

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA SALESIANA

SEDE CUENCA

FACULTAD DE INGENIERÍAS

CARRERA DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA

Tesis Previa a la obtención del Título de Ingeniero Electrónico

TÍTULO:

**“APLICACIÓN DE LA TRANSFORMADA WAVELET Y EL
MÉTODO LEVEL SET PARA EL FILTRADO Y
SEGMENTACIÓN DE IMÁGENES.”**

AUTOR:

Hugo Orlando Gómez Espinoza

DIRECTOR:

Ing. Fernando Urgiles

CUENCA-ECUADOR

2012

DECLARACIÓN

Todos los nombres propios de programas que aparecen en el presente trabajo son marcas registradas de sus respectivas compañías y organizaciones.

Los conceptos desarrollados, análisis realizados y las conclusiones del presente trabajo, son de exclusiva responsabilidad del autor

Hugo Orlando Gómez Espinoza
0104726021

CERTIFICACIÓN

Yo Ing. Fernando Urgiles, certifico haber supervisado y revisado el desarrollo de la tesis **“APLICACIÓN DE LA TRANSFORMADA WAVELET Y EL MÉTODO LEVEL SET PARA EL FILTRADO Y SEGMENTACIÓN DE IMÁGENES”** para la Universidad Politécnica Salesiana, sede Cuenca.

Ing. Fernando Urgiles

Agradecimiento.- Primeramente agradezco a Dios por darme la vida y la oportunidad de conseguir esta meta, sin olvidar el apoyo incondicional de mi familia, mis hermanos, y de manera especial a mis padres que siempre estuvieron conmigo, junto a mi abuelita quien me ayudo de la mejor forma posible, y ademas a la persona que forma parte de mi vida, a quien le agradezco el apoyo incondicional y la ayuda brindada.

Sin olvidar a mi director de tesis, mis compañeros, maestros y directivos de la Universidad quienes me brindaron una amistad que forma parte primordial para conseguir este objetivo

Hugo Gómez

PROLOGO

La presente investigación, consta de cinco capítulos, el primer capítulo es el estudio de la Transformada Wavelet, con una pequeña introducción histórica, su definición, la comparación con la Transformada de Fourier, sus diferentes Familias, para así llegar a los dos diferentes tipos: La Transformada Wavelet Continua y la Transformada Wavelet Discreta, comenzado a analizar una dimensión y luego llegar a analizar dos dimensiones que son las imágenes, y por último el estudio para el filtrado de imágenes.

El segundo Capitulo es el estudio del Método Level Set para la segmentación de imágenes, con una pequeña introducción, entendiendo su representación, formulación y por último aplicarle a la segmentación de imágenes.

En el tercer Capítulo, se presenta los algoritmos utilizados para la implementación del filtrado y segmentación de imágenes en la plataforma Matlab 2011b.

En el cuarto se da a conocer las respectivas conclusiones y recomendaciones y por último en el quinto capítulo se presenta la bibliografía utilizada en la presente investigación.

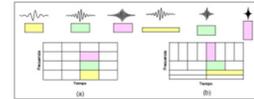
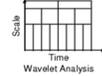
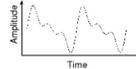
Resumen

I. TRANSFORMADA WAVELET

Definición

La TW es un tipo especial de transformada de Fourier que representa una señal en términos de versiones trasladadas y dilatadas de una onda finita (denominada wavelet). La TW permite variar el tamaño de la ventana de análisis y puede medir las variaciones en tiempo-frecuencia de las componentes espectrales, pero posee una resolución diferente.

$$Wf(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot h\left(\frac{t-b}{a}\right) \cdot dt \quad \ll f, h_{a,b} >$$



Familias Wavelet

Existen wavelets continuos/discretos, con/sin soporte compacto, suaves/con discontinuidades, ortogonales/biortogonales. Las familias más utilizadas son: Haar, Daubechies, Symmlets, Meyer entre otras.

CWT

La CWT tiene una buena resolución en tiempo y mala resolución en frecuencia cuando se trata de señales de altas frecuencias, pero si la señal tratada es de frecuencias bajas, está posee una buena resolución en frecuencia y mala resolución en tiempo. Por lo tanto la CWT de una señal $x(t)$ que existe en $L^2(\mathbb{R})$ (Conjunto de señales de energía finita), está definida por:

$$CWT(a,b) = \sqrt{\left|\frac{f}{f_0}\right|} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot h^*\left(\frac{f}{f_0} \cdot (t-b)\right) \cdot dt \quad ICWT = x(t) = \frac{1}{C_h^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{CWT(a,b) \cdot h\left(\frac{t-b}{a}\right)}{a^2} \cdot db \cdot da \quad C_h = \sqrt{2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|H(\omega)|^2}{|\omega|} \cdot d\omega} < \infty$$

En dos dimensiones

$$CWT(a_1, a_{12}; b_{x_1}, b_{x_2}) = \frac{1}{\sqrt{|a_{x_1} \cdot a_{x_2}|}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x_1, x_2) \cdot h\left(\frac{x_1 - b_{x_1}}{a_{x_1}}, \frac{x_2 - b_{x_2}}{a_{x_2}}\right) \cdot dx_1 \cdot dx_2 \quad ICWT = u(x_1, x_2) = \frac{1}{C_h^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{CWT(a_1, a_{12}; b_{x_1}, b_{x_2}) \cdot h\left(\frac{x_1 - b_{x_1}}{a_{x_1}}, \frac{x_2 - b_{x_2}}{a_{x_2}}\right)}{a^3} \cdot db_{x_1} \cdot db_{x_2} \cdot da$$

DWT

Para realizar la DWT debe cumplir que la condición de Nyquist para discretizar los parámetros de tiempo y de escala, y tenemos:

$$DWT_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{|a_0^j|}} \sum f(t) \cdot h^*\left(\frac{t}{a_0^j} - k \cdot b_0\right) \cdot dt$$

Hay que tener en cuenta dos conceptos: Downsampling (Decimado) y Upsampling (Undecimado);

La DWT es un banco de filtros donde se obtienen dos salidas una definida por el filtro pasa bajo y otra por el filtro pasa alto, llamando a una señal de aproximación y la otra de detalle respectivamente.

Wavelet en 2D (Imágenes)

La transformada wavelet discreta para el caso bidimensional o función $f(x,y)$ de tamaño $M \times N$ es:

$$DWT_h(j_0, m, n) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cdot h_{j_0, m, n}(x, y)$$

Y aplicando a las imágenes el algoritmo se tendrá:

II. METODO LEVEL SET

Definición

Level Set propone controlar el movimiento de interfaces o curvas evolutivas (también llamados fronts) para detectar los bordes correspondientes a alguna geometría. Estos pueden ser dinámicos o estáticos.

Conceptos Básicos.

En un plano Ω de una sola variable, supongamos que dos puntos divide al plano en tres distintas regiones usando los puntos $x=1$ y $x=-1$, esto nos define las siguientes regiones $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, \infty)$, siendo subdominios de la región Ω , y si analizamos obtenemos dos áreas, la interna de $(-1, 1)$ y la externa $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, donde los puntos $(-1, 1)$ que divide a la región se le conoce como interface.

Representación.

Si usamos un plano xy normalmente de una imagen de 2D, las cual contiene a la interfaz del método level set, añadiremos una coordenada más que mida la altura siendo z . Al construir esta superficie logramos interceptar al plano xy con la interfaz, teniendo

$$z = \phi(x, y, t_0)$$

Formulación.

Sabiendo que la interfaz posee una velocidad, una normal y una curvatura, obteniendo

$$z = \phi(x, y, t) = \phi(x, y, t_0) = 0$$

Resolviendo llegamos a la ecuación de Level set:

$$\phi_t + v \cdot |\nabla \phi| = 0$$

Segmentación.

Para la aplicación del método level set, se agrega dos términos más a la ecuación básica: el término dependiente a la curvatura y el término de velocidad externa, y así obtenemos la ecuación diferencial genérica para una función de level set.

$$\frac{d\phi}{dt} = \lambda \cdot \nabla \cdot \phi + \alpha \cdot |\nabla \phi| + \varepsilon |\nabla \phi|$$

Donde primer término representa un término de desplazamiento, el segundo es de propagación (expansión), y el último un modificador espacial para la curvatura. Las constantes escalares λ , α y ε introducen los pesos relativos de cada uno de los términos del movimiento de la interfaz.

III. IMPLEMENTACION DE FILTRADO Y SEGMENTADO DE IMAGENES

Algoritmo de Filtrado con TW.

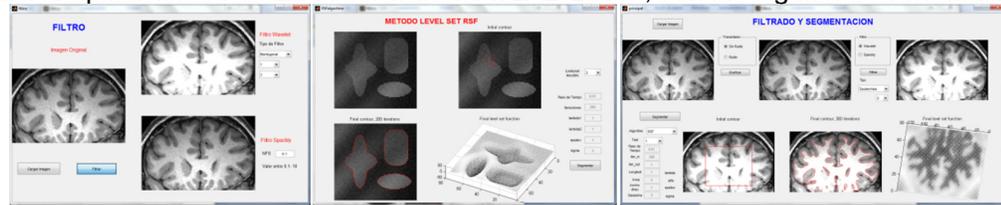
El algoritmo utilizado para el filtrado de las imágenes se demuestra en la siguiente figura, donde primero se escoge el tipo de wavelet y si es el caso el orden, obteniendo la wavelet madre, luego se adquiere su respuesta al impulso unitario conociendo si es pasa bajo o pasa alto, para llegar al Filtro Wavelet y se le aplica a la imagen a tratar y como resultado obtenemos la imagen filtrada.

Algoritmo de Segmentación con Level Set.

Los parámetros de entrada del algoritmo de un sistema básico de level set (excluyendo los triviales como imagen a segmentar y nombre del archivo de salida) son las iteraciones, el tamaño del salto de la interfaz (la velocidad), los diferentes pesos de λ , α y ε y a son constantes para este método base, siendo el algoritmo.

Aplicación de los Algoritmos.

Para la aplicación se utiliza el software MATLAB 2011b, con las siguientes ventanas.



IV. Conclusiones

- Las wavelets son empleadas en el procesamiento de señales debido a su característica principal que hace posible una mejor concentración entre tiempo y frecuencia.
- En análisis periódicos, la transformada wavelet es una buena solución pero puede ser superada o igualada por las diferentes transformadas, pero en señales no transitorias, la transformada wavelet es muy utilizada por obtener los diferentes detalles tanto en el tiempo, escala y frecuencia.
- La transformada wavelet permite realizar el filtrado de las imágenes de una forma mucho más óptima, ya que su algoritmo es extendido a señales dinámicas.
- En el procesamiento de imágenes la transformada Wavelet obtiene una imagen de aproximación y tres de detalles reduciendo su tamaño y en consecuencia la información, y así logra realizar un proceso de filtrado más rápido que las otras transformadas.
- Al existir varias familias wavelets, es necesario realizar un análisis con cada una de ellas, para así llegar a una correcta elección, ya que en el procesamiento de imágenes cada caso es un mundo diferente; pero en los diferentes estudios realizados la familia wavelet ortogonal es la más utilizada por sus aciertos en las investigaciones presentadas en los papers de la IEE.
- El método Level set utiliza las ecuaciones de euler para el análisis de la interfaz que va a segmentar las regiones, por su gran respuesta a las diferentes formas que puede tomar sin importar cruces, separaciones, etc. ya sea con la misma interfaz o el objeto a segmentar.
- El Método Level Set, es muy utilizado en la medicina, por su gran respuesta a la segmentación de imágenes, pudiendo obtener anomalías o deformidades de los diferentes órganos a analizarse, como se demuestran en los últimos estudios realizados en la medicina.
- El algoritmo RSF utilizado nos brinda cinco casos específicos, los cuales fueron un gran estudio por el autor para poder llegar a obtener los valores correctos de las diferentes variables, ya que al modificar cualesquiera tuviéramos un resultado muy diferente.
- El algoritmo DRSLE nos da la posibilidad de modificar los diferentes constantes para así llegar a obtener la mejor respuesta para cada caso que nos brinda la imagen a estudiar.
- EL algoritmo DRSLE necesita un cálculo computacional mucho mayor al algoritmo RSF, ya que el primero utiliza una regularización de distancia que va paso a paso, mientras que RSF utiliza para el salto y las constantes la minimización de la energía de la imagen.
- El filtrado nos permite eliminar el ruido de las imágenes, para así lograr una mejor segmentación, pero no queda ahí el procesamiento de imágenes ya que los siguientes pasos serían la selección del objeto a analizar y por último realizar la respectiva aplicación para lograr un objetivo específico.

INDICE DE CONTENIDO

CAPITULO 1 TRANSFORMADA WAVELET	1
1.1. INTRODUCCIÓN.....	1
1.2. DEFINICIÓN.....	6
1.3. TRANSFORMADA WAVELET FRENTE A LA TRANSFORMADA DE FOURIER.....	14
1.4. FAMILIAS WAVELET.	22
1.5. WAVELET CONTINUA.	32
1.6. WAVELET DISCRETA.	36
1.7. WAVELET EN IMÁGENES	49
CAPITULO 2 METODO LEVEL SET.....	53
2.1. INTRODUCCIÓN.....	53
2.2. REPRESENTACIÓN DEL MÉTODO LEVEL SET	57
2.3. FORMULACIÓN DE LEVEL SET	61
2.4. SEGMENTACIÓN DE IMÁGENES CON EL MÉTODO DE LEVEL SET.	67
CAPITULO 3.....	70
IMPLEMENTACION DE FILTRADO Y SEGMENTADO DE IMAGENES	70
3.1 ALGORITMO DE FILTRADO CON LA TRANSFORMADA WAVELET ...	70
3.2. ALGORITMO DE SEGMENTACION DE IMÁGENES.	71
3.3 APLICACIÓN DE LOS ALGORITMOS	73
3.4 ANÁLISIS DE RESULTADOS.....	79
CAPITULO 4 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	84
4.1 CONCLUSIONES.....	84
4.2 RECOMENDACIONES.....	87
CAPITULO 5 BIBLIOGRAFIA	89
5.1 BIBLIOGRAFIA.....	89
ANEXO.....	95

INDICE DE ILUSTRACIONES

Fig. 1. 1 Transformaciones de traslación y escala.....	13
Fig. 1. 2 División de las frecuencias logarítmicamente en la TW.....	13
Fig. 1. 3 División uniforme de la frecuencia con un ancho de banda constante.	15
Fig. 1. 4 (a) Plano tiempo-frecuencia para STFT (b) Plano tiempo-frecuencia para TW.	16
Fig. 1. 5 (a) FT (b) TW.	16
Fig. 1. 6 Visualización comparativa de la representación de una señal no estacionaria en diferentes dominios.....	17
Fig. 1. 7 Diferencias de los coeficientes de la TF y la TW de una señal discontinua. .	20
Fig. 1. 8 Comparación del filtrado de Imágenes.....	21
Fig. 1. 9 Comparación de la compresión de Imágenes.	21
Fig. 1. 10 Wavelet de Haar.....	23
Fig. 1. 11 Wavelet Daubechies de orden N graficado en MATLAB.....	23
Fig. 1. 12 Wavelet Daubechies ideal de orden N.	23
Fig. 1. 13 Wavelet Symmlet ideal de orden N.	24
Fig. 1. 14 Wavelet Symmlet de orden N graficado en MATLAB.....	25
Fig. 1. 15 Wavelet Coiflet ideal de orden N.....	26
Fig. 1. 16 Wavelet Coiflet de orden N graficado en MATLAB.	26
Fig. 1. 17 Wavelet Meyer.	27
Fig. 1. 18 Wavelet Gaussiana.	28
Fig. 1. 19 Wavelet Mexican Hat.	29
Fig. 1. 20 Wavelet Morlet.	30
Fig. 1. 21 Wavelet Biortogonales según N_r , N_d	32
Fig. 1. 22 Señal con frecuencias de 50, 30, 10 y 5Hz.	33
Fig. 1. 23 Coeficientes wavelet sym6 con resolución 1:64	33
Fig. 1. 24 Otra vista de los Coeficientes wavelet sym6 con resolución 1:64.....	34

Fig. 1. 25 Componentes de alta y baja frecuencia separadas, (a) a muestreo completo y (b) a muestreo reducido con los coeficientes wavelet donde $\downarrow 2$ significa muestreo reducido a la mitad (downsampling).....	40
Fig. 1. 26 Descomposición de la señal ECG en alta y baja frecuencia con reducción de muestras dadas por los coeficientes wavelets.	40
Fig. 1. 27 Descomposición de tres niveles de la señal ECG.	41
Fig. 1. 28 Comparación de la señal original (azul) y la señal reconstruida con la transformada wavelet inversa por los coeficientes con offset de 1.5 (rojo).....	42
Fig. 1. 29 Descomposición de la señal.....	43
Fig. 1. 30 Ejemplo de Upsampling.	44
Fig. 1. 31 Análisis Multiresolución detalles de baja frecuencia	44
Fig. 1. 32 Análisis Multiresolución detalles de alta frecuencia.	45
Fig. 1. 33 Análisis Multiresolución en paquete.	46
Fig. 1. 34 Diagrama de bloques del banco de filtros de análisis de la DWT.....	47
Fig. 1. 35 Pasos de la descomposición DWT en una imagen. (a) Imagen Original. (b) Descomposición en dirección vertical. (c) Descomposición de (b) en dirección horizontal (Resultado Final)	49
Fig. 1. 36 DWT en forma secuencial.	50
Fig. 1. 37 Jerarquía en la descomposición de una imagen usando DWT 2D	51
Fig. 1. 38 Descomposición wavelet de dos dimensiones por bloques.....	51
Fig. 1. 39 Reconstrucción wavelet de dos dimensiones de una imagen.....	51
Fig. 1. 40 Ejemplo de una descomposición wavelet de dos dimensiones.	52
Fig.2. 1 Ilustración del método level set.....	54
Fig.2. 2 Definición de subdominios en una sola dimensión.	56
Fig.2. 3 Definición de subdominios en dos dimensiones.	56
Fig.2. 4 Definición de subdominios en tres dimensiones.....	57
Fig.2. 5 La Superficie de Conjunto de Nivel (en rojo) dibuja la distancia de cada punto (x,y) a la interfaz (en azul)	58

