.674 \times 10^3 & 1.677 \times 10^3 & 1.082 \times 10^8 & -1.623 \times 10^8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (151)$$

Una vez calculadas las matrices  $Y$  y  $J$  se procede a calcular la matriz  $T$ . El resultado obtenido se expone en la Ecuación (152).

$$\mathbf{T} = YJ$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 3.828 \times 10^1 & -7.454 \times 10^1 & -3.110 \times 10^5 & 4.664 \times 10^5 \\ 8.234 & -1.615 \times 10^1 & -6.730 \times 10^4 & 1.009 \times 10^5 \\ 4.494 \times 10^{-1} & -8.746 \times 10^{-1} & -3.636 \times 10^3 & 5.453 \times 10^3 \\ 3.071 \times 10^{-5} & -4.315 \times 10^{-5} & 5.440 \times 10^{-1} & -8.160 \times 10^{-1} \end{bmatrix} \quad (152)$$

Previo a la obtención de la matriz  $L$  es necesario calcular la matriz  $c(G)$ . El resultado de este cálculo se presenta en la Ecuación (153):

$$\mathbf{c}(\mathbf{G}) = a_4 G^4 + a_3 G^3 + a_2 G^2 + a_1 G + a_0 I$$

$$\mathbf{c}(\mathbf{G}) = \begin{bmatrix} -1.959 \times 10^{10} & 7.053 \times 10^{11} & -8.928 \times 10^{15} & -2.981 \times 10^{19} \\ -4.143 \times 10^9 & 1.332 \times 10^{11} & -1.933 \times 10^{15} & -6.466 \times 10^{18} \\ 2.496 \times 10^5 & 4.130 \times 10^9 & -1.046 \times 10^{14} & -3.516 \times 10^{17} \\ -3.600 \times 10^1 & 4.557 \times 10^5 & 1.522 \times 10^9 & -1.133 \times 10^{14} \end{bmatrix} \quad (153)$$

Una vez obtenida la matriz  $c(G)$  se calcula la matriz  $L$ . En la Ecuación (154) se muestra el resultado:

$$\mathbf{L} = -c(G)X$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2.723 \times 10^4 & 1.631 \times 10^4 \\ 5.906 \times 10^3 & 3.536 \times 10^3 \\ 3.211 \times 10^2 & 1.923 \times 10^2 \\ 1.035 \times 10^{-1} & 6.195 \times 10^{-2} \end{bmatrix} \quad (154)$$

- **Paso 4:** Resolver  $WTC_N^T = 0$  para  $W$ . Para ello se inicia calculando  $C_N$  de acuerdo a las condiciones de la Ecuación (25) considerando que  $C_N \in R^{(n-m) \times n}$ . La matriz  $C$  usada en el cálculo corresponde a la detallada en la Ecuación (111) dado que el sistema posee dos salidas. En la Ecuación (156) y la Ecuación (157) se comprueba el cumplimiento de las condiciones para la matriz  $C_N$  propuesta en la Ecuación (155).

$$\mathbf{C}_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (155)$$

$$\text{rango} \begin{bmatrix} C \\ C_N \end{bmatrix} = n$$

$$\text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 4 \quad (156)$$

$$CC_N^T = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = 0 \quad (157)$$

Satisfechas las condiciones previamente establecidas se procede a obtener  $W$  a partir de la segunda expresión de la Ecuación (24). La matriz  $W$  resultante se detalla en la Ecuación (158):

$$WTC_N^T = 0$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} -0.1730 & 0.7463 & 0.9863 & 0.9998 \\ -0.1730 & 0.7463 & 0.9863 & 0.9998 \end{bmatrix} \quad (158)$$

- **Paso 5:** Establecer  $V$  según la primera expresión de la Ecuación (24). La matriz  $V$  resultante se presenta en la Ecuación (159):

$$V = WTC^T(CC^T)^{-1}$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 8.388 \times 10^{-3} & -1.420 \times 10^{-2} \\ 8.388 \times 10^{-3} & -1.420 \times 10^{-2} \end{bmatrix} \quad (159)$$

- **Paso 6:** Establecer  $H$  y  $Q$  a partir de la Ecuación (14) y Ecuación (22) recordando que  $D = 0$ . La matriz  $H$  resultante se expone en la Ecuación (160), mientras que la matriz  $Q$  obtenida se detalla en la Ecuación (161):

$$H = TB - LD$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 8.163 \times 10^3 & 1.691 \times 10^3 \\ 1.768 \times 10^3 & 3.662 \times 10^3 \\ 9.583 \times 10^1 & 1.984 \times 10^2 \\ 6.549 \times 10^{-3} & 9.787 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \quad (160)$$

$$\mathbf{Q} = VD = 0 \quad (161)$$

Una vez finalizada la aplicación del algoritmo de aproximación algebraica se han obtenido las matrices que permiten caracterizar el filtro de diagnóstico generador de residuales para el subsistema 1 y subsistema 5. Su modelo final cimentado en la Ecuación (19) y Ecuación (20) se formula en la Ecuación (162) en la cual se presenta el observador y el residual correspondiente.

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1.959 \times 10^{10} \\ 1 & 0 & 0 & -4.243 \times 10^9 \\ 0 & 1 & 0 & -2.298 \times 10^8 \\ 0 & 0 & 1 & -5.724 \times 10^3 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 8.163 \times 10^3 & 1.691 \times 10^3 \\ 1.768 \times 10^3 & 3.662 \times 10^3 \\ 9.583 \times 10^1 & 1.984 \times 10^2 \\ 6.549 \times 10^{-3} & 9.787 \times 10^{-3} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 2.723 \times 10^4 & 1.631 \times 10^4 \\ 5.906 \times 10^3 & 3.536 \times 10^3 \\ 3.211 \times 10^2 & 1.923 \times 10^2 \\ 1.035 \times 10^{-1} & 6.195 \times 10^{-2} \end{bmatrix} y \quad (162)$$

$$r = \begin{bmatrix} 8.388 \times 10^{-3} & -1.420 \times 10^{-2} \\ 8.388 \times 10^{-3} & -1.420 \times 10^{-2} \end{bmatrix} y - \begin{bmatrix} -0.1730 & 0.7463 & 0.9863 & 0.9998 \\ -0.1730 & 0.7463 & 0.9863 & 0.9998 \end{bmatrix} z$$

Este proceso se realiza para el resto de los subsistemas bajo la consideración que la matriz aleatoria  $X$  de la Ecuación (146) es común para todos los subsistemas. De igual forma, para todas las iteraciones de diseño se parte de los mismos polos, por lo que la matriz  $G$  de la Ecuación (147) se mantiene invariante. El filtro de diagnóstico para el subsistema 2 y subsistema 6 se detalla en la Ecuación (163):

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1.959 \times 10^{10} \\ 1 & 0 & 0 & -4.243 \times 10^9 \\ 0 & 1 & 0 & -2.298 \times 10^8 \\ 0 & 0 & 1 & -5.724 \times 10^3 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 405.352 \times 10^3 & -247.889 \times 10^3 \\ 87.803 \times 10^3 & -53.6940 \times 10^3 \\ 4.756 \times 10^3 & -2.908 \times 10^3 \\ 196.158 \times 10^{-3} & -116.919 \times 10^{-3} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 17.681 \times 10^6 & 10.5861 \times 10^6 \\ 3.827 \times 10^6 & 2.292 \times 10^6 \\ 206.973 \times 10^3 & 123.919 \times 10^3 \\ -16.885 & -10.1101 \end{bmatrix} y \quad (163)$$

$$r = \begin{bmatrix} 0.351976 & 0.201133 \\ 0.351976 & 0.201133 \end{bmatrix} y - \begin{bmatrix} -0.1730 & 0.7462 & 0.9864 & 0.9999 \\ -0.1730 & 0.7462 & 0.9864 & 0.9999 \end{bmatrix} z$$

Por su parte, el filtro de diagnóstico obtenido para el subsistema 3 se presenta en la Ecuación (164):

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1.959 \times 10^{10} \\ 1 & 0 & 0 & -4.243 \times 10^9 \\ 0 & 1 & 0 & -2.298 \times 10^8 \\ 0 & 0 & 1 & -5.724 \times 10^3 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 874.35 \times 10^3 & -560.550 \times 10^3 \\ 189.377 \times 10^3 & -121.410 \times 10^3 \\ 10.255 \times 10^3 & -6.575 \times 10^3 \\ 259.608 \times 10^{-3} & -158.919 \times 10^{-3} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 23.588 \times 10^6 & 14.122 \times 10^6 \\ 5.1049 \times 10^6 & 3.056 \times 10^6 \\ 275.774 \times 10^3 & 165.108 \times 10^3 \\ -41.294 & -24.726 \end{bmatrix} y \quad (164)$$

$$r = \begin{bmatrix} 0.695409 & 0.416364 \\ 0.695409 & 0.416364 \end{bmatrix} y - \begin{bmatrix} -0.1730 & 0.7463 & 0.9863 & 0.9998 \\ -0.1730 & 0.7463 & 0.9863 & 0.9998 \end{bmatrix} z$$

Finalmente, el filtro de diagnóstico para el subsistema 4 se expone en la Ecuación (165):

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1.959 \times 10^{10} \\ 1 & 0 & 0 & -4.243 \times 10^9 \\ 0 & 1 & 0 & -2.298 \times 10^8 \\ 0 & 0 & 1 & -5.724 \times 10^3 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 874.35 \times 10^3 & -536.615 \times 10^3 \\ 189.377 \times 10^3 & -116.230 \times 10^3 \\ 10.255 \times 10^3 & -6.575 \times 10^3 \\ 259.608 \times 10^{-3} & -200.973 \times 10^{-3} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 25.319 \times 10^6 & 15.158 \times 10^6 \\ 5.480 \times 10^6 & 3.281 \times 10^6 \\ 296.085 \times 10^3 & 177.269 \times 10^3 \\ -40.201 & -24.071 \end{bmatrix} y \quad (165)$$

$$r = \begin{bmatrix} 0.695409 & 0.416364 \\ 0.695409 & 0.416364 \end{bmatrix} y - \begin{bmatrix} -0.1730 & 0.7463 & 0.9863 & 0.9998 \\ -0.1730 & 0.7463 & 0.9863 & 0.9998 \end{bmatrix} z$$

Con la finalidad de verificar que la implementación del filtro de diagnóstico diseñado es posible considerando únicamente uno de los modelos establecidos para los 6 subsistemas se procede a calcular la distancia euclidiana entre las matrices  $V$  y  $W$  de las cuatro propuestas previamente descritas. Se ha seleccionado estas matrices debido a que son las que intervienen en las ecuaciones de la generación residual. El cálculo se dará a partir de la expresión detallada en la siguiente Ecuación (166):

$$d_2(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (a_{ij} - b_{ij})^2} \quad (166)$$

donde:

$A$  y  $B$  son matrices y pertenecen a  $R^{m \times n}$ .

$d_2(A, B)$  es la distancia euclidiana entre las dos matrices.

$a_{ij}$  son los elementos de la matriz  $A$ .

$b_{ij}$  son los elementos de la matriz  $B$ .

Posterior a la obtención de la distancia euclidiana se establece una métrica de similitud entre las matrices, su formulación se detalla en la Ecuación (167). Asimismo, para la elección de uno de los filtros de diagnóstico se considera la estabilidad de los residuos generados y su sensibilidad al fallo.

$$Similitud = \frac{1}{1 + d_2(A, B)} \quad (167)$$

Los resultados obtenidos del análisis de similitud de las matrices  $V$  y  $W$  para los seis subsistemas se presentan en la Tabla 14. En ella se detalla la métrica de similitud que va desde 0 a 1, donde los elementos con similitudes cercanas a 1 son los más similares. Asimismo, se ha incluido el promedio de esta métrica para cada uno de los sistemas respecto a los demás.

**Tabla 14**

*Métrica de similitud entre las matrices  $V$  y  $W$  de los filtros de diagnóstico de los 6 subsistemas.*

Matriz V					
	V1	V2	V3	V4	$\bar{x}$
V1	1	0.635	0.466	0.466	0.522
V2	0.635	1	0.636	0.636	0.636
V3	0.466	0.636	1	0.999	0.700
V4	0.466	0.636	1	0.999	0.700
Matriz W					
	W1	W2	W3	W4	$\bar{x}$
W1	1	0.999	0.999	1	0.9996
W2	0.999	1	0.999	0.999	0.999
W3	1	0.999	1	1	0.9996
W4	1	0.999	0.999	1	0.9996

**Nota:** Elaborado por el autor.

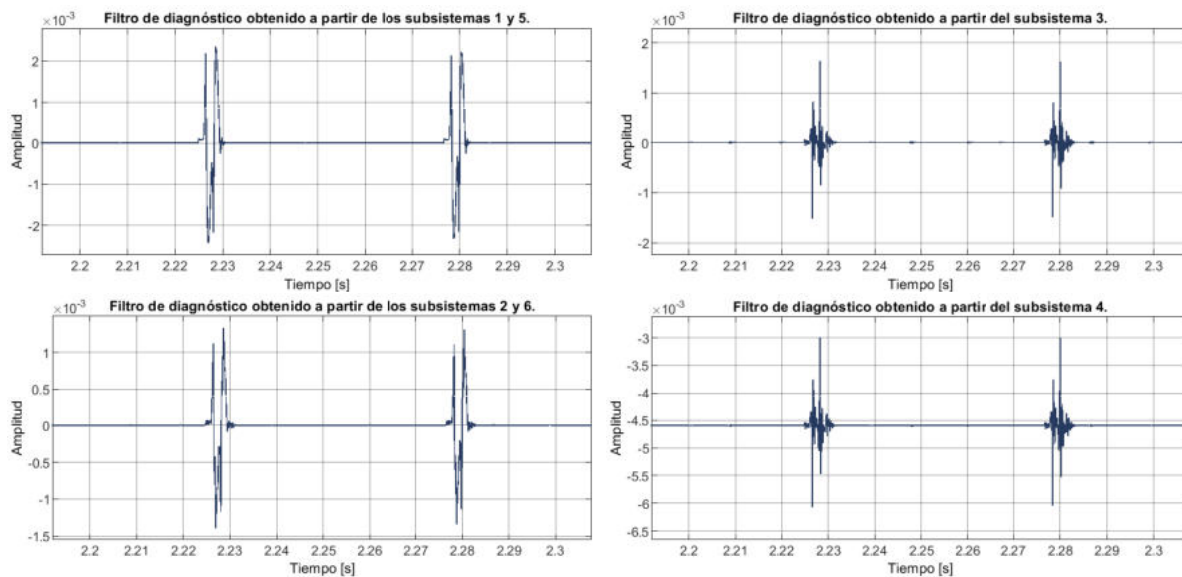
De igual forma, después de diferentes análisis experimentales se determinó que los cuatros filtros de diagnósticos diseñados producen residuales estables. Asimismo, se estableció que el residual generado por filtro de diagnóstico diseñado a partir del subsistema 1 y 5 presenta la mayor sensibilidad al modo de fallo diente roto. En la Figura 24 se exhiben los residuales

generados por los filtros de diagnóstico antes propuestos.

Con base en los análisis efectuados se establece que, de las cuatro propuestas realizadas, el filtro de diagnóstico diseñado a partir del subsistema 1 y subsistema 5 exhibe la caracterización más adecuada para propósitos de detección y diagnóstico. Esto se debe a que su respuesta temporal es estable y tiene una sensibilidad mayor al modo de fallo de diente roto respecto a los demás subsistemas. La formulación previa sumado a que las matrices  $V$  y  $W$  para este filtro presentan una similitud en promedio superior al 50% en relación con las otras propuestas fundamentan que el filtro de diagnóstico para todo el sistema queda definido según la Ecuación (162).

### Figura 24

*Residuales obtenidos de los cuatros filtros de diagnóstico propuestos tras etapa de post-filtrado con filtro de media móvil.*



**Nota:** Elaborado por el autor.

#### 5.2.4. Evaluación del diseño del sistema de detección y diagnóstico a través de la sensibilidad de la señal residual

Previo a la simulación del conjunto filtro de detección y filtro de diagnóstico con sistema sujeto a fallos es necesario definir la metodología para la simulación del modelo del sistema de



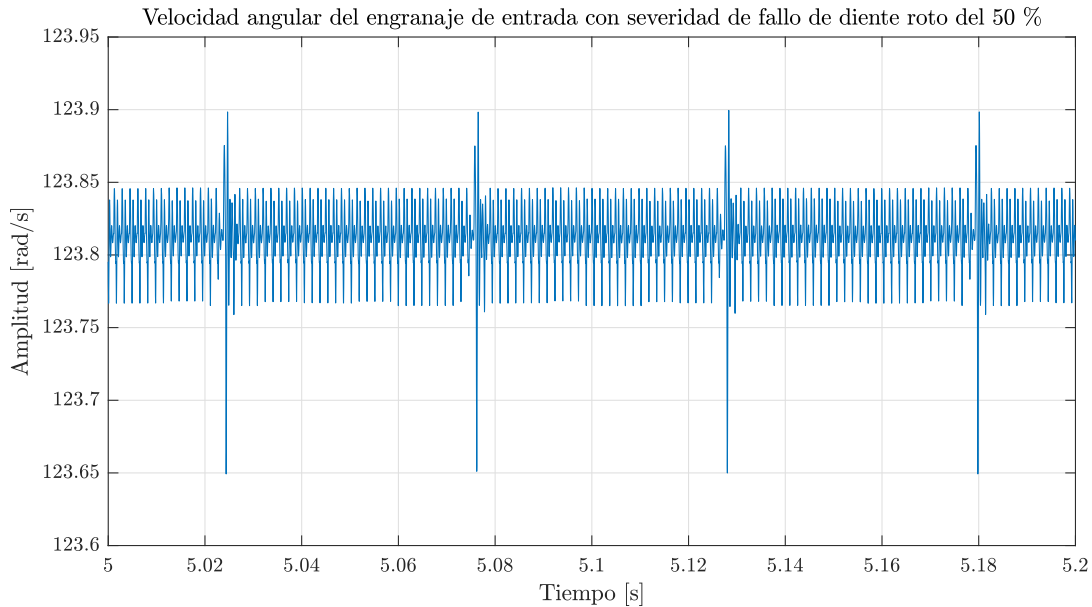
caja de engranajes bajo el modo de fallo de diente roto. Para este propósito se ha generado cuatro programas en Matlab y uno en Simulink:

- **kmin:** Función que a partir de los parámetros geométricos y asociados con el material de los engranajes calcula los valores de la rigidez debido a la flexión  $k_b$ , a la compresión axial  $k_a$ , al cortante  $k_s$  y a la flexión en el filete de formación  $k_f$ . Este programa ha sido generado a partir de la formulación detallada en Berrezueta Parra (2021).
- **geofallos:** Programa que a partir de la función previamente definida estima los valores de  $K_{min}$ ,  $K_{max}$ ,  $C_{min}$  y  $C_{max}$  para el modelo de caja de engranajes en condición nominal. Además, a partir de la especificación del porcentaje de rotura del diente en uno de los engranajes estima la disminución de rigidez  $\Delta K$  y amortiguamiento  $\Delta C_{max}$  y  $\Delta C_{min}$ , así como el valor resultante de estos parámetros en condición de fallo.
- **archivomaestro:** Programa que recopila los parámetros del sistema en condiciones de fallo tales como coeficientes de rigidez y amortiguamiento resultantes, coeficiente de pérdidas por fricción, momentos de inercia y las condiciones de operación tales como velocidad de giro, par de carga y par del motor.
- **espacioestados:** Programa que a partir de los parámetros del sistema calcula las matrices necesarias para la representación en espacio de estados del modelo de la caja de engranajes en condiciones de fallo de diente roto. Asimismo, constituye el código que alimenta el diagrama de bloques construido en Simulink.
- **dienteroto:** Diagrama de bloques en Simulink que a través de integradores, sumas, multiplicadores y otros bloques de simulación permiten obtener la respuesta temporal del modelo en espacio de estados de la caja de engranajes sujeta a estudio. Este programa permite la simulación del modo de fallo de diente roto en el engranaje de entrada del sistema, su severidad va desde el 0% al 100%.

Para llevar a cabo la simulación del modelo se establece que se usará el método de resolución de ecuaciones diferenciales de paso fijo Runge-Kutta (ode-4). Asimismo, se determina que el paso de tiempo deber permitir una frecuencia de muestreo de 50000 Hz por lo que se establece un tamaño de paso de  $2 \times 10^{-5}$ . En la Figura 25 se presenta el resultado de la velocidad angular del engranaje de entrada bajo las consideraciones establecidas. Esta serie temporal es presentada debido a que es una de las señales necesarias para la generación residual.

## Figura 25

Velocidad del engranaje de entrada resultante de la simulación del modelo del sistema sujeto a fallo de diente roto con severidad del 50%.



**Nota:** Elaborado por el autor.

### 5.2.4.1. Evaluación del observador detector de fallos

La evaluación del observador detector de fallos se lleva a cabo a través de la simulación del filtro de detección en conjunto con el modelo de la planta sujeta a fallos. Para este propósito se ha generado un programa adicional en Matlab y uno en Simulink:

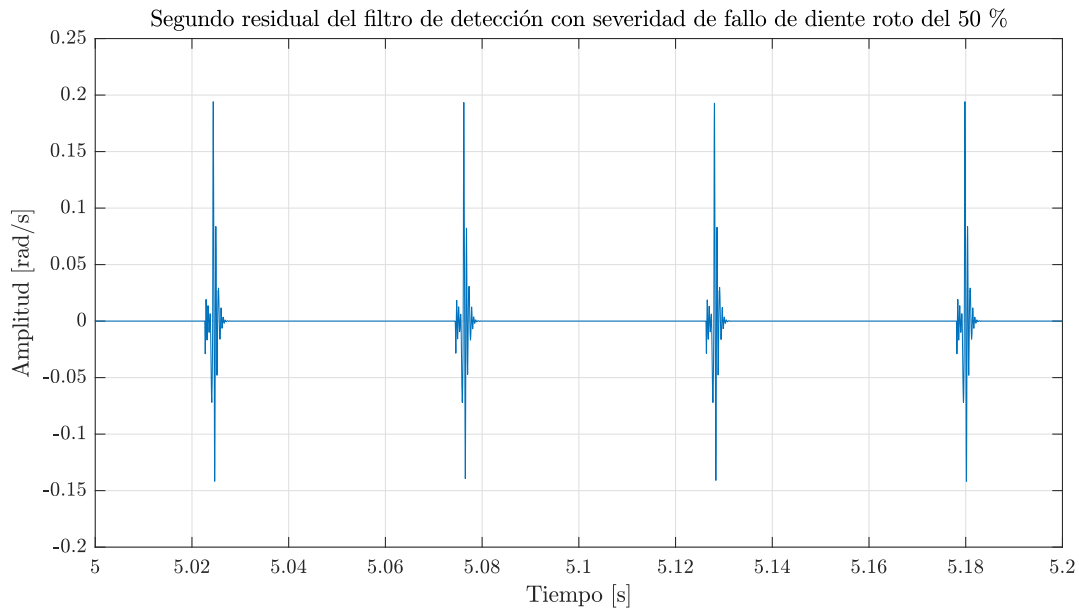
- **disenodeteccion:** Programa en el que se desarrolla el filtro de detección y permite calcular e instanciar la matriz de ganancias adecuadas para obtener una dinámica adecuada de operación del observador de Luenberger.
- **obsdeteccion:** Diagrama de bloques en Simulink que permite obtener la respuesta temporal del filtro de detección que monitorea una caja de engranajes en presencia del modo de fallo de diente roto.

Para la evaluación del observador detector de fallos las condiciones de simulación del conjunto modelo y filtro de detección son las mismas previamente establecidas para el sistema

en condición de fallo. En la Figura 26 se presenta el resultado del segundo residual del filtro de detección bajo las consideraciones establecidas.

