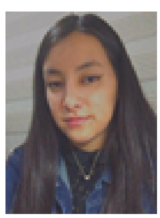
REVISTA

JUVENTUD Y CIENCIA SOLIDARIA:

En el camino de la investigación

Uso de las derivadas en la vida diaria

Sofía Alejandra Vásquez Astudillo



Sofía Alejandra Vásquez Astudillo, tengo 18 años. Estudio en el 3.º BGU de la Unidad Educativa Particular Salesiana María Auxiliadora. Me gusta escribir, leer, escuchar música, mirar películas o documentales de crímenes y misterios. En la universidad quiero estudiar la carrera de Comunicación.

Resumen

Con el paso del tiempo aprendemos operaciones, términos matemáticos, y todo lo que tiene que ver con el mundo de los números de una manera muy sencilla. Cuando avanzamos a cursos o grados mayores aprendemos más en función de lo ya conocido y exploramos más términos de las matemáticas, hasta que en algún momento hay cosas nuevas y según nosotros complejas que pensamos nunca haber conocido, aprendido o puesto en práctica. Luego de conocer cada tema, inconscientemente lo aplicamos en nuestra vida cotidiana, pensando que estamos haciendo algo completamente ordinario, sin complejidad y sin sentido. Sencillamente, uno no necesita aplicar todo el proceso matemático fuera de la escuela, sino que lo aplicamos de otra forma sin hacer un proceso complejo, sin muchos cálculos matemáticos. El objetivo de este artículo investigativo es dar a conocer las diferentes aplicaciones que tiene el cálculo diferencial, como en la medicina, física, razones de cambio y optimización de productos. Por consiguiente, las derivadas ayudan en cualquier momento de la vida o en cualquier campo de trabajo, siendo así una buena ayuda para el desarrollo de esta, comprendiendo todo lo que conlleva este término matemático.

Palabras clave: cálculo diferencial, derivada, física, medicina, optimización, razones de cambio

Explicación del tema

Historia de la derivada

Ideas abordadas por Johannes Kepler, René Descartes, Pierre de Fermat y Galileo Galilei, fueron de ayuda para que posteriormente, en los siglos XVII y XVIII, Isaac Newton y Gottfried Leibniz las sistematizaran y generalizaran para la construcción de los principios del cálculo diferencial [1]. Cada uno de ellos empezó aportando algo al mundo de las matemáticas, agilizando el paso a los demás creadores al poder modificar el trabajo, fórmulas o estudios que ya estaban comprobados.

Las derivadas, las integrales y sus reglas fueron sintetizadas a finales del siglo XVII. Newton en 1665 desarrolló su propio método para calcular la tangente, de esta manera, encontrando un algoritmo para poder derivar funciones algebraicas que coincidan con lo estudiado por Fermat. Al final de este mismo año se dedicó a reestructurar las bases del cálculo diferencial. Por otro lado, en 1675 Leibniz comienza a desarrollar el cálculo diferencial, publicando así los mismos resultados que diez años antes fueron descubiertos por Newton, puesto que en su investigación decide conservar el carácter geométrico y además trata a la derivada como un cociente incremental. [2]

De esta manera, es como dos grandes de las matemáticas en diferentes épocas nos dan lo que hoy conocemos de manera más fácil y con toda la información a nuestro alcance, logrando así que derivar sea algo un poco más simple.

Figura 1. Creadores del cálculo diferencial.
Fuente: shorturl.at/uQ156

¿Qué es derivar?

«La derivada de una función puede interpretarse geométricamente como la pendiente de una curva, y físicamente como una razón "instantánea" de cambio» [3]. Al momento de derivar podemos encontrar la segunda ecuación de la ya existente, pero nosotros podemos seguir derivando sin un límite máximo, de esta manera, el resultado nos pueda dar 0.