Fig.2. 6 La Superficie de Conjunto de Nivel (en rojo) fue movida, produciendo una nueva interfaz (en azul).	59
Fig.2. 7 La Superficie de Level Set en diferentes tiempos.....	60
Fig.2. 8 Resolución de problemas (arriba) por el método level set (abajo).....	61
Fig.2. 9 Movimiento perpendicular de la interfaz a una velocidad dada.	62
Fig.2. 10 Cambios de la curvatura.	63
Fig.2. 11 Dirección Normal.....	64
Fig.2. 12 Segmentación de una imagen con 810 iteraciones.	69
Fig. 3. 1 Algoritmo del Filtro Wavelet para Imágenes.	71
Fig. 3. 2 Algoritmo del Método Level Set.....	71
Fig. 3. 3 Menú del Programa.....	73
Fig. 3. 4 Ventana del menú del Programa.....	74
Fig. 3. 5 Wavelet Madre.....	74
Fig. 3. 6 Wavelet Continua.....	75
Fig. 3. 7 Wavelet Discreta.	75
Fig. 3. 8 Wavelet 2D.	76
Fig. 3. 9 Wavelet Filtro.	76
Fig. 3. 10 Level Set Algoritmo DRLSE Mamut-Dos Células.	77
Fig. 3. 11 Level Set Algoritmo DRLSE Cargar Imagen.....	77
Fig. 3. 12 Level Set Algoritmo RSF.	78
Fig. 3. 13 Principal con Filtrado y Segmentación.	78

INDICE DE TABLAS

Tabla 1. 1 Transformaciones de traslación y escala	7
Tabla 1. 2 Ejemplo de un filtro wavelet Daubechies de nivel 2.	48
Tabla 3. 1 Pesos para la segmentación de imágenes con el método level set.	72

CAPITULO 1

TRANSFORMADA WAVELET

1.1. INTRODUCCIÓN.

La transformada Wavelet¹ es otra alternativa matemática para el análisis de señales e imágenes para diferentes fines y campos de la ingeniería, donde la base propiamente dicha, es la teoría de Joseph Fourier en 1807 con el primer método en proponer la aproximación de señales por súper-posición de otras señales, es decir la expansión de señales periódicas como la sumatoria de senos y cosenos.

$$x(t) = a_0 + \sum_{K=1}^{\infty} a_k \text{Cos } k\omega_0 t + b_k \text{Sen } k\omega_0 t \quad (1-1)$$

La primera referencia de una wavelet, surge cuando los matemáticos poco a poco fueron cambiando las ideas de análisis en frecuencia por análisis en escala, donde una función $x(t)$ se trata con estructuras matemáticas que varían en escala, el primero

en proponer fue el matemático húngaro Alfred Haar en 1909 con el trabajo para la obtención del doctorado con una tesis titulada "*Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme*"², referido a bases no condicionadas en espacios funcionales clásicos, estas funciones consisten simplemente en un breve impulso positivo seguido de un breve impulso negativo actualmente llamadas "wavelets de Haar".

En 1946 con la idea fundamental de introducir ventanas para poder observar una parte de la señal en algún entorno del punto de estudio, el físico Dennis Gabor descompone una señal en paquetes de frecuencia-tiempo y como resultado se logra que las componentes frecuenciales de la señal en aquel instante dependan solamente de las proximidades del punto y no influyan en ellas las partes alejadas de la señal.

En la década de los 70 aparecieron versiones propias de análisis wavelet para el procesamiento de señales e imágenes con nombres como "codificación de subbandas", "filtros de duplicación de cuadratura" y "algoritmo piramidal".

En 1982 el británico neurólogo David Marr Courtnay con el tratamiento de imágenes en el sistema visual humano, llegó a la hipótesis de que la representación proporcionada por el sistema retiniano está formada por una sucesión de diagramas efectuados a escalas diferentes, que constituyen una progresión geométrica, creando a lo que hoy se le conoce "Mexican Hat" el sombrero mejicano.

En la misma década el ingeniero geofísico francés Jean Morlet, con el propósito de ofrecer a los geólogos una forma más eficiente de buscar petróleo, la cual era localizar los depósitos subterráneos enviando ondas sísmicas a la tierra y midiendo la rapidez con la que rebotaban, donde el cálculo matemático se realizaba con la Transformada

¹ Algunos autores utilizan la palabra ondeleta para traducir la palabra en inglés wavelet o en francés ondelette, sin embargo, decidimos utilizar el término en inglés en este trabajo.

² http://www7.nationalacademiers.org/spanishbeyonddiscovery/mat_008276-02.html.

de Fourier pero al existir cambios bruscos en la onda a medida que pasaban las capas de la tierra era muy complejo su análisis, por lo que desarrolló su propia forma de analizar las señales sísmicas para crear componentes que estuvieran localizados en el espacio, a los que denominó "wavelets de forma constante", conocidas actualmente como "wavelets de Morlet". Siendo un método empírico, Morlet, comenzó a dialogar con matemáticos y físicos para buscar una coherencia matemática al método.

Alex Grossmann, un físico del Centre de Physique Théorique de Marsella le interesó el método, por lo que trabajó durante un año con Morlet para confirmar que las ondas se podían reconstruir a partir de sus descomposiciones en wavelets. De hecho, las transformaciones de wavelets resultaron funcionar mucho mejor que las transformaciones de Fourier, porque eran mucho menos susceptibles a pequeños errores de cómputo.³ Dando como resultado al primer artículo que se utilizó la palabra "wavelet" (CWT), el cual se publicó en 1984.

Después de un año de la publicación el matemático francés Yves Meyer, fue el pionero en comprender la conexión entre las wavelets de Morlet y más de 16 estudios realizados anteriormente, independientes al concepto de wavelet, y como resultado descubre un nuevo tipo de wavelet con una propiedad matemática denominada ortogonalidad⁴, siendo el nexo de unión de la naciente comunidad dedicada a las wavelets.

En el mismo año Jan Olov-Strömberg estudia la introducción de las wavelets discretas (DWT) al estudio de imágenes.

Meyer con la colaboración de uno de sus antiguos alumnos Stéphane Mallat en 1986, vincula todo el estudio de la teoría de wavelets sobre la codificación de

³ http://www7.nationalacademies.org/spanishbeyonddiscovery/mat_008276-03.html#TopOfPage

subbandas y filtros de duplicación de cuadratura al procesamiento de imágenes, dando como resultado final al proceso de análisis de multiresolución⁵ con la transformada wavelet, convirtiendo el método en algo más sencillo que para los ingenieros eléctricos adoptaron términos familiares como "filtros", "altas frecuencias" y "bajas frecuencias".

La última gran salva de la revolución de las wavelets se disparó en 1987, cuando Ingrid Daubechies, mientras visitaba el Courant Institute de la Universidad de Nueva York y, posteriormente, durante su trabajo en los laboratorios AT&T Bell, descubrió una clase completamente nueva de wavelets, que no sólo eran ortogonales (como las de Meyer) sino que también se podían implementar mediante sencillas ideas de filtrado digital, de hecho, mediante cortos filtros digitales. Las nuevas wavelets eran casi tan sencillas de programar y utilizar como las wavelets de Haar, pero eran suaves, sin los saltos de las wavelets de Haar. Al combinar las ideas de Daubechies y Mallat, se disponía de una transformación ortogonal y sencilla que se podía calcular rápidamente en las modernas computadoras digitales.⁶

A partir de las bases ortonormales de wavelets se originaron los paquetes de wavelets, cuya construcción se considera la descomposición wavelet como una secuencia de filtrados.

Como se puede apreciar han sido numerosos los autores que han trabajado con funciones y transformadas wavelet, se puede decir que el estudio de la transformada wavelet es como un árbol, donde la raíz es la transformada de Fourier, el tronco todos

⁴ "Ortogonalidad" significa que la información capturada por una wavelet es completamente independiente de la información capturada por otra.

⁵ "Análisis multiresolución" es la observación de señales a distintas escalas de resolución.

⁶ http://www7.nationalacademies.org/spanishbeyonddiscovery/mat_008276-03.html#TopOfPage

los estudios de los físicos y matemáticos hasta el año 1987, dando como resultado a las ramas y frutos a las diferentes aplicabilidades.

La transformada wavelet discreta (DWT) es comúnmente utilizada en ingeniería y ciencias de la computación para la codificación de señales, mientras que la transformada wavelet continua (CWT) es empleada en investigación científica para el análisis de señales

Las transformadas wavelet han sido adoptadas como herramientas para un vasto número de aplicaciones de naturaleza diversa, reemplazando a menudo a la transformada de Fourier convencional. Citando algunas:

- 1990 – David Donoho y Johnstone usan los wavelets para eliminar el ruido de una señal.
- 1992 – El FBI usa los wavelets para comprimir su base de datos de huellas dactilares, alcanzando una relación de compresión de 26:1
- A principios del año 2000 fue presentado el nuevo estándar de codificación de imágenes JPEG2000 después de importantes esfuerzos centrados en la teoría wavelet, de tal manera que este nuevo formato se basa en el uso de bancos de filtros wavelet y un avanzado esquema de cuantización llamado EBCOT (Larsen, 2001).
- Muchas áreas de la física incluyendo dinámica molecular, astrofísica, geofísica sísmica, óptica, mecánica de turbulencia y mecánica cuántica.
- Otras áreas que han experimentado este cambio son: procesamiento de imágenes, análisis de señales médicas, análisis de proteínas y de ADN, climatología, topografía y geografía, reconocimiento del habla, gráficos computacionales, procesamiento de señales y análisis multifractal.

El interés por este nuevo instrumento matemático nace de la posibilidad que el mismo ofrece de superar algunas de las limitaciones que se enfrentan al emplear otras transformaciones, entre las que se destaca la muy conocida transformación de Fourier.

El objeto de este capítulo es el entendimiento de los conceptos básicos para comprender la definición y las aplicaciones más ventajosas de la transformada wavelet. En primer lugar se ilustrará de qué manera sus prestaciones pueden superar a las de la transformada de Fourier. Se pasará posteriormente a definir dos tipos de transformadas wavelet.

Por razones de simplicidad, cada concepto se presentará inicialmente referenciado al caso monodimensional extendiéndolo posteriormente a dos dimensiones, dado nuestro interés particularmente orientado al campo de las imágenes.

1.2. DEFINICIÓN

La transformada wavelet está constituida de las funciones wavelets, por lo que primero definiremos lo que son las wavelets y sus respectivas propiedades.

1.2.1. WAVELETS

Las wavelets son familias de funciones que se encuentran en el espacio y se emplean como funciones de análisis, con ciertos requerimientos matemáticos como son su forma ondulatoria, o su dimensión, o sus frecuencias o las descomposiciones que puedan generar; para examinar una señal de interés para así obtener sus características de espacio, tamaño y dirección; la familia está definida por:

$$h_{a,b} = \frac{1}{\sqrt{|a|}} h\left(\frac{t-b}{a}\right); a, b \in \mathfrak{R}, a \neq 0 \quad (1-2)$$

Donde la variable **a** es la escala, la cual permite realizar dilataciones o contracciones de la señal y la variable **b** es de traslación que nos permite mover la señal en el tiempo. Estas variables son números reales y obviamente para un escala a 0 la función es indeterminada, y todas las funciones son generadas a partir de las funciones madre $h(t)$,

Traslación	Cambio de escala	Traslación y cambio de escala
$h(t-b)$	$\frac{1}{\sqrt{ a }} h\left(\frac{t}{a}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{ a }} h\left(\frac{t-b}{a}\right)$

Tabla 1. 1 Transformaciones de traslación y escala

La definición de la función wavelet también se la realiza según sus características:

- **Forma:**

“Función con forma de onda y de pequeña dimensión, finita y nula fuera de un determinado intervalo”. La forma de onda implica una integración acero (oscilando por encima y por debajo del eje de abscisas (x) y su tamaño pequeño implica que su amplitud decrece a medida que se aleja de su origen.

También es definida como “forma de onda de duración limitada que tiene un valor medio cero”⁷, o incluso como “pequeña onda que tiene su energía concentrada en el tiempo para servir como herramienta de análisis de fenómenos cambiantes, no estacionarios o variables en el tiempo”⁸.

- **Soporte o Dimensión:**

⁷ Pajares, G., & de la Cruz, J. M., Visión por Computador: Imágenes Digitales y Aplicaciones. Madrid: RA-MA, 2001

⁸ BURRUS, C.S., R.A. GOPINATH and H. GUO, 1998. Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms. taco.poly.edu., 1998

“Función que tiene un soporte compacto suficiente tanto en el tiempo como en el dominio de la frecuencia y presenta un comportamiento oscilatorio con una media igual a cero”⁹.

“Funciones de soporte compacto, a diferencia de las funciones base de la transformada de Fourier que tienen soporte infinito”. Este soporte compacto permite a la transformada wavelet trasladar una función desde el dominio temporal hasta el dominio frecuencial¹⁰ de tal manera que posea localización frecuencial y temporal a la vez.

- **Frecuencia:**

Analizando el contenido de frecuencia, una función wavelet es la base para “cortar datos o funciones en diferentes componentes de frecuencia y estudiar cada uno de esos componentes con una resolución ajustada a su escala”¹¹. Para una señal cambiante en el tiempo (como un sonido de amplitud variable) la transformada wavelet depende de dos variables: la escala (o frecuencia) y el tiempo y es un buen análisis para la localización tiempo-frecuencia. Las imágenes naturales son una mezcla de texturas suaves o de bajas frecuencias, como el cielo, la superficie del agua, superficies homogéneas y uniformes, etc., además de otras texturas más cambiantes en menor espacio, es decir, de mayores frecuencias de cambio por su cantidad de bordes. Por ello su interacción con funciones wavelet permite “capturar las altas frecuencias de zonas de bordes y las bajas de zonas más homogéneas, agrupando la

⁹ Wouwer, Gert Van, Statistical texture characterization from discrete wavelet representation, University of Antwerp, 1998.

¹⁰ Ababou, L.D., Mangin, A., Introduction of wavelet analyses to rainfall/runoffs relationship for a karsticbasin: the case of Licq-Atherey karstic system (France), 2001.

¹¹ Antonini, M.; Barlaud, M.; Mathieu, P.; Daubechies, I, Image coding using wavelet transform CNRS, Univ. de Nice-Sophia Antipolis, Valbonne, 1992.

mayor parte de la energía de la imagen en una pequeña porción de los coeficientes de la transformación”¹².

Propiedades de las funciones wavelet.

Para que una función de análisis sea clasificada como una wavelet $h(t)$, ésta debe cumplir con los siguientes criterios matemáticos¹³:

- Una wavelet debe tener energía finita (1-3):

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|^2 \cdot dt < \infty \quad (1-3)$$

- La función wavelet $h(t)$ debe cumplir con el criterio de la constante de admisibilidad C_h (1-4)

$$C_h = \int_0^{\infty} \frac{|h(t)|^2}{f} \cdot df < \infty \quad (1-4)$$

Donde f denota la frecuencia y la condición implica que la wavelet debe tener componente de frecuencia 0 ($H(0)=0$), donde $H(f)$ es la transformada de Fourier de la wavelet. El valor de C_h dependerá de la wavelet seleccionada; las consecuencias de esta condición de **admisibilidad** son¹⁴:

- (1) Que la función está bien localizada en el tiempo o en el espacio.
- (2) Que la transformación con esta función es invertible, es decir, se puede conseguir la reconstrucción perfecta.

¹² Z. Xiong and K. Ramchandran, "Wavelet image compression," Handbook of Image and Video Processing, A. Bovik, ed., Academic Press, 2000.

¹³ Addison, P. S., The Illustrated Wavelet Transform Handbook, IOP Publishing Ltd, 2002.

¹⁴ Seppala Otto, From Fourier Transform to Wavelets, Abril 2001 (<http://ebookbrowse.com/seppala-wavelet-pdf-d20188254>)

- (3) Que su transformada de Fourier es un filtro continuo pasa banda, con rápido decaimiento hacia el infinito y hacia $f=0$
- (4) Que la función debe tener un valor de cero en la frecuencia cero, lo cual se cumplirá si la wavelet tiene una media de cero y se trata de una función oscilatoria donde los valores negativos anulan a los positivos.

- **La localización en el tiempo y la frecuencia**, permite ubicar las wavelets en singularidad tanto en tiempo como en frecuencia, esta cualidad está directamente relacionada con una mejor resolución del análisis realizado con la wavelet.
- Para conocer **la forma de la función wavelet** se utiliza los momentos de desvanecimiento o nulos y además es un parámetro para saber que tan hábil es la wavelet para suprimir un polinomio dado¹⁵, se definen los p momentos de la wavelet h como:

$$M_p = \int t^p h(t) \cdot dt \quad (1-5)$$

Entonces se dice que esa función tendrá p momentos nulos si la expresión anterior es igual a cero:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^K \cdot h(t) \cdot dt = 0 \quad \text{para } 0 \leq K < p \quad (1-6)$$

- Si una wavelet tiene N momentos nulos, entonces el orden de aproximación de la transformada wavelet también será de grado N , y estos momentos definen la complejidad de la señal de la wavelet útil en la detección de cruces por cero, entre más número de muestras más se adapta los cambios bruscos.

- El **soporte compacto** de una wavelet se refiere a que las funciones base son no cero en un intervalo finito y esto se define de la siguiente manera¹⁶.

$$h(t) = 0 \text{ si } |t| > N \quad \text{para alguna } N \quad (1-7)$$

Si la función wavelet que se utilice tiene soporte compacto, es decir, es distinta de cero para un número finito de valores, entonces se necesitarán un número finito de coeficientes wavelet en la descomposición de una señal.

- Los dos conceptos anteriores dan origen a la condición de **regularidad**, la cual expresa que la wavelet madre ha de ser localmente suave y centrada en los dominios del tiempo y frecuencia.
- La **simetría** en los filtros se busca con el fin de evitar distorsiones en la información mediante la fase lineal, esto se expresa en la ecuación (1-8) donde K es una constante y w es la fase¹⁷.

$$\phi(w) = k \cdot w \quad (1-8)$$

Resumiendo, las diferentes familias wavelet buscan el equilibrio entre un soporte compacto en su localización espacial y su suavidad o regularidad. En esa armonía tienen importancia aspectos como la estructura fractal y el número de momentos

¹⁵ Hernandez Marianito, Análisis Comparativo de Algoritmos para Reduccion de Ruido en Señales Utilizando Wavelets. Tesis de Licenciatura Unoversidad de las Américas Puebla, 2003.