### Figura 26

*Segundo residual del filtro de detección resultante de la simulación del modelo del sistema sujeto a fallo de diente roto con severidad del 50%.*



**Nota:** Elaborado por el autor.

#### 5.2.4.2. Evaluación de los observadores de diagnóstico generadores de residuales

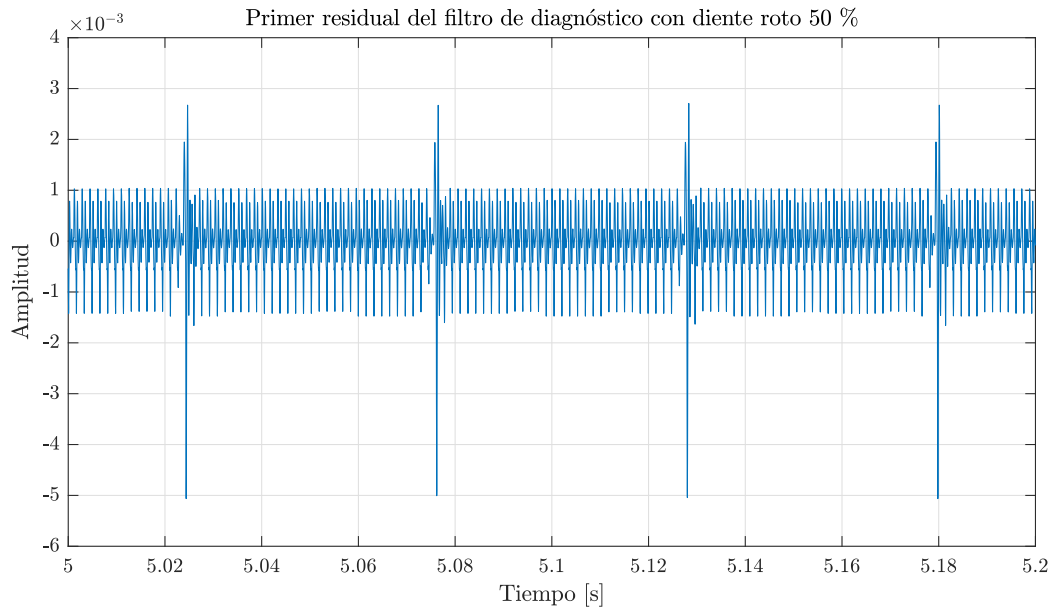
La evaluación del observador de diagnóstico de fallos se lleva a cabo a través de la simulación del filtro de diagnóstico en conjunto con el modelo de la planta sujeta a fallos. Para este propósito se ha generado un programa adicional en Matlab y uno en Simulink:

- **disenodiagnostico:** Programa que desarrolla el algoritmo de aproximación algebraica y permite calcular e instanciar las matrices que caracterizan el observador de diagnóstico y el postfiltro generador de residuales.
- **obsdiagnostico:** Diagrama de bloques en Simulink que permite obtener la respuesta temporal del filtro de diagnóstico y de los residuales generados a partir de una caja de engranajes en presencia del modo de fallo de diente roto.

Para la evaluación del observador de diagnóstico generador de residuales las condiciones de simulación del conjunto modelo, filtro de diagnóstico y postfiltro son las mismas previamente establecidas para el sistema en condición de fallo. En la Figura 27 se presenta el resultado del primer residual del filtro de diagnóstico bajo las consideraciones establecidas.

### Figura 27

*Primer residual del filtro de diagnóstico resultante de la simulación del modelo del sistema sujeto a fallo de diente roto con severidad del 50%.*



**Nota:** Elaborado por el autor.

#### 5.2.4.3. Evaluación del diseño del sistema de detección y diagnóstico a través de la sensibilidad de la señal residual

Para la evaluación del diseño del sistema de detección y diagnóstico a través de la sensibilidad de la señal residual se lleva a cabo se ha generado un programa adicional en Simulink:

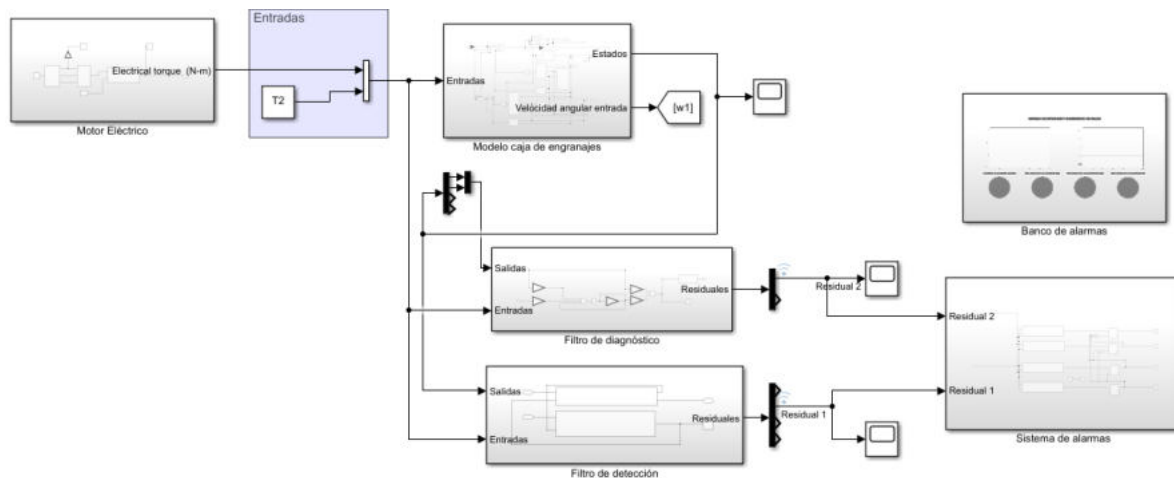
- **detecciondiagnostico:** Diagrama de bloques en Simulink que permite la implementación del conjunto de filtros de detección y diagnóstico y la posterior evaluación de los residuales generados con el fin de determinar la existencia y severidad de fallo de diente

roto en una caja de engranajes. En él se incluye el modelo del motor elaborado por Ortega Lucero (2021), el modelo de la caja de engranajes sujeta a modo de fallo de diente roto, el filtro de detección, el filtro de diagnóstico y el sistema y banco de alarmas.

Para la evaluación del diseño del sistema de detección y diagnóstico a través de la sensibilidad de la señal residual las condiciones de simulación del conjunto modelo, sistema de detección y diagnóstico y banco de alarmas son las mismas previamente establecidas para el sistema en condición de fallo. En la Figura 28 se presenta la disposición de los diferentes elementos que se han considerado para el esquema de simulación.

**Figura 28**

*Diagrama Simulink del sistema de detección y diagnóstico de fallos.*



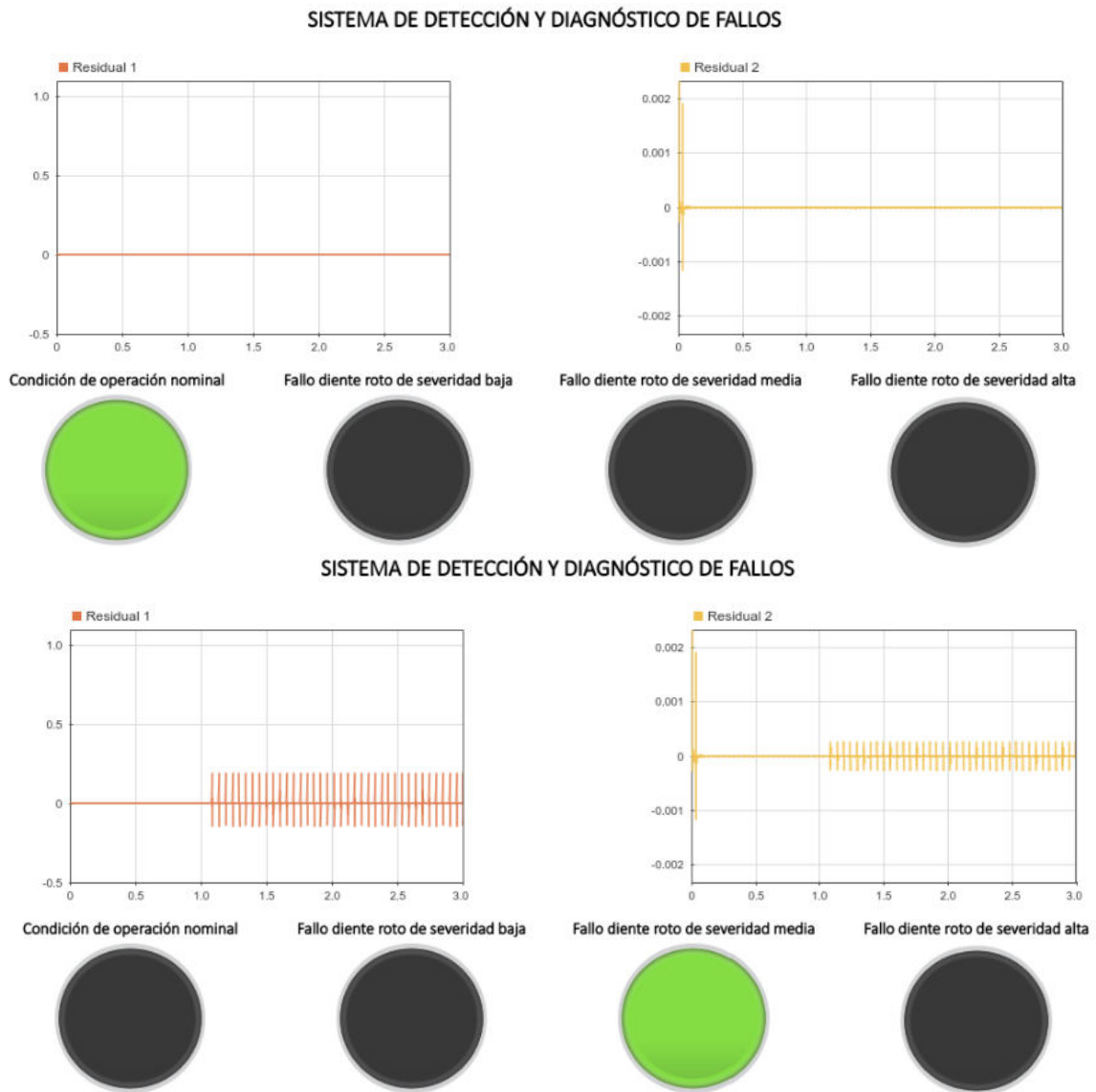
**Nota:** Elaborado por el autor.

De la misma manera, en la Figura 29 se presenta la visualización del banco de alarmas durante la ejecución del programa en condiciones de operación nominal y con una severidad de rotura media, en cada una de ellas se ilustran las dos señales residuales seleccionadas para la implementación. Estas series temporales corresponden a los residuales que presentan una mayor amplitud dentro de cada uno de los obtenidos por el filtro de detección y el filtro de diagnóstico. Lo antes expuesto se ha realizado debido a que los residuales generados por un mismo filtro presentan cualitativamente una caracterización similar, existiendo únicamente cambios en su amplitud en el caso del filtro de detección y ninguna diferencia en el caso del filtro de diagnóstico. Se ha etiquetado como residual 1 al obtenido del filtro de detección,

mientras que el residual 2 corresponde al filtro de diagnóstico. Finalmente, cabe destacar que el fallo de diente roto para esta simulación se presenta en un tiempo  $t = 1.15$  [s].

**Figura 29**

*Interfaz del sistema de detección y diagnóstico de fallos para una caja de engranajes rectos.*



**Nota:** Elaborado por el autor.

## 6. Resultados

En este capítulo se lleva a cabo la comparación de las frecuencias características del espectro de la FFT de la señal simulada de aceleración angular del engranaje de entrada del modelo de la caja de engranajes sujeta diferentes severidades de fallo de diente roto con respecto a las frecuencias características calculadas. De igual manera, las frecuencias características de la señal simulada se contrastan con las frecuencias características del espectro de la FFT de las señales experimentales de los acelerómetros que se ubican según lo ilustrado en la Figura 13. Este procedimiento se lleva a cabo bajo las condiciones de operación asociadas con las cargas de la Tabla 6, así como con una frecuencia de muestro de 50000 Hz, esto último debido a que esta es la frecuencia nativa de los instrumentos de medición empleados en el experimento.

De igual forma, se realiza un análisis de los resultados obtenidos con la implementación del observador de diagnóstico generador de residuales y del observador detector de fallos aplicados al sistema de caja de engranajes rectos. Se analiza cada uno de los componentes del sistema de detección y diagnóstico por separado y posteriormente, se analizan en conjunto los resultados con base en el comportamiento del sistema en condición nominal y con la presencia de diferentes severidades de fallo de diente roto.

### 6.1. Validación del modelo matemático del sistema de caja de engranajes en condiciones de fallo de diente roto

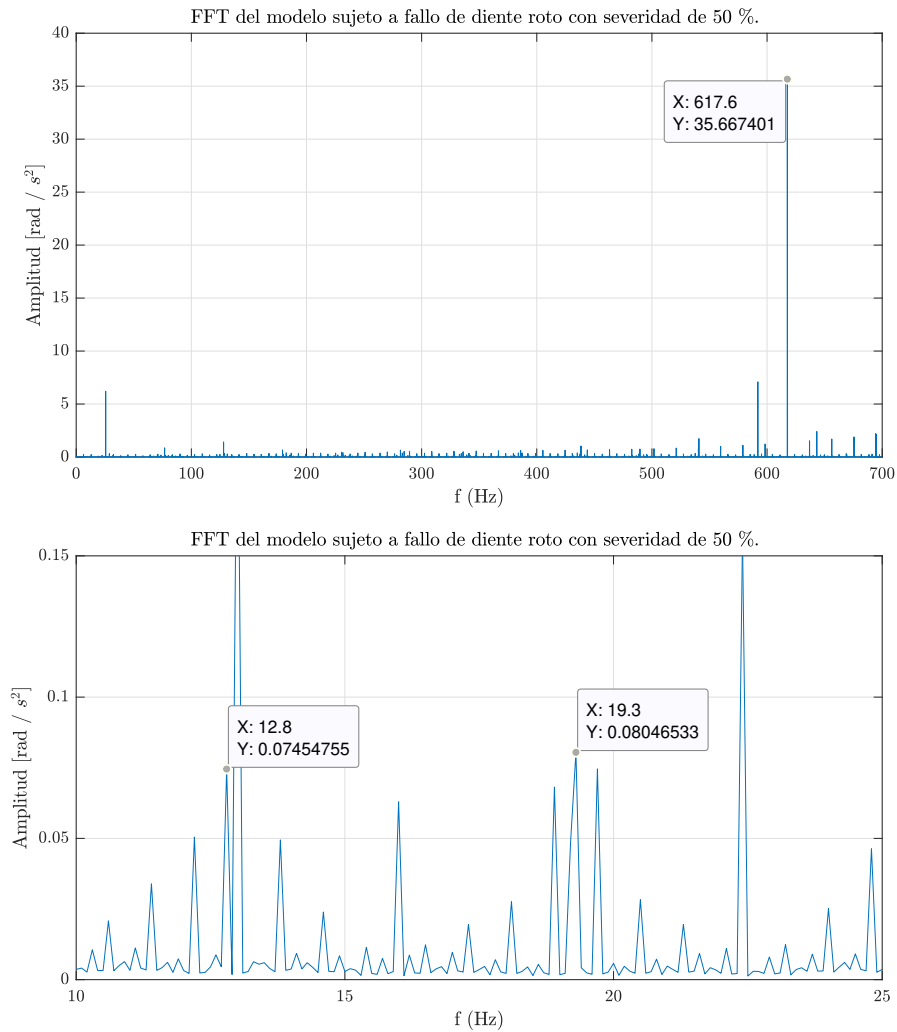
#### 6.1.1. Validación de frecuencias características del modelo

A continuación, las frecuencias características del espectro de la FFT de la señal simulada de aceleración angular del engranaje de entrada con diferentes severidades del modo de fallo de diente roto y bajo las condiciones de operación generadas por las cargas L1, L2 y L3 se contrastan con las frecuencias características calculadas según la Ecuación (45), Ecuación (46) y la Ecuación (47).

En la Figura 30 se ilustra el espectro de la FFT de la señal simulada para la carga L3 con una severidad de fallo de diente roto del 50%. Asimismo, en ella se presenta la frecuencia de engranaje  $f_m$  en la ilustración de la parte superior, mientras que la frecuencia de entrada  $f_g$  y la frecuencia de salida  $f_p$  se indican en la ilustración de la parte inferior.

### Figura 30

*Espectro de la FFT de la señal simulada para la carga L3 con una severidad de fallo de diente roto del 50%.*



**Nota:** Elaborado por el autor.

En la Tabla 15 se detallan las frecuencias características del espectro de la FFT de la señal simulada para todas las severidades de fallo de la Figura 15 bajo las condiciones de carga L3. Además, en ella se presenta una comparación de estos valores respecto a las frecuencias características calculadas junto al error porcentual entre ambas. Los valores de las frecuencias características del espectro de la FFT para una severidad de fallo del 50% se indican en la Figura 30.



**Tabla 15**

*Comparación de los valores entre las frecuencias características y frecuencias en el espectro de la FFT con condiciones de operación L3 y distintas severidades de fallo de diente roto.*

Severidad diente roto	Frecuencia [Hz]	Calculada	FFT del modelo	Error porcentual
0%	$f_m$	617.6	617.6	0%
	$f_g$	19.3	19.2	0.52%
	$f_p$	12.9	12.8	0.78%
12.5%	$f_m$	617.6	617.6	0%
	$f_g$	19.3	19.2	0.52%
	$f_p$	12.9	12.8	0.78%
25%	$f_m$	617.6	617.6	0%
	$f_g$	19.3	19.2	0.52%
	$f_p$	12.9	12.8	0.78%
37.5%	$f_m$	617.6	617.6	0%
	$f_g$	19.3	19.3	0%
	$f_p$	12.9	12.8	0.78%
50%	$f_m$	617.6	617.6	0%
	$f_g$	19.3	19.3	0%
	$f_p$	12.9	12.8	0.78%
62.5%	$f_m$	617.6	617.6	0%
	$f_g$	19.3	19.3	0%
	$f_p$	12.9	12.8	0.78%
75%	$f_m$	617.6	617.6	0%
	$f_g$	19.3	19.3	0%
	$f_p$	12.9	12.8	0.78%
87.5%	$f_m$	617.6	617.6	0%
	$f_g$	19.3	19.3	0%
	$f_p$	12.9	12.8	0.78%
100%	$f_m$	617.6	617.6	0%
	$f_g$	19.3	19.3	0%
	$f_p$	12.9	12.8	0.78%

**Nota:** Elaborado por el autor.

Para las condiciones de carga L1 y L2 se aplica una metodología de análisis idéntica a la antes expuesta. Los resultados obtenidos de este proceso se detallan en el Anexo B.

Con base en la información detallada en la Tabla 15 , Tabla 21 y Tabla 22, el error porcentual máximo entre las frecuencias características calculadas y las frecuencias características simuladas ante diferentes severidades de fallo y condiciones de carga es de 3.03%. De

igual modo, se denota que la frecuencia característica  $f_p$  con carga L1 y L2 es únicamente apreciable en el espectro de la FFT de la señal de aceleración obtenida del sistema en condición nominal, mientras que para las distintas severidades de fallo de diente roto esta frecuencia no es perceptible en el espectro. Asimismo, cabe destacar que la frecuencia de entrada  $f_g$  tiene una mayor amplitud que la frecuencia de salida  $f_p$  debido a que el espectro de la FFT ha sido obtenido a partir de la señal de aceleración del engranaje de entrada.

### 6.1.2. Comparación de los espectros de la FFT teóricos y experimentales

A continuación, las frecuencias características de engranaje  $f_m$ , entrada  $f_g$  y salida  $f_p$  del espectro de la FFT de la señal simulada se comparan con las frecuencias características del espectro de la FFT de las señales experimentales, mismas que han sido obtenidas a través de los acelerómetros localizados en el banco de ensayos según la Figura 13. Las mediciones usadas para el contraste corresponden a la de los acelerómetros A3 y A4 ubicados en los ejes de los engranajes de entrada y salida, respectivamente.

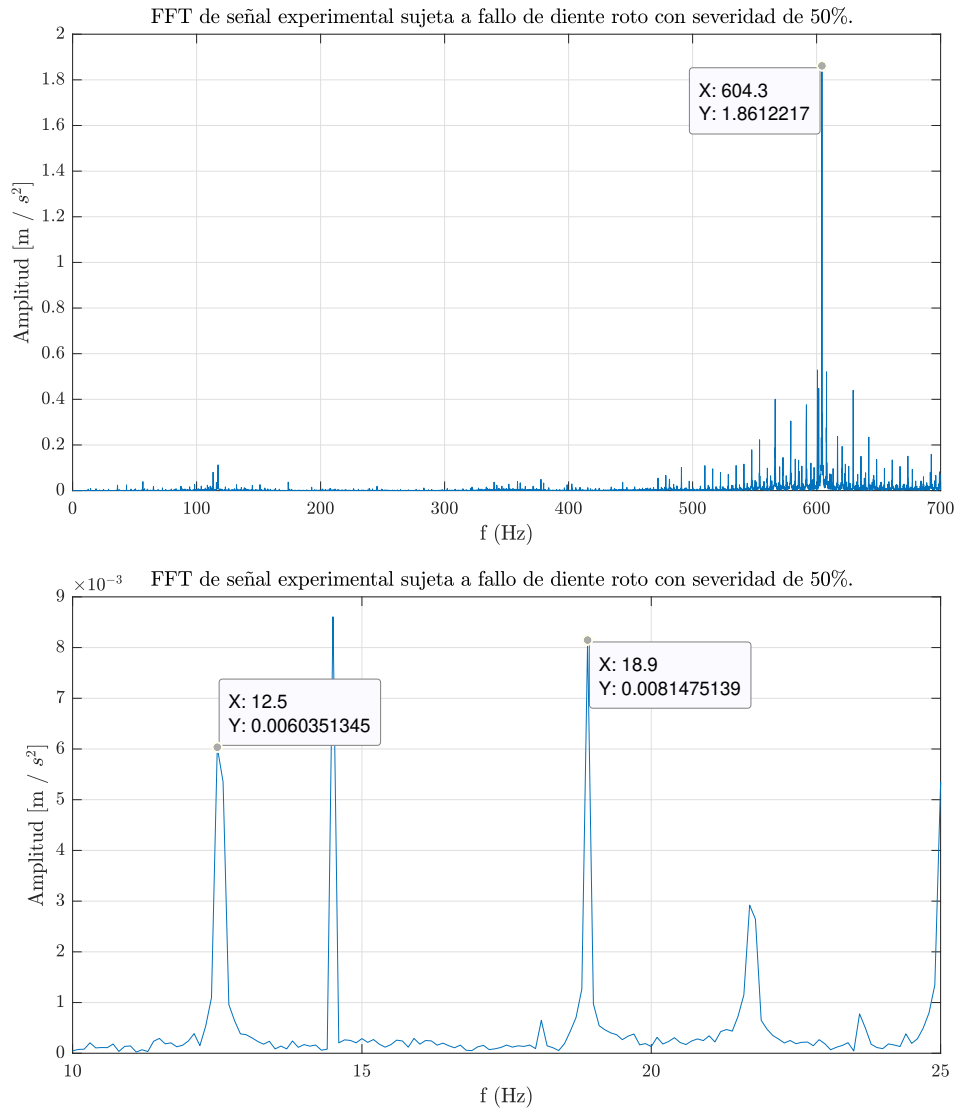
De igual forma, cabe destacar que únicamente se cotejan los valores de frecuencia. Lo antes expuesto se fundamenta en el hecho de que las frecuencias características en espectro de la FFT no son equiparables en amplitud debido a la naturaleza de las series temporales, la señal experimental es traslacional, mientras que la señal simulada es torsional.

En la Figura 31 se ilustra el espectro de la FFT de la señal del acelerómetro A4 en la que la caja de engranajes se encuentra operando bajo condiciones de carga L3 y con una severidad de fallo de diente roto del 50%. Además, en ella se presenta la frecuencia de engranaje  $f_m$  en la ilustración de la parte superior, mientras que la frecuencia de entrada  $f_g$  y la frecuencia de salida  $f_p$  se indican en la ilustración de la parte inferior.

En la Tabla 16 se detallan las frecuencias características del espectro de la FFT de la señal simulada para todas las severidades de fallo de la Figura 15 bajo las condiciones de carga L3. Además, en ella se presenta una comparación de estos valores respecto a las frecuencias características obtenidas al procesar las señales experimentales de los acelerómetros A3 y A4. Asimismo, se presenta el error porcentual entre ambas. Los valores de las frecuencias características del espectro de la FFT para las señales experimentales con una severidad de fallo del 50% se indican en la Figura 31.

### Figura 31

Frecuencias características en el espectro de la FFT de la señal del acelerómetro A4 para la carga L3 con una severidad de fallo de diente roto del 50%.