Como en todas las matemáticas existen o hay reglas que seguir para no realizar las operaciones sin equivocaciones, y las derivadas no son la excepción, estas también tienen reglas que seguir en todo momento del proceso. Para calcular la derivada podemos usar la tan conocida «Derivada por definición», en donde usamos límites como se aprecia en la Ecuación (1).

$$f'(a) = \lim_{n \to 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right) \tag{1}$$

Si no se desea usar los límites para desarrollarlas, debemos conocer las reglas de la derivada para tener otras opciones de resolución.

Importancia de las derivadas

Como en todas las matemáticas y sus explicaciones, cada una tiene una importancia que cumplir dentro de su materia, de esta manera, comprendiendo de mejor manera el porqué es relevante para las personas, así es como las derivadas también tienen importancia dentro del dominio matemático.

Las derivadas aportan información concreta a los expertos y estudiantes, puesto que se pueden interpretar de diferentes maneras y tiene la capacidad de ofrecer más información acerca de nuestra propia existencia. Podemos aplicarlas en cosas habituales como el vuelo de un avión, el movimiento de un coche, la construcción de un edificio o de otras cosas más que para nosotros pueden ser normales, pero que sin el uso de las derivadas no serían posibles. [4]

Aplicaciones de la derivada en la vida diaria

Luego de conocer todo esto sobre las derivadas, su historia, y saber cómo ponerlas en práctica como una operación matemática, debemos saber que esto mismo podemos realizarlo en el día a día. Estas serán una base para poder desarrollar otras cosas con su uso, como lo son en problemas de física, economía, medicina, química, etc.

Aplicación en la física

La física tiene varias aplicaciones importantes en la matemática, y una de ellas es la derivada, a la cual se le suele llamar diferenciación, pues este término se lo suele emplear dentro de estudios más amplios. Conociendo que la derivada expresa el cambio instantáneo que va a experimentar una variable con respecto a otra, dentro de la física el uso de la derivada es muy práctico y útil al momento de que empleamos la velocidad de cualquier cuerpo en relación o con respecto al tiempo empleado. [5]

«Si $s = f(t)$ es la función de posición de una partícula que se moverá en línea recta, entonces esta representará el promedio de la velocidad en un periodo t, y representa la velocidad instantánea o la razón de cambio del desplazamiento con respecto al tiempo. La razón del cambio instantáneo de la velocidad con respecto al tiempo es la aceleración: Pero así conocemos fórmulas para resolver con facilidad usando las derivadas». [6]

Fórmulas de la derivada para aplicarlas en la Física.

La función original será el espacio, expresado por:

$$\mathrm{s} = f(t) \tag{2}$$

La función de la velocidad será la primera derivada del espacio, expresada por:

$$\mathrm{v} = s' = \frac{ds}{dt} \tag{3}$$

La función de la aceleración será la segunda derivada del espacio, expresada por:

$$a = s'' = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt} \tag{4}$$

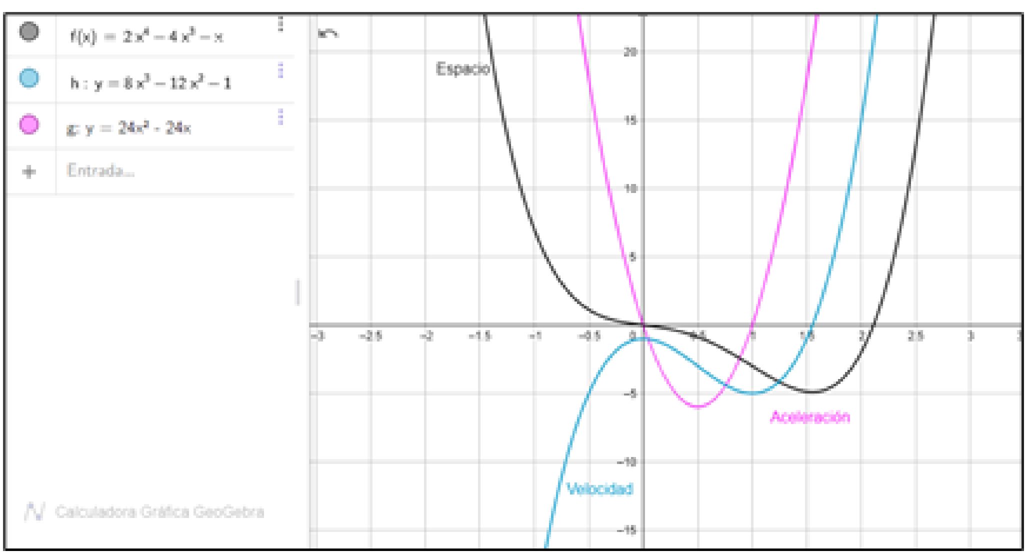


Figura 2. Gráficas de la función del espacio (gris), velocidad (celeste) y aceleración (rosa), con respecto al tiempo Fuente: Autora

Aplicación en la optimización

La optimización de funciones es el resultado de los máximos y mínimos relativos de una función sometido a varias restricciones, por ejemplo, podremos calcular con precisión cuáles serían las medidas mínimas que necesita una lata de refresco para que contenga un cierto volumen. Pues, son numerosos los problemas que surgen de las empresas para la fabricación de un producto en una cierta cantidad de unidades y conseguir el máximo beneficio de este. Una vez que tengamos la función a optimizar o también conocida como función objetiva, obtendremos los extremos relativos mediante la derivada de la función y también realizando una igualación a cero, y posterior a esto nos dará una ecuación a resolver y sus soluciones serán las posibles respuestas que logren satisfacer a dicho problema. [7]

Pues, esta aplicación de la derivada se la conoce como máximos, mínimos y concavidad, así el tema es mucho más fácil de manejarlo y comprenderlo. A continuación, un ejercicio de la aplicación de la derivada en la optimización: Se necesita construir una caja sin tapa con una lámina rectangular de largo 24 cm y ancho 12 cm. Determine:

a) ¿Cuál es la medida del lado del cuadrado que debe cortarse en cada esquina para maximizar el volumen de la caja?

b) ¿Cuál es el valor de dicho volumen máximo?

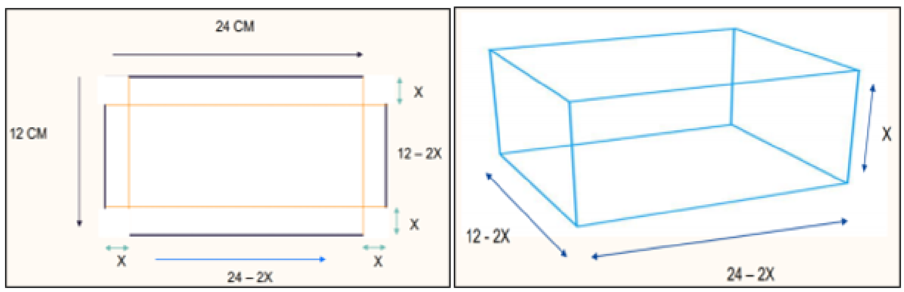


Figura 3. Lamina original y caja sin tapa del ejemplo
Fuente: Autora

Posterior a la realización de la imagen lo que debemos hacer es encontrar la función objetivo que nos ayudara en todo el problema, para esta debemos multiplicar todos los lados de la caja armada sin tapa.

$$V = (24 - 2x)(12 - 2x)(x)$$

$$V = 4x^3 - 72x^2 + 288x$$

Luego de esto, lo que haremos es usar las derivadas para poder sacar dos ecuaciones más y obtener los máximos, mínimos y los puntos de inflexión, al momento de tener esto podremos obtener la medida de x, que es 2,54 cm. Podremos obtener el volumen máximo de esta caja sin tapa, reemplazando ese valor en la función objetivo; así el resultado final que será de 332,55 cm^3.