¹⁶ Alarcón Aquino, Anomaly Detection and Prediction in Comunication Networks Using Wavelet Transforms, PhD thesis, Imperial College London, University of London. UK 2003

¹⁷ Alarcón Aquino, Anomaly Detection and Prediction in Comunication Networks Using Wavelet Transforms, PhD thesis, Imperial College London, University of London. UK 2003

nulos, que está directamente relacionado con el número de coeficientes de la función¹⁸.

Las funciones wavelet son la base para poder aplicar el análisis o transformada del mismo nombre, la cual permite descomponer señales jerárquicamente y su posterior reconstrucción, además de extraer ciertos tipos de información de ellas. Las wavelet son “herramientas para la descomposición de señales, tales como imágenes en una jerarquía de resoluciones crecientes de tal manera que al considerar niveles de mayor resolución, se obtengan más y más detalles de la imagen”.

1.2.2. TRANSFORMADA WAVELET

La **transformada Wavelet** (TW) es un tipo especial de transformada de Fourier que representa una señal en términos de versiones trasladadas y dilatadas de una onda finita (denominada wavelet). La TW permite variar el tamaño de la ventana de análisis y puede medir las variaciones en tiempo-frecuencia de las componentes espectrales, pero posee una resolución diferente.

Para poner en práctica el análisis con la TW wavelet se debe optar una función wavelet prototipo llamada “wavelet madre” a partir de la cual se deriva toda una familia de versiones trasladadas y escaladas.

$$h_{a,b} = \frac{1}{\sqrt{|a|}} h\left(\frac{t-b}{a}\right); a, b \in \mathfrak{R}, a \neq 0 \quad (1-2)$$

La TW de una función $\mathbf{x}(t)$ a escala \mathbf{a} y a posición \mathbf{b} se calcula correlacionando la función f con un átomo wavelet:

¹⁸ GRAPS, A. An introduction to wavelets. IEE Computational Science and engineering, 1995

$$Wf(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot h^* \left(\frac{t-b}{a} \right) \cdot dt = \langle f, h_{a,b} \rangle \quad \text{donde } a \text{ es } a = \frac{f_0}{f} \quad (1-9)$$



Fig. 1. 1 Transformaciones de traslación y escala

Como la citada señal original $x(t)$ puede ser representada en términos de una expansión wavelet (usando coeficientes en una combinación lineal de las funciones wavelets), las operaciones sobre los datos pueden ser realizadas empleando sólo los correspondientes coeficientes wavelet.

En resumen la TW es la correlación de la señal que se quiere analizar con una función wavelet que se haya seleccionado y así obtener la señal del dominio del tiempo al dominio del tiempo-frecuencia, el proceso es parecido a la STFT, con la diferencia que en la TW el ancho de la banda es cambiado conforme se calcula la transformada para cada componente del espectro. En este caso la división en el plano de la frecuencia no es uniforme, está logarítmicamente dividido como se observa en la Fig. 1.2.¹⁹

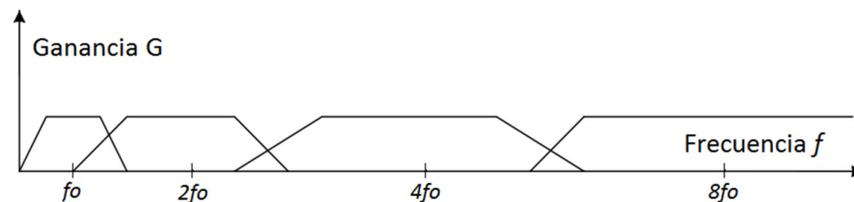


Fig. 1. 2 División de las frecuencias logarítmicamente en la TW

¹⁹ María Concepción Evelin Rosas Orea, Método para la reducción de ruido en imágenes utilizando la Transformada Wavelet Compleja con un algoritmo de Umbral Óptimo, Maestría en Ciencias con Especialidad en Ingeniería Electrónica, Universidad de las Américas Puebla Cholula, Puebla, México, 2006.

1.3. TRANSFORMADA WAVELET FRENTE A LA TRANSFORMADA DE FOURIER.

La Transformada de Fourier es una técnica matemática para transformar nuestra visión de la señal de una base temporal a una base de frecuencias, por lo que es una de las transformadas más empleadas para el análisis de señales unidimensionales e imágenes, por lo que es importante citar sus ideas claves para poder ver cómo la transformada wavelet (TW) puede sustituirla en determinados casos y analizar sus diferencias.

Como se cito en la fórmula 1-1, la transformada de Fourier descompone una señal en un conjunto infinito de señales periódicas seno y coseno de diferentes frecuencias y amplitudes. El primer término de esa descomposición representa la amplitud media de la señal y su frecuencia es nula, es decir, es una simplificación. El siguiente componente tiene la misma frecuencia que la señal inicial y los sucesivos términos van teniendo frecuencia mayores de tal manera que añadidos a los términos anteriores se va consiguiendo una aproximación a la señal inicial hasta que con infinitos términos se conseguiría la señal tal y como lo era la original, pero al realizar esta transformación al dominio de frecuencias, la información temporal se pierde. Es decir, es imposible decir cuándo ocurrió un evento particular.

Ahora si la señal analizada es **estacionaria**, no importa mucho saber cuándo ocurrió un evento particular, sin embargo las señales más interesantes son **no estacionarias**, pues presentan tendencias, cambios bruscos, y comienzos y terminaciones de eventos, para los cuales el análisis de Fourier **NO** es adecuado. Este problema, que se soluciona parcialmente mediante la introducción de la Transformada de Fourier de tiempo corto (STFT) introducida por Gabor, la ventaja es que emplea una ventana de longitud fija $g(x)$ para su análisis, sobre la cual la señal no estacionaria

es considerada aproximadamente estacionaria. La SFTF descompone la señal pseudo-estacionaria $s(x)$ en una representación bidimensional en tiempo y en frecuencia $S(t,f)$ para una mayor cobertura, se desliza la ventana $g(x)$ a diferentes tiempos t , obteniéndose $g^*(x)$ que es la ventana deslizada²⁰, dando la siguiente ecuación:

$$STFT_x(\tau, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(x) \cdot g^*(x - \tau) \cdot e^{-i2\pi fx} dx \quad (1-10)$$

Interpretando la STFT con los banco de filtros obtenemos que la señal analizada pasa a través de un filtro pasa banda centrado en la frecuencia f , y dicha división de la frecuencia es uniforme tal como se aprecia en la siguiente Fig. 1.4

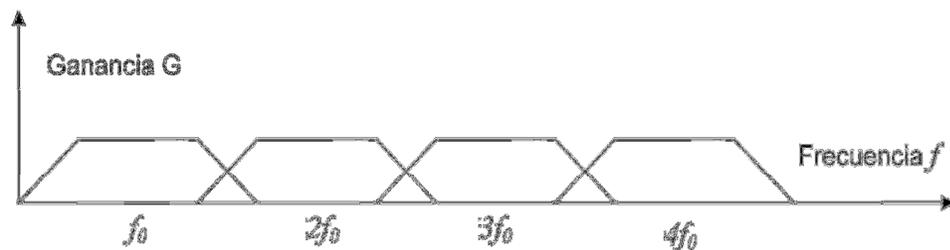


Fig. 1. 3 División uniforme de la frecuencia con un ancho de banda constante.

Una vez que se ha escogido la ventana, la resolución en tiempo y en frecuencia es fija sobre todo el plano, ya que la misma ventana es usada para todas las frecuencias, y siempre existe una relación entre resolución en tiempo y resolución en frecuencia²¹.

Explicado ambos conceptos de las transformadas, se puede dar las siguientes diferencias:

²⁰ Hsu Hwei P. Análisis de Fourier, Ed. Addison Wesley Iberoamericana, E.U.A, 1987.

²¹ Allen J. B., and Rabinar L. R., A Unified Approach to Short-Time Fourier Analysis and Synthesis., Proc. IEEE, 65, 1558-1564,1977.

La primera diferencia que se aprecia es que el análisis de Fourier está asociado al concepto de espectro o contenido de frecuencia de una señal, mientras que el análisis wavelet se asocia al concepto intuitivo de resolución o escala de la señal.

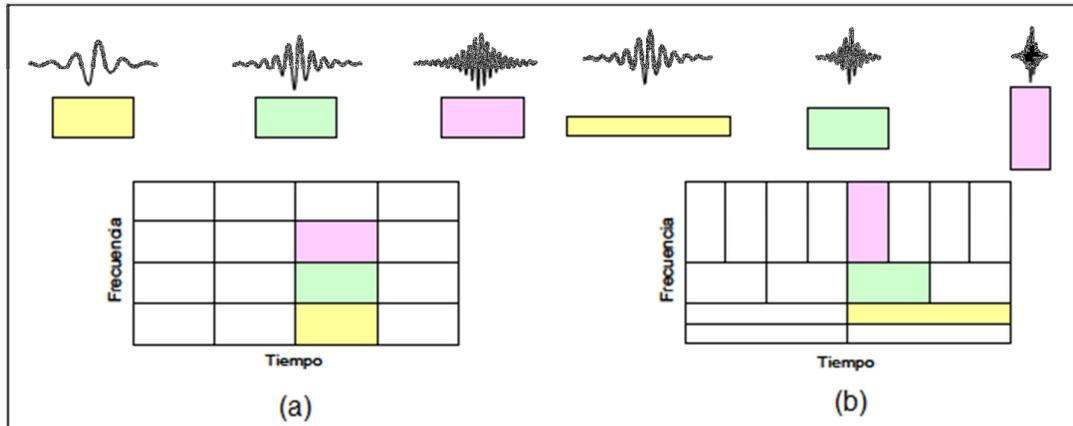


Fig. 1. 4 (a) Plano tiempo-frecuencia para STFT (b) Plano tiempo-frecuencia para TW.²²

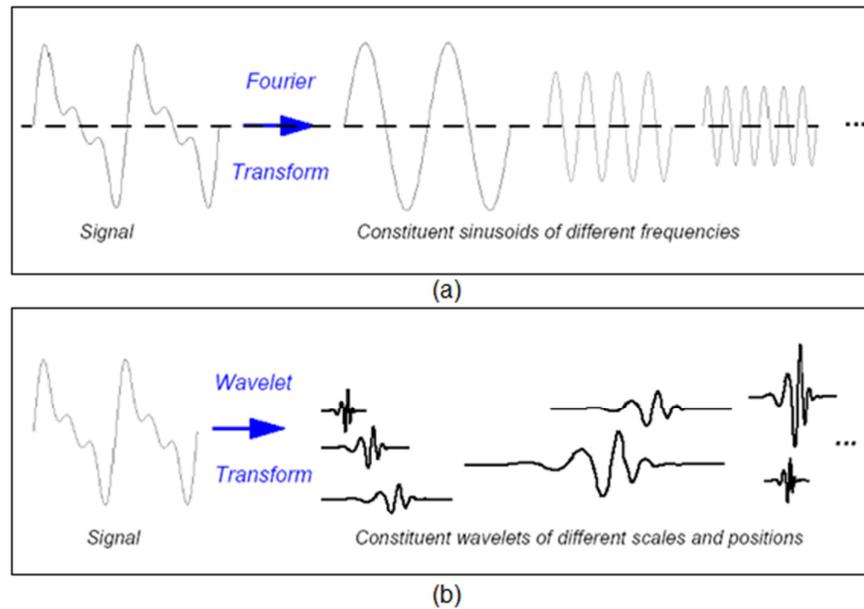


Fig. 1. 5 (a) FT (b) TW.²³

²² Alfonso Fernández Sarria, "Estudio de técnicas basadas en la Transformada wavelet y optimización de sus parámetros para la Clasificación por texturas de imágenes Digitales", Universidad Politécnica de Valencia, Febrero 2007.

²³ OAQUÍN LÓPEZ HERRAIZ, "WAVELETS CONCEPTO Y APLICACIONES PARA EL ANÁLISIS DE SEÑALES", Departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear, Universidad Complutense de Madrid. Octubre 2004

Otra diferencia radica en que la transformada de Fourier descompone una señal mediante funciones base en una suma ponderada de senos y cosenos, mientras que la transformada wavelet emplea como funciones base a las wavelets, de frecuencia variable y duración limitada. También es característico el hecho de que la transformada de Fourier asume que las señales a analizar son de duración infinita o al menos periódica.

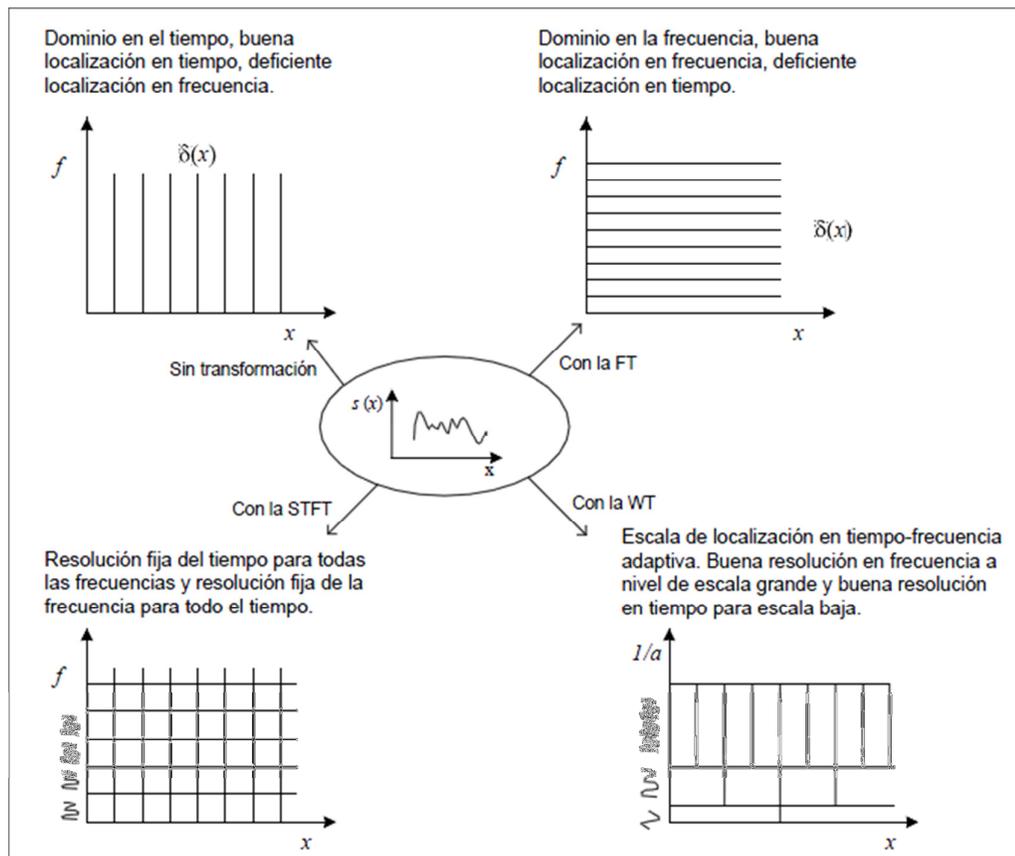


Fig. 1. 6 Visualización comparativa de la representación de una señal no estacionaria en diferentes dominios²⁴

La principal diferencia, quizás radique en que las funciones seno y coseno de la TF no están localizadas en el espacio, mientras que las funciones wavelet de la TW sí.

²⁴ aría Concepción Evelin Rosas Orea, Método para la reducción de ruido en imágenes utilizando la Transformada Wavelet Compleja con un algoritmo de Umbral Óptimo, Maestría en Ciencias con Especialidad en Ingeniería Electrónica, Universidad de las Américas Puebla Cholula, Puebla, México, 2006

Ese comportamiento de localización de frecuencias en el espacio hace que operadores y funciones reducidas se comporten bien en el dominio wavelet, de tal manera que se puedan aplicar en compresión de datos, detección de características y eliminación de ruido²⁵.

1.3.1. VENTAJAS DE LA TRANSFORMADA WAVELET²⁶.

- El análisis de wavelets está especialmente indicado para señales con pulsos o intermitencias: sucesos que ocurren de manera no periódica. Para estas señales, Fourier da muy poca información, al perder casi toda información temporal.
- Fourier es “inestable” frente a señales de tipo intermitentes: si añadimos un impulso localizado en el tiempo a una señal, todo el espectro de Fourier se verá afectado, mientras que solo algunos coeficientes de wavelets se modificarán.
- Cuando un sistema es lineal y los modos de vibración son modos propios del sistema, el análisis de Fourier proporciona mucha información sobre los mismos. Pero si no es así, la descomposición en modos propios no da información interesante, ya que mezcla la información de los varios modos de oscilación.
- La Transformada Discreta de Wavelets presenta además claras ventajas frente a su contrapartida de Fourier.
 - Más rápida desde el punto de vista computacional
 - En muchos casos proporciona un mejor ajuste a los datos con menos coeficientes.
 - Las técnicas de filtrado de ruido basadas en wavelets dan mejores resultados
- En muchos casos proporciona un mejor ajuste a los datos con menos coeficientes. (Permitiendo una mejor compresión de los datos que los métodos basados en Fourier).

²⁵ GRAPS, A. An introduction to wavelets. IEE Computational Science and engineering, 1995

- Las técnicas de filtrado de ruido basadas en wavelets dan mejores resultados.

1.3.2. DESVENTAJAS DE LA TRANSFORMADA WAVELET.²⁷

- Es una técnica aplicada recientemente. Aunque en los últimos años se ha hecho un gran esfuerzo por darle todo el rigor matemático que tiene la transformada de Fourier y unificar métodos y notaciones, el ritmo de aparición de publicaciones sobre el tema hace que no sea tarea fácil.
- No permite realizar algunos cálculos como los relacionados con la convolución o la modulación de una señal.