**Nota:** Elaborado por el autor.

**Tabla 16**

*Comparación de los valores entre las frecuencias características experimentales y frecuencias en el espectro de la FFT del modelo simulado con condiciones de operación L3 y distintas severidades de fallo de diente roto.*

Severidad diente roto	Señal procesada	Frecuencia de engranaje		Error porcentual	Frecuencia de entrada		Error porcentual	Frecuencia de salida		Error porcentual
		Frecuencia	Amplitud		Frecuencia	Amplitud		Frecuencia	Amplitud	
0%	A3	602.1	0.9258	2.57%	18.8	0.05829	2.13%	12.6	0.0004	1.59%
	A4	602.1	0.9218	2.57%	18.8	0.2386	2.13%	12.6	0.00364	1.59%
	Modelo	617.6	34.31	-	19.2	0.04451	-	12.8	0.07212	-
12.5%	A3	603.2	0.9614	2.39%	18.8	0.03556	2.13%	12.5	0.00094	2.4%
	A4	603.2	1.293	2.39%	18.8	0.01454	2.13%	12.5	0.00729	2.4%
	Modelo	617.6	34.48	-	19.2	0.04484	-	12.8	0.07223	-
25%	A3	603.3	1.032	2.37%	18.9	0.03129	1.59%	12.5	0.0049	2.4%
	A4	603.3	1.249	2.37%	18.9	0.01369	1.59%	12.5	0.06468	2.4%
	Modelo	617.6	34.728	-	19.2	0.04553	-	12.8	0.07252	-
37.5%	A3	602.5	2.038	2.51%	18.8	0.03801	2.66%	12.5	0.00069	2.40%
	A4	602.5	2.336	2.51%	18.8	0.01461	2.66%	12.5	0.00592	2.40%
	Modelo	617.6	35.08	-	19.3	0.04952	-	12.8	0.07277	-
50%	A3	604.3	1.368	2.20%	18.9	0.2078	2.12%	12.6	0.0005	1.59%
	A4	604.3	1.861	2.20%	18.9	0.00814	2.12%	12.5	0.00603	1.59%
	Modelo	617.6	35.67	-	19.3	0.08047	-	12.8	0.07455	-
62.5%	A3	602.7	1.268	2.47%	18.8	0.04245	2.66%	12.5	0.00072	2.40%
	A4	602.7	1.778	2.47%	18.8	0.01876	2.66%	12.5	0.00491	2.40%
	Modelo	617.6	37.03	-	19.3	0.04987	-	12.8	0.0763	-
75%	A3	602.9	1.128	2.44%	18.8	0.02957	2.66%	12.7	0.0006	0.79%
	A4	602.9	1.533	2.44%	18.8	0.0122	2.66%	12.5	0.0069	2.40%
	Modelo	617.6	40.49	-	19.3	0.1859	-	12.8	0.0773	-
87.5%	A3	602.2	1.419	2.56%	18.8	0.03012	2.66%	12.5	0.0007	2.40%
	A4	602.2	2.112	2.56%	18.8	0.0109	2.66%	12.5	0.00835	2.40%
	Modelo	617.6	50.18	-	19.3	0.1969	-	12.8	0.08424	-
100%	A3	602.4	1.495	2.52%	18.8	0.05437	2.66%	12.5	0.0056	2.40%
	A4	602.4	2.17	2.52%	18.8	0.02422	2.66%	12.5	0.0038	2.40%
	Modelo	617.6	78.16	-	19.3	0.4646	-	12.8	0.0965	-

**Nota:** Elaborado por el autor.

Para las condiciones de carga L1 y L2 se aplica una metodología de análisis idéntica a la antes expuesta. Los resultados obtenidos de este proceso se detallan en el Anexo C.

Con base en los valores detallados en la Tabla 16, Tabla 23 y Tabla 24 se determina que el error porcentual máximo entre las frecuencias características experimentales y las frecuencias características simuladas ante diferentes severidades de fallo y condiciones de carga es de 3.13%. Esta variación se origina debido a que para el modelado del sistema de caja de engranajes rectos se ha partido de una serie de premisas, entre ellas: rodamientos y ejes

examinados como elementos rígidos y error estático de transmisión igual a cero. Asimismo, en el caso de las señales teóricas, la frecuencia característica  $f_p$  con carga L1 y L2 es únicamente apreciable en el espectro de la FFT de la señal de aceleración obtenida del sistema en condición nominal, mientras que para las distintas severidades de fallo de diente roto esta frecuencia no es perceptible en el espectro. A pesar de las consideraciones establecidas, el error porcentual obtenido en el contraste de las frecuencias características del espectro de la FFT se considera admisible.

En lo referente al estudio de las frecuencias características en función de la severidad de fallo de diente roto, tanto para las señales obtenidas experimentalmente como a través de simulación, la amplitud es mayor para los casos de diente roto que para la situación de operación nominal. Asimismo, se observa que la amplitud de dichas frecuencias presenta valores mayores conforme aumenta la carga y las revoluciones por minuto a las que se encuentra operando el sistema.

### **6.1.3. Comparación de las series temporales teóricas y experimentales**

A continuación, la naturaleza de las series temporales de las señales simuladas se comparan con la de las señales experimentales. Estas últimas han sido obtenidas del acelerómetro A3 ubicado en el banco de pruebas según la Figura 13. Cabe destacar que únicamente se contrasta la caracterización geométrica de las señales debido a que las series temporales simuladas son torsionales, mientras que las señales experimentales son traslaciones.

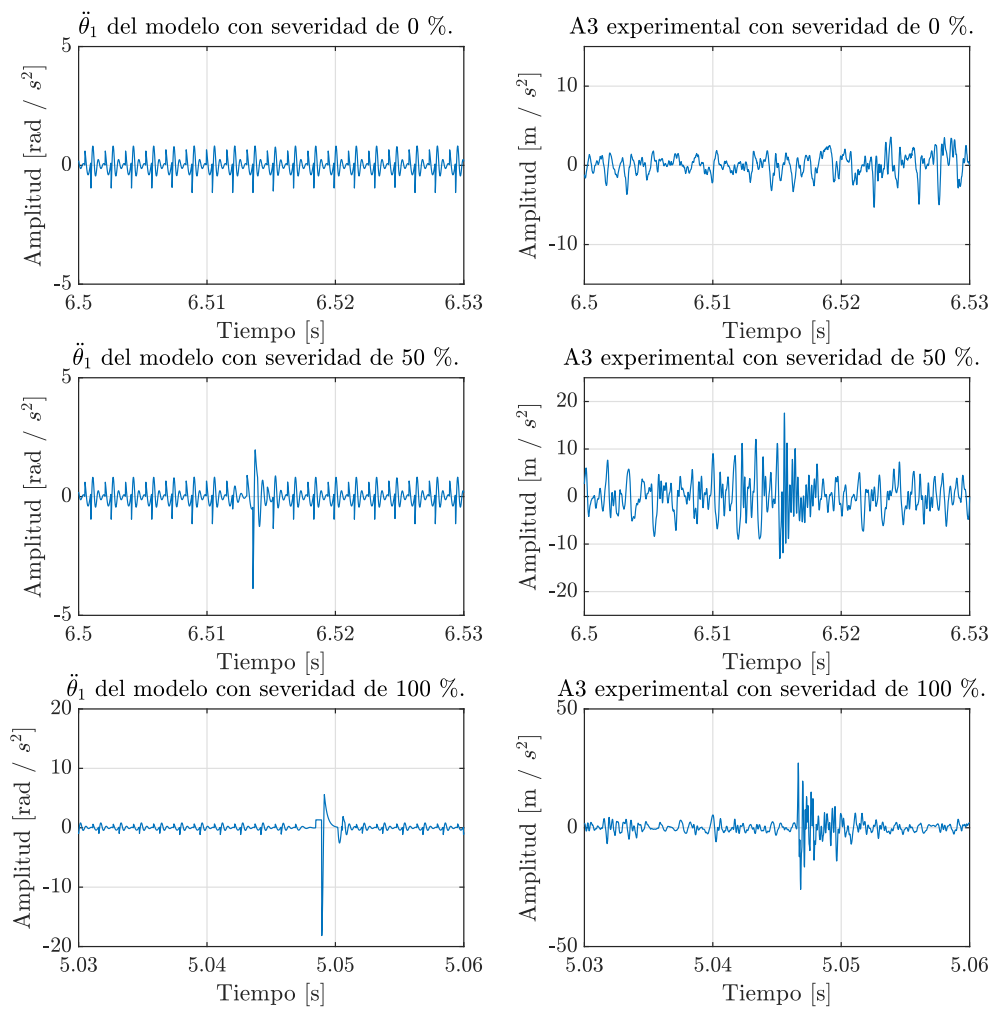
En la Figura 32 se ilustran las series temporales simuladas y experimentales de la caja de engranajes operando bajo condiciones de carga L1 con diversas severidades de fallo de diente roto. Para las condiciones de carga L2 y L3 se aplica una metodología de análisis idéntica a la antes expuesta. Este proceso se detalla en el Anexo D.

De acuerdo con las series temporales ilustradas en la Figura 32, Figura 52 y Figura 53 se establece que, en el dominio del tiempo, un diente roto en una caja de engranajes produce un pico pronunciado cada vez que el diente afectado entra en contacto con los dientes de la otra rueda dentada. Asimismo, se determina que la amplitud del pico es proporcional a la severidad del fallo, es decir, a mayor grado de rotura del diente más grande será el pico en la serie temporal. Además, se observa que la amplitud de los picos presenta valores mayores conforme aumenta la carga y las revoluciones por minuto a las que se encuentra operando

el sistema. Cabe resaltar que el comportamiento antes expuesto es apreciable tanto en las señales experimentales como simuladas, por lo que se define que el comportamiento temporal del modelo de la caja de engranajes sujeta a fallo de diente roto es análogo al obtenido experimentalmente.

**Figura 32**

*Series temporales simuladas y experimentales de la caja de engranajes operando bajo condiciones de carga L1 con diversas severidades de fallo de diente roto.*



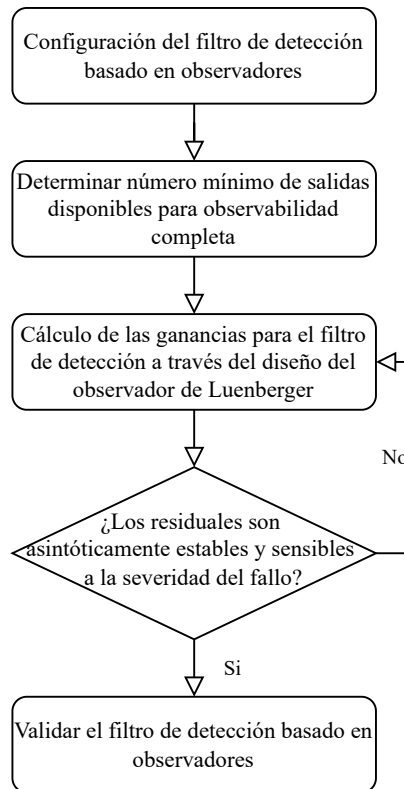
**Nota:** Elaborado por el autor.

## 6.2. Validación del filtro de detección basado en observadores

A continuación, los residuales obtenidos con el filtro de detección basado en observadores son analizados. Dado que para el diseño del filtro de detección se ha considerado la disponibilidad de las cuatro salidas del sistema se obtiene como resultado cuatro residuales relacionados con las velocidades y posiciones angulares de los engranajes de entrada y salida. En la Figura 33 se detalla la metodología empleada para el diseño del filtro de detección basado en observadores, así como las características que validan su pertinencia en cuanto a tareas de detección.

**Figura 33**

*Flujograma para validación del filtro de detección basado en observadores.*



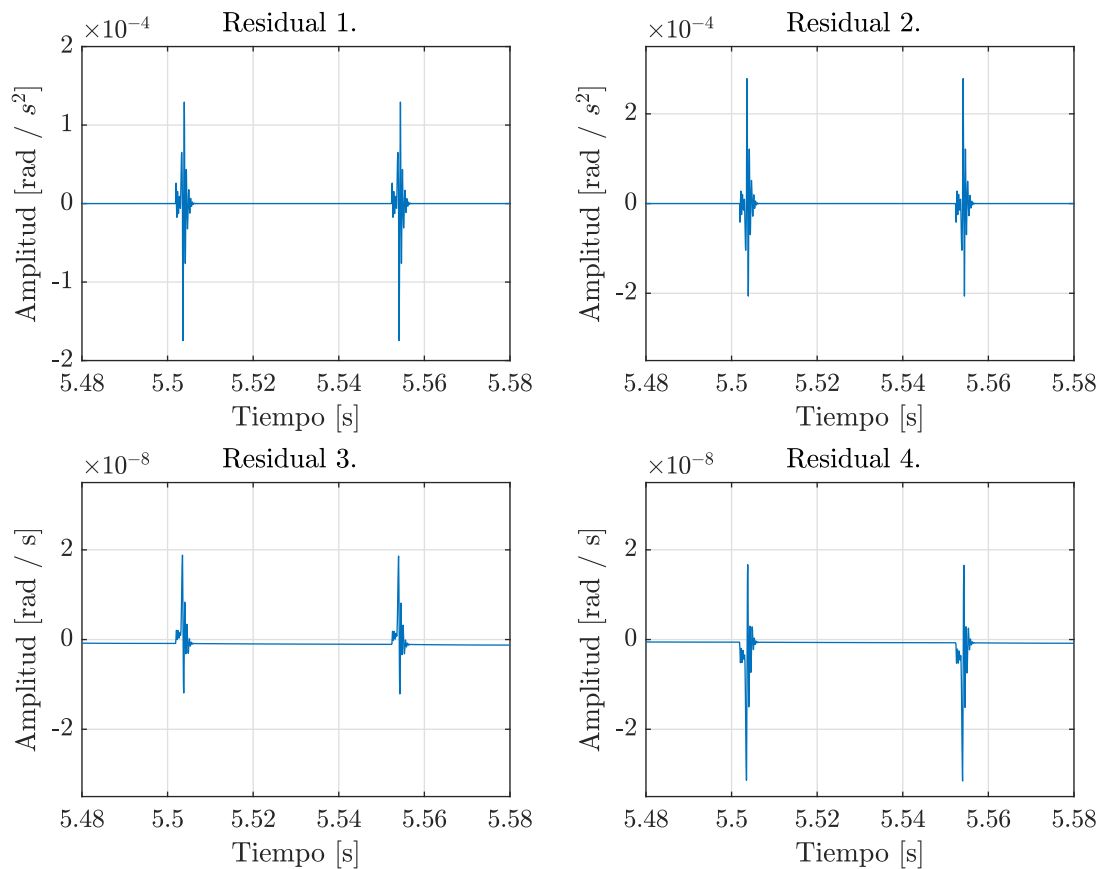
**Nota:** Elaborado por el autor.

En la Figura 34 se ilustran los residuales generados por el filtro de detección operando en paralelo a la caja de engranajes bajo condiciones de carga L1 con una severidad de fallo de diente roto de 50%. En ella, el residual 1 se halla asociado a la velocidad angular del

engranaje de entrada, el residual 2 con la velocidad angular del engranaje de salida, el residual 3 con la posición angular del engranaje de entrada y el residual 4 con la posición angular del engranaje de salida.

**Figura 34**

*Residuales generados por el filtro de detección operando en paralelo a la caja de engranajes bajo condiciones de carga L1 con una severidad de fallo de diente roto de 50%.*



**Nota:** Elaborado por el autor.

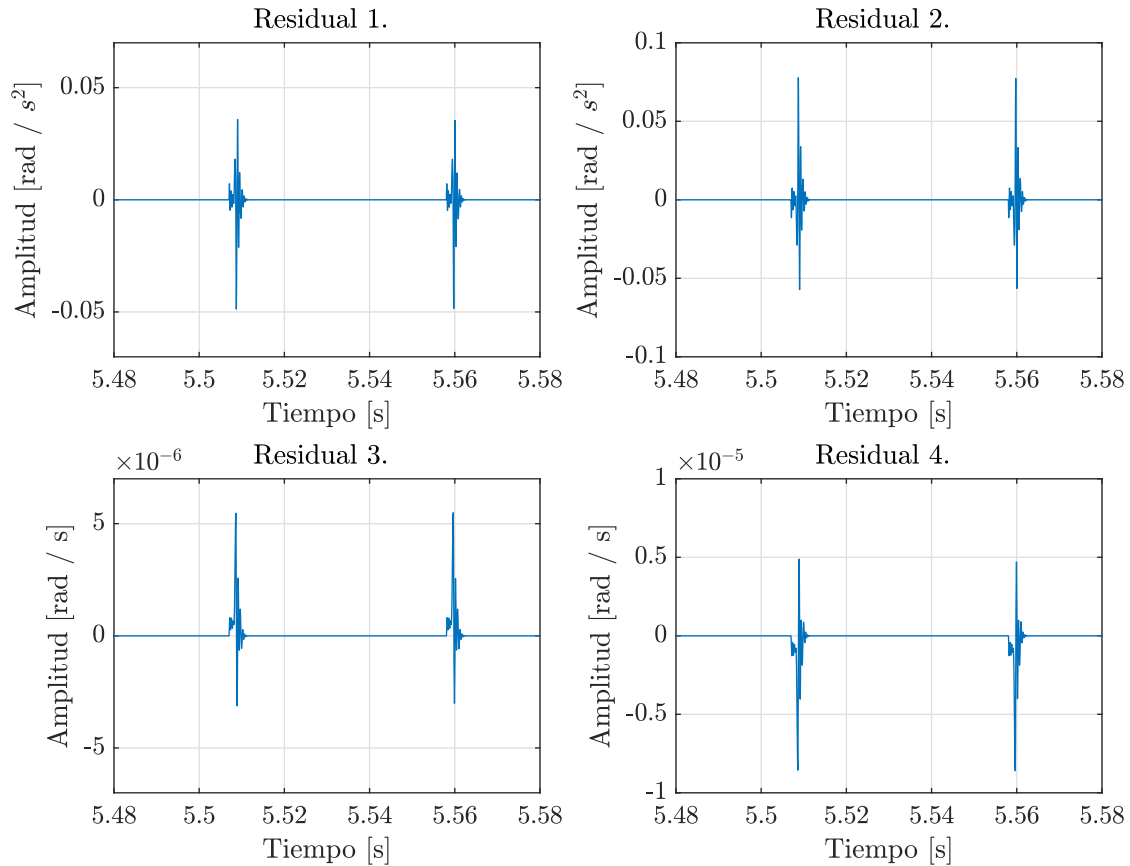
De igual forma, en la Figura 35 se ilustran los residuales generados por el filtro de detección operando en paralelo a la caja de engranajes bajo condiciones de carga L2 con una severidad de fallo de diente roto de 50%. En ella, el residual 1 se halla asociado a la velocidad angular del engranaje de entrada, el residual 2 con la velocidad angular del engranaje de salida, el residual 3 con la posición angular del engranaje de entrada y el residual 4 con la posición



angular del engranaje de salida.

### Figura 35

*Residuales generados por el filtro de detección operando en paralelo a la caja de engranajes bajo condiciones de carga L2 con una severidad de fallo de diente roto de 50%.*

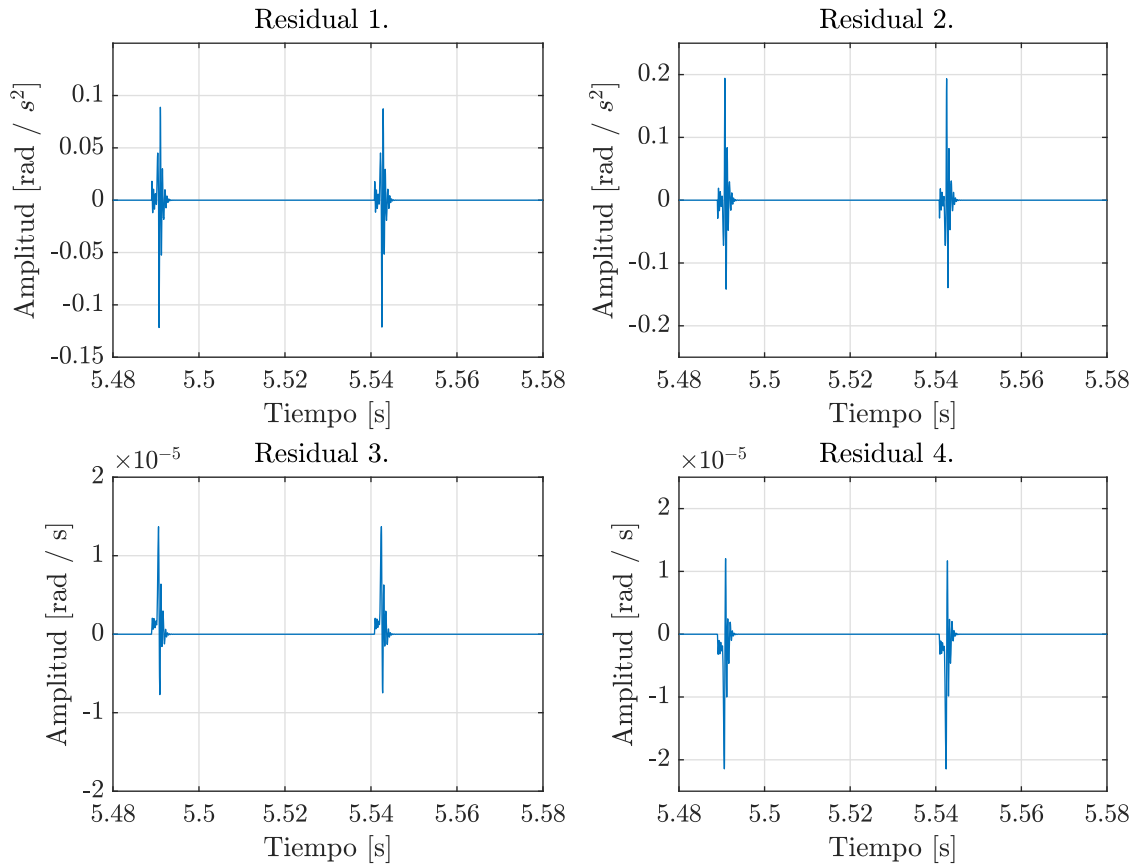


**Nota:** Elaborado por el autor.

Del mismo modo, en la Figura 36 se ilustran los residuales generados por el filtro de detección operando en paralelo a la caja de engranajes bajo condiciones de carga L3 con una severidad de fallo de diente roto de 50%. En ella, el residual 1 se halla asociado a la velocidad angular del engranaje de entrada, el residual 2 con la velocidad angular del engranaje de salida, el residual 3 con la posición angular del engranaje de entrada y el residual 4 con la posición angular del engranaje de salida.

**Figura 36**

*Residuales generados por el filtro de detección operando en paralelo a la caja de engranajes bajo condiciones de carga L3 con una severidad de fallo de diente roto de 50%.*



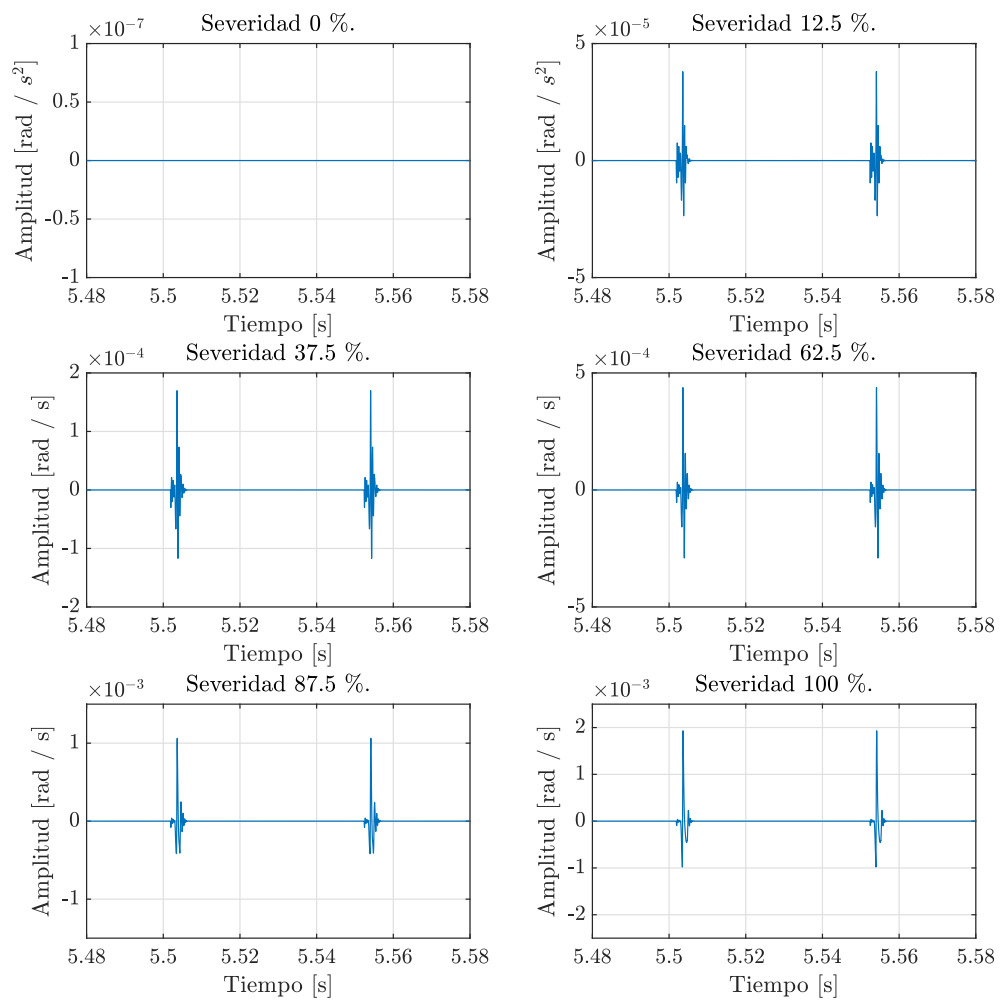
**Nota:** Elaborado por el autor.