Aplicación en razones de cambio en llenado de tanque

Las razones de cambio las podemos encontrar en la cotidianidad, en cualquier campo que desempeña el ser humano, estos pueden ser económicos, sociales, científicos, entre otros. En estas situaciones siempre nos interesará conocer, cuál es el valor mínimo, el valor máximo, cuándo y cómo crece o cuándo y cómo disminuye, pero este valor siempre se debe determinar en un tiempo específico. [8]

«A un problema en que intervengan razones de cambio, respecto al tiempo, de variables relacionadas, se le llama problema de rapideces de variación relacionadas, las variables tienen una relación específica para valores de t. Esta relación suele expresarse en forma de una ecuación, con frecuencia, los valores de las variables y sus velocidades de cambio con respecto a t se expresan en un instante dado ya que ellas cambian a cada momento». [9]

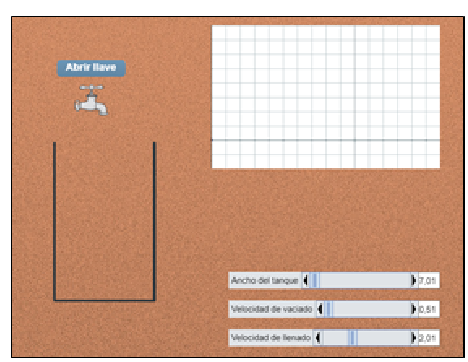


Figura 4. Simulador la derivada como razón de cambio
Fuente: shorturl.at/tCGU1

Tomando en cuenta una razón de cambio con respecto al llenado de combustible o de tanque, tenemos el siguiente ejemplo:

El tanque de combustible de un vehículo de competencia fabricado de fibra de vidrio tiene una forma de paralelepípedo de medidas en centímetros: base 80 × 40; altura 45. Se vierte combustible desde un surtidor con un caudal de 8000 cm3/min. Determinar:

a. La rapidez a la cual el nivel del combustible sube.

b. ¿En qué tiempo se llenará el tanque?

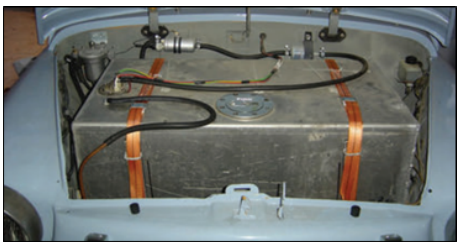


Figura 5. Tanque de combustible del ejemplo
Fuente: shorturl.at/cszDK

Para resolver el problema debemos seguir los siguientes pasos:

Como podemos darnos cuenta el problema está en llenar el volumen contenido dentro del tanque de combustible, al ser una figura homogénea no presenta mayor complicación; para ello debemos crear la función del volumen del tanque y saber que mientras se llena el tanque las medidas de la base se mantienen constantes mientras que lo que va variando es la altura de llenado del tanque. El volumen de llenado y la altura dependen del tiempo que vaya transcurriendo, la función queda definida de la siguiente manera:

$$\mathrm{V}(t) = (80\mathrm{cm})(40\mathrm{cm})h(t)$$

Si derivamos esta expresión con respecto al tiempo tenemos:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\frac{dv}{dt}}{3200\mathrm{cm}^2}$$

Reemplazando el dato del caudal que representa la rapidez de cambio del volumen con respecto al tiempo tenemos:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{8000\frac{\mathrm{cm}^3}{min}}{3200\mathrm{cm}^2}$$

$$\frac{dh}{dt} = 2,5\frac{cm}{min}$$

Lo que significa que por cada minuto que pasa la altura sube 2,5 cm; esto para cualquier instante de tiempo debido a que el tanque tiene una forma homogénea.

b. Para determinar en qué tiempo se llenará el tanque, con el dato encontrado en el punto anterior y el valor de la altura del tanque podemos encontrar el tiempo de llenado. La altura del tanque es 45 cm, mientras que la rapidez a la cual sube el nivel de combustible es de 2,5 cm/min eso significa que si dividimos 45 para 2,5 nos va a dar el tiempo de llenado del tanque y se puede comprobar que las unidades si son correspondientes.