1.3.3. EJEMPLOS DE LA TW FRENTE A LA TF.

- Estudio de discontinuidades en una señal.
- Una gráfica de los coeficientes de Fourier muestra sólo un espectro plano con dos picos que representan una sola frecuencia. Sin embargo, una gráfica de los coeficientes de wavelets muestra claramente la localización exacta, en el tiempo, de la discontinuidad.

²⁶ JOAQUÍN LÓPEZ HERRAIZ, "WAVELETS CONCEPTO Y APLICACIONES PARA EL ANÁLISIS DE SEÑALES", Departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear, Universidad Complutense de Madrid. Octubre 2004

²⁷ JOAQUÍN LÓPEZ HERRAIZ, "WAVELETS CONCEPTO Y APLICACIONES PARA EL ANÁLISIS DE SEÑALES", Departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear, Universidad Complutense de Madrid. Octubre 2004

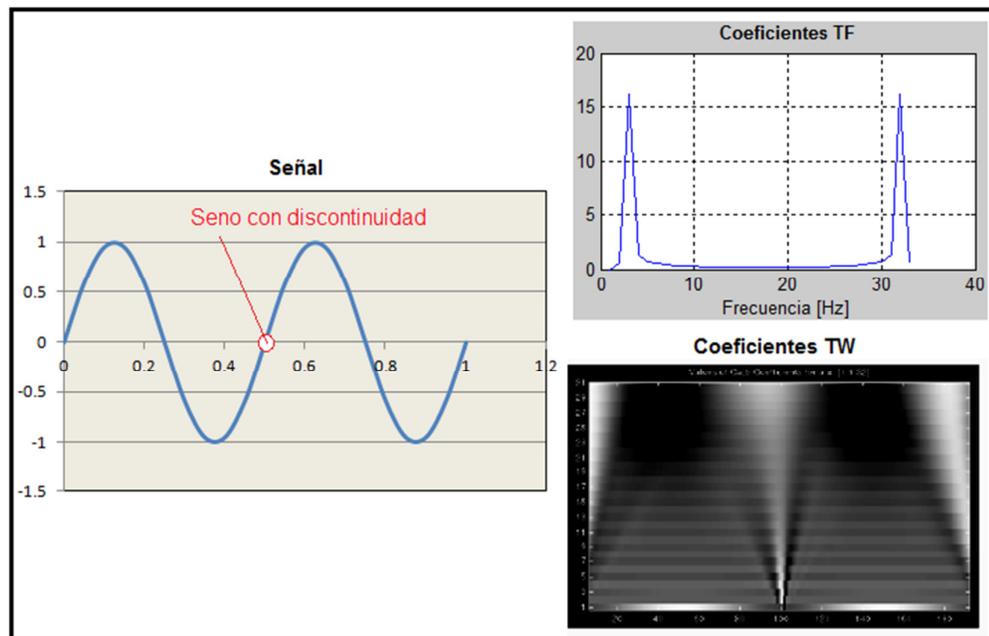


Fig. 1.7 Diferencias de los coeficientes de la TF y la TW de una señal discontinua.²⁸

➤ Filtrado de Ruido en imágenes.

En el Filtrado con la Transformada de Fourier se eliminan las altas frecuencias, mientras en el filtrado con la Transformada Wavelet se elimina los coeficientes menores.

²⁸ JOAQUÍN LÓPEZ HERRAIZ, "WAVELETS CONCEPTO Y APLICACIONES PARA EL ANÁLISIS DE SEÑALES", Departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear, Universidad Complutense de Madrid. Octubre 2004



Fig. 1. 8 Comparación del filtrado de Imágenes.²⁹

➤ Compresión de imágenes JPG (TF) vs JPG-2000 (TW).

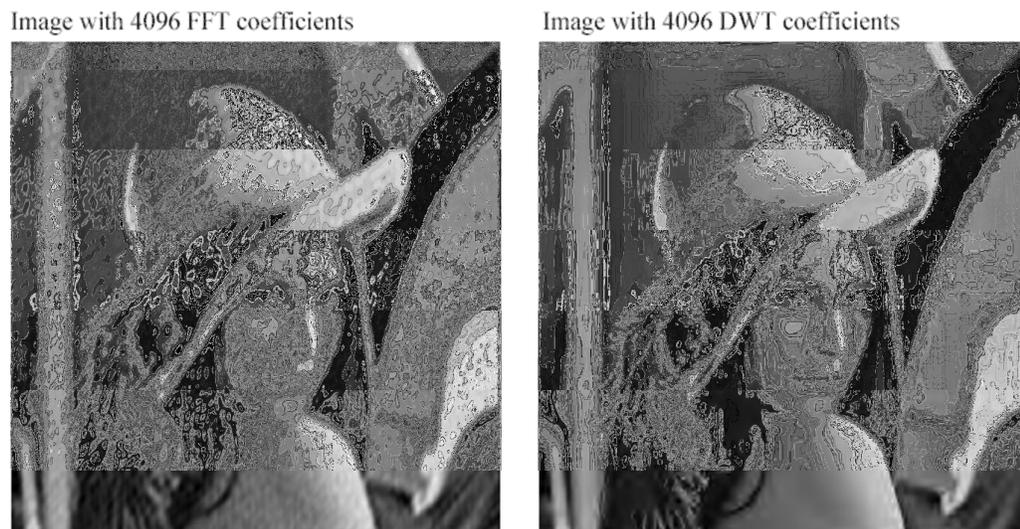


Fig. 1. 9 Comparación de la compresión de Imágenes.³⁰

²⁹ JOAQUÍN LÓPEZ HERRAIZ, "WAVELETS CONCEPTO Y APLICACIONES PARA EL ANÁLISIS DE SEÑALES", Departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear, Universidad Complutense de Madrid. Octubre 2004

³⁰ JOAQUÍN LÓPEZ HERRAIZ, "WAVELETS CONCEPTO Y APLICACIONES PARA EL ANÁLISIS DE SEÑALES", Departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear, Universidad Complutense de Madrid. Octubre 2004.

1.4. FAMILIAS WAVELET.

El número de wavelets existentes es enorme. En general conviene usar aquel cuya forma se adecúe mejor al tipo de señal con la que se trabaja. Hay wavelets continuos/discretos, con/sin soporte compacto, suaves/con discontinuidades, ortogonales/biortogonales. Las familias más utilizadas son:

1.4.1. LA WAVELET DE DAUBECHIES.

CARACTERISTICAS GENERALES	
Creada	Daubechies
Nombre corto	db
Orden N	N= 1(Haar), 2, 3, 4,
Ejemplos	db1 or Haar, db4, db15
Ortogonal	Si
Biortogonal	Si
Soporte compacto	Si
DWT	Posible
CWT	Posible
Simetría	Haar si, otro orden no
Momentos de desvanecimiento	N
Numero de filtros	2N
Algoritmo en Matlab	waveletdabechies=dbwavf('dbN')

- Grafica de la wavelet Daubechies db1 o wavelet de Haar

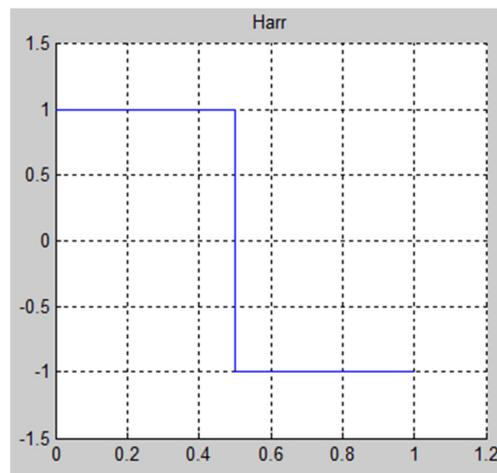


Fig. 1. 10 Wavelet de Haar.

- Wavelets Daubechies de orden mayor a 2.

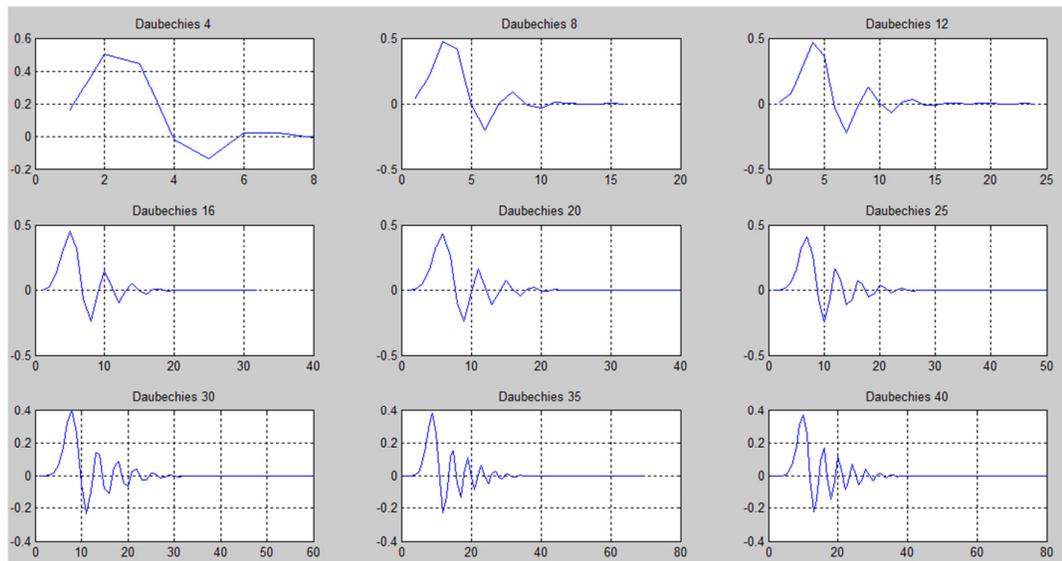


Fig. 1. 11 Wavelet Daubechies de orden N graficado en MATLAB

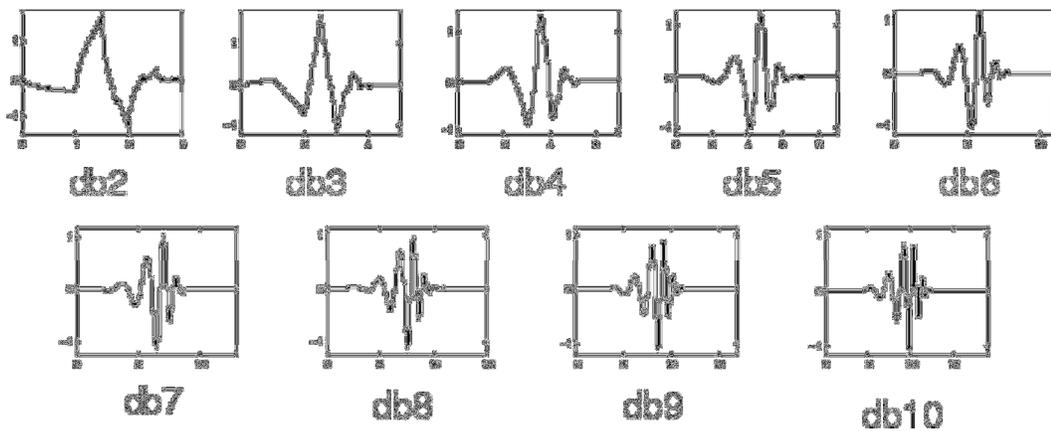


Fig. 1. 12 Wavelet Daubechies ideal de orden N.

Con el fin de agregar simetría a las wavelets Daubechies, se crean la familia de wavelets Symmlets.

1.4.2. LA WAVELET SYMMLETS.

CARACTERISTICAS GENERALES	
Creada	Daubechies
Nombre corto	Sym
Orden N	N= 2, 3, 4,, 45.
Ejemplos	Sym2, sym8, sym 10
Ortogonal	Si
Biortogonal	Si
Soporte compacto	Si
DWT	Posible
CWT	Posible
Simetría	Algo
Momentos de desvanecimiento	N
Numero de filtros	2N
Algoritmo en Matlab	waveletsymmlets= symwavf ('symN')

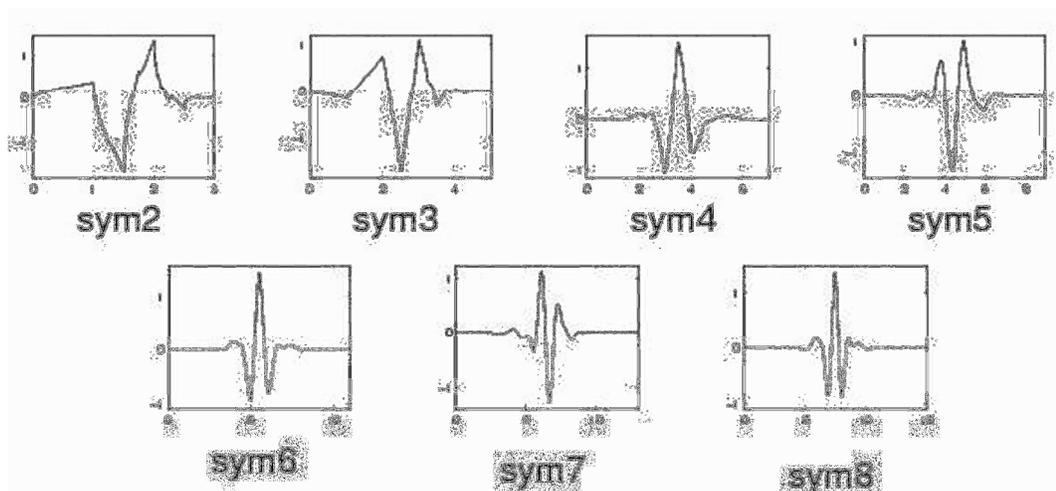


Fig. 1. 13 Wavelet Symmlet ideal de orden N.

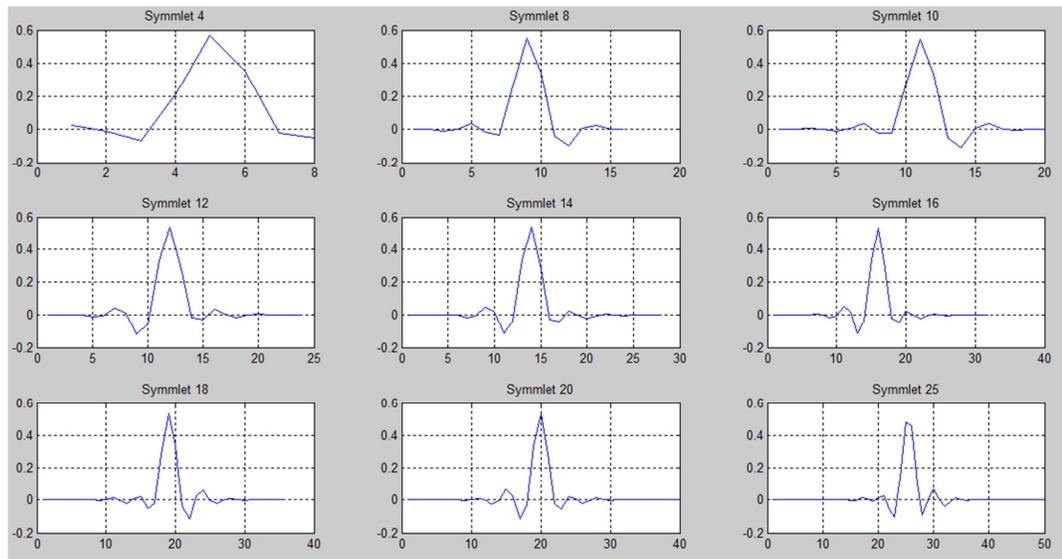


Fig. 1. 14 Wavelet Symmlet de orden N graficado en MATLAB.

1.4.3. LA WAVELET COIFLET.

CARACTERISTICAS GENERALES	
Creada	Daubechies con Coifman
Nombre corto	coif
Orden N	N= 1, 2, 3, 4, 5.
Ejemplos	coif2, coif4
Ortogonal	Si
Biortogonal	Si
Soporte compacto	Si
DWT	posible
CWT	posible
Simetría	si
Momentos de desvanecimiento	2N
Numero de filtros	6N
Algoritmo en Matlab	waveletscoiflet= coifwavf('coifN')

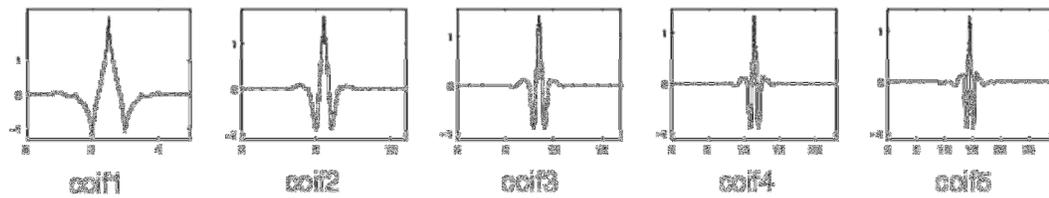


Fig. 1.15 Wavelet Coiflet ideal de orden N.

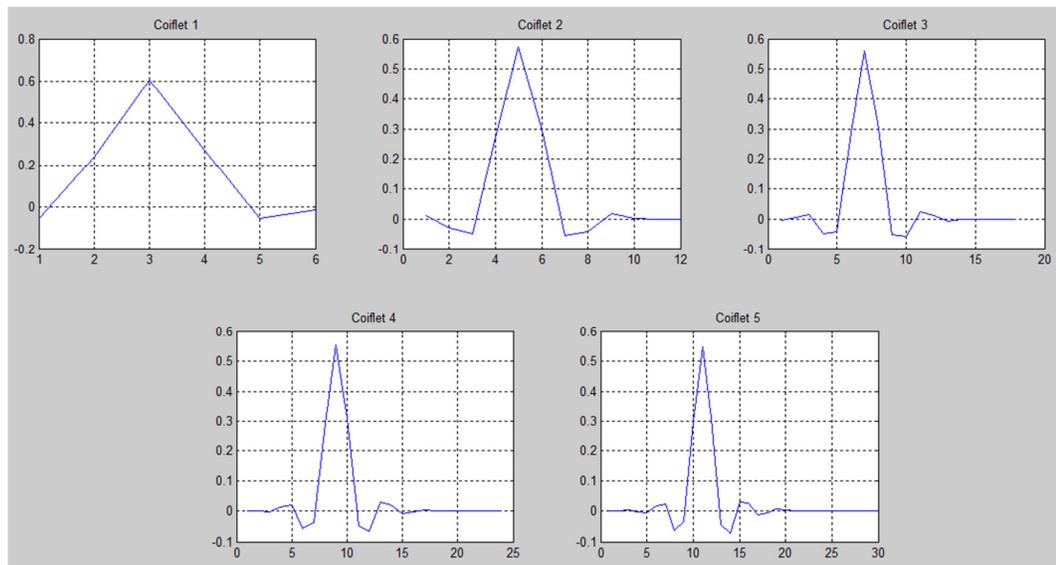


Fig. 1.16 Wavelet Coiflet de orden N graficado en MATLAB.