De acuerdo con los residuales ilustrados en la Figura 34, Figura 35 y Figura 36 se establece que los cuatro residuales generados por el filtro detector de fallos son asintóticamente estables. Por lo que en condiciones de no fallo su amplitud es muy cercana a cero, mientras que debido a la caracterización periódica del modo de fallo de diente roto estos presentan picos durante el tiempo de contacto del diente afectado. Igualmente, de los cuatro residuales obtenidos se determina que, para una misma severidad de fallo, el residual 2 presenta mayor sensibilidad al modo de fallo de diente roto. En función de lo antes expuesto se ha seleccionado al residual 2 para precisar la sensibilidad del filtro de detección ante diversos niveles de severidad de rotura.

Para las condiciones de carga L1, en la Figura 37 se presenta el residual 2 generado por el filtro de detección operando en paralelo al sistema de caja de engranajes sujeto a diversas severidades de fallo.

**Figura 37**

*Residual 2 generados por el filtro de detección operando en paralelo a la caja de engranajes bajo condiciones de carga L1 con diversas severidades de fallo.*

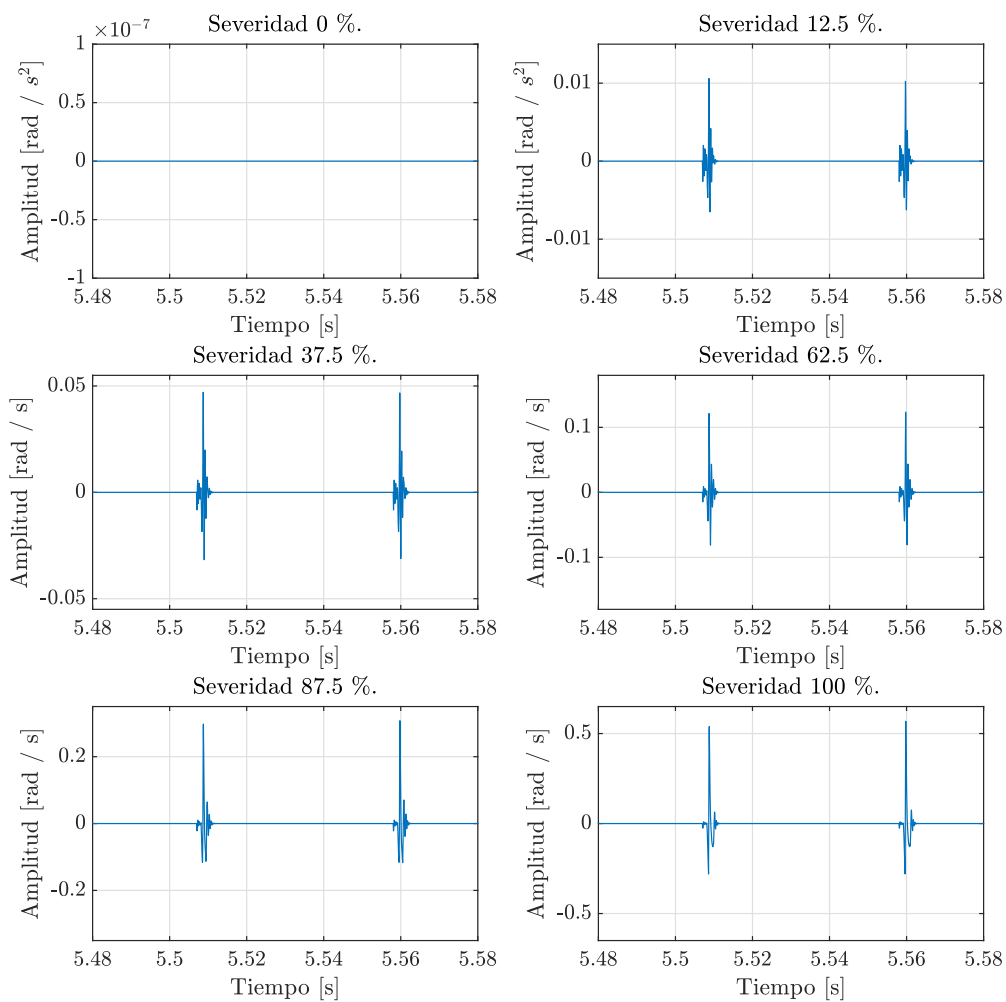


**Nota:** Elaborado por el autor.

Asimismo, para las condiciones de carga L2, en la Figura 38 se ilustra el residual 2 generado por el filtro de detección operando en paralelo al sistema de caja de engranajes sujeto a diversas severidades de fallo.

### Figura 38

*Residual 2 generados por el filtro de detección operando en paralelo a la caja de engranajes bajo condiciones de carga L2 con diversas severidades de fallo.*

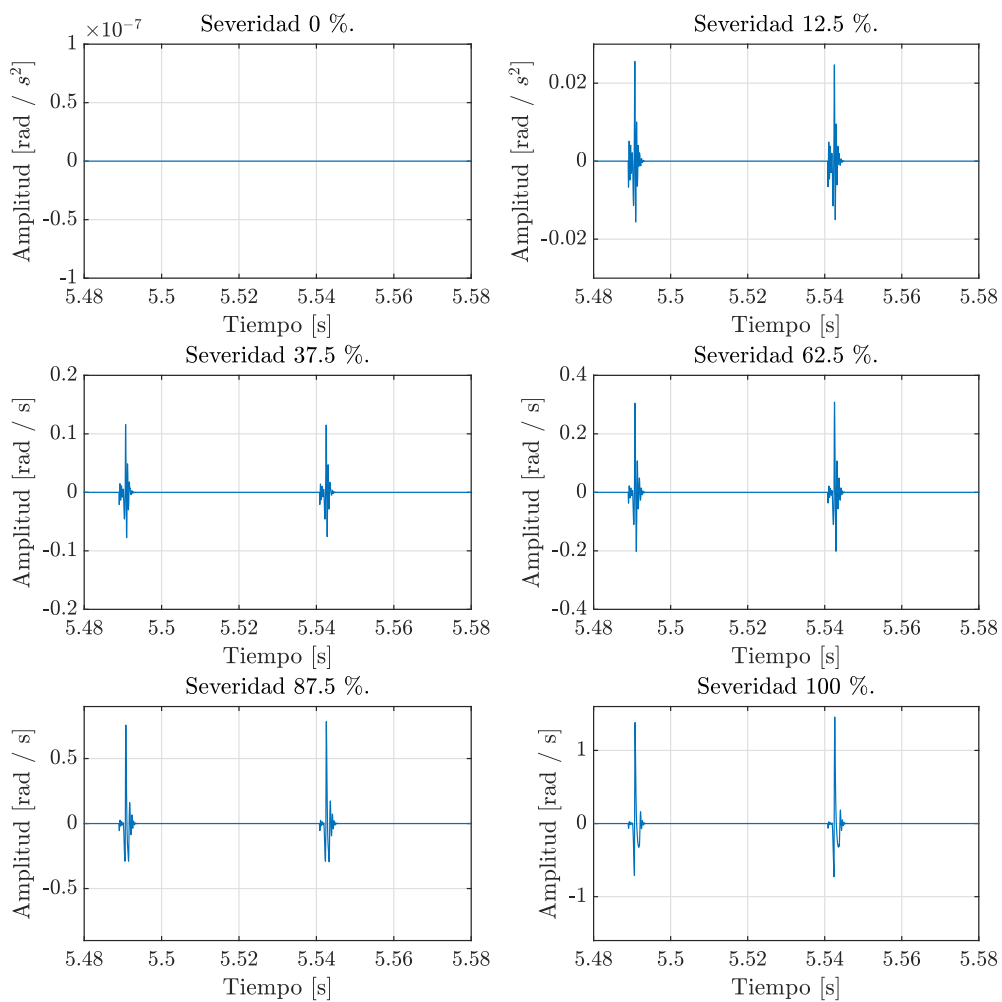


**Nota:** Elaborado por el autor.

Finalmente, para las condiciones de carga L3, en la Figura 39 se ilustra el residual 2 generado por el filtro de detección operando en paralelo al sistema de caja de engranajes sujeto a diversas severidades de fallo.

**Figura 39**

*Residual 2 generados por el filtro de detección operando en paralelo a la caja de engranajes bajo condiciones de carga L3 con diversas severidades de fallo.*



**Nota:** Elaborado por el autor.

En la Tabla 17 se detallan los máximos y mínimos del residual 2 para las condiciones de carga L1, L2 y L3 con diversas severidades de fallo, incluyendo las expuestas en la Figura 37, Figura 38 y Figura 39.

**Tabla 17**

*Máximos y mínimos del residual 2 para las condiciones de carga L1, L2 y L3 con diversas severidades de fallo.*

Severidad	Carga L1		Carga L2		Carga L3	
	Máximo	Mínimo	Máximo	Mínimo	Máximo	Mínimo
0%	0	0	0	0	0	0
12.5%	$3.855 \times 10^{-5}$	$-2.371 \times 10^{-5}$	0.01060	-0.00652	0.02578	-0.01575
25%	$9.332 \times 10^{-5}$	$-5.816 \times 10^{-5}$	0.02579	-0.1606	0.06340	-0.03926
37.5%	$1.698 \times 10^{-4}$	$-1.170 \times 10^{-4}$	0.04717	-0.03247	0.11635	-0.07757
50%	$2.794 \times 10^{-4}$	$-2.063 \times 10^{-4}$	0.07784	-0.05744	0.19412	-0.14173
62.5%	$4.425 \times 10^{-4}$	$-2.912 \times 10^{-4}$	0.12345	-0.08115	0.30982	-0.20243
75%	$6.932 \times 10^{-4}$	$-3.258 \times 10^{-4}$	0.19333	-0.09079	0.48952	-0.22683
87.5%	0.001104	$-4.187 \times 10^{-4}$	0.30770	-0.11669	0.78400	-0.29497
100%	0.002043	-0.001020	0.56872	-0.28408	1.4588	-0.72735

**Nota:** Elaborado por el autor.

**Conclusión:** De acuerdo con los residuales ilustrados en la Figura 37, Figura 38 y Figura 39, así como según los valores detallados en la Tabla 17 se establece que los residuales generados por el filtro de detección son sensibles a la severidad del fallo de diente roto. El comportamiento que exhiben es proporcional, es decir, a mayor severidad de rotura mayor amplitud presentan los residuales durante los períodos de contacto del diente afectado. Además, se observa que la amplitud de los picos presenta valores mayores conforme aumenta la carga y las revoluciones por minuto a las que se encuentra operando el sistema.

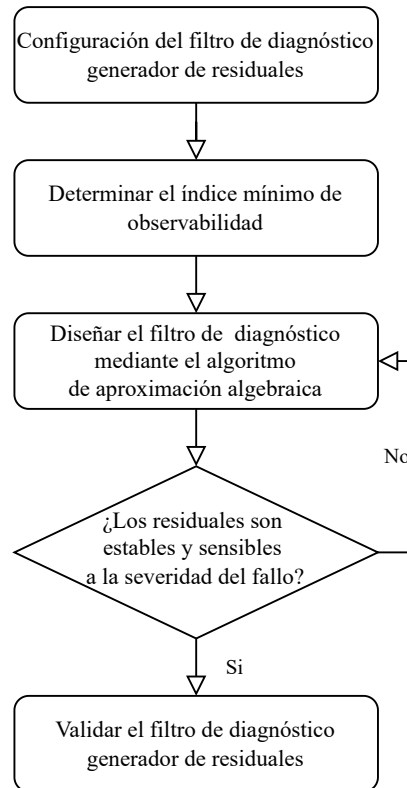
### 6.3. Validación del filtro de diagnóstico generador de residuales

A continuación, los residuales obtenidos con el filtro de diagnóstico son analizados. Dado que para el diseño del filtro de diagnóstico se ha considerado la disponibilidad de mediciones de las velocidades angulares de entrada y salida se obtiene como resultado dos residuales.

En la Figura 40 se detalla la metodología empleada para el diseño del filtro de diagnóstico generador de residuales, así como las características que validan su pertinencia en cuanto a tareas de diagnóstico.

**Figura 40**

*Flujograma para validación del filtro de diagnóstico generador de residuales.*



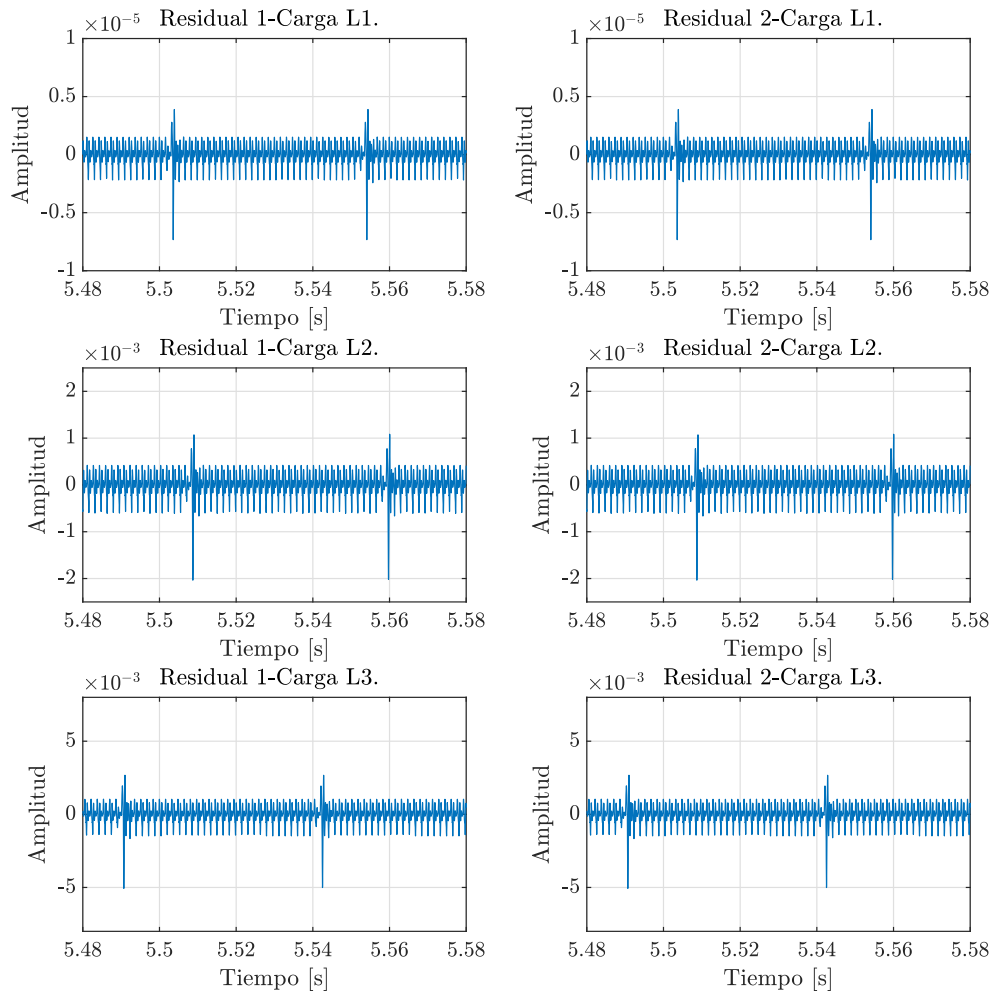
**Nota:** Elaborado por el autor.

En la Figura 41 se ilustran los residuales generados por el filtro de diagnóstico operando en paralelo a la caja de engranajes bajo condiciones de carga L1, L2 y L3 con una severidad de fallo de diente roto de 50%.

De acuerdo con los residuales ilustrados en la Figura 41 se establece que los dos residuales generados por el filtro de diagnóstico para cada condición de carga presentan una caracterización equivalente tanto en amplitud como geoméricamente. Con base en lo antes expuesto se ha seleccionado al residual 1 para realizar los análisis subsecuentes.

**Figura 41**

*Residuales generados por el filtro de diagnóstico bajo condiciones de carga L1, L2 y L3 con una severidad de fallo de diente roto de 50%.*



**Nota:** Elaborado por el autor.



Debido a que en el diseño del filtro de diagnóstico se ha considerado necesario contar únicamente con las mediciones de la velocidad angular del engranaje de entrada y la velocidad angular del engranaje de salida, la observabilidad completa del sistema no es completamente satisfecha. Asimismo, se debe tomar en consideración que la implementación del filtro de diagnóstico se llevó a cabo bajo la propuesta que mayor sensibilidad al modo de fallo de diente roto exhibió de las cuatro propuestas. Lo antes expuestos deriva en que los residuales expuestos en la Figura 41 presenten un comportamiento oscilatorio en torno a cero en condiciones de operación libres de fallo, mientras que debido a la caracterización periódica del modo de fallo de diente roto estos presentan picos de mayor amplitud durante el tiempo de contacto del diente afectado. Sin embargo esto no constituye un problema para tareas de detección y diagnóstico donde la estabilidad de los residuales es condición suficiente.

Con la finalidad de generar una señal residual en el que la diferencia de amplitud entre los valores máximos alcanzados en el estado de operación nominal y en operación con fallo sea mayor se propone usar un filtro de media móvil, su definición se detalla en la Ecuación (168) (Smith, 2003):

$$y[i] = \frac{1}{M} \sum_{j=-(M-1)/2}^{(M-1)/2} x[i+j] \quad (168)$$

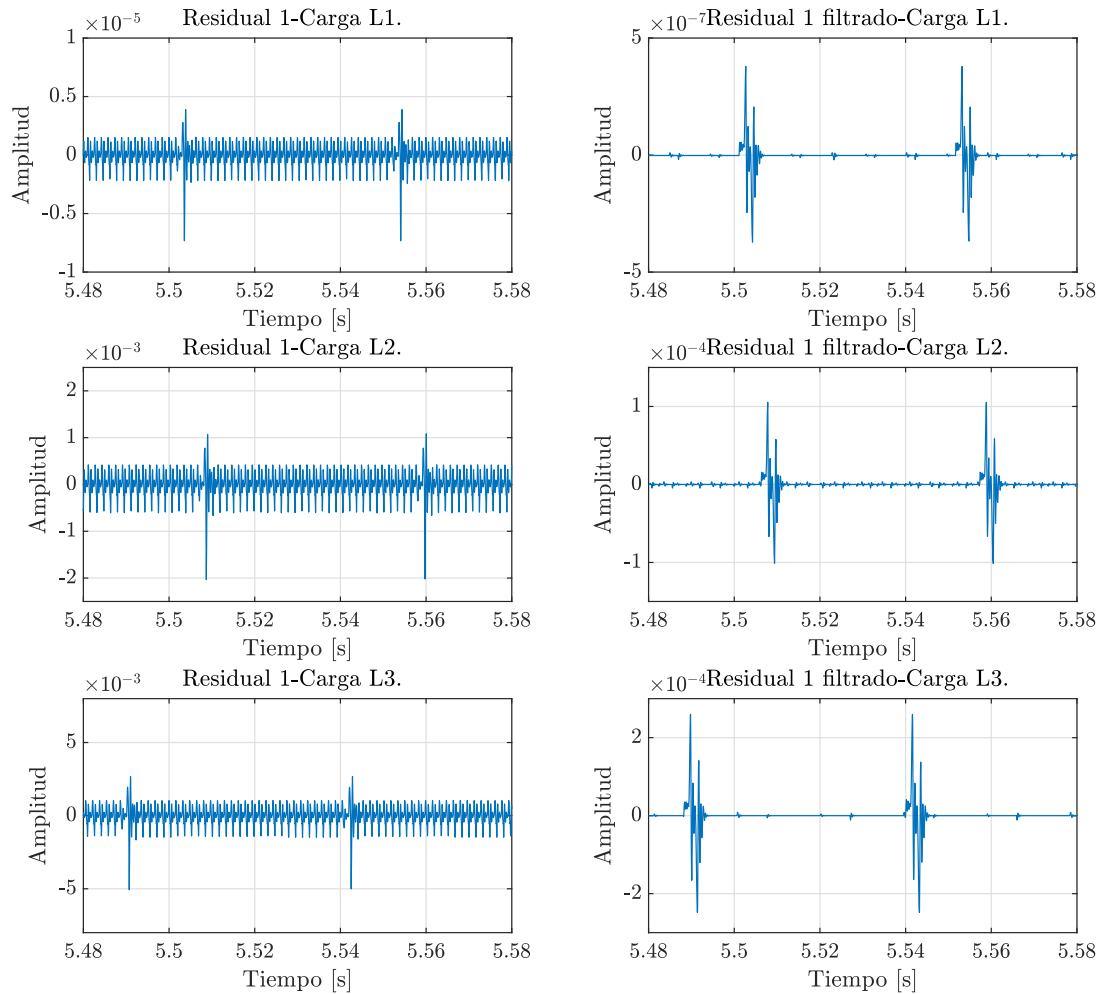
donde  $x[ ]$  es la señal de entrada,  $y[ ]$  es la señal de salida y  $M$  es el número de puntos en la media. Para este caso de estudio se ha determinado  $79 \leq M \leq 81$ , lo que genera una ventana deslizante con un tamaño igual al tiempo total de contacto entre dos dientes.

En la Figura 42 se presenta una comparativa entre los residuales previo y luego de la aplicación del filtro de media móvil para las condiciones de carga L1, L2 y L3 con una severidad de fallo de diente roto de 50%.

En función a los residuales presentados en la Figura 42 se determina que la aplicación del filtro de media móvil permite mejorar la interpretabilidad de la señal obtenida al aumentar la diferencia de amplitud entre el comportamiento de la serie temporal en condiciones de operación nominal y presencia de rotura de diente. Bajo dicha consideración se ha seleccionado al residual procesado a través del filtro de media móvil para precisar la sensibilidad del filtro de detección ante la severidad del fallo.

## Figura 42

Comparativa de residuales del filtro de diagnóstico previo y luego del procesado a través de filtro de media móvil.