$$tiempo\ de\ llenado = \left(\frac{45\ cm}{2,5\ \frac{cm}{min}}\right)$$

$$tiempo\ de\ llenado = 18min$$

Aplicación en la medicina

Muchos estudios han dado a entender que la derivada se usa más para realizar con respecto a la variabilidad de la presión arterial, y esto se usa para tener una visibilidad de cómo es el comportamiento de las ondas dentro de la presión arterial de las personas [5]. Así es como las derivadas hacen un poco más fácil los estudios que se realizan, la medicina también usa mucho los máximos y mínimos.

A continuación, realizaremos un ejercicio de la aplicación de la derivada en la medicina:

Si quiere estudiar la velocidad de reacción de dos fármacos. Sea $C\left(\frac{gr}{dl}\right)$ la concentración del fármaco en sangre y t (en horas) el tiempo transcurrido después de ser inyectado por vía intravenosa. Se dan las siguientes reacciones:

- Para el fármaco 1: $C_1 = t - 3t^3$
- Para el fármaco 2: $C_2 = 48t - t^3$

Se desea saber, ¿cuál de los dos fármacos alcanza su máxima concentración en menor tiempo?

Para eso se deben primero buscar los puntos críticos de cada función y derivar cada una e igualarlas a cero.

$$
\begin{aligned}
C_1 &= t - 3t^3 \\
\frac{d(C_1)}{dt} &= 1 - 9t^2 \\
0 &= 1 - 9t^2 \\
9t^2 &= 1 \\
t &= \sqrt{\frac{1}{9}}
\end{aligned}
$$

$$t_1 = \frac{1}{3}$$

$$t_2 = -\frac{1}{3}$$

El tiempo no puede ser negativo, así que esta respuesta no satisface a la ecuación.

$$
\begin{aligned}
C_2 &= 48t - t^3 \\
\frac{d(C_2)}{dt} &= 48 - 3t^2 \\
0 &= 48 - 3t^2 \\
3t^2 &= 48 \\
t &= \sqrt{\frac{48}{3}}
\end{aligned}
$$

$$t_1 = 4$$

$$t_2 = -4$$

El tiempo no puede ser negativo, así que esta respuesta no satisface a la ecuación.

Teniendo ya los puntos críticos de cada fármaco verificamos que estos sean los puntos máximos para cada función, para esto debemos reemplazar el punto crítico, en la segunda derivada.

$$\frac{d^2\left(C_1\right)}{dt^2} = -18t$$

$$\frac{d^2\left(C_1\right)}{dt^2} = -18\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\frac{d^2\left(C_1\right)}{dt^2} = -6$$

Como la segunda derivada resulta ser de signo negativo, podemos concluir que el punto crítico es un máximo.

$$\frac{d^2\left(C_2\right)}{dt^2} = -6t$$

$$\frac{d^2\left(C_2\right)}{dt^2} = -6\left(4\right)$$

$$\frac{d^2\left(C_2\right)}{dt^2} = -24$$

Como la segunda derivada resulta ser de signo negativo, de la misma forma, podemos concluir que el punto crítico es un máximo.

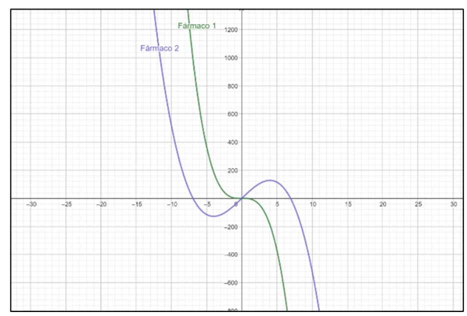


Figura 6. Grafica del ejemplo propuesto.
Fuente: Autora

El resultado del problema desarrollado, podemos decir que el fármaco 1 llega más rápido a su máxima concentración tardando $\frac{1}{3}$ h, en cambio, el fármaco 2 tarda 4 h en llegar a su máxima concentración. [10]