1.4.4. LA WAVELET MEYER.

CARACTERISTICAS GENERALES	
Creada	Meyer
Nombre corto	meyr
Ortogonal	si
Biorotogonal	si
Soporte compacto	no
DWT	Posible pero sin FWT
CWT	posible
Simetría	si
Soporte efectivo	[-8 8]
Algoritmo en Matlab	Meyer [phi,psi,x] = meyer(lb,ub,n); Lb=-8, ub=8, n=1024

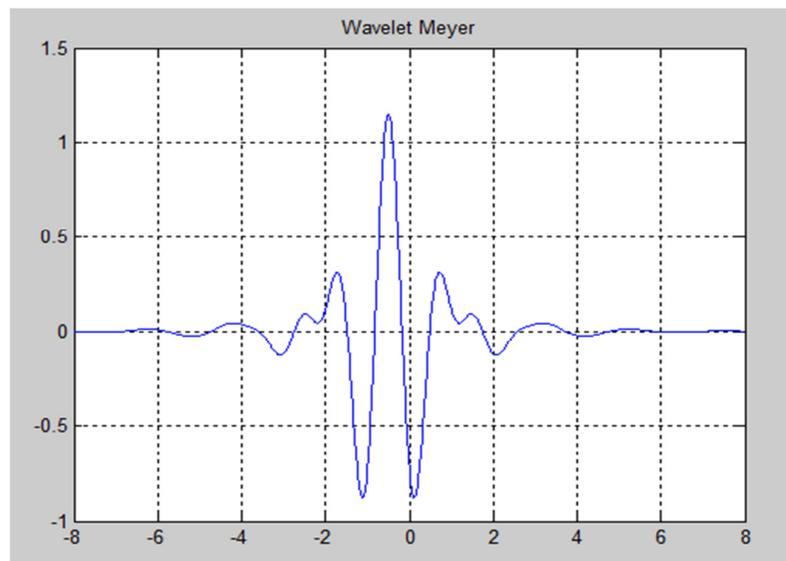


Fig. 1. 17 Wavelet Meyer.

1.4.5. LA WAVELET GAUSSIANA.

Se define como la derivada de la función de densidad de probabilidad Gaussiana.

Definida por:

$$gaus(x,n) = C_n \cdot \frac{d}{dx} (e^{-x^2}, n)$$

$$C_n = 2 - norm \quad \text{de} \quad gaus(x,n) = 1$$

CARACTERISTICAS GENERALES	
Creada	Gaussian
Nombre corto	gaus
Ortogonal	no
Biortogonal	no
Soporte compacto	no
DWT	no
CWT	posible
Simetría	si
Soporte efectivo	[-5 5]
Algoritmo en Matlab	$gaus(x,n) = C_n * \text{diff}(\exp(-x^2),n)$ donde diff denota la derivada simbólica y C_n es 2-norm of $gaus(x,n) = 1$.

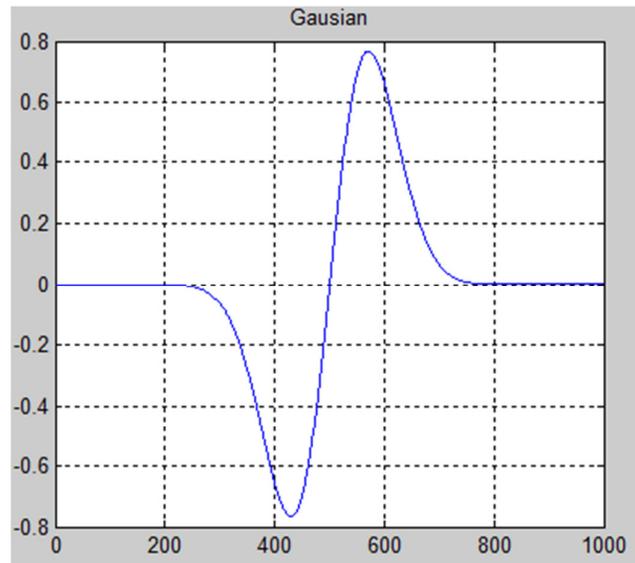


Fig. 1. 18 Wavelet Gaussiana.

1.4.6. LA WAVELET MEXICAN HAT.

Se define como la segunda derivada de la función de densidad de probabilidad

Gaussiana. Definida por:

$$mexh(x) = \frac{2 \cdot (1 - x^2) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}}{\pi^{1/4} \cdot \sqrt{3}}$$

CARACTERISTICAS GENERALES	
Familia	Mexican Hat
Nombre corto	Mexh
Ortogonal	No
Biortogonal	No
Soporte compacto	No
DWT	No
CWT	Posible
Simetría	Si
Soporte efectivo	[-5 5]
Algoritmo en Matlab	$mexh(x) = c * \exp(-x^2/2) * (1-x^2)$ where $c = 2/(\sqrt{3}) * \pi^{1/4}$

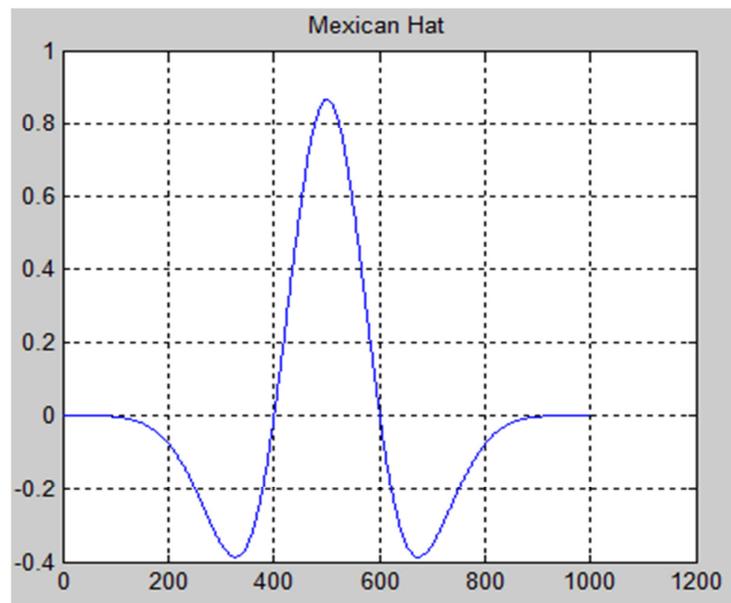


Fig. 1. 19 Wavelet Mexican Hat.

1.4.7. LA WAVELET MORLET.

Se define como la segunda derivada de la función de densidad de probabilidad

Gaussiana modulada. Definida por:
$$\text{morl}(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \text{Cos}(5 \cdot x)$$

CARACTERISTICAS GENERALES	
Familia	Morlet
Nombre corto	morl
Ortogonal	no
Biorotogonal	no
Soporte compacto	no
DWT	no
CWT	posible
Simetría	si
Soporte efectivo	[-4 4]
Algoritmo en Matlab	$\text{morl}(x) = \exp(-x^2/2) * \cos(5x)$

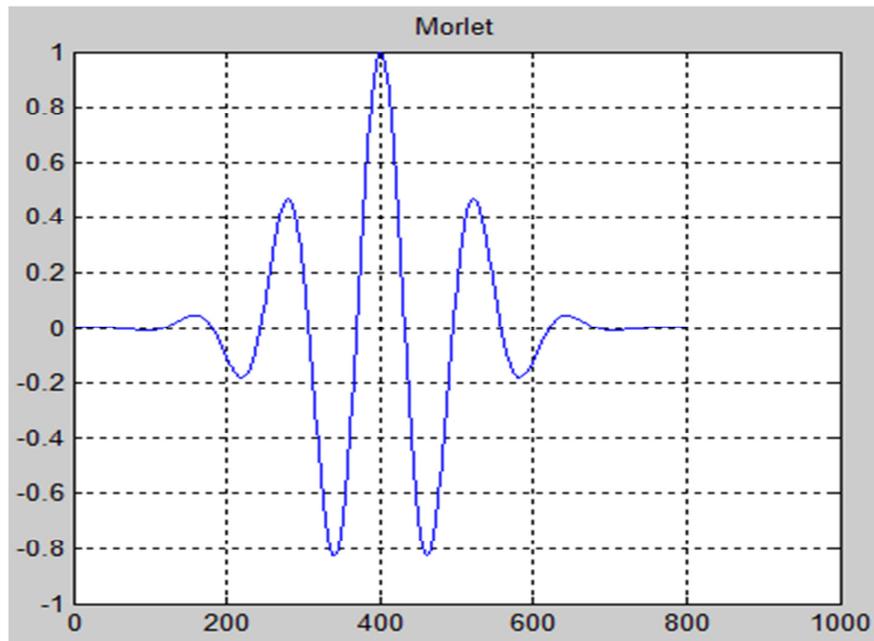


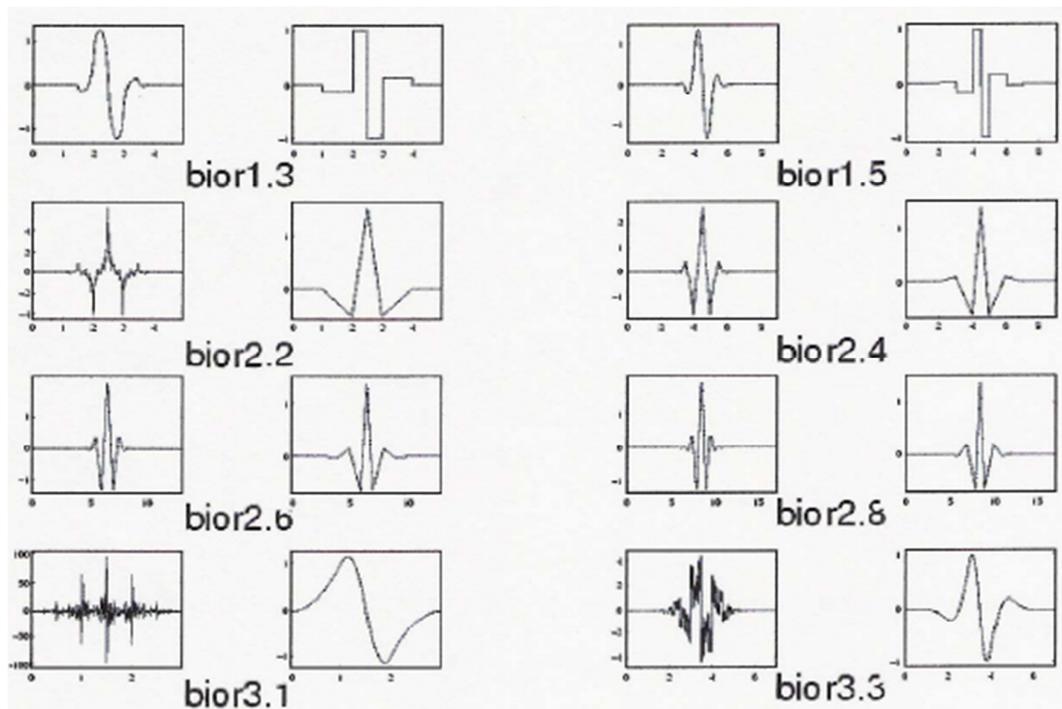
Fig. 1. 20 Wavelet Morlet.

1.4.8. WAVELETS BIORTOGONALES.

Para la reconstrucción de la señal es posible con los filtros FIR (Respuesta al Impulso finito, Finite Impulse Response), lo cual en las wavelets ortogonales es imposible excepto la wavelet de Haar.:

CARACTERISTICAS GENERALES	
Familia	Biorotogonal
Nombre corto	bior
Orden Nr, Nd r para reconstrucción d para descomposición	Nr=1. Nd = 1, 3, 5. Nr=2. Nd = 2, 4, 6, 8. Nr=3. Nd = 1, 3, 5, 7, 9. Nr=4. Nd = 4. Nr=5. Nd = 5. Nr=6. Nd = 8.
Ejemplos	Bior3.1, bior5.5
Ortogonal	no
Biorotogonal	si
Soporte compacto	si

bior Nr. Nd	Longitud efectiva de filtro bajo	Longitud efectiva de filtro alto
bior1.1	2	2
bior1.3	6	2
bior1.5	10	2
bior2.2	5	3
bior2.4	9	3
bior2.6	13	3
bior2.8	17	3
bior3.1	4	4
bior3.3	8	4
bior3.5	12	4
bior3.7	16	4
bior3.9	20	4
bior4.4	9	7
bior5.5	9	11
bior6.8	17	11
DWT	posible	
CWT	posible	
Simetría	si	
Momentos de desvanecimiento	Nr	



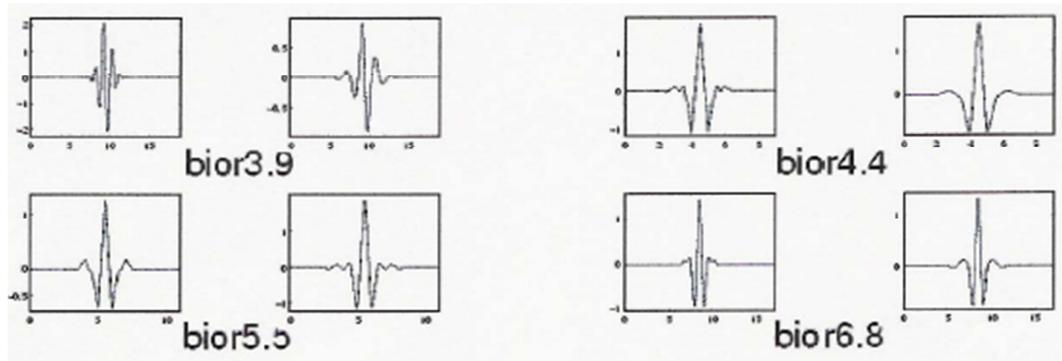


Fig. 1. 21 Wavelet Biortogonales según Nr, Nd

1.5. WAVELET CONTINUA.

1.5.1. DEFINICIÓN.

La Transformada Wavelet Continua (CWT) tiene una buena resolución en tiempo y mala resolución en frecuencia cuando se trata de señales de altas frecuencias, pero si la señal tratada es de frecuencias bajas, está posee una buena resolución en frecuencia y mala resolución en tiempo. Por lo tanto la CWT de una señal $x(t)$ que existe en $L^2(\mathbb{R})$ (Conjunto de señales de energía finita), está definida por:

$$CWT(a,b) = \sqrt{\frac{f}{f_0}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot h^* \left(\frac{f}{f_0} \cdot (t-b) \right) \cdot dt \quad (1-11)$$

El termino $h(t)$ se refiere a la wavelet madre, que es una función prototipo que se traslada y escala para analizar la señal a diferentes resoluciones. Sea $a = \frac{f_0}{f}$ el parámetro de escalamiento, resumiendo la ecuación anterior queda:

$$CWT(a,b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot h^* \left(\frac{(t-b)}{a} \right) \cdot dt \quad (1-12)$$

Al ser un producto interno entre la wavelet madre $h(t)$ e diferentes resoluciones y la señal $x(t)$ y además de normalizar la energía con el parámetro $\frac{1}{\sqrt{|a|}}$ para obtener la misma energía en cada escala, se obtiene una serie de coeficientes, los cuales nos indican que tan parecida es la señal a cierta base de funciones.

Si tenemos una señal $x(t)$ de diferentes frecuencias como la Fig. 1.22, los coeficientes de la CWT se muestra en la siguiente figura, pero para analizar se rota un poco y se obtiene las amplitudes dadas en el tiempo con su frecuencia en la Fig. 1.23

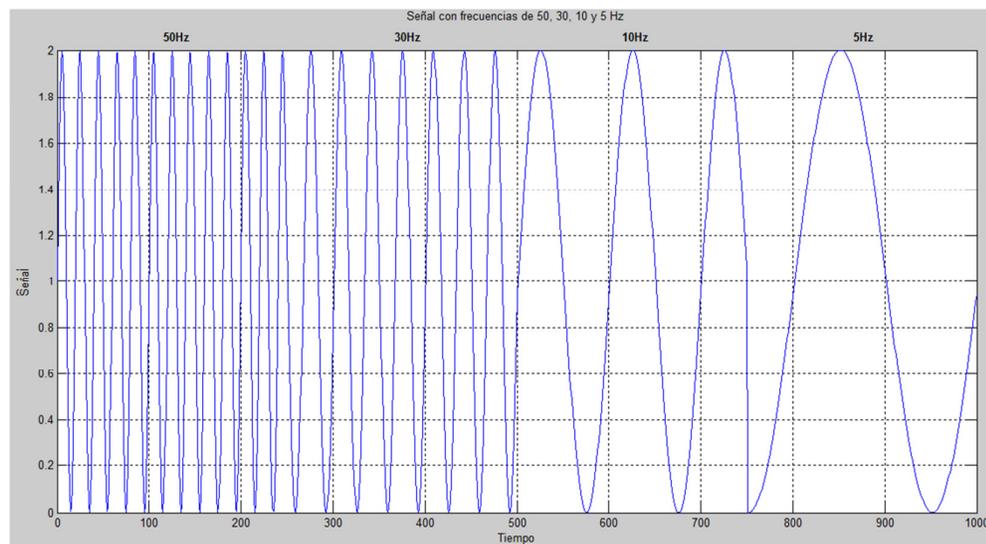


Fig. 1. 22 Señal con frecuencias de 50, 30, 10 y 5Hz.