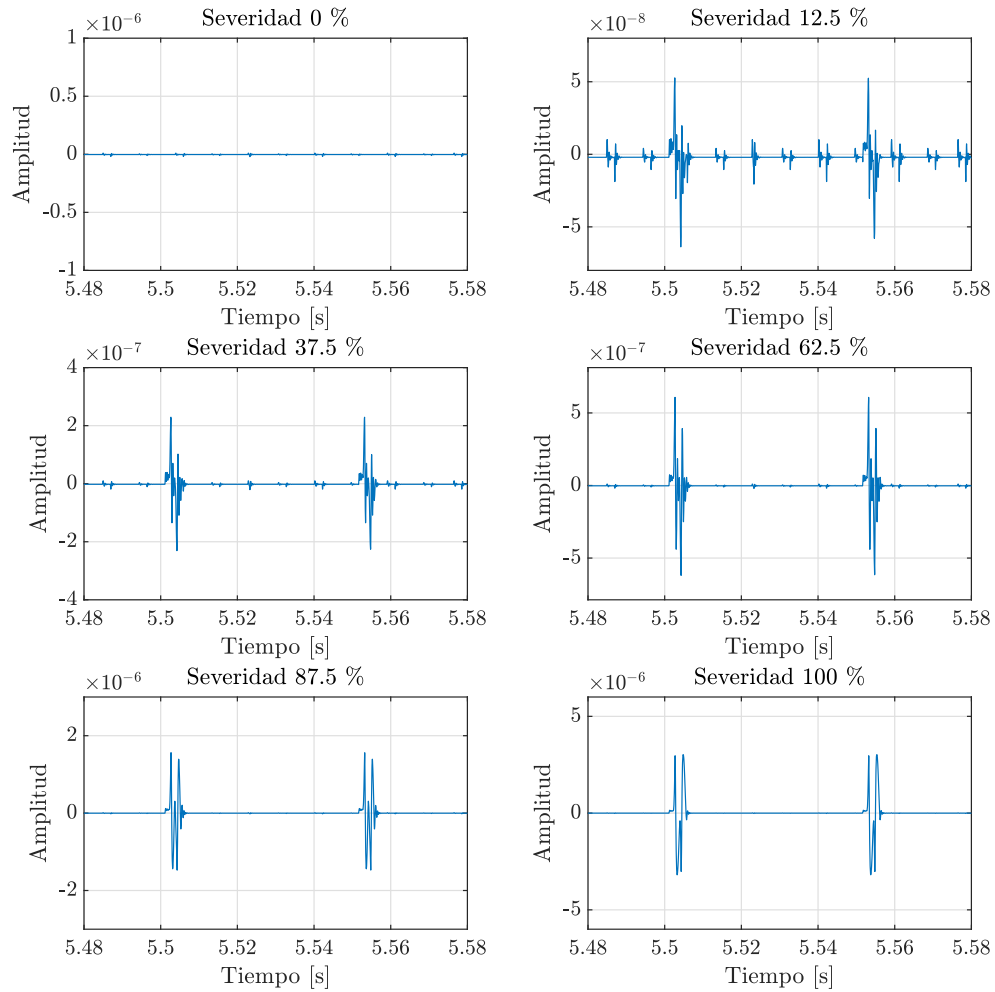


**Nota:** Elaborado por el autor.

Para las condiciones de carga L1, en la Figura 43 se presenta el residual generado por el filtro de diagnóstico y procesado a través del filtro de media móvil del sistema de caja de engranajes sujeto a diversas severidades de fallo.

### Figura 43

*Residual generado por el filtro de diagnóstico y procesado a través del filtro de media móvil para carga L1 con diversas severidades de fallo.*

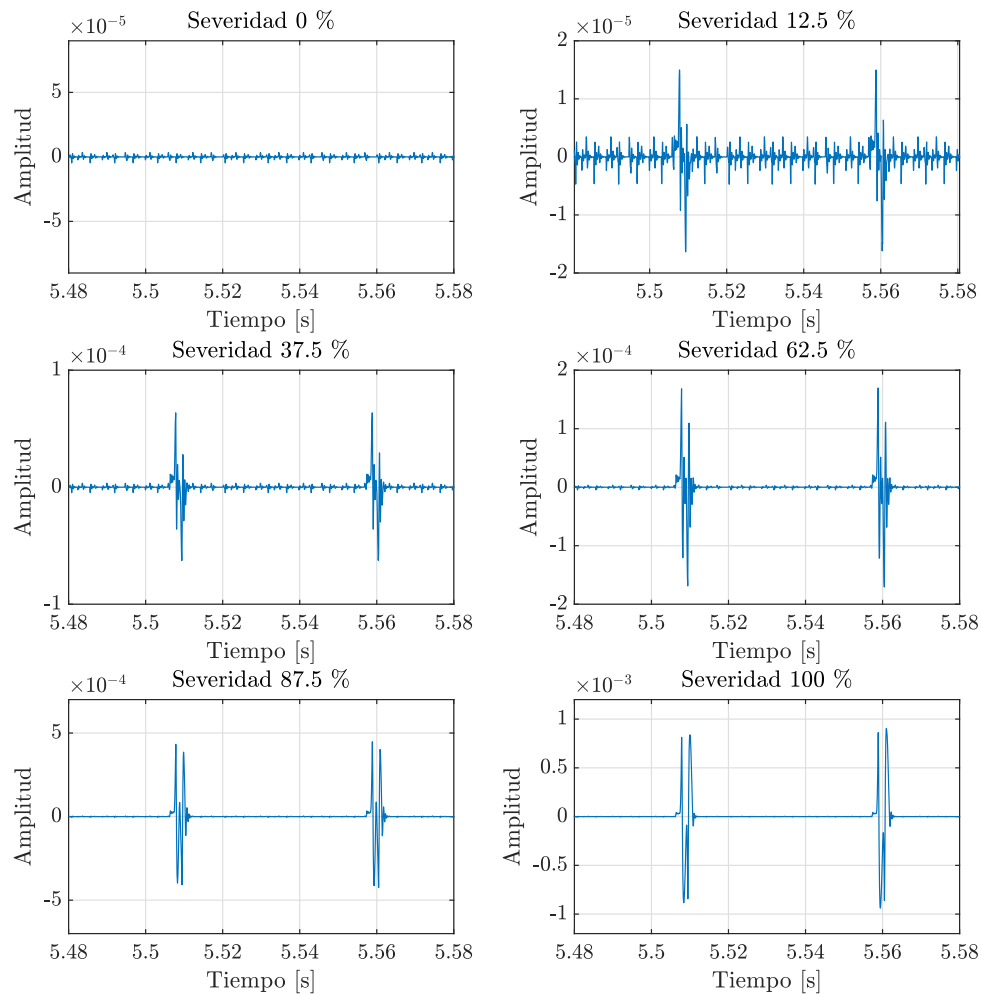


**Nota:** Elaborado por el autor.

De igual forma, en la Figura 44 se presenta el residual generado por el filtro de diagnóstico y procesado a través del filtro de media móvil del sistema de caja de engranajes para las condiciones de carga L2 sujeto a diversas severidades de fallo.

### Figura 44

*Residual generado por el filtro de diagnóstico y procesado a través del filtro de media móvil para carga L2 con diversas severidades de fallo.*

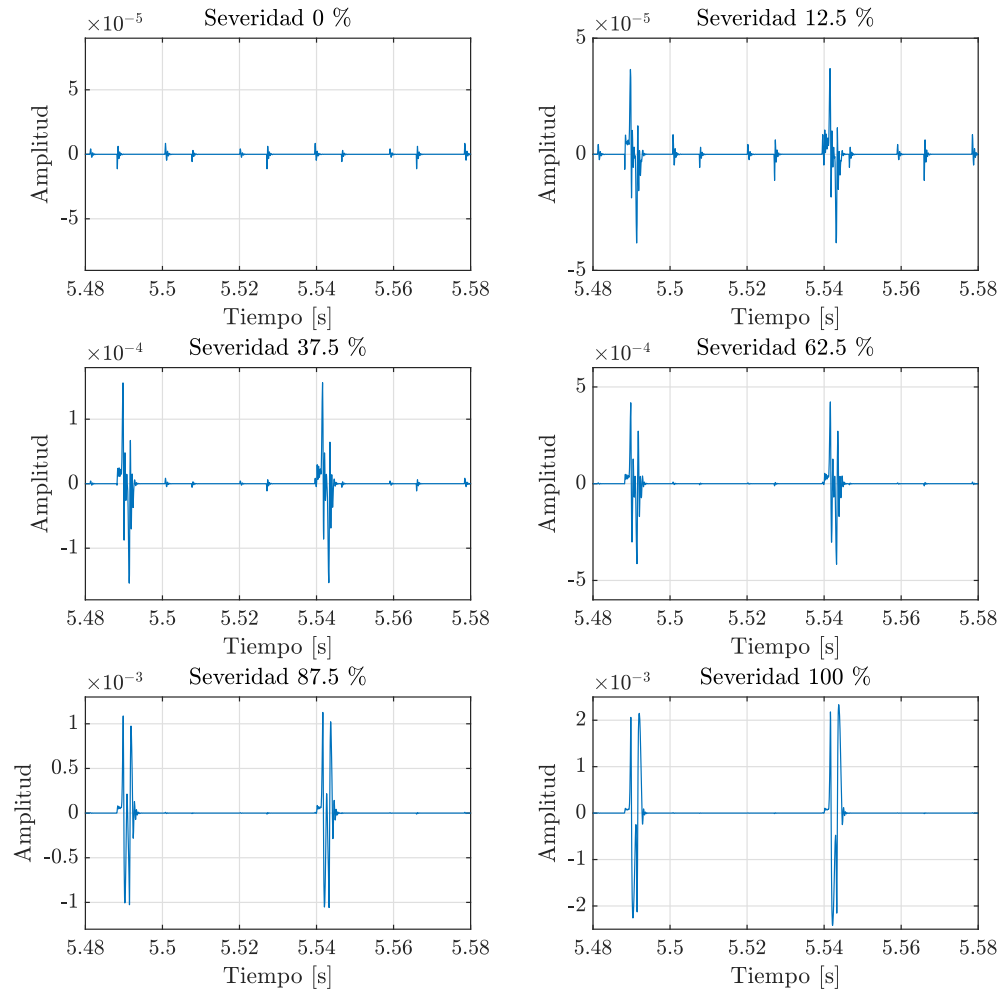


**Nota:** Elaborado por el autor.

Finalmente, en la Figura 45 se presenta el residual generado por el filtro de diagnóstico y procesado a través del filtro de media móvil del sistema de caja de engranajes para las condiciones de carga L3 sujeto a diversas severidades de fallo.

### Figura 45

*Residual generado por el filtro de diagnóstico y procesado a través del filtro de media móvil para carga L3 con diversas severidades de fallo.*



**Nota:** Elaborado por el autor.

En la Tabla 18 se detallan los máximos y mínimos del residual procesado a través del filtro de media móvil para las condiciones de carga L1, L2 y L3 con diversas severidades de fallo, incluyendo las expuestas en la Figura 43, Figura 44 y Figura 45.

**Tabla 18**

*Máximos y mínimos del residual procesado a través del filtro de media móvil para las condiciones de carga L1, L2 y L3 con diversas severidades de fallo.*

Severidad	Carga L1		Carga L2		Carga L3	
	Máximo	Mínimo	Máximo	Mínimo	Máximo	Mínimo
0%	$1.02257 \times 10^{-8}$	$-2.0051 \times 10^{-8}$	$3.4616 \times 10^{-6}$	$-4.7084 \times 10^{-6}$	$8.4839 \times 10^{-6}$	$-1.1249 \times 10^{-5}$
12.5%	$5.2903 \times 10^{-8}$	$-6.386 \times 10^{-8}$	$1.5036 \times 10^{-5}$	$-1.716 \times 10^{-5}$	$3.6939 \times 10^{-5}$	$-4.2258 \times 10^{-5}$
25%	$1.2663 \times 10^{-7}$	$-1.3577 \times 10^{-7}$	$3.5294 \times 10^{-5}$	$-3.7124 \times 10^{-5}$	$8.6803 \times 10^{-5}$	$-9.1849 \times 10^{-5}$
37.5%	$2.2951 \times 10^{-7}$	$-2.3079 \times 10^{-7}$	$6.3614 \times 10^{-5}$	$-6.3391 \times 10^{-5}$	$1.5668 \times 10^{-4}$	$-1.5737 \times 10^{-4}$
50%	$3.81 \times 10^{-7}$	$-3.724 \times 10^{-7}$	$1.0541 \times 10^{-4}$	$-1.0199 \times 10^{-4}$	$2.5993 \times 10^{-4}$	$-2.5111 \times 10^{-4}$
62.5%	$6.0996 \times 10^{-7}$	$-6.2582 \times 10^{-7}$	$1.6966 \times 10^{-4}$	$-2.8459 \times 10^{-4}$	$4.2268 \times 10^{-4}$	$-4.1763 \times 10^{-4}$
75%	$9.848 \times 10^{-7}$	$-1.0295 \times 10^{-6}$	$2.7345 \times 10^{-4}$	$-2.8459 \times 10^{-4}$	$6.8251 \times 10^{-4}$	$-7.0994 \times 10^{-4}$
87.5%	$1.6187 \times 10^{-6}$	$-1.5385 \times 10^{-6}$	$4.4765 \times 10^{-4}$	$-4.2409 \times 10^{-4}$	$1.1276 \times 10^{-3}$	$-1.0669 \times 10^{-3}$
100%	$3.3332 \times 10^{-6}$	$-3.4211 \times 10^{-6}$	$9.0411 \times 10^{-4}$	$-9.3988 \times 10^{-4}$	$2.336 \times 10^{-3}$	$-2.4208 \times 10^{-3}$

**Nota:** Elaborado por el autor.

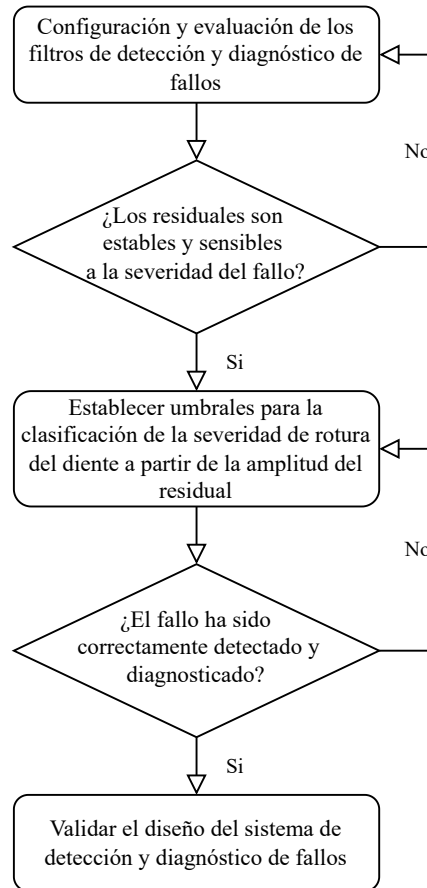
**Conclusión:** Conforme los residuales ilustrados en la Figura 43, Figura 44 y Figura 45, así como según los valores detallados en la Tabla 18 se establece que los residuales generados por el filtro de diagnóstico son sensibles a la severidad del fallo de diente roto. El comportamiento que exhiben es proporcional, es decir, a mayor severidad de rotura mayor amplitud presentan los residuales durante los períodos de contacto del diente afectado. Además, se observa que la amplitud de los picos presenta valores mayores conforme aumenta la carga y las revoluciones por minuto a las que se encuentra operando el sistema.

#### **6.4. Evaluación del diseño del sistema de detección y diagnóstico a través de la sensibilidad de la señal residual**

A continuación, el diseño del sistema de detección y diagnóstico de fallos es evaluado a través de la sensibilidad de la señal residual. Para ello, se parte del hecho que el conjunto de residuales dados por el filtro de detección y el filtro de diagnóstico evaluados en la Sección 6.2 y Sección 6.3 generan residuales cuya amplitud es proporcional a la severidad de la rotura del diente del engranaje afectado. En la Figura 46 se detalla la metodología empleada para la evaluación del sistema, así como las características que validan su pertinencia en cuanto a tareas de detección y diagnóstico.

**Figura 46**

*Flujograma para validación del sistema de detección y diagnóstico de fallos.*



**Nota:** Elaborado por el autor.

Para establecer los umbrales superior e inferior para el sistema de detección y diagnóstico se ha etiquetado como residual 1 al generado por el filtro de detección basado en observadores y como residual 2 al generado por el filtro de diagnóstico. Se ha etiquetado cuatro severidades de diente roto:

- Sin rotura corresponde a la condición de operación nominal, es decir, severidad del 0%.
- Baja corresponde al modo de fallo de diente roto con severidad del 0% al 37.5%.
- Media corresponde al modo de fallo de diente roto con severidad de 37.5% al 75%.
- Alta corresponde al modo de fallo de diente roto con severidad de 75% al 100%.

En la Tabla 19 se detallan los valores asignados en función a los valores máximos de la Figura 34, Figura 35, Figura 36, Figura 43, Figura 44 y Figura 45.

**Tabla 19**

*Umbral para clasificación de la severidad de rotura de diente para el sistema de detección y diagnóstico de fallos.*

Severidad diente roto	Umbral del residual 1 (R1)	Umbral del residual 2 (R2)
<b>Carga L1</b>		
Sin rotura	$R1 = 0$	$0 < R2 \leq 1.0257 \times 10^{-8}$
Baja	$0 < R1 \leq 1.6984 \times 10^{-4}$	$1.0257 \times 10^{-8} < R2 \leq 2.2951 \times 10^{-7}$
Media	$1.6984 \times 10^{-4} < R1 \leq 6.9320 \times 10^{-4}$	$2.2951 \times 10^{-7} < R2 \leq 9.848 \times 10^{-7}$
Alta	$6.9320 \times 10^{-4} < R1 \leq 2.0427 \times 10^{-3}$	$9.848 \times 10^{-7} < R2 \leq 3.3332 \times 10^{-6}$
<b>Carga L2</b>		
Sin rotura	$R1 = 0$	$0 < R2 \leq 3.4616 \times 10^{-6}$
Baja	$0 < R1 \leq 0.04717$	$3.4616 \times 10^{-6} < R2 \leq 6.3614 \times 10^{-5}$
Media	$0.04717 < R1 \leq 0.19333$	$6.3614 \times 10^{-5} < R2 \leq 2.7345 \times 10^{-4}$
Alta	$0.19333 < R1 \leq 0.56872$	$2.7345 \times 10^{-4} < R2 \leq 9.0411 \times 10^{-4}$
<b>Carga L3</b>		
Sin rotura	$R1 = 0$	$0 < R2 \leq 8.4839 \times 10^{-6}$
Baja	$0 < R1 \leq 0.11635$	$8.4839 \times 10^{-6} < R2 \leq 1.5668 \times 10^{-4}$
Media	$0.11635 < R1 \leq 0.48952$	$1.5668 \times 10^{-6} < R2 \leq 6.8251 \times 10^{-4}$
Alta	$0.48952 < R1 \leq 1.4588$	$6.8251 \times 10^{-4} < R2 \leq 2.336 \times 10^{-3}$

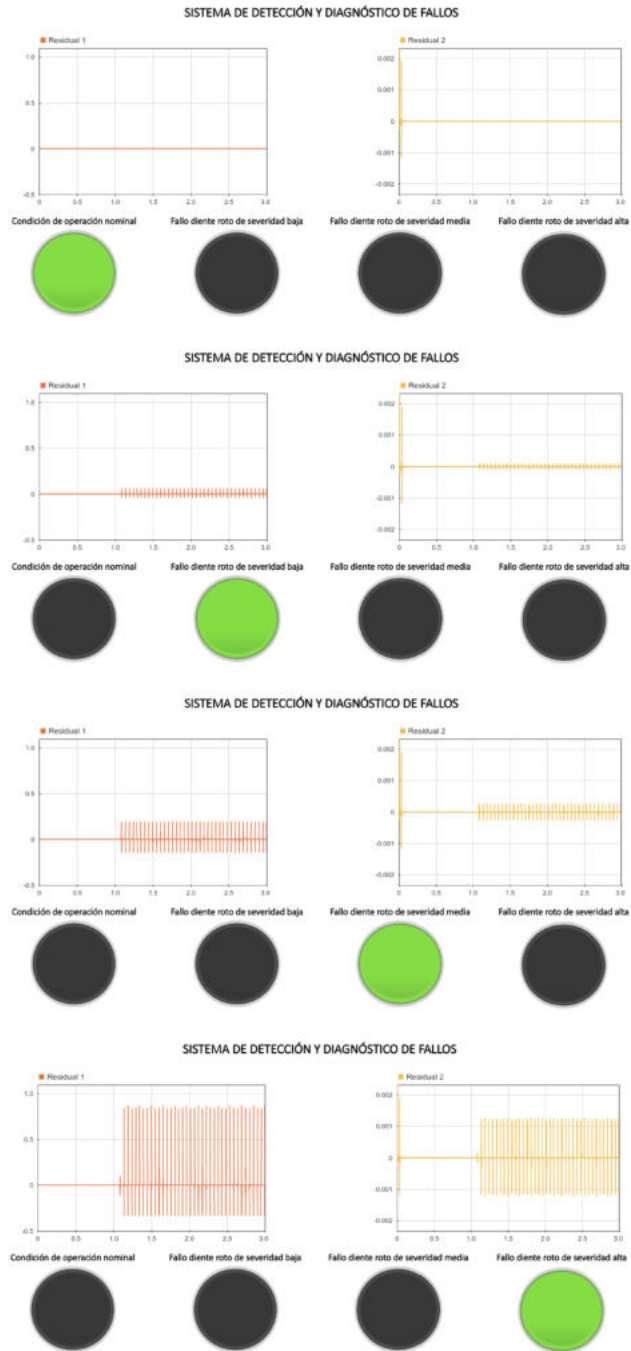
**Nota:** *Elaborado por el autor.*

Una vez establecidos los umbrales para cada severidad de diente roto se simula el sistema en el entorno Simulink. En la Figura 47 se ilustran la interfaz del sistema de monitoreo para el sistema de caja de engranajes bajo las condiciones de carga L3, en ella se presentan los 2 residuales generados por los filtros diseñados. El modo de fallo de diente roto se presenta en el sistema en  $t = 1.15$  s. De igual forma, se ha implementado un panel de alarmas cuyos indicadores se encienden en función a las condiciones que han sido especificadas para cada residual en la Tabla 19.



**Figura 47**

*Interfaz de detección y diagnóstico de fallos para sistema de caja de engranajes bajo condiciones de carga L3 y diversas severidades de fallo.*



**Nota:** Elaborado por el autor.

A partir de los resultados detallados en la Figura 47, y análisis análogos realizados para las otras dos condiciones de carga restantes, se determina que los umbrales definidos son adecuados para los propósitos de detección y diagnóstico de fallos en el sistema sujeto a estudio. Lo antes expuesto se fundamenta en el hecho de que a partir de las condiciones lógicas estructuradas con ellos es posible detectar y diagnosticar la severidad de la rotura del diente en el engranaje afectado y generar una alarma que informe del suceso.

## 7. Conclusiones

El problema de detección y diagnóstico de fallos basado en modelos para una caja de engranajes rectos demanda de un arduo análisis matemático que posibilite obtener la robustez idónea ante el acaecimiento de un determinado modo de fallo. En este proyecto se particularizó un modelo matemático de caja de engranajes en condiciones de fallo de diente roto y se empleó en el diseño de un sistema de detección y diagnóstico de niveles de severidad de fallos, este último se encuentra constituido por un filtro de detección basado en observadores y un filtro de diagnóstico generador de residuales. Los principales resultados de este trabajo se presentan a continuación:

- Se ha caracterizado adecuadamente los modelos de rigidez y amortiguamiento para la definición del modelo matemático de una caja de engranajes en condiciones de fallo de diente roto. En el modelo propuesto se identificaron las frecuencias características de engranaje, entrada y salida en el espectro de la FFT bajo las condiciones de operación asociadas con las cargas L1, L2 y L3, mismas que se contrastaron con las frecuencias características calculadas y las frecuencias características experimentales de los acelerómetros A3 y A4. Para la primera comparación se obtuvieron errores porcentuales entre 0 y 3.03%, mientras que para la segunda se registraron errores porcentuales entre 1.59% y 3.13%. De igual forma, se contrastó la caracterización geométrica de las series temporales obtenidas del modelo con las experimentales y se determinó que el modelo propuesto genera una respuesta temporal análoga a la obtenida experimentalmente en presencia del fallo de diente roto en diversos niveles de severidad. Por lo que, sobre la base de los resultados antes expuesto se resolvió que el modelo de la caja de engranajes en condición de fallo de diente roto es válido y puede ser empleado para la caracterización de filtros de detección y diagnóstico de fallos.
- Debido a la condición de variante en el tiempo del modelo de la caja de engranajes y con base en la definición del modelo de rigidez y amortiguamiento fue necesario

descomponer el modelo en seis subsistemas invariantes en el tiempo. Este hecho propicio las condiciones idóneas para la aplicación de los principios teóricos de diseño de filtros de detección y diagnóstico basados en esquemas de observadores, de los cuales se obtuvo resultados favorables.