Dentro de la medicina eso es diferente puesto que los médicos emplean los máximos y mínimos cuándo se va a aplicar un medicamento y desean saber cuál será la concentración máxima de dicho medicamento en el cuerpo del paciente. Además, esta también se suele utilizar para conocer la máxima y la mínima intensidad del ritmo cardíaco de una persona cuando está realizando cualquier tipo de ejercicio físico, especialmente es usado en aquellos que sufren enfermedades cardíacas ya que tomando en cuenta los resultados que arroje, se puede prescribir la cantidad de ejercicios que deben realizar diariamente. [11]

Conclusiones

A través de este trabajo investigativo se llegó a la conclusión, de que la derivada puede formar parte de nuestro día a día de una manera extraordinaria. Así es como nos damos cuenta que es muy importante comprender y saber derivar fórmulas, ya que su aplicación será aprovechada dentro de cualquier campo de trabajo o para la ciencia en general.

Las aplicaciones de estas mismas son muy variadas, principalmente porque en el cálculo diferencial es aplicado en la física moderna, en cambios de temperatura de los cuerpos como la ley de enfriamiento de Newton, entre otros. Combinar la física y la derivada ahorran el uso de varias fórmulas, además de obtener de manera más sencilla y rápida los resultados, comprendiendo todo de una mejor manera. Por otro lado, en la optimización, se pudo concluir que esto puede ayudar mucho en la fabricación de productos, ya que esta ayuda a tener mejores resultados y sacar el máximo beneficio de los productos.

Por último, el uso de la derivada en la medicina, nos permite deducir que esta operación matemática no solo la usaremos en campos como la ingeniería o únicamente técnicos, sino que también dentro de la ciencia la podemos ocupar de una manera muy interesante, ya que se puede ligar o unificar estos dos temas en uno solo. El conocer de matemáticas dentro de nuestra educación nos ayuda a querer saber más a explorar por el mundo de los números, así hacer las cosas por inercia propia como desglosar o como en este caso como derivar términos.

«Los encantos de esta ciencia sublime, las matemáticas, solo se le revelan a aquellas que tienen el valor de profundizar en ella». Carl Friedrich Gauss

Bibliografía

[1] Lozano, Y. (Julio de 2011). *Desarrollo del concepto de la derivada sin la noción del límite*. Fundación Universitaria Konrad Lorenz-Facultad de Matemáticas e Ingenierías. Recuperado de shorturl.at/huBNX

[2] Linares, D. (17 julio del 2011). *Historia de la derivada*. Blogger. Recuperado de shorturl.at/epMP3

[3] Pérez, J. (s. f.). Derivadas. Cálculo diferencial e integral. Recuperado shorturl.at/ginyI

[4] *Derivadas*. (28 de marzo de 2014). Importancia. Recuperado de shorturl.at/psuOY

[5] Mendoza, N. (23 junio de 2014). *Aplicación de las derivadas en la vida cotidiana*. Issuu. Recuperado de shorturl.at/itIY7

[6] Stewart, J. (2008). *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas*. CENGACE Leraning.

[7] Galdón, J. (19 de febrero de 2021). *Optimización Matemática: Una aplicación derivada de una función*. Tus clases particulares. Recuperado de shorturl.at/iuPY8

[8] Ruiz, M. (2012). *Razón de cambio*. Universidad Nacional Río Negro. Recuperado de shorturl.at/hEWY6

[9] Martínez, M. y Portilla, R. (2017). *Cálculo Diferencial con Geometría Analítica para Ingeniería Automotriz*. Universidad Politécnica Salesiana. Recuperado de shorturl.at/dfsDQ

[10] Abierta, M. (08 de agosto de 2016). *Derivada (Aplicación #13)*. Blog Educativo. Recuperado de shorturl.at/djEJV