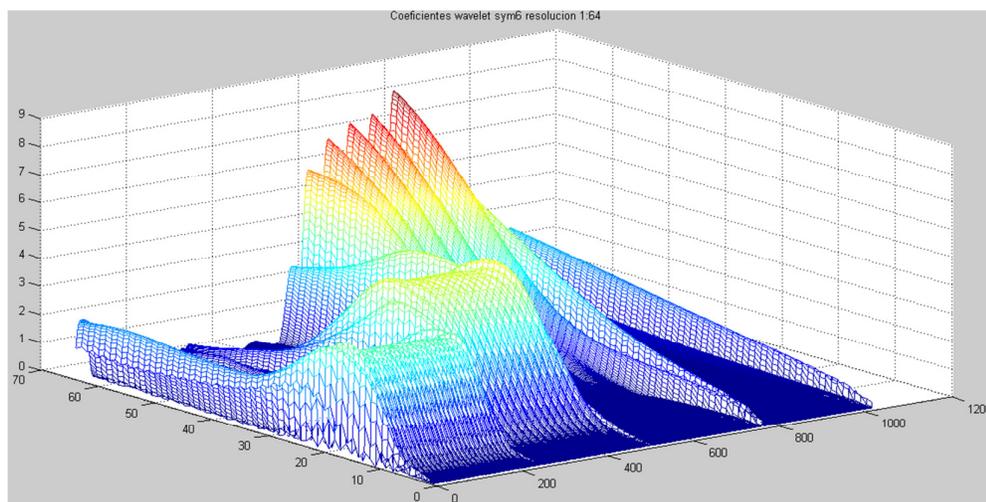


Fig. 1. 23 Coeficientes wavelet sym6 con resolución 1:64

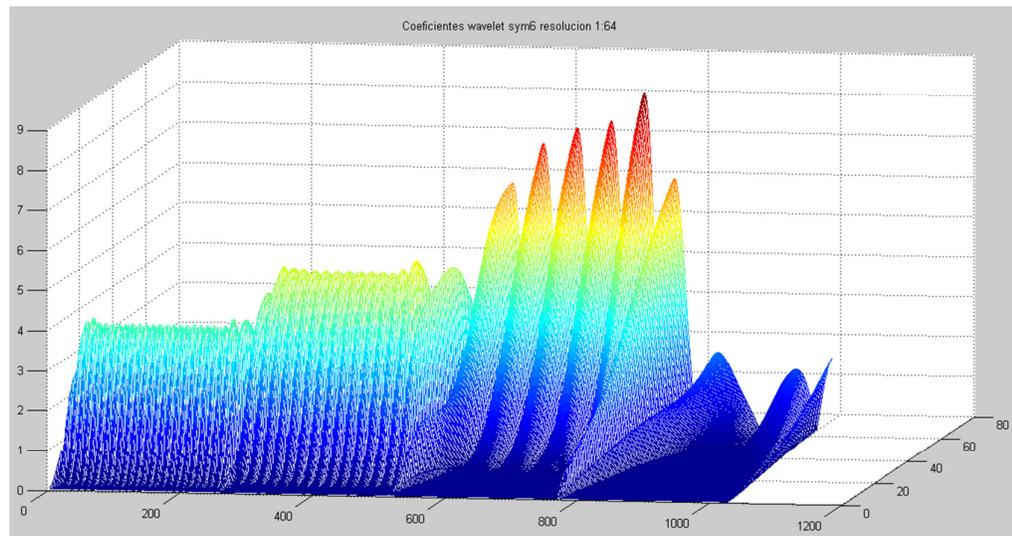


Fig. 1. 24 Otra vista de los Coeficientes wavelet sym6 con resolución 1:64.

Si realizamos una sumatoria de las proyecciones ortogonales de la señal de la CWT, obtendremos la ecuación del proceso inverso y obtendríamos nuevamente la señal $x(t)$, y obtenemos la Transformada Wavelet Continua Inversa (ICWT) y está definida por:

$$ICWT = x(t) = \frac{1}{C_h^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{CWT(a,b) \cdot h^*\left(\frac{t-b}{a}\right)}{a^2} \cdot db \cdot da \quad (1-13)$$

Donde C_h es una constante de admisibilidad que se determina por la wavelet que se ha utilizado en la transformación, y está dada por la siguiente ecuación:

$$C_h = \sqrt{2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|H(\omega)|^2}{|\omega|} \cdot d\omega} < \infty \quad (1-14)$$

$H(\omega)$ es la transformada de Fourier de $h(x)$ que es la función madre de wavelet utilizada en la transformación inicial. Básicamente C_h debe tener un valor finito para que se pueda realizar la transformación inversa y eso se da en la mayoría de los casos.

1.5.2. CWT Bidimensional.

Al realizar la CWT de una señal de una dimensión $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, se obtiene un función de dos variables $\mathbf{W}(\mathbf{a},\mathbf{b})$ una más que la señal analizada. Para cada incremento de una variable, la transformada aumenta su dimensión en una unidad. Por lo que si tenemos una señal de dos dimensiones $\mathbf{u}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)$ su transformada wavelet continua sería:

$$CWT(a_{x_1}, a_{x_2}; b_{x_1}, b_{x_2}) = \frac{1}{\sqrt{|a_{x_1} \cdot a_{x_2}|}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x_1, x_2) \cdot h^* \left(\frac{x_1 - b_{x_1}}{a_{x_1}}, \frac{x_2 - b_{x_2}}{a_{x_2}} \right) \cdot dx_1 \cdot dx_2 \quad (1-15)$$

La cual es una función en cuatro dimensiones, a_{x_1} y a_{x_2} son las escalas, b_{x_1} y b_{x_2} indican las traslaciones en las dos dimensiones y $\mathbf{h}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)$ es la función wavelet madre de dos dimensiones. Esta puede ser reducida a un conjunto de funciones bidimensionales de (b_{x_1}, b_{x_2}) con diferentes escalas cuando los factores de escala son iguales, y obtenemos:

$$CWT(a; b_{x_1}, b_{x_2}) = \frac{1}{|a|} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x_1, x_2) \cdot h^* \left(\frac{x_1 - b_{x_1}}{a_{x_1}}, \frac{x_2 - b_{x_2}}{a_{x_2}} \right) \cdot dx_1 \cdot dx_2 \quad (1-16)$$

También podemos obtener su transformada inversa, siendo \mathbf{C}_k el mismo de la transformada de una dimensión.

$$ICWT = u(x_1, x_2) = \frac{1}{C_h^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{CWT(a; b_{x_1}, b_{x_2}) \cdot h^* \left(\frac{x_1 - b_{x_1}}{a_{x_1}}, \frac{x_2 - b_{x_2}}{a_{x_2}} \right)}{a^3} \cdot db_{x_1} \cdot db_{x_2} \cdot da \quad (1-17)$$

La misma generalización puede ser extendida al caso n-dimensional.

1.6. WAVELET DISCRETA.

1.6.1. DEFINICIÓN

Para realizar la DWT debe cumplir que la condición de Nyquist para discretizar los parámetros de tiempo y de escala es submuestrear, con un par de escalas que cumplan con la condición $a_0 < a_1$ que corresponde aproximadamente a dos frecuencias $f_0 < f_1$, y en consecuencia los coeficientes en escala a_1 en $\left(\frac{f_0}{f_1}\right)^{i-esima}$ a la razón de los coeficientes en la escala a_0 . Para wavelets discretas los parámetros de escala y traslación son elegidos tal que en el nivel j , la wavelet $a_0^j h(a_0^{-j} \cdot t)$ es a_0^j veces el ancho de $h(t)$. Esto significa que el parámetro de escala $a = a_0^j : j \in \mathbb{Z}$ y el parámetro de traslación $b = k \cdot b_0 \cdot a_0^j : j, k \in \mathbb{Z}$.³¹ De este modo la familia de wavelets está dada por:

$$h_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a_0^j|}} h\left(\frac{t}{a_0^j} - k \cdot b_0\right) \quad (1-18)$$

Y de esta forma la transformada discreta de wavelets tiene la forma

$$DWT_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{|a_0^j|}} \int f(t) \cdot h^*\left(\frac{t}{a_0^j} - k \cdot b_0\right) \cdot dt \quad (1-19)$$

Para recuperar $x(t)$ de los coeficientes $\{WDT_{j,k}\}$, debe existir la siguiente condición de estabilidad,

³¹ Alarcón Aquino, Anomaly Detection and Prediction in Communication Networks Using Wavelet Transforms, PhD thesis, Imperial College London, University of London. UK 2003.

$$A\|x(t)\|^2 \leq \frac{2}{A+B} \sum_j \sum_k |DWT_{j,k}| \leq B\|x(t)\|^2 \quad (1-20)$$

Con $A > 0$ y $B < \infty$ para todas las señales $x(t)$ en $L^2(\mathbb{R})$. Entonces la fórmula de reconstrucción está determinada por:

$$x(t) \approx \frac{2}{A+B} \sum_j \sum_k DWT_{j,k} \cdot h_{j,k}^*(t) \quad (1-21)$$

Entre más cercanos sean A y B más aproximada será la reconstrucción. Cuando $A=B=1$ la familia de wavelets es ortonormal³².

1.6.2. DESCRIPCIÓN CUALITATIVA DE LA DWT.^{33 34 35 36}

Para esta descripción se tomo como wavelet a la función de Haar para poder visualizar el proceso de aplicación de la DWT en una señal discreta.

Se considera una función discreta

$$Fn = [1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 4 \ 3 \ 7 \ 8 \ 9 \ 2] \quad (1-22)$$

Se define

$$An = \frac{F_{2n-1} + F_{2n}}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad Dn = \frac{F_{2n-1} - F_{2n}}{\sqrt{2}} \quad (1-23)$$

³² Alarcón Aquino, Anomaly Detection and Prediction in Communication Networks Using Wavelet Transforms, PhD thesis, Imperial College London, University of London. UK 2003.

³³ Walker, James S.A Primer on Wavelets and their Scientific Applications Chapman & Hall 1999.

³⁴ Percival Donald B; Walden Andrew T. Wavelet Methods for Time Series Analysis~ Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics Cambridge University Press, 2002.

³⁵ Misiti, Michel; Yves; Oppenheim, Georges; Poggi, Jean Michel, Wavelet Toolbox For Use with MATLAB. The Math Works, Inc 1997.

³⁶ Arturo Osorio Sánchez, Algoritmo para detección de vibraciones anormales en maquinarias utilizando la transformada wavelet, Universidad de las Américas Puebla, Cholula, Puebla, México a 11 de mayo de 2006.

Se tendrá por lo tanto una primera subfunción A^1 formada por los valores An y una primera subfunción D^1 formada por los valores Dn .

$$A^1 = \left[\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{7}{2}\sqrt{2}, \frac{11}{2}\sqrt{2}, \frac{7}{2}\sqrt{2}, \frac{15}{2}\sqrt{2}, \frac{11}{2}\sqrt{2} \right] \quad (1-24)$$

$$D^1 = \left[-\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{7}{2}\sqrt{2} \right] \quad (1-25)$$

Ambas subfunciones son de la mitad de tamaño que la función original y éste se podrá recuperar de

$$Fn = \left[\frac{A_1 + D_1}{\sqrt{2}}, \frac{A_1 - D_1}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{A_{n/2} + D_{n/2}}{\sqrt{2}}, \frac{A_{n/2} - D_{n/2}}{\sqrt{2}} \right] \quad (1-26)$$

$$Fn = \left[\frac{\frac{3}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, \frac{\frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{\frac{11}{2}\sqrt{2} + \frac{7}{2}\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, \frac{\frac{11}{2}\sqrt{2} - \frac{7}{2}\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right] \quad (1-27)$$

Generando la señal original que finalmente se puede escribir como:

$$Fn = A_n^1 + D_n^1 \quad (1-28)$$

Donde;

$$A_n^1 = \left[\frac{A_1}{\sqrt{2}}, \frac{A_1}{\sqrt{2}}, \frac{A_2}{\sqrt{2}}, \frac{A_2}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{A_{n/2}}{\sqrt{2}}, \frac{A_{n/2}}{\sqrt{2}} \right] \quad (1-29)$$

$$D_n^1 = \left[\frac{D_1}{\sqrt{2}}, \frac{-D_1}{\sqrt{2}}, \frac{D_2}{\sqrt{2}}, \frac{-D_2}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{D_{n/2}}{\sqrt{2}}, \frac{-D_{n/2}}{\sqrt{2}} \right] \quad (1-30)$$

Si se define una matriz V_n^1 como:

$$V_n^1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Y una matriz W_n^1 como:

$$W_n^1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Se obtiene

$$A_n^1 = [A^1] \cdot [V_n^1] \quad y \quad D_n^1 = [D^1] \cdot [W_n^1] \quad (1-31)$$

Con este mismo concepto es posible hacer un análisis en varios niveles como el mostrado en la figura 1.27.

Consideremos el nivel 2, donde se aplica:

$$A^2 = \frac{A_{2n-1}^1 + A_{2n}^1}{\sqrt{2}} \quad y \quad D^2 = \frac{A_{2n-1}^1 - A_{2n}^1}{\sqrt{2}} \quad (1-32)$$

$$A^2 = [5 \quad 9 \quad 13] \quad (1-33)$$

$$D^2 = [-2 \quad 2 \quad -2] \quad (1-34)$$

De tal manera que F_n se podrá recuperar de iteraciones sucesivas de $A^2:D^2:D^1$ pues de $A^2:D^2$: se recupera $A^1:D^1$ como se vio anteriormente se recupera F_n .

Si la señal que se va a analizar se descompone como se muestra en la figura (Fig. 1.25), separando las componentes de baja frecuencia de las de alta frecuencia se obtienen dos señales que en su conjunto producen el doble de muestras de la señal original.

En algunos casos se requiere disminuir la cantidad de datos necesarios para el manejo de la señal, por lo que se hace el muestreo reducido (downsampling), en el que se involucran los coeficientes wavelets obteniendo con ello una cantidad de muestras de la mitad que en el caso anterior. Fig. 1.26.

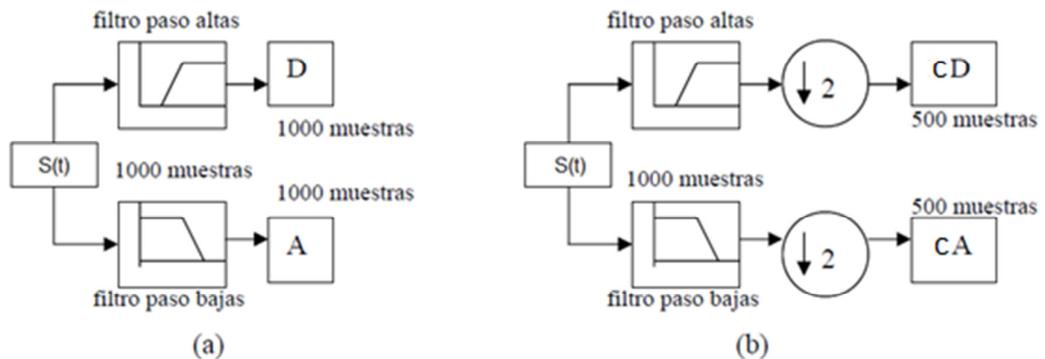


Fig. 1. 25 Componentes de alta y baja frecuencia separadas, (a) a muestreo completo y (b) a muestreo reducido con los coeficientes wavelet donde $\downarrow 2$ significa muestreo reducido a la mitad (downsampling).

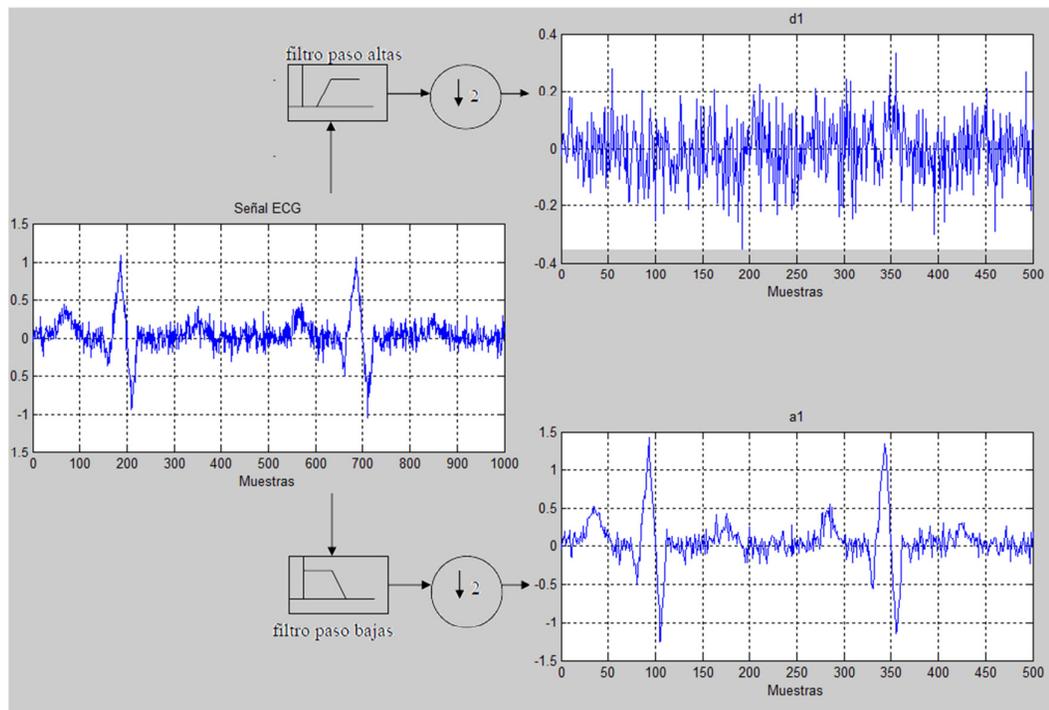


Fig. 1. 26 Descomposición de la señal ECG en alta y baja frecuencia con reducción de muestras dadas por los coeficientes wavelets.