- El filtro de detección basado en observadores necesita de la disponibilidad de mediciones de las posiciones y velocidades angulares de los engranajes de entrada y salida. Este filtro produce cuatro residuales diferentes que son asintóticamente estables y sensibles a la severidad del fallo debido a que presentan picos en su amplitud durante los períodos de contacto del diente afectado. Los residuales presentan un comportamiento proporcional al nivel de rotura, a mayor severidad existe mayor amplitud de la señal residual. Con base en los resultados previamente descritos se dispuso que el filtro diseñado presenta una caracterización adecuada para los propósitos de detección y diagnóstico de fallo de diente roto en una caja de engranajes rectos.
- El filtro de diagnóstico generador de residuales necesita de la disponibilidad de mediciones de las velocidades angulares de los engranajes de entrada y salida. Este filtro produce dos residuales equivalentes que son asintóticamente estables y sensibles a la severidad del fallo debido a que presentan picos en su amplitud durante los períodos de contacto del diente afectado. Los residuales presentan un comportamiento proporcional al nivel de rotura, a mayor severidad existe mayor amplitud de la señal residual. Considerando los resultados previamente detallados se dispuso que el filtro diseñado presenta una caracterización adecuada para los propósitos de detección y diagnóstico de fallo de diente roto en una caja de engranajes rectos.
- Debido a la respuesta similar del filtro de detección y del filtro de diagnóstico ante el modo de fallo de diente roto es posible usar únicamente uno de los dos esquemas con la finalidad de detectar y diagnosticar que ha sucedido un fallo de este tipo. Bajo dicho enfoque el filtro de diagnóstico propuesto involucra menor cantidad de instrumentación y menor cantidad de señales adquiridas y procesadas. Sin embargo, para mejorar la robustez del sistema se ha evaluado el diseño del sistema de detección y diagnóstico de fallos para una caja de engranajes rectos considerando ambos filtros. Lo antes expuesto deriva en la posibilidad de verificar mayor cantidad de condiciones para evitar falsas alarmas. Del sistema de detección y diagnóstico propuesto se dictaminó que los umbrales establecidos y el conjunto de reglas lógicas definidas permiten una adecuada generación de la alarma de fallos y por lo tanto, su diseño es adecuado para los propósitos de

estudio de este proyecto.

## 8. Recomendaciones

Para la ejecución de trabajos en la misma línea investigativa se realiza las siguientes recomendaciones:

- Evaluar diferentes condiciones de operación y severidades de otros modos de fallo diferentes al diente roto con el fin de verificar la validez del sistema de detección y diagnóstico ante diversas situaciones.
- Considerar la implementación de filtros, tales como filtro de media móvil u otros, para procesar los residuales generados con la finalidad de afinar su interpretabilidad.

Asimismo, debido a las consideraciones que se han tomado en cuenta para el desarrollo de este proyecto, tales como caracterización rígida de ejes y rodamientos, análisis de residuales basado en reglas lógicas y diseño del sistema de detección y diagnóstico en tiempo continuo se proponen los siguientes temas para trabajos futuros:

- Modelado de una caja de engranajes en condiciones de fallo de diente roto considerando los ejes y rodamientos como elementos flexibles.
- Análisis basado en aprendizaje automático para el procesamiento de las señales residuales de un sistema de detección y diagnóstico de fallos debido a que estas señales son sensibles a variaciones de los parámetros nominales de operación.
- Implementación de un sistema de detección y diagnóstico para una caja de engranajes rectos considerando la discretización del modelo de la caja de engranajes y del sistema de detección y diagnóstico, así como la inclusión de una etapa de amplificación para incrementar la magnitud de los residuales generados.

## Referencias

- Ali, S., Mohammad, Z., y Yahya, F. (2015). Estimation of Model Parameters, for Torsional Vibration Analysis of a Turbo-Generator Unit with Reference to Mosul Gas-Turbine Station. *Al-Rafidain Engineering*, 23(2). Descargado de [https://rengj.mosuljournals.com/article\\_101077\\_0b832e79b899676181aeed2453b2d28.pdf](https://rengj.mosuljournals.com/article_101077_0b832e79b899676181aeed2453b2d28.pdf)
- American Gear Manufacturers Association (Ed.). (1995). *Appearance of gear teeth: Terminology of wear and failure; American National Standard. (Revision of ANSI/AGMA 110.04)*. Alexandria, Virginia: American Gear Manufactures Association.
- Balachandran, B., y Magrab, E. B. (2009). *Vibrations* (2nd ed ed.). Australia: Cengage Learning. (OCLC: ocn181603380)
- Baranowski, J. (2006). State estimation in linear multi-output systems-design example and discussion of optimality. *Automatyka/Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie*, 10, 119–131.
- Berrezueta Parra, A. A. (2021). *Modelamiento matemático de una caja de engranajes con diferentes cargas para la obtención de los patrones de vibración*. (Tesis de grado). Universidad Politécnica Salesiana, Cuenca.
- Blanke, M., Kinnaert, M., Lunze, J., y Staroswiecki, M. (2016). Diagnosis and Fault-Tolerant Control.  
doi: 10.1007/978-3-662-47943-8
- Cabrera, D., Guamán, A., Zhang, S., Cerrada, M., Sánchez, R.-V., Cevallos, J., ... Li, C. (2020, marzo). Bayesian approach and time series dimensionality reduction to LSTM-based model-building for fault diagnosis of a reciprocating compressor. *Neurocomputing*, 380, 51–66. Descargado 2021-12-30, de <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0925231219315632> doi: 10.1016/j.neucom.2019.11.006
- Cabrera, D., Sancho, F., Cerrada, M., Sánchez, R.-V., y Li, C. (2020, julio). Knowledge extraction from deep convolutional neural networks applied to cyclo-stationary time-series classification. *Information Sciences*, 524, 1–14. Descargado 2021-12-30, de <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0020025520302188> doi: 10.1016/j.ins.2020.03.039
- Cerrada, M., Macancela, J.-C., Cabrera, D., Estupiñan, E., Sánchez, R.-V., y Medina, R. (2020, abril). Reciprocating Compressor Multi-Fault Classification Using Symbolic Dynamics and Complex Correlation Measure. *Applied Sciences*, 10(7), 2512. Descargado 2021-12-30, de <https://www.mdpi.com/2076-3417/10/7/2512> doi: 10.3390/app10072512
- Cerrada, M., Sánchez, R.-V., Li, C., Pacheco, F., Cabrera, D., Valente de Oliveira, J., y

- Vásquez, R. E. (2018, enero). A review on data-driven fault severity assessment in rolling bearings. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 99, 169–196. Descargado de <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0888327017303242> doi: 10.1016/j.ymssp.2017.06.012
- Cerrada, M., Sánchez, R.-V., Pacheco, F., Cabrera, D., Zurita, G., y Li, C. (2016, abril). Hierarchical feature selection based on relative dependency for gear fault diagnosis. *Applied Intelligence*, 44(3), 687–703. Descargado 2021-12-30, de <http://link.springer.com/10.1007/s10489-015-0725-3> doi: 10.1007/s10489-015-0725-3
- Cerrada, M., Zurita, G., Cabrera, D., Sánchez, R.-V., Artés, M., y Li, C. (2016, marzo). Fault diagnosis in spur gears based on genetic algorithm and random forest. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 70-71, 87–103. Descargado 2021-12-30, de <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0888327015003921> doi: 10.1016/j.ymssp.2015.08.030
- Chaari, F., Baccar, W., Abbes, M. S., y Haddar, M. (2008, julio). Effect of spalling or tooth breakage on gearmesh stiffness and dynamic response of a one-stage spur gear transmission. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 27(4), 691–705. Descargado de <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0997753807001180> doi: 10.1016/j.euromechsol.2007.11.005
- Chen, Z., Gryllias, K., y Li, W. (2019, noviembre). Mechanical fault diagnosis using Convolutional Neural Networks and Extreme Learning Machine. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 133, 106272. Descargado de <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S088832701930487X> doi: 10.1016/j.ymssp.2019.106272
- Chingal Imaicela, D. E. (2018). *Adquisición de señales de corriente del motor de inducción combinando fallos en la maquinaria rotativa y elaboración de una guía de práctica sobre detección de fallos por medio del afcm.* (Tesis de grado). Universidad Politécnica Salesiana, Cuenca.
- Criollo Arévalo, C. I., y Valdez Solís, J. P. (2021). *Enfoques basados en observadores de estados para el diseño de filtros de detección de fallas en una clase de procesos industriales* (Tesis de grado). Universidad Politécnica Salesiana, Cuenca.
- Davis, J. R. (Ed.). (2005). *Gear materials, properties, and manufacture.* Materials Park, Ohio: ASM International.
- Ding, S. X. (2008). *Model-based fault diagnosis techniques: design schemes, algorithms, and tools.* Berlin: Springer.
- Du, S. (1997). *Dynamic modelling and simulation of gear transmission error for gearbox vibration analysis* (Tesis Doctoral, Awarded By:University of New South Wales. Me-

- chanical & Manufacturing Engineering). Descargado de <http://handle.unsw.edu.au/1959.4/54386>
- Fakhfakh, T., Chaari, F., y Haddar, M. (2005, marzo). Numerical and experimental analysis of a gear system with teeth defects. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 25(5-6), 542–550. Descargado 2021-12-06, de <http://link.springer.com/10.1007/s00170-003-1830-8> doi: 10.1007/s00170-003-1830-8
- Fernández, A. (2017). *Frecuencias propias de un engranaje*.
- Google. (s.f.). Universidad politécnica salesiana. Descargado 2022-04-25, de <https://goo.gl/maps/3UMHJekFCWitRbEV8>
- Hao, J., Kang, J., Li, J., y Zhao, Z. (2012, junio). A Physical Model based research for fault diagnosis of gear crack. En *2012 International Conference on Quality, Reliability, Risk, Maintenance, and Safety Engineering* (pp. 572–575). Chengdu, China: IEEE. Descargado de <http://ieeexplore.ieee.org/document/6246299/> doi: 10.1109/ICQR2MSE.2012.6246299
- International Organization for Standardization. (1995). *Gears - Wear and damage to gear teeth - Terminology*. Descargado de <https://www.iso.org/standard/2042.html>
- Isermann, R. (2005, enero). Model-based fault-detection and diagnosis – status and applications. *Annual Reviews in Control*, 29(1), 71–85. Descargado de <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1367578805000052> doi: 10.1016/j.arcontrol.2004.12.002
- Jie Chen, J., y Patton, R. J. (1998). *Robust Model-Based Fault Diagnosis for Dynamic Systems*. New York, NY: Springer. Descargado de <http://public.eblib.com/choice/PublicFullRecord.aspx?p=6492909> (OCLC: 1255231010)
- Kahraman, A., y Blankenship, G. W. (1997, marzo). Experiments on Nonlinear Dynamic Behavior of an Oscillator With Clearance and Periodically Time-Varying Parameters. *Journal of Applied Mechanics*, 64(1), 217–226. Descargado de <https://asmedigitalcollection.asme.org/appliedmechanics/article/64/1/217/423388/Experiments-on-Nonlinear-Dynamic-Behavior-of-an> doi: 10.1115/1.2787276
- Kasuba, R., y Evans, J. W. (1981, abril). An Extended Model for Determining Dynamic Loads in Spur Gearing. , 103, 398–409. Descargado de <https://asmedigitalcollection.asme.org/mechanicaldesign/article/103/2/398/433141/An-Extended-Model-for-Determining-Dynamic-Loads-in> doi: 10.1115/1.3254920
- Liang, X., Zuo, M. J., y Patel, T. H. (2014, febrero). Evaluating the time-varying mesh

- stiffness of a planetary gear set using the potential energy method. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 228(3), 535–547. Descargado 2021-11-20, de <http://journals.sagepub.com/doi/10.1177/0954406213486734> doi: 10.1177/0954406213486734
- Lin, H.-H., y Huston, R. L. (1986). *Dynamic Loading on Parallel Shaft Gears*.
- Liu, X., Yang, Y., y Zhang, J. (2018, julio). Resultant vibration signal model based fault diagnosis of a single stage planetary gear train with an incipient tooth crack on the sun gear. *Renewable Energy*, 122, 65–79. Descargado de <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S096014811830082X> doi: 10.1016/j.renene.2018.01.072
- Ma, R., y Chen, Y. (2012, diciembre). Research on the dynamic mechanism of the gear system with local crack and spalling failure. *Engineering Failure Analysis*, 26, 12–20. Descargado de <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1350630712001069> doi: 10.1016/j.engfailanal.2012.05.022
- Macancela, J.-C., Cabrera, D., Lucero, P., Cerrada, M., Li, C., Villacres, S., y Sanchez, R.-V. (2019, mayo). Influence of Accelerometer Position on Gearbox Fault Severity Classification through Evaluation of Deep Learning Models. En *2019 Prognostics and System Health Management Conference (PHM-Paris)* (pp. 303–308). Paris, France: IEEE. Descargado 2021-12-30, de <https://ieeexplore.ieee.org/document/8756378/> doi: 10.1109/PHM-Paris.2019.00058
- Medina, R., Macancela, J. C., Lucero, P., Cabrera, D., Sánchez, R.-V., y Cerrada, M. (2020, noviembre). Gear and bearing fault classification under different load and speed by using Poincaré plot features and SVM. *Journal of Intelligent Manufacturing*. Descargado 2021-12-30, de <http://link.springer.com/10.1007/s10845-020-01712-9> doi: 10.1007/s10845-020-01712-9
- Mohammed, O. D., Rantatalo, M., y Aidanpää, J.-O. (2015, marzo). Dynamic modelling of a one-stage spur gear system and vibration-based tooth crack detection analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 54-55, 293–305. Descargado 2021-12-06, de <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0888327014003434> doi: 10.1016/j.ymsp.2014.09.001
- Morfín, O. A., Castañeda, C. E., Ruiz-Cruz, R., Valenzuela, F. A., Murillo, M. A., Quezada, A. E., y Padilla, N. (2018, febrero). The Squirrel-Cage Induction Motor Model and Its Parameter Identification Via Steady and Dynamic Tests. *Electric Power Components and Systems*, 46(3), 302–315. Descargado de <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/15325008.2018.1445140> doi: 10.1080/15325008.2018.1445140
- Nise, N. S. (2015). *Control systems engineering*. Hoboken, NJ: Wiley. (OCLC: 899983806)



- Ogata, K. (2010). *Ingeniería de control moderna* (S. Dormido Canto y R. Dormido Canto, Traduc.). Madrid: Pearson Prentice Hall. (OCLC: 805117306)
- Ortega, R., Cerrada, M., Cabrera, D., y Sánchez, R.-V. (2021). A method for the estimation of the constant load torque by using the steady-state electrical torque signal. En *2021 IEEE Fifth Ecuador Technical Chapters Meeting (ETCM)* (p. 1-6). doi: 10.1109/ETCM53643.2021.9590699
- Ortega Lucero, L. R. (2021). *Estimación del par de carga en motores de inducción basado en su modelo matemático y orientado a la detección de fallos en cajas de engranajes*. (Tesis de grado). Universidad Politécnica Salesiana, Cuenca.
- Randall, R. B. (2011). *Vibration-based condition monitoring: industrial, aerospace and automotive applications*. Chichester: Wiley.
- Rastegari, A. (2017). *Condition Based Maintenance in the Manufacturing Industry: From Strategy to Implementation* (Tesis Doctoral no publicada). M??lardalen University, Eskilstuna. (ISBN: 9789174853551 OCLC: 1023317609)
- Ríos Bolívar, A. (2003). *Metodologías para la Construcción de Sistemas de Detección y Diagnóstico de Fallas* (doctoralThesis, Universidad de Los Andes., Merida) Descargado de <http://webdelprofesor.ula.ve/ingenieria/ilich/articulos/maestro.pdf>
- Simani, S., Fantuzzi, C., y Patton, R. J. (2003). *Model-based Fault Diagnosis in Dynamic Systems Using Identification Techniques* (M. J. Grimble y M. A. Johnson, Eds.). London: Springer London. Descargado de <http://link.springer.com/10.1007/978-1-4471-3829-7> doi: 10.1007/978-1-4471-3829-7
- Smith, S. W. (1999). *The scientist and engineer's guide to digital signal processing*. San Diego, Calif.: California Technical Pub. (OCLC: 850748178)
- Smith, S. W. (2003). *Digital signal processing: a practical guide for engineers and scientists*. Amsterdam; Boston: Newnes.
- Sánchez Loja, R. V. (2018). *Diagnóstico de fallos en cajas de engranajes con base en la fusión de datos de señales de vibración, corriente y emisión acústica* (doctoralThesis, Universidad Pontificia Bolivariana). Descargado de <https://repository.upb.edu.co/bitstream/handle/20.500.11912/4020/DIAGN%c3%93STICO%20DE%20FALLOS%20EN%20CAJAS%20DE%20ENGRANAJES%20CON.....pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Wang, D. (2016, marzo). K-nearest neighbors based methods for identification of different gear crack levels under different motor speeds and loads: Revisited. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 70-71, 201–208. Descargado de <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0888327015004677> doi: 10.1016/j.ymsp.2015.10.007
- Yu, W. (2017). *Dynamic Modelling of Gear Transmission Systems With and Without Localized*

*Tooth Defects*. (doctoralThesis, Queen's University at Kingston, Ontario). Descargado de <http://hdl.handle.net/1974/15935>

Yu, W., Shao, Y., y Mechefske, C. K. (2015, agosto). The effects of spur gear tooth spatial crack propagation on gear mesh stiffness. *Engineering Failure Analysis*, 54, 103–119. Descargado 2021-12-09, de <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1350630715001351> doi: 10.1016/j.engfailanal.2015.04.013

# **ANEXOS**

# Anexo A: Matriz de Consistencia Lógica

Tabla 20

Matriz de consistencia.

Diseño de un sistema de detección y diagnóstico de niveles de severidad de fallos basado en un modelo matemático para una caja de engranajes rectos.				
PROBLEMA GENERAL	OBJETIVO GENERAL	HIPÓTESIS GENERAL	VARIABLES	MARCO TEÓRICO
¿Es posible diseñar un sistema de detección y diagnóstico de niveles de severidad de fallos basado en un modelo matemático para una caja de engranajes rectos?	Diseñar un sistema de detección y diagnóstico de niveles de severidad de fallos basado en un modelo matemático para una caja de engranajes rectos.	Se diseñará un sistema de detección y diagnóstico de niveles de severidad de fallos basado en un modelo matemático para una caja de engranajes rectos.		Sistema de detección y diagnóstico de fallos.
<b>ESPECÍFICOS</b>	<b>ESPECÍFICOS</b>	<b>ESPECÍFICAS</b>		
¿Es posible caracterizar los modelos de rigidez y amortiguamiento para la definición del modelo matemático de una caja de engranajes en condiciones de fallo de diente roto?	Caracterizar los modelos de rigidez y amortiguamiento para la definición del modelo matemático de una caja de engranajes en condiciones de fallo de diente roto.	Se caracterizará los modelos de rigidez y amortiguamiento para la definición del modelo matemático de una caja de engranajes en condiciones de fallo de diente roto.	<b>VI:</b> Señales residuales generadas por los filtros de detección y diagnóstico. <b>VD:</b> niveles de severidad de fallos detectados.	Modelado de fallos, modos de fallo en cajas de engranajes, modelado de rigidez y amortiguamiento en cajas de engranajes, análisis de vibraciones en cajas de engranajes.
¿Se podrá configurar un filtro de detección basado en observadores para una caja de engranajes rectos con base en su modelo matemático?	Configurar un filtro de detección basados en observadores para una caja de engranajes rectos con base en su modelo matemático.	Se configurará un filtro de detección basados en observadores para una caja de engranajes rectos con base en su modelo matemático.		Filtros de detección basados en observadores.
¿Se podrá configurar filtros de diagnóstico generadores de residuales para una caja de engranajes rectos con base en su modelo matemático?	Configurar filtros de diagnóstico generadores de residuales para una caja de engranajes rectos con base en su modelo matemático.	Se configurará filtros de diagnóstico generadores de residuales para una caja de engranajes rectos con base en su modelo matemático.		Filtros de diagnóstico generadores de residuales.
¿Es posible evaluar el diseño del sistema de detección y diagnóstico de niveles de severidad de fallos basado en un modelo matemático para una caja de engranajes rectos a través de la sensibilidad de la señal residual ante diferentes fallos?	Evaluar el diseño del sistema de detección y diagnóstico de niveles de severidad de fallos basado en un modelo matemático para una caja de engranajes rectos a través de la sensibilidad de la señal residual ante diferentes fallos.	Se evaluará el diseño del sistema de detección y diagnóstico de niveles de severidad de fallos basado en un modelo matemático para una caja de engranajes rectos a través de la sensibilidad de la señal residual ante diferentes fallos.		Sistemas de detección y diagnóstico de fallos.

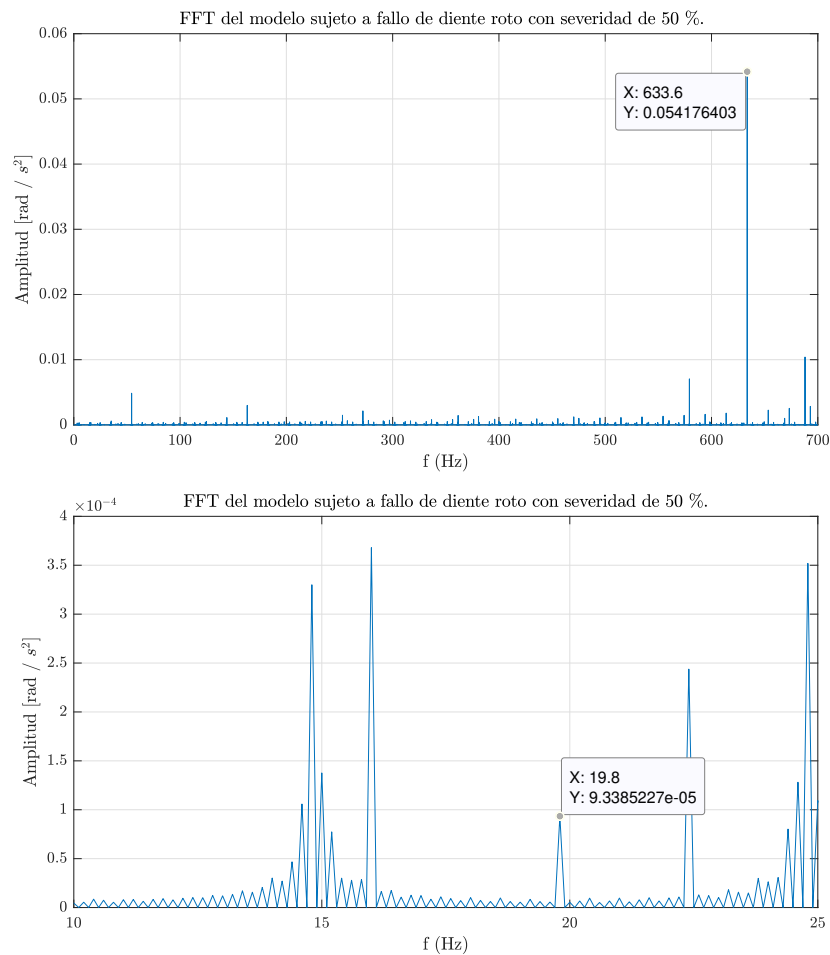
**Nota:** La matriz de consistencia presentada facilita identificar la relación que existe entre las variables y los objetivos además de cómo se relaciona con el marco teórico referencial. Elaborado por el autor.

## Anexo B: Validación de frecuencias características del modelo para condiciones de carga L1 y L2

En la Figura 48 se ilustra el espectro de la FFT de la señal simulada para la carga L1 con una severidad de fallo de diente roto del 50%. Asimismo, en ella se presenta la frecuencia de engranaje  $f_m$  en la ilustración de la parte superior, mientras que la frecuencia de entrada  $f_g$  se indica en la ilustración de la parte inferior.

**Figura 48**

*Espectro de la FFT de la señal simulada para la carga L1 con una severidad de fallo de diente roto del 50%.*



**Nota:** Elaborado por el autor.

En la Tabla 21 se detallan las frecuencias características del espectro de la FFT de la señal simulada para todas las severidades de fallo de la Figura 15 bajo las condiciones de carga L1. Además, en ella se presenta una comparación de estos valores respecto a las frecuencias características calculadas junto al error porcentual entre ambas. Los valores de las frecuencias características del espectro de la FFT para una severidad de fallo del 50% se indican en la Figura 48.

**Tabla 21**

*Comparación de los valores entre las frecuencias características y frecuencias en el espectro de la FFT con condiciones de operación L1 y distintas severidades de fallo de diente roto.*

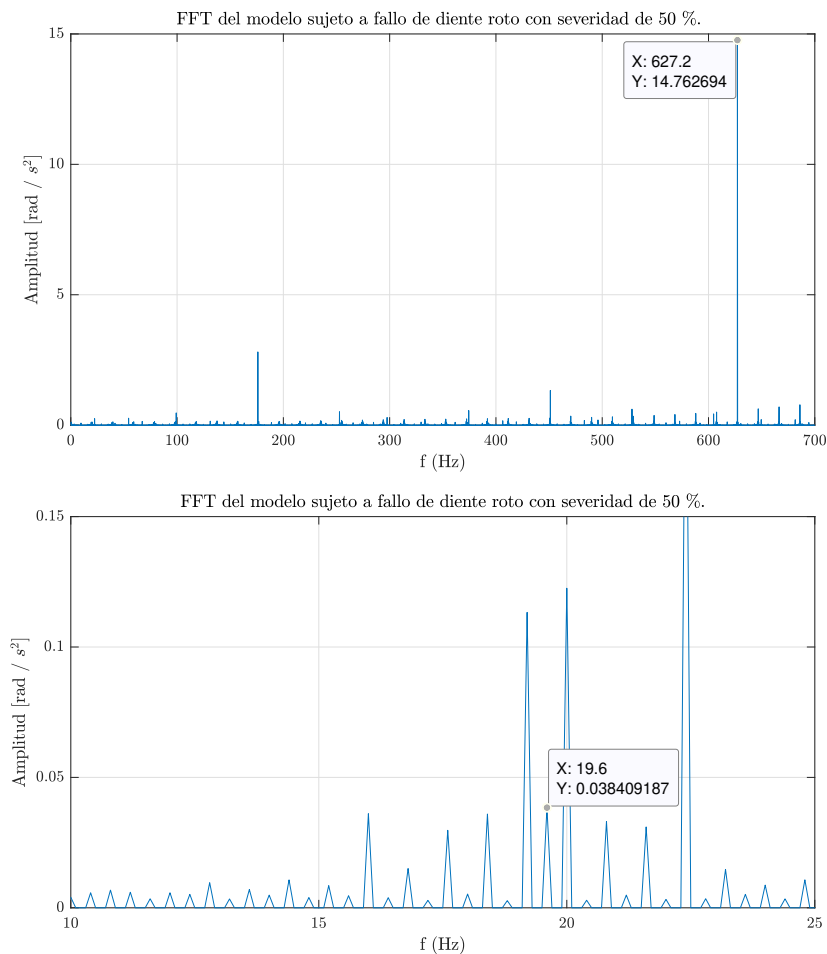
Severidad diente roto	Frecuencia [Hz]	Calculada	FFT del modelo	Error porcentual
0%	$f_m$	633.6	633.6	0%
	$f_g$	19.8	19.2	3.03%
	$f_p$	13.2	12.8	3.03%
12.5%	$f_m$	633.6	633.6	0%
	$f_g$	19.8	19.8	0%
	$f_p$	13.2	No aparece	-
25%	$f_m$	633.6	633.6	0%
	$f_g$	19.8	19.8	0%
	$f_p$	13.2	No aparece	-
37.5%	$f_m$	633.6	633.6	0%
	$f_g$	19.8	19.8	0%
	$f_p$	13.2	No aparece	-
50%	$f_m$	633.6	633.6	0%
	$f_g$	19.8	19.8	0%
	$f_p$	13.2	No aparece	-
62.5%	$f_m$	633.6	633.6	0%
	$f_g$	19.8	19.8	0%
	$f_p$	13.2	No aparece	-
75%	$f_m$	633.6	633.6	0%
	$f_g$	19.8	19.8	0%
	$f_p$	13.2	No aparece	-
87.5%	$f_m$	633.6	633.6	0%
	$f_g$	19.8	19.8	0%
	$f_p$	13.2	No aparece	-
100%	$f_m$	633.6	633.6	0%
	$f_g$	19.8	19.8	0%
	$f_p$	13.2	No aparece	-

**Nota:** Elaborado por el autor.

En la Figura 49 se ilustra el espectro de la FFT de la señal simulada para la carga L2 con una severidad de fallo de diente roto del 50%. Asimismo, en ella se presenta la frecuencia de engranaje  $f_m$  en la ilustración de la parte superior, mientras que la frecuencia de entrada  $f_g$  se indica en la ilustración de la parte inferior.

**Figura 49**

*Espectro de la FFT de la señal simulada para la carga L2 con una severidad de fallo de diente roto del 50%.*



**Nota:** Elaborado por el autor.

En la Tabla 22 se detallan las frecuencias características del espectro de la FFT de la señal simulada para todas las severidades de fallo de la Figura 15 bajo las condiciones de carga L2. Además, en ella se presenta una comparación de estos valores respecto a las frecuencias

características calculadas junto al error porcentual entre ambas. Los valores de las frecuencias características del espectro de la FFT para una severidad de fallo del 50% se indican en la Figura 49.

**Tabla 22**

*Comparación de los valores entre las frecuencias características y frecuencias en el espectro de la FFT con condiciones de operación L2 y distintas severidades de fallo de diente roto.*

Severidad diente roto	Frecuencia [Hz]	Calculada	FFT del modelo	Error porcentual
0%	$f_m$	627.2	627.2	0%
	$f_g$	19.6	19.2	2.04%
	$f_p$	13.1	12.8	2.29%
12.5%	$f_m$	627.2	627.2	0%
	$f_g$	19.6	19.6	0%
	$f_p$	13.1	No aparece	-
25%	$f_m$	627.2	627.2	0%
	$f_g$	19.6	19.6	0%
	$f_p$	13.1	No aparece	-
37.5%	$f_m$	627.2	627.2	0%
	$f_g$	19.6	19.6	0%
	$f_p$	13.1	No aparece	-
50%	$f_m$	627.2	627.2	0%
	$f_g$	19.6	19.6	0%
	$f_p$	13.1	No aparece	-
62.5%	$f_m$	627.2	627.2	0%
	$f_g$	19.6	19.6	0%
	$f_p$	13.1	No aparece	-
75%	$f_m$	627.2	627.2	0%
	$f_g$	19.6	19.6	0%
	$f_p$	13.1	No aparece	-
87.5%	$f_m$	627.2	627.2	0%
	$f_g$	19.6	19.6	0%
	$f_p$	13.1	No aparece	-
100%	$f_m$	627.2	627.2	0%
	$f_g$	19.6	19.6	0%
	$f_p$	13.1	No aparece	-

**Nota:** Elaborado por el autor.

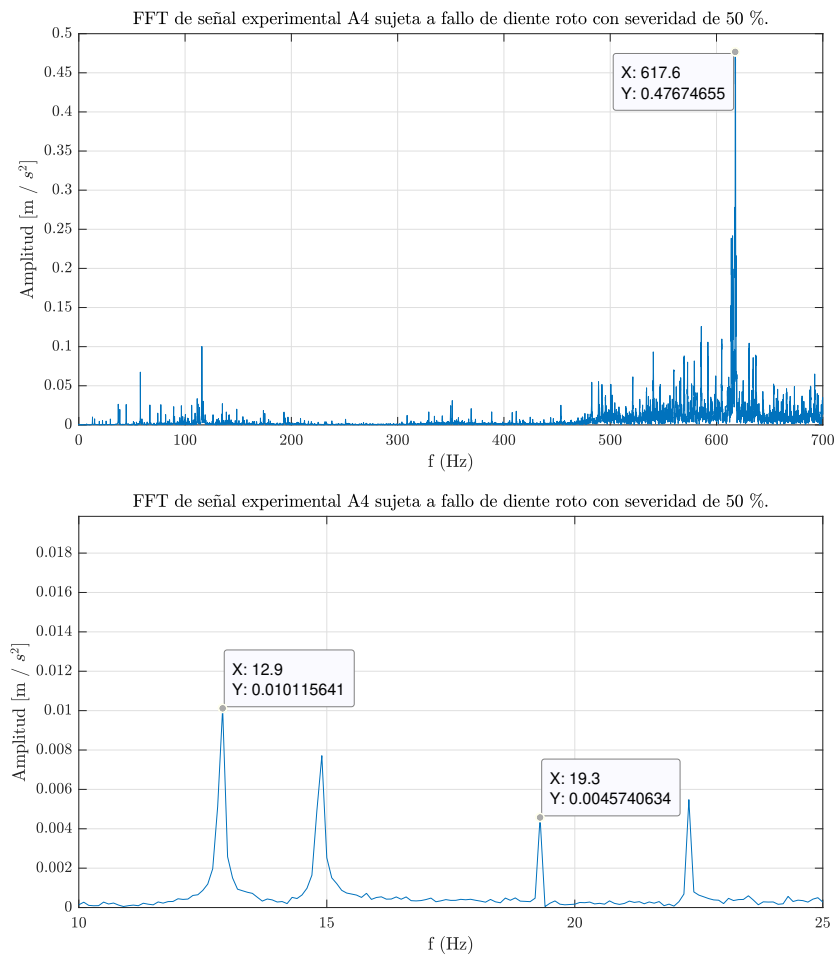


## Anexo C: Comparación de los espectros de la FFT teóricos y experimentales para condiciones de carga L1 y L2

En la Figura 50 se ilustra el espectro de la FFT de la señal del acelerómetro A4 en la que la caja de engranajes se encuentra operando bajo condiciones de carga L1 y con una severidad de fallo de diente roto del 50%. Además, en ella se señala la frecuencia de engranaje  $f_m$ , la frecuencia de entrada  $f_g$  y la frecuencia de salida  $f_p$ .

**Figura 50**

*Frecuencias características en el espectro de la FFT de la señal señal del acelerómetro A4 para la carga L1 con una severidad de fallo de diente roto del 50%.*



**Nota:** Elaborado por el autor.

En la Tabla 23 se detallan las frecuencias características del espectro de la FFT de la señal simulada para todas las severidades de fallo de la Figura 15 bajo las condiciones de carga L1. Además, en ella se presenta una comparación de estos valores respecto a las frecuencias características obtenidas al procesar las señales experimentales de los acelerómetros A3 y A4. Asimismo, se presenta el error porcentual entre ambas. Los valores de las frecuencias características del espectro de la FFT para las señales experimentales con una severidad de fallo del 50% se indican en la Figura 50.

**Tabla 23**

*Comparación de los valores entre las frecuencias características experimentales y frecuencias en el espectro de la FFT del modelo simulado con condiciones de operación L1 y distintas severidades de fallo de diente roto.*

Severidad diente roto	Señal procesada	Frecuencia de engranaje		Error porcentual	Frecuencia de entrada		Error porcentual	Frecuencia de salida		Error porcentual
		Frecuencia	Amplitud		Frecuencia	Amplitud		Frecuencia	Amplitud	
0%	A3	617.7	0.3714	2.57%	19.3	0.04487	0.52%	12.9	0.0006	0.78%
	A4	617.7	0.4977	2.57%	19.3	0.01736	0.52%	12.9	0.0075	0.78%
	Modelo	633.6	0.05216	-	19.2	$1.227 \times 10^{-6}$	-	12.8	$1.022 \times 10^{-6}$	-
12.5%	A3	618.4	0.4464	2.46%	19.3	0.025	2.60%	12.9	0.00627	-
	A4	618.4	0.5253	2.46%	19.3	0.01093	2.60%	12.9	0.06154	-
	Modelo	633.6	0.05242	-	19.8	$1.503 \times 10^{-6}$	-	No aparece	-	-
25%	A3	618.1	0.6544	2.51%	19.3	0.02203	2.60%	12.9	0.0057	-
	A4	618.1	0.8134	2.51%	19.3	0.01024	2.60%	12.9	0.0808	-
	Modelo	633.6	0.05278	-	19.8	$3.667 \times 10^{-6}$	-	No aparece	-	-
37.5%	A3	617.3	0.6029	2.64%	19.3	0.01884	2.60%	12.9	0.0047	-
	A4	617.3	0.9134	2.64%	19.3	0.00734	2.60%	12.9	0.00932	-
	Modelo	633.6	0.05329	-	19.8	$9.423 \times 10^{-5}$	-	No aparece	-	-
50%	A3	617.9	0.3836	2.54%	19.3	0.00857	2.60%	12.9	0.0005	-
	A4	617.6	0.4767	2.60%	19.3	0.00457	2.60%	12.9	0.01012	-
	Modelo	633.6	0.05418	-	19.8	$9.339 \times 10^{-5}$	-	No aparece	-	-
62.5%	A3	617.8	0.2976	2.56%	19.3	0.02604	2.60%	12.9	0.0077	-
	A4	617.8	0.4699	2.56%	19.3	0.01368	2.60%	12.9	0.0065	-
	Modelo	633.6	0.05626	-	19.8	$2.682 \times 10^{-5}$	-	No aparece	-	-
75%	A3	618.2	0.9127	2.49%	19.3	0.01469	2.60%	12.9	0.0005	-
	A4	618.2	0.54	2.49%	19.3	0.00801	2.60%	12.9	0.0017	-
	Modelo	633.6	0.06153	-	19.8	$7.301 \times 10^{-5}$	-	No aparece	-	-
87.5%	A3	618.4	0.2529	2.46%	19.3	0.01607	2.60%	12.9	0.0004	-
	A4	618.4	0.4815	2.46%	19.3	0.0065	2.60%	12.9	0.0111	-
	Modelo	633.6	0.07532	-	19.8	$11.29 \times 10^{-5}$	-	No aparece	-	-
100%	A3	618.4	0.2622	2.46%	19.3	0.04135	2.60%	12.9	0.0004	-
	A4	618.4	0.3777	2.46%	19.3	0.01647	2.60%	12.9	0.0036	-
	Modelo	633.6	0.1148	-	19.8	$4.355 \times 10^{-4}$	-	No aparece	-	-

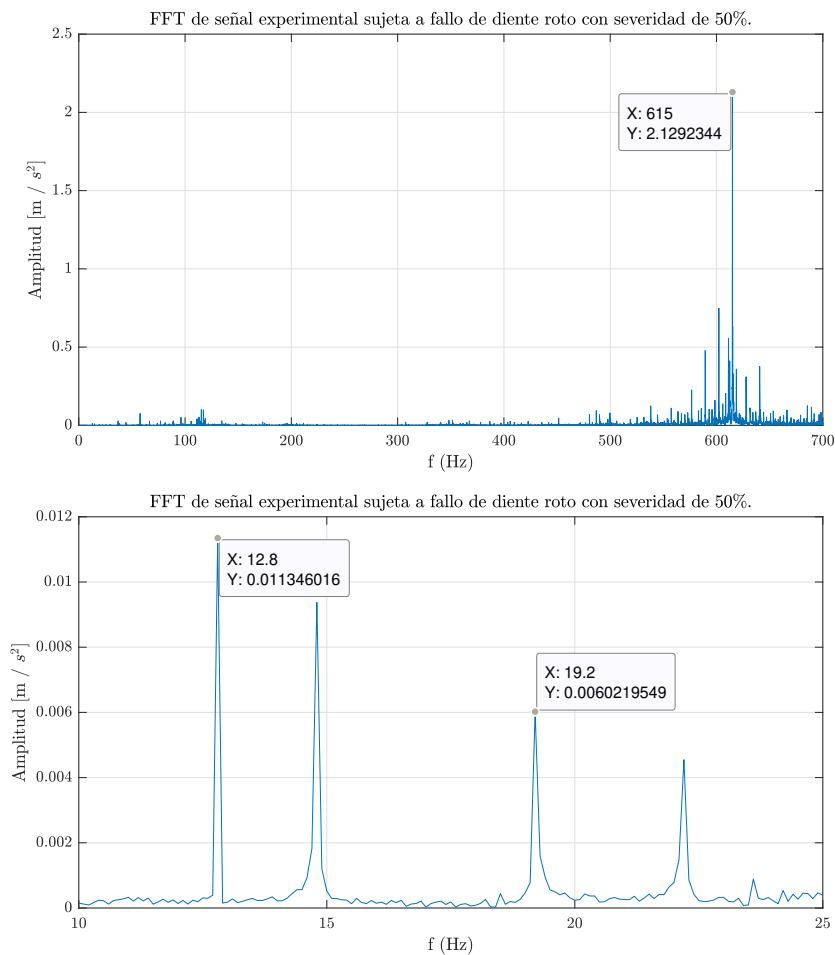
**Nota:** Elaborado por el autor.

En la Figura 51 se ilustra el espectro de la FFT de la señal del acelerómetro A4 en la que

la caja de engranajes se encuentra operando bajo condiciones de carga L2 y con una severidad de fallo de diente roto del 50%. Además, en ella se señala la frecuencia de engranaje  $f_m$ , la frecuencia de entrada  $f_g$  y frecuencia de salida  $f_p$ .

**Figura 51**

*Frecuencias características en el espectro de la FFT de la señal señal del acelerómetro A4 para la carga L2 con una severidad de fallo de diente roto del 50%.*



**Nota:** Elaborado por el autor.

En la Tabla 24 se detallan las frecuencias características del espectro de la FFT de la señal simulada para todas las severidades de fallo de la Figura 15 bajo las condiciones de carga L2. Además, en ella se presenta una comparación de estos valores respecto a las frecuencias características obtenidas al procesar las señales experimentales de los acelerómetros A3 y

A4. Asimismo, se presenta el error porcentual entre ambas. Los valores de las frecuencias características del espectro de la FFT para las señales experimentales con una severidad de fallo del 50% se indican en la Figura 51.

**Tabla 24**

*Comparación de los valores entre las frecuencias características experimentales y frecuencias en el espectro de la FFT del modelo simulado con condiciones de operación L2 y distintas severidades de fallo de diente roto.*

Severidad diente roto	Señal procesada	Frecuencia de engranaje		Error porcentual	Frecuencia de entrada		Error porcentual	Frecuencia de salida		Error porcentual
		Frecuencia	Amplitud		Frecuencia	Amplitud		Frecuencia	Amplitud	
0%	A3	613.9	0.6999	2.17%	19.2	0.05018	0%	12.8	0.0006	0%
	A4	613.9	0.8682	2.17%	19.2	0.01976	0%	12.8	0.00925	0%
	Modelo	627.2	14.2	-	19.2	0.00024	-	12.8	$4.276 \times 10^{-5}$	-
12.5%	A3	614.8	0.7851	2.02%	19.2	0.03676	2.08%	12.8	0.007827	-
	A4	614.8	1.019	2.02%	19.2	0.01542	2.08%	12.8	0.005358	-
	Modelo	627.2	14.28	-	19.6	0.00073	-	No aparece	-	-
25%	A3	615.3	1.519	1.93%	19.2	0.0281	2.08%	12.8	0.0007	-
	A4	615.3	1.958	1.93%	19.2	0.01305	2.08%	12.8	0.00356	-
	Modelo	627.2	14.38	-	19.6	0.00174	-	No aparece	-	-
37.5%	A3	614.5	0.9696	2.07%	19.2	0.02847	2.08%	12.8	0.00061	-
	A4	614.5	1.441	2.07%	19.2	0.01129	2.08%	12.8	0.00697	-
	Modelo	627.2	14.52	-	19.6	0.02404	-	No aparece	-	-
50%	A3	615	1.39	1.98%	19.2	0.01371	2.08%	12.8	0.0007	-
	A4	615	2.129	1.98%	19.2	0.00602	2.08%	12.8	0.01135	-
	Modelo	627.2	14.76	-	19.6	0.03841	-	No aparece	-	-
62.5%	A3	614.7	0.7058	2.03%	19.2	0.04148	2.08%	12.8	0.00093	-
	A4	614.7	1.2	2.03%	19.2	0.02037	2.08%	12.8	0.0064	-
	Modelo	627.2	15.33	-	19.6	0.02265	-	No aparece	-	-
75%	A3	615	1.304	1.98%	19.2	0.02331	2.08%	12.8	0.0006	-
	A4	615	0.7613	1.98%	19.2	0.01112	2.08%	12.8	0.0046	-
	Modelo	627.2	16.75	-	19.6	0.0764	-	No aparece	-	-
87.5%	A3	614.2	0.9693	2.12%	19.2	0.01911	2.08%	12.8	0.0006	-
	A4	614.2	1.892	2.12%	19.2	0.01031	2.08%	12.8	0.0019	-
	Modelo	627.2	20.64	-	19.6	0.07955	-	No aparece	-	-
100%	A3	614.3	0.7179	2.10%	19.2	0.05291	2.08%	12.8	0.0002	-
	A4	614.3	1.209	2.10%	19.2	0.02117	2.08%	12.8	0.00177	-
	Modelo	627.2	31.75	-	19.6	0.1996	-	No aparece	-	-

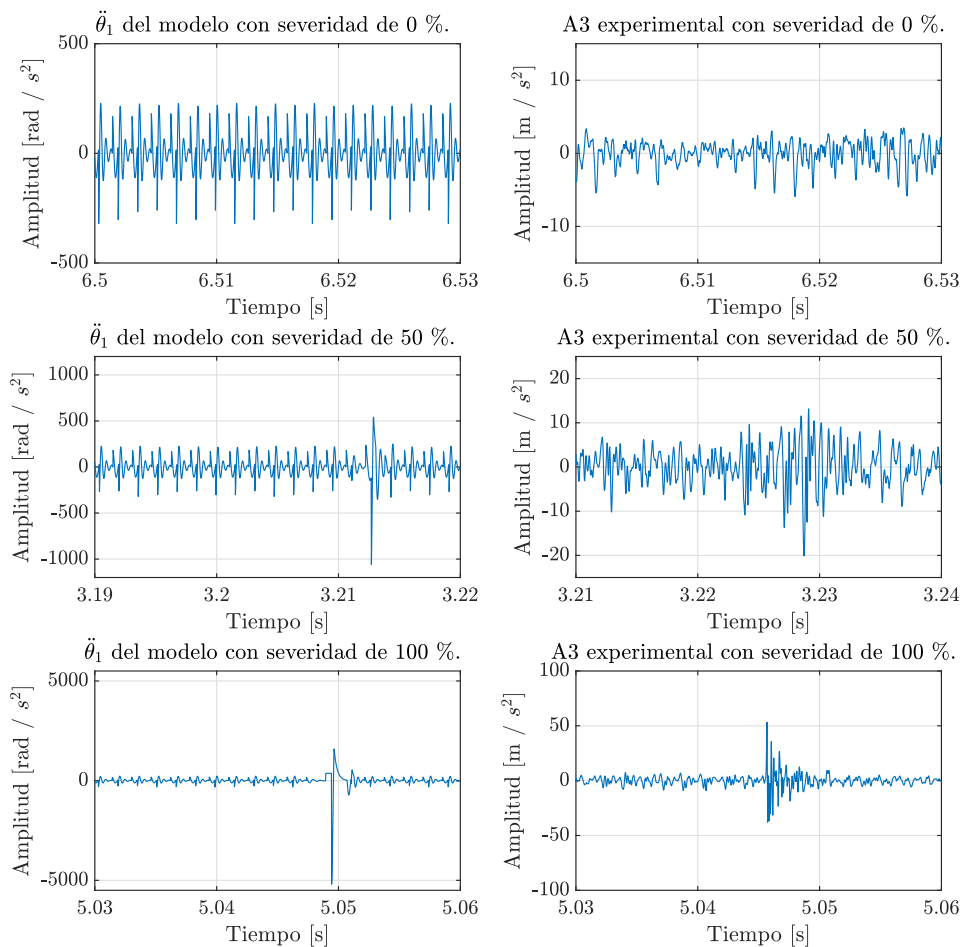
**Nota:** Elaborado por el autor.

## Anexo D: Series temporales teóricas y experimentales para condiciones de carga L2 y L3

En la Figura 52 se ilustran las series temporales simuladas y experimentales de la caja de engranajes operando bajo condiciones de carga L2 con diversas severidades de fallo de diente roto.