Este procedimiento puede repetirse para varios niveles como se observa en la Fig. 1.27. De tal manera que para el tercer nivel de la señal tendrá un número de muestras en A_3 de 125 y D_3 igualmente 125, dado que en la componente de baja frecuencia la reducción en el número de muestras no distorsiona la señal de una manera significativa es posible la reconstrucción de la señal original de la ecuación (1-35), seleccionando el nivel de dependiendo de la señal en serie de tiempo, de la

wavelet utilizada y de la energía de los componentes de frecuencia de la wavelet de tal forma que la distorsión de la señal recuperada no afecte significativamente la información.

$$S = A + D1 + D2 + D3 \quad (1-35)$$

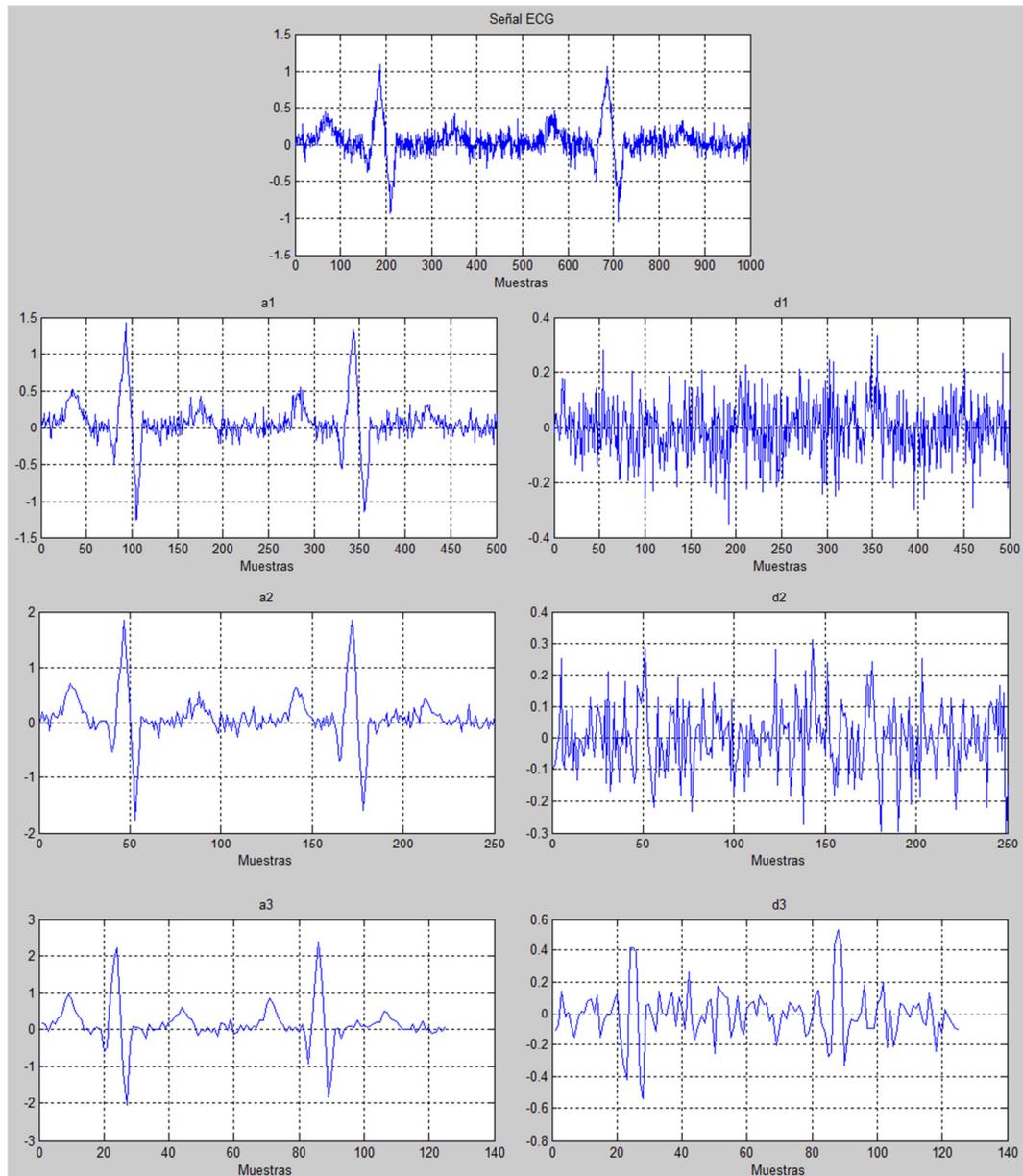


Fig. 1. 27 Descomposición de tres niveles de la señal ECG.

Por lo general los componentes de la alta frecuencia son señales de ruido y es hasta conveniente deshacerse de ellas, por lo que la señal notablemente reducida lo que es sumamente útil en procesamiento de señales. De cualquier manera en la siguiente figura se observa la señal recuperada dada por la ecuación anterior.

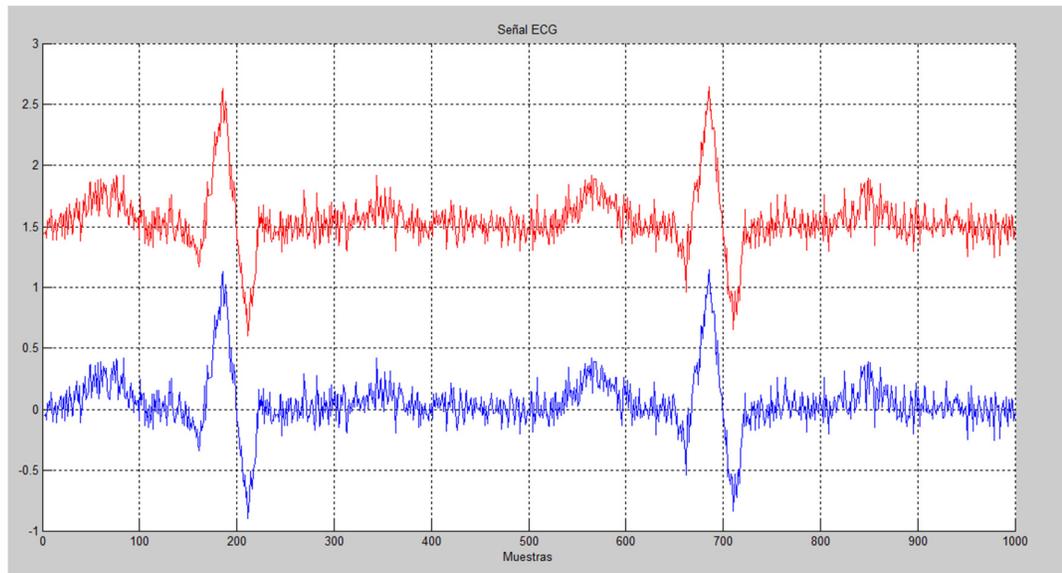


Fig. 1. 28 Comparación de la señal original (azul) y la señal reconstruida con la transformada wavelet inversa por los coeficientes con offset de 1.5 (rojo).

1.6.3. WAVELETS Y BANCO DE FILTROS. ANÁLISIS MULTIRESOLUCIÓN.

El concepto de Banco de Filtros se crea a partir de la transformada wavelet discreta, como se pudo observar cuando se analizó en la descripción cualitativa donde la señal es dividida en dos señales que en resumen son dos filtros uno pasa alto y otro pasa bajo. Con el de baja frecuencia se obtienen datos de aproximación y con el de alta frecuencia se obtienen datos de detalle.

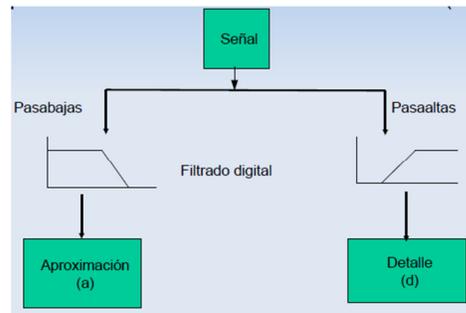


Fig. 1. 29 Descomposición de la señal.

El filtrado digital es equivalente a la convolución de la señal con respuesta al impulso del filtro ($h(n)$) ya sea pasa bajo o pasa alto y está definida por:

$$x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) * h(n - k) \quad (1-36)$$

Como se submuestra la señal en un factor de dos, esto implica que la señal tendrá la mitad de los puntos, esto no afecta la escala y la mitad restantes de los puntos puede ser descartada con una eliminación de redundancia en un factor de dos y en consecuencia tenemos:

$$x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) * h(2n - k) \quad (1-37)$$

Además debemos considerar los siguientes conceptos:

-Downsampling (Decimado): Se aplica para no obtener matrices del mismo tamaño a la original, consiste en extraer 1 de cada dos datos como se muestra en la Fig. 1.25. Obtenemos que los coeficientes de detalle cD constan principalmente del ruido de alta frecuencia y los coeficientes cA contienen menos ruido que la imagen original.

-Upsampling (Undecimado): Es el proceso alargador de una señal, insertando un cero por cada dos datos de la señal.

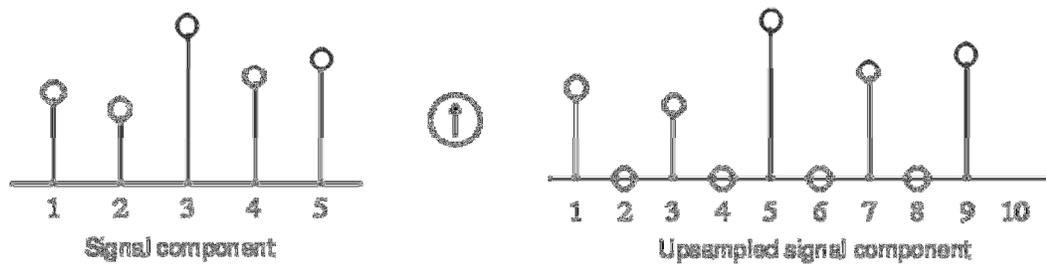


Fig. 1. 30 Ejemplo de Upsampling.

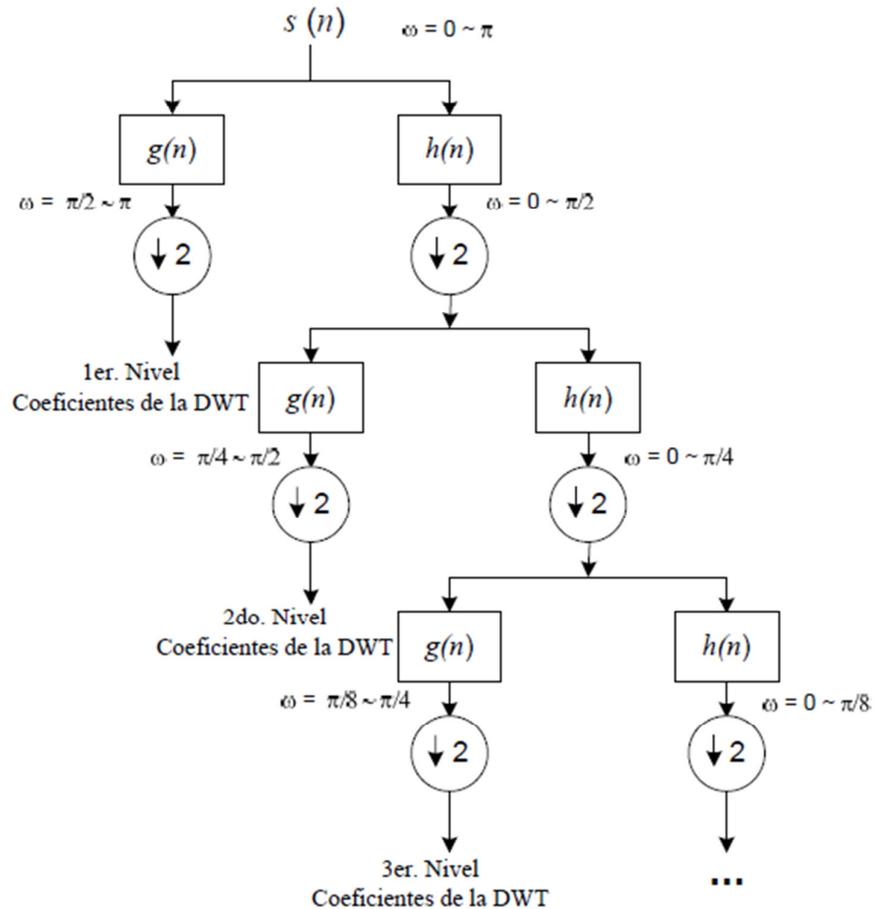


Fig. 1. 31 Análisis Multiresolución detalles de baja frecuencia

A partir de los conceptos anteriores podemos explicar el proceso que se realiza para transformar una señal al dominio del tiempo y frecuencia. El proceso consiste en una serie de filtrados usando el concepto de decimado, utilizando filtro pasa bajo y filtro pasa alto con frecuencia de corte que satisfaga el criterio de Nyquist, posteriormente el resultado se vuelve a filtrar bajo las mismas características, obteniendo la señal con la

mitad de resolución pero sin cambio de escala, se le conoce como banco de filtros a este proceso al cual surge el concepto importante que es el Análisis Multi-Resolución (MRA), que consiste en un análisis de la señal a estudiar, de tal manera que tenemos a cada componente de frecuencia analizado con un nivel de resolución diferente, como se puede observar en la Fig. 1.31

Se puede apreciar par de filtros, $g(n)$ filtro pasa alto y $h(n)$ pasa bajo, además existen otras opciones como;

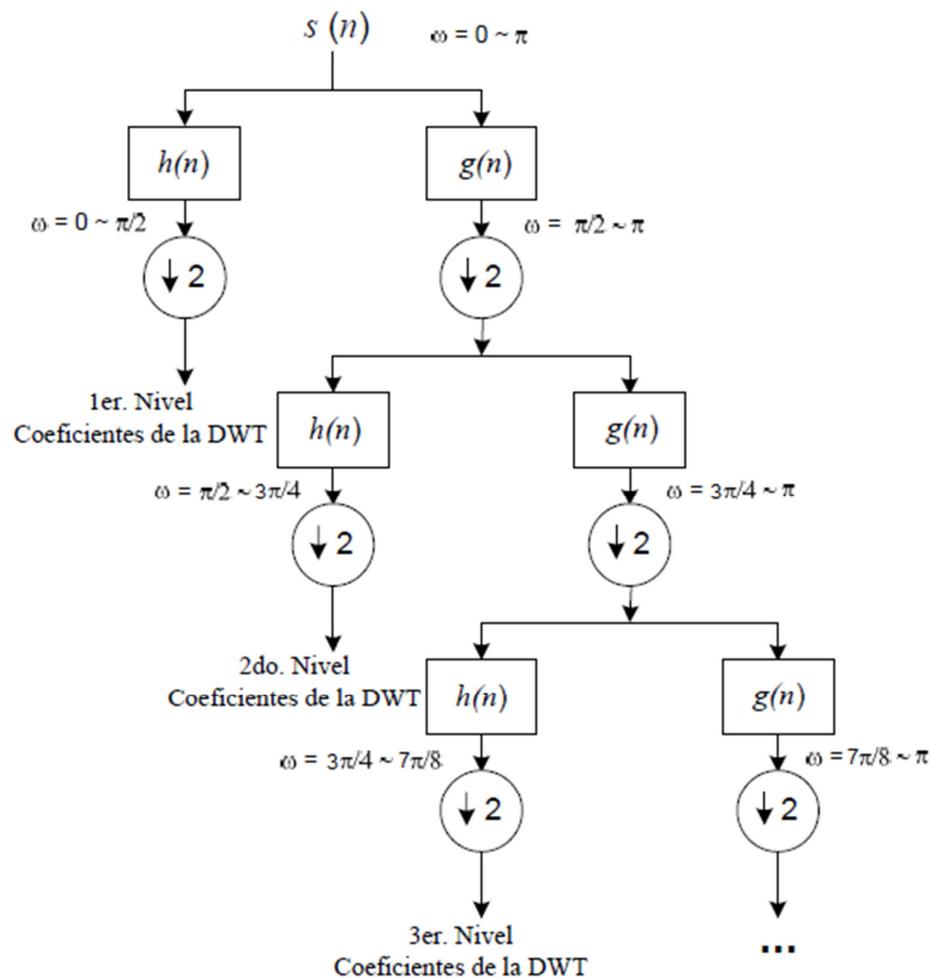


Fig. 1. 32 Análisis Multiresolución detalles de alta frecuencia.

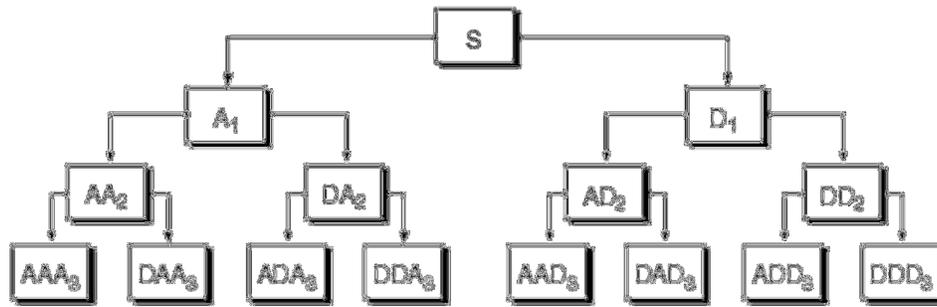


Fig. 1. 33 Análisis Multiresolución en paquete.

Para la aplicación de filtros por su eficacia computacional y a que se trabaja con señales de datos discretos $f(k)$ se emplea la rejilla diádica, es decir con $a=2$ y en consecuencia la ecuación (1-19) viene dada por:

$$DWT_{j,n} = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot h^* \left(\frac{t}{2^j} - n \right) \cdot dt \quad (1-38)$$

$$n = k \cdot b_0$$

Donde j se denomina octava o escala, y consiste en cada uno de los niveles en los que se descompone la señal. Las escalas bajas tienen en cuenta las frecuencias bajas y las escalas altas, las frecuencias altas.