**Figura 52**

*Series temporales simuladas y experimentales de la caja de engranajes operando bajo condiciones de carga L2 con diversas severidades de fallo de diente roto.*

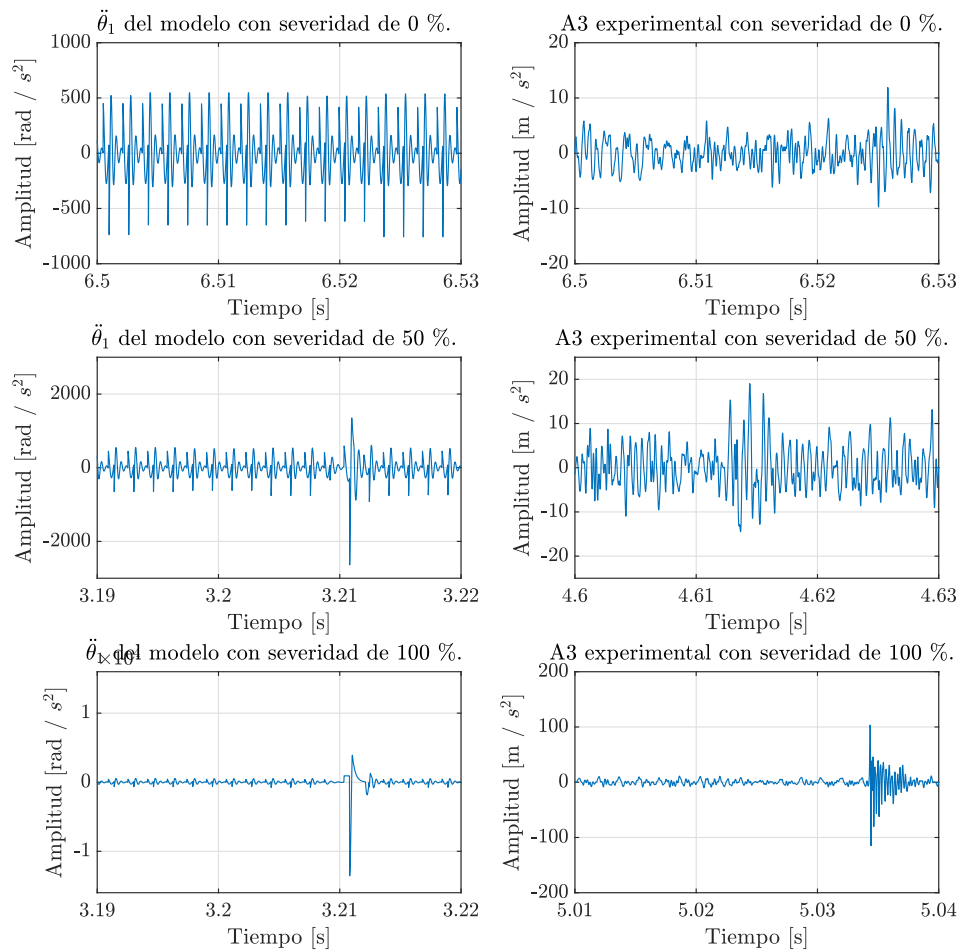


**Nota:** Elaborado por el autor.

Del mismo modo, en la Figura 53 se ilustran las series temporales simuladas y experimentales de la caja de engranajes operando bajo condiciones de carga L3 con diversas severidades de fallo de diente roto.

**Figura 53**

*Series temporales simuladas y experimentales de la caja de engranajes operando bajo condiciones de carga L3 con diversas severidades de fallo de diente roto.*



**Nota:** Elaborado por el autor.

## Anexo E: Códigos de Matlab y diagramas de Simulink

A continuación se detallan los códigos de Matlab y los diagramas de Simulink usados para el cumplimiento de los objetivos planteados en este proyecto.

### Código kmin:

```
function [ka kb ks kf]= kmin(m,rint ,Z,L,alfa ,h_a,c_a,E,v)
r = m*Z/2; %c lculo del radio primitivo
ra = r + h_a*m; % c lculo radio exterior
rf = r - (h_a+c_a)*m; % c lculo radio de ra z
rb = r*cos(alfa); %c lculo radio base
rd=r-(c_a+h_a)*m; % c lculo de radio para uf
G = E/(2*(1+v)); % m dulo cortante
invalfa = tan(alfa)-alfa; %funci n invalfa
tetab = (pi/(2*Z))+ invalfa; % mitad de angulo del diente
y = rb *((tetab+alfa)*cos(alfa)-sin(alfa)); % ubicacion de la fuerza y
x = rb *((tetab+alfa)*sin(alfa)+cos(alfa)-cos(tetab)); % c lculo parametro x
l = rb *((tetab+alfa)*sin(alfa)+cos(alfa))- r; %c lculo l
Ix = (1/12)*(2*y)^3; %c lculo de inercia en secci n x
Ax = 2*y*L; %c lculo de area de secci n x
invks = x*[(1.2*(cos(alfa)^2))/(G*Ax)]; %inverso de ks
invka = x*[((sin(alfa))^2)/(E*Ax)]; %inverso de ka
invkb = x*([(1-x)*cos(alfa)-y*sin(alfa)]^2/(E*Ix)); %inverso de kv
L_d=rb*tetab; %C lculo de ld para kf
rc = 0.2/(1-sin(alfa)); % variar rc = 0.2*m/(1-sin(alfa))
tetaf=[1/Z]*[(pi/2)+(2*tan(alfa)*(h_a-(rc)))+(2*rc/cos(alfa))]; %mitad del angulo de arco sf
S_f=2*tetaf*rd; % arco sf
u_f=x+r-rd-y*tan(alfa); %c lculo parametro u
h_f=rf/rint; %relaci n rf/rinta
C_pcf = [ -5.574e-5 -1.9986e-3 -2.3015e-4 4.7702e-3 0.0271 6.8045;
          60.111e-5 28.100e-3 -83.431e-4 -9.9256e-3 0.1624 0.9086;
          -50.952e-5 185.50e-3 0.0538e-4 53.300e-3 0.2895 0.9236;
          -6.2042e-5 9.0889e-3 -4.0964e-4 7.8297e-3 -0.1472 0.6904];
%Matriz para p rametros de kf
Ai=C_pcf(:,1); Bi=C_pcf(:,2); Ci=C_pcf(:,3); % Valores A,B,C
Di=C_pcf(:,4); Ei=C_pcf(:,5); Fi=C_pcf(:,6); % Valores D,E,F
for i=1:4
    Xi(i)=Ai(i)/tetaf^2 + Bi(i)*h_f^2 + Ci(i)*h_f/tetaf + Di(i)/tetaf + Ei(i)*h_f + Fi(i);
%Ecuaci n para la estimaci n de parametros L*, M*, P* y Q*
end
L_star=Xi(1); M_star=Xi(2); P_star=Xi(3); Q_star=Xi(4); %parametros L*, M*, P* y Q*
invkf=(cos(alfa)^2/(E*L))*(L_star*(u_f/S_f)^2 + M_star*(u_f/S_f) +
P_star*(1+Q_star*(tan(alfa))^2));
%Inverso de kf
ka = 1/invka; % C lculo ka
kb = 1/invkb; % C lculo kb
ks = 1/invks; % C lculo ks
kf = 1/invkf; % C lculo kf
```

### Código geofallos:

```
m = 2.25e-3; %modulo
Z1 = 32; %numero de dientes de engranaje 1
Z2 = 48; %numero de dientes de engranaje 2
alfa = 20; %angulo de presion en grados
alfa = alfa*pi/180; %angulo de presion en radianes
h_a = 1; %altura de inicio
c_a = 0.25; %luz inicial
E = 205e9; % Modulo de Young
v = 0.3; %Modulo de Poisson
L = 20.7e-3; % ancho del diente nominal
por_rotura=25; % porcentaje de rotura
L_fallo= L-(L*por_rotura/100); % ancho del diente en fallo
m1 = 0.5902; %masa engranaje 1
m2 = 1.4092; %masa engranaje 2
rint1=10e-3;%radio interno engranaje 1
```

```

rint2=15e-3; %radio interno engranaje 2
n1 = 1200; % Velocidad engranaje 1
n2 = (Z2/Z1)*n1; % Velocidad engranaje 2
%% Calculo de radios de el engranaje
%Parametros de engranaje 1
r1 = m*Z1/2; %Radio de paso
r_a1 = r1+h_a*m; % radio addendum
r_b1 = r1*cos(alfa); %radio base
%Parametros de engranaje 2
r2 = m*Z2/2; %Radio de paso
r_a2 = r2+h_a*m; % radio addendum
r_b2 = r2*cos(alfa); %radio base

%% Calculo de rigidez nominal
kh = (pi*E*L)/(4*(1-v^2)); %Esfuerzo hertziano
[ka1 kb1 ks1 kf1]= kmin(m,rint1,Z1,L,alfa,h_a,c_a,E,v); % calculo para el primer engranaje
[ka2 kb2 ks2 kf2]= kmin(m,rint2,Z2,L,alfa,h_a,c_a,E,v); % calculo para el primer engranaje
K_A=1./(1./ka1+1./ka2); %c lculo rigidez debido a la compresi n axial
K_B=1./(1./kb1+1./kb2); %c lculo rigidez debido a la flexi n
K_S=1./(1./ks1+1./ks2); %c lculo rigidez debido al cortante
K_F=1./(1./kf1+1./kf2); %c lculo rigidez debido a la deflexi n en el filete
K_h= kh; %c lculo rigidez contacto hertziano
kminimo =1./(1./K_h + 1./K_A + 1./K_B + 1./K_S + 1./K_F) %kmin
kmax = 2 * kminimo %kmax
e = (sqrt(r_a2^2-r_b2^2)+sqrt(r_a1^2-r_b1^2)-(r1+r2)*sin(alfa))/(pi*m*cos(alfa));
% radio de contacto

%% Calculo de amortiguamiento nominal
J1 = (r1*r1)*m1/2; % inercia de la masa de engranaje 1
J2 = (r2*r2)*m2/2; % inercia de la masa de engranaje 2
me = ((r_b1*r_b1/J1)+(r_b2*r_b2/J2)); % masa efectiva
exilon = 0.1; %razon de amortiguamiento
cmin = 2*exilon*sqrt(kminimo*me) %cmin
cmax = 2*exilon*sqrt(kmax*me) %cmin

%% Calculo de rigidez resultante en fallo
kh_fallo = (pi*E*L_fallo)/(4*(1-v^2)); %Esfuerzo hertziano
[ka1_fallo kb1_fallo ks1_fallo kf1_fallo]= kmin(m,rint1,Z1,L_fallo,alfa,h_a,c_a,E,v);
% calculo para el primer engranaje
[ka2_fallo kb2_fallo ks2_fallo kf2_fallo]= kmin(m,rint2,Z2,L_fallo,alfa,h_a,c_a,E,v);
% calculo para el primer engranaje
K_A_fallo=1./(1./ka1_fallo+1./ka2_fallo); %c lculo rigidez debido a la compresi n axial
K_B_fallo=1./(1./kb1_fallo+1./kb2_fallo); %c lculo rigidez debido a la flexi n
K_S_fallo=1./(1./ks1_fallo+1./ks2_fallo); %c lculo rigidez debido al cortante
K_F_fallo=1./(1./kf1_fallo+1./kf2_fallo); %c lculo rigidez debido a la deflexi n en el filete
K_h_fallo= kh_fallo; %c lculo rigidez contacto hertziano
kminimo_fallo =1./(1./K_h_fallo + 1./K_A_fallo + 1./K_B_fallo + 1./K_S_fallo + 1./K_F_fallo) %kmin
kmax_fallo = 2 * kminimo_fallo %kmax
e = (sqrt(r_a2^2-r_b2^2)+sqrt(r_a1^2-r_b1^2)-(r1+r2)*sin(alfa))/(pi*m*cos(alfa)); % radio de contacto

%% Calculo de amortiguamiento resultante en fallo
J1 = (r1*r1)*m1/2; % inercia de la masa de engranaje 1
J2 = (r2*r2)*m2/2; % inercia de la masa de engranaje 2
me = ((r_b1*r_b1/J1)+(r_b2*r_b2/J2)); % masa efectiva
exilon = 0.1; %razon de amortiguamiento
cmin_fallo = 2*exilon*sqrt(kminimo_fallo*me) %cmin
cmax_fallo = 2*exilon*sqrt(kmax_fallo*me) %cmin

%% Calculo de variaci n de rigidez y amortiguamiento en fallo
delta_K=kminimo-kminimo_fallo
delta_Cmax = 2*exilon*sqrt(kmax*me)-2*exilon*sqrt((kmax-delta_K)*me)
%Variaci n de amortiguamiento en tiempo de doble contacto
delta_Cmin = 2*exilon*sqrt(kminimo*me)-2*exilon*sqrt((kminimo-delta_K)*me)
%Variaci n de amortiguamiento en tiempo de simple contacto
delta_Cd= delta_Cmax-delta_Cmin %Diferencia entre variaciones de amortiguamiento

```

## Código archivomaestro:

```

%% Geometria
k_loss=2.9148e-3; %Coeficiente de perdida por friccion

```



```

m = 2.25e-3; %modulo
Z1 = 32; %numero de dientes de engranaje 1
Z2 = 48; %numero de dientes de engranaje 2
alfa = 20; %angulo de presion en grados
alfa = alfa*pi/180; %angulo de presion en radianes
h_a = 1; %altura de inicio
c_a = 0.25; %luz inicial

%% Calculo de radios de el engranaje
%Parametros de engranaje 1
r1 = m*Z1/2; %Radio de paso
r_a1 = r1+h_a*m; % radio addendum
r_f1 = r1-(h_a+c_a)*m; %radio de raiz
r_b1 = r1*cos(alfa); %radio base
%Parametros de engranaje 2
r2 = m*Z2/2; %Radio de paso
r_a2 = r2+h_a*m; % radio addendum
r_f2 = r2-(h_a+c_a)*m; %radio raiz
r_b2 = r2*cos(alfa); %radio base

%% parametros del sistema
Rb1=r_b1; %% Radio base engrane 1 en m
Rb2=r_b2; %% Radio base engrane 2 en m
J1=3.8245e-4+0.00030751+0.004; %% Inercia del engrane 1 en m^4
J2=2.05e-3+0.00030751+ 0.00205136; %% Inercia del engrane 2 en m^4
Kmax=2 * kminimo; %% coeficiente de elasticidad en ?/?
Kminimo=kminimo; %% coeficiente de elasticidad en ?/?
Cmax=cmax; %% coeficiente de friccion N/ms
Cmin=cmin; %% coeficiente de friccion N/ms
b=5*10^(-5); %% N/ms

%% Condiciones L1
% T1=2.521; % Torque entrada en Nm
% T2=0.00934; % Torque carga en Nm L1
% n1 = 1188; % Velocidad L1 revisar

%% Condiciones L2
% T1=3.76; % Torque entrada en Nm
% T2=2.603; % Torque carga en Nm L2
% n1 = 1176; % Velocidad L2

%% Condiciones L3
T1=7.248; % Torque entrada en Nm
T2 = 6.503; % Torque carga L3
n1 = 1158; % Velocidad L2

%% Tiempos para onda cuadrada
Cd = Cmax-Cmin;
e = (sqrt(r_a2^2-r_b2^2)+sqrt(r_a1^2-r_b1^2)-(r1+r2)*sin(alfa))/(pi*m*cos(alfa));
T = 60/(n1*Z1)
td = (e-1)*T;
ts = (2-e)*T;
Tt = 60/n1;
Tpor = td*100/T
Tfa = 2*td+ts;
Tfa = 100*Tfa/Tt;
m11 = 0.5902; %masa engranaje 1
m21 = 1.4092; %masa engranaje 2
J11 = (r1*r1)*m11/2; % inercia de la masa de engranaje 1
J21 = (r2*r2)*m21/2; % inercia de la masa de engranaje 2
me = ((r_b1*r_b1/J11)+(r_b2*r_b2/J21)); % masa efectiva

```

## Código espacioestados:

```

%% Matrices para representaci n del sistema en espacio de estados.
B=[1/J1 0; 0 -1/J2; 0 0; 0 0]; %Vector de entradas
C=[1 0 0 0; 0 1 0 0]; %Vector de salida

%% Coeficientes para matriz A.
%Matriz A1 y A3

```

```

A111=-((Rb1^2))/J1;
A112=Rb1*Rb2/J1;
A113=-((Rb1^2))/J1;
A114=Rb1*Rb2/J1;

A121=Rb1*Rb2/J2;
A122=-((Rb2^2))/J2;
A123=Rb1*Rb2/J2;
A124=-((Rb2^2))/J2;

%Matriz A2
A211=-((Rb1^2))/J1;
A212=Rb1*Rb2/J1;

A221=Rb1*Rb2/J2;
A222=-((Rb2^2))/J2;

%% Coeficientes para matriz W
TI111=Rb1*b/J1;
TI121=-Rb2*b/J2;

TI311=-Rb1*b/J1;
TI321=Rb2*b/J2;

%% Coeficientes para matriz A_f.
%Matriz A1 y A3
Af111=((Rb1^2))/J1;
Af112=-Rb1*Rb2/J1;
Af113=(Rb1^2)/J1;
Af114=-Rb1*Rb2/J1;

Af121=-Rb1*Rb2/J2;
Af122=(Rb2^2)/J2;
Af123=-Rb1*Rb2/J2;
Af124=(Rb2^2)/J2;

%Matriz A2
Af211=(Rb1^2)/J1;
Af212=-Rb1*Rb2/J1;

Af221=-Rb1*Rb2/J2;
Af222=(Rb2^2)/J2;

%% Coeficientes para matriz W_f
TIf111=-Rb1*b/J1;
TIf121=Rb2*b/J2;

TIf311=Rb1*b/J1;
TIf321=-Rb2*b/J2

```

## Código disenodeteccion:

```

%% Determinación de polinomios característicos del observador para cada subsistema.
A1y3d=[-(Rb1^2*Cmax+k_loss)/(J1) Rb1*Rb2*Cmax/(J1) -(Rb1^2*Kmax)/(J1) Rb1*Rb2*Kmax/(J1);
Rb1*Rb2*Cmax/(J2) -Rb2^2*Cmax/(J2) Rb1*Rb2*Kmax/(J2) -Rb2^2*Kmax/(J2);
1 0 0 0; 0 1 0 0];

A1y3s=[-(Rb1^2*Cmin+k_loss)/(J1) Rb1*Rb2*Cmin/(J1) -(Rb1^2*Kminimo)/(J1) Rb1*Rb2*Kminimo/(J1);
Rb1*Rb2*Cmin/(J2) -Rb2^2*Cmin/(J2) Rb1*Rb2*Kminimo/(J2) -Rb2^2*Kminimo/(J2);
1 0 0 0; 0 1 0 0];

A2d=[-(Rb1^2*Cmax+k_loss)/(J1) Rb1*Rb2*Cmax/(J1) 0 0;
Rb1*Rb2*Cmax/(J2) -Rb2^2*Cmax/(J2) 0 0;
1 0 0 0; 0 1 0 0];

A2s=[-(Rb1^2*Cmin+k_loss)/(J1) Rb1*Rb2*Cmin/(J1) 0 0;
Rb1*Rb2*Cmin/(J2) -Rb2^2*Cmin/(J2) 0 0;
1 0 0 0; 0 1 0 0];

%% Vector de salidas y ganancias ajustadas
C=[1 0 0 0; 0 1 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1]; %Vector de salida

```

```

L=[9 0.02 0.02 0.02; 0.02 9 0.02 0.02; 0.02 0.02 9 0.02; 0.02 0.02 0.02 9];
%Vector de ganancias del observador

%% Verificaci n de polos estables para observador
syms s
coeff_1y3d=flipplr (coeffs (collect (det (s*eye (4)-(A1y3d-L*C))), s));
vpa (roots (coeff_1y3d))
vpa (coeff_1y3d)

coeff_1y3s=flipplr (coeffs (collect (det (s*eye (4)-(A1y3s-L*C))), s));
vpa (roots (coeff_1y3s))
vpa (coeff_1y3s)

coeff_2d=flipplr (coeffs (collect (det (s*eye (4)-(A2d-L*C))), s));
root2=vpa (roots (coeff_2d))
vpa (coeff_2d)
asd=vpa (flipplr (coeffs ((s-root2 (1))*(s-real (root2 (2)))*(s-real (root2 (3)))*(s-real (root2 (4))))))
vpa (roots (asd))

coeff_2s=flipplr (coeffs (collect (det (s*eye (4)-(A2s-L*C))), s));
vpa (roots (coeff_2s))
vpa (coeff_2s)

```

## Código disenodiagnostico:

```

%% DISEÑO DE FILTRO DE DIAGNOSTICO %%
%% Matriz X
rng ('default')
X=1e-15*rand (4,2)

%% Matriz G
%Subsistema 1 y 5
G1=[0 0 0 -19591909400.73922;
    1 0 0 -4243444667.33401;
    0 1 0 -229792032.04803;
    0 0 1 -5724.10413]

eig (G1)

%% Coeficientes de polinomio característico
%Subsistema 1 y 5
a_0_1y5= 0;
a_1_1y5= 100838011.581337;
a_2_1y5= 230041638.308535;
a_3_1y5= 5688.104126;
a_4_1y5= 1;

%% Cálculo de matriz Y
%% Subsistema 1 y 5
Y1= [X G1*X G1^2*X G1^3*X]

%% Cálculo de matriz J
C=[1 0 0 0;0 1 0 0];

%% Subsistema 1 y 5
A1d=[-(Rb1^2*Cmax+k_loss)/(J1) Rb1*Rb2*Cmax/(J1) -(Rb1^2*Kmax)/(J1) Rb1*Rb2*Kmax/(J1);
    Rb1*Rb2*Cmax/J2 -Rb2^2*Cmax/J2 Rb1*Rb2*Kmax/J2 -Rb2^2*Kmax/J2;
    1 0 0 0; 0 1 0 0];

M_J1= [a_4_1y5*C*A1d^3+a_3_1y5*C*A1d^2+a_2_1y5*C*A1d+a_1_1y5*C;
    a_4_1y5*C*A1d^2+a_3_1y5*C*A1d+a_2_1y5*C;
    a_4_1y5*C*A1d+a_3_1y5*C;
    a_4_1y5*C]

%% Cálculo de matriz T
%% Subsistema 1 y 5
M_T1= Y1*M_J1

%% Cálculo de matriz L
%% Subsistema 1 y 5
C_G1=a_4_1y5*G1^4+a_3_1y5*G1^3+a_2_1y5*G1^2+a_1_1y5*G1+a_0_1y5*eye (4)

```

```

L1=C_G1*X

%% Selecci n de C_N
C_N=[0 0 1 0; 0 0 0 1]

%% Condiciones para C_N
rank([C ; C_N])

C*transpose(C_N)

%Se cumplen.

%% Despejar matriz W
%Subsistema 1 y 5
syms k1_1 k2_1 k3_1 k4_1 k5_1 k6_1 k7_1 k8_1
W1=[k1_1 k2_1 k3_1 k4_1 ; k5_1 k6_1 k7_1 k8_1]
resp1= W1*M_T1*transpose(C_N)
eq1=resp1(1)
eq2=resp1(3)
[A,B] = equationsToMatrix([eq1, eq2], [k1_1 k2_1 k3_1 k4_1])
A=double(A)

f=@(x) [A(1)*x(1)+A(3)*x(2)+A(5)*x(3)+A(7)*x(4);
        A(2)*x(1)+A(4)*x(2)+A(6)*x(3)+A(8)*x(4)]
opts = optimoptions(@fsolve, 'Algorithm', 'levenberg-marquardt', 'Display', 'iter');
[x1 fval]=fsolve(f, [1 1 1 1],opts)

vpa(subs(eq1,[k1_1 k2_1 k3_1 k4_1],[x1(1) x1(2) x1(3) x1(4)]))
vpa(subs(eq2,[k1_1 k2_1 k3_1 k4_1],[x1(1) x1(2) x1(3) x1(4)]))

eq3=resp1(2)
eq4=resp1(4)
[A1,B1] = equationsToMatrix([eq3, eq4], [k5_1 k6_1 k7_1 k8_1])
A1=double(A1)

f1=@(x) [A1(1)*x(1)+A1(3)*x(2)+A1(5)*x(3)+A1(7)*x(4);
        A1(2)*x(1)+A1(4)*x(2)+A1(6)*x(3)+A1(8)*x(4)]
opts = optimoptions(@fsolve, 'Algorithm', 'levenberg-marquardt', 'Display', 'iter');
[x2 fval]=fsolve(f1, [1 1 1 1],opts)

vpa(subs(eq3,[k5_1 k6_1 k7_1 k8_1],[x2(1) x2(2) x2(3) x2(4)]))
vpa(subs(eq4,[k5_1 k6_1 k7_1 k8_1],[x2(1) x2(2) x2(3) x2(4)]))

W1_num=[x1(1) x1(2) x1(3) x1(4);x2(1) x2(2) x2(3) x2(4)]
W1_num*M_T1*transpose(C_N)

%% C lculo de V
V1=W1_num*M_T1*transpose(C)*((C*transpose(C))^-1)

%% C lculo de H
B=[1/J1 0; 0 -1/J2; 0 0; 0 0]
H1=M_T1*B

```