Al ser la señal discretizada obtenemos la DWT con su wavelet madre

$$H_n^i(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \cdot h \left(\frac{t}{2^j} - n \right) \quad (1-39)$$

$$DWT_{j,n} = \sum_k f(k) \cdot H_n^{i*}(k)$$

Y de forma más detallada podemos aproximar la señal como:

$$f(n) = S_j + \sum_i^j W_i \quad (1-40)$$

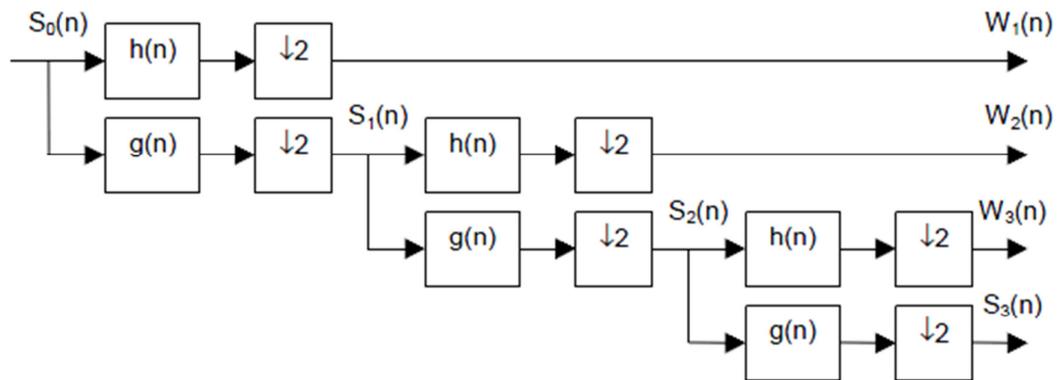


Fig. 1. 34 Diagrama de bloques del banco de filtros de análisis de la DWT.

Donde S son los datos de aproximación y W los datos de detalle, se pueden calcular como:

$$\begin{aligned}
 S_j(n) &= \sum_k g(k) \cdot S_{j-1}(2n-k) \\
 W_j(n) &= \sum_k h(k) \cdot S_{j-1}(2n-k)
 \end{aligned}
 \tag{1-41}$$

Los valores de $g(k)$ como $h(k)$ depende de la wavelet que se utiliza, para obtener los valores podemos ir a Matlab y colocar el comando **wfilters (wname)** donde nos da una cuatro filtros dos pasa alto y dos pasa bajos, los cuales uno es de descomposición y el otro para la reconstrucción, siendo Filtros Espejo de Cuadratura (QMF), ya que cumple la siguiente relación, donde L representa la longitud de muestras para el filtro:

$$g(L-1-n) = (-1)^n \cdot h(n)
 \tag{1-41}$$

La reconstrucción se realiza con proceso inverso al expuesto en la Fig. 1.33 considerando el proceso de decimado y undecimado.

Coefficientes de un filtro de Daubechies de nivel 2				
LO_D =	-0.1294	0.2241	0.8365	0.4830
HI_D =	-0.4830	0.8365	-0.2241	-0.1294

LO_R =	0.4830	0.8365	0.2241	-0.1294
HI_R =	-0.1294	-0.2241	0.8365	-0.4830
LO_D son los coeficientes del filtro pasa bajo de descomposición				
HI_D son los coeficientes del filtro pasa alto de descomposición				
LO_R son los coeficientes del filtro pasa bajo de reconstrucción				
HI_R son los coeficientes del filtro pasa alto de reconstrucción				

Tabla 1. 2 Ejemplo de un filtro wavelet Daubechies de nivel 2.

1.6.4. WAVELET EN 2 DIMENSIONES

La transformada wavelet discreta para el caso bidimensional o función $f(x,y)$ de tamaño $M \times N$ es:

$$DWT_h(j_0, m, n) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cdot h_{j_0, m, n}(x, y) \quad (1-42)$$

$$DWT_\psi^i(j, m, n) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cdot \psi_{j, m, n}^i(x, y) \quad (1-43)$$

Como en el caso unidimensional, j_0 es una escala de inicio arbitraria y los coeficientes $DWT_h(j_0, m, n)$ definen una aproximación de $f(x,y)$ en la escala j_0 . Los coeficientes $DWT_\psi^i(j, m, n)$ suma los detalles Horizontales, Verticales y Diagonales para la escala $j \geq j_0$.

Normalmente $j_0=0$ y $N=M=2^j$ de manera que $j=0,1,2,\dots,J-1$ y $m,n=0,1,2,\dots,2^{j-1}$, y la transformada inversa correspondiente es:

$$\begin{aligned}
 IDWT &= f(x, y) \\
 f(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_m \sum_n DWT_h(j_0, m, n) \cdot h_{j_0, m, n}(x, y) + \\
 &+ \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_m \sum_n DWT_\psi^i(j_0, m, n) \cdot \psi_{j_0, m, n}^i(x, y)
 \end{aligned} \tag{1-44}$$

1.7. WAVELET EN IMÁGENES.

La transformada wavelet como se puede analizar, puede ser generalizada para cualquier dimensión $n > 0$. Para el uso de las imágenes trabajaremos en dos dimensiones, $n = 2$.

Para la descomposición wavelet aplicada en imágenes, puede calcularse con un algoritmo similar al descrito anteriormente, es decir el uso de la DWT de 2D, la cual también es una extensión de la DWT 1D aplicado por separado a las filas y las columnas de la imagen, sabiendo que la DWT unidimensional actúa de forma secuencial, nivel por nivel., como se muestra la siguiente figura:

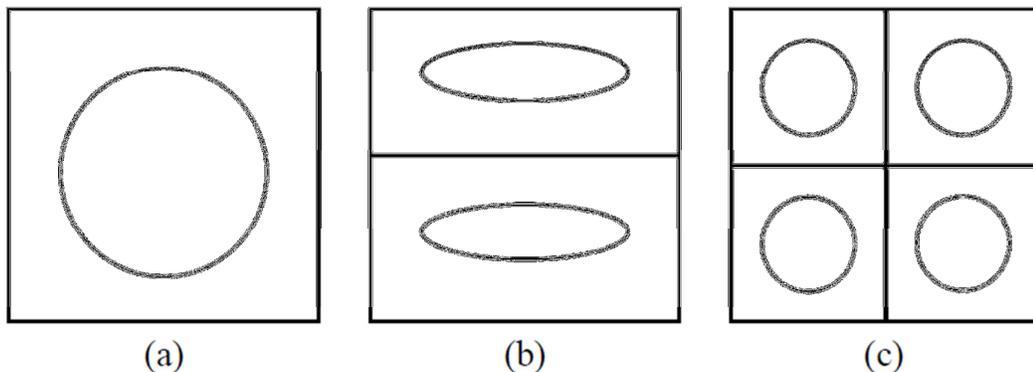


Fig. 1. 35 Pasos de la descomposición DWT en una imagen. (a) Imagen Original. (b) Descomposición en dirección vertical. (c) Descomposición de (b) en dirección horizontal (Resultado Final)

La primera secuencia es la horizontal que se obtienen los coeficientes horizontales con la DWT de las filas, los cuales se obtienen dos subimágenes bidimensionales, una correspondiente al filtro H (pasa bajo), y otra que deriva de la

aplicación del filtro G (pasa alto). A partir de estas subimágenes, se crean las secuencias verticales con las columnas, y se calcula la DWT con los filtros H y G. El resultado se coloca en formato de imagen bidimensional. Obteniendo cuatro subimágenes, las cuales tres son de detalles: Horizontal (HL), Vertical (LH) y Diagonal (HH), y la otra es de aproximación (LL), la cual se puede utilizar para realizar filtros reiterativos y así lograr una descomposición multinivel. Como sucede en la DWT de una dimensión, las imágenes resultantes son la cuarta parte de la imagen original por el submuestreo como ya se explico en la sección anterior.

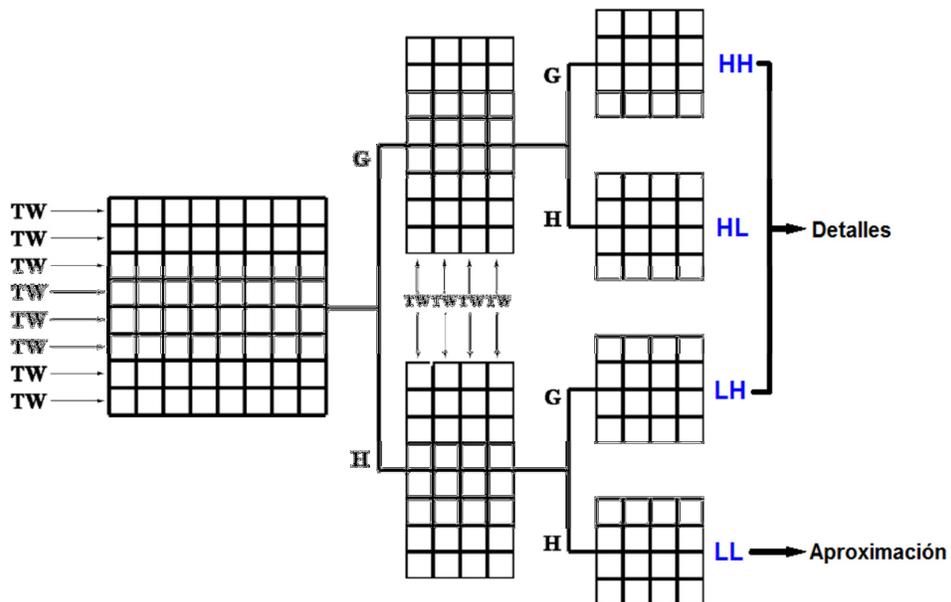


Fig. 1.36 DWT en forma secuencial.

Como se puede observar, el detalle Horizontal (HL) se obtiene al pasar la imagen primero por un filtro pasa alto las filas y por un pasa bajo las columnas, el detalle vertical las filas pasan por el filtro pasa bajo y las columnas por pasa alto, el detalle diagonal las filas y columnas pasan por filtros pasa altos, y por último la aproximación tanto filas como columnas pasan por filtros pasa bajos. También se puede obtener una multiresolución como se muestra en la siguiente figura.

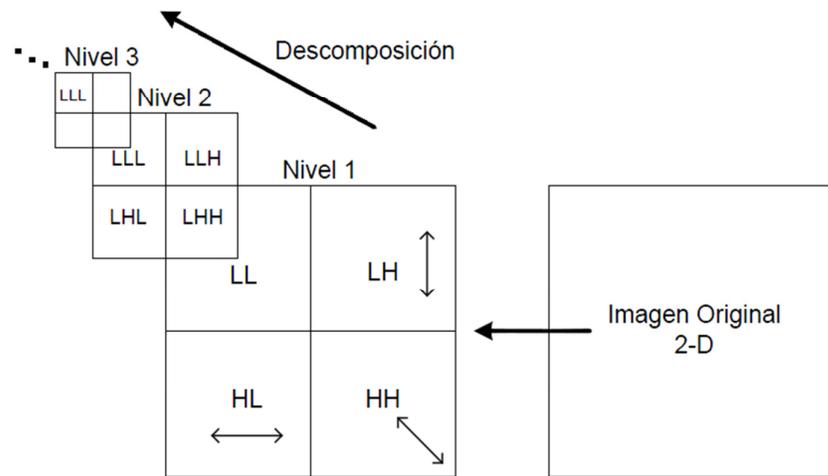


Fig. 1. 37 Jerarquía en la descomposición de una imagen usando DWT 2D

Además pudiéramos hacer un análisis de más niveles, en la siguiente figura se aprecia un análisis de dos niveles.

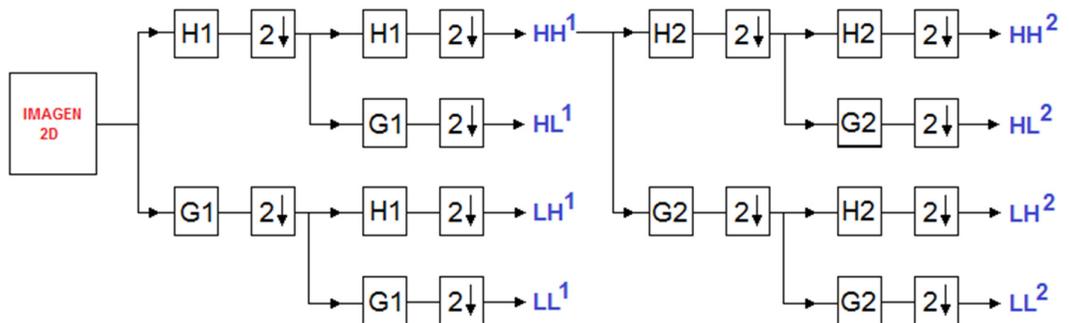


Fig. 1. 38 Descomposición wavelet de dos dimensiones por bloques.

Así mismo se puede obtener la reconstrucción de la imagen solamente invirtiendo el proceso como se explico en la sección 1.6.2.

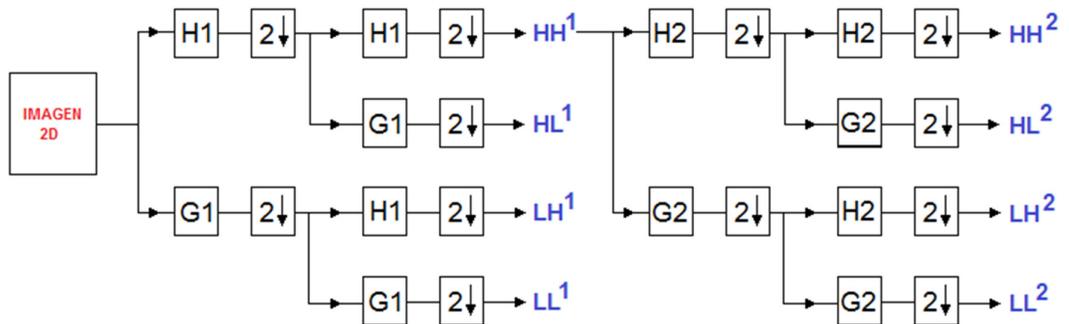


Fig. 1. 39 Reconstrucción wavelet de dos dimensiones de una imagen.

En la siguiente figura se aprecia una descomposición de un nivel con la wavelet “db1”, obteniendo las 4 imágenes una de aproximación, y los diferentes detalles horizontales, verticales y diagonales, y por último se realiza una reconstrucción de la imagen, la cual a simple vista parece una mejora.

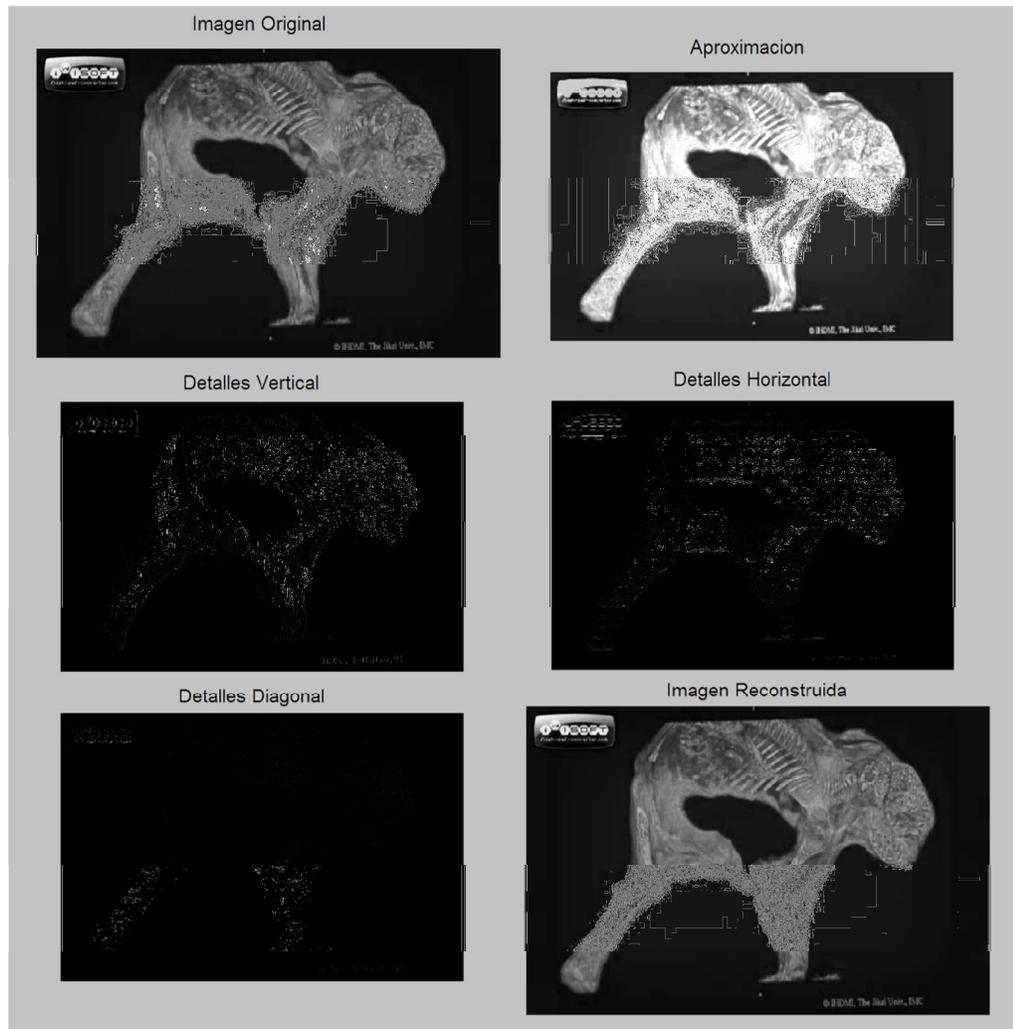


Fig. 1. 40 Ejemplo de una descomposición wavelet de dos dimensiones.

CAPITULO 2

METODO LEVEL SET

2.1. INTRODUCCIÓN

El método de level-set (conjuntos de nivel) fue originalmente desarrollado por Osher y Sethian en 1987 para describir el movimiento de curvas y superficies³⁷, como una herramienta versátil para separar un dominio Ω en subdominios.

En 1996, Santosa propuso el uso de la técnica level-set para resolver problemas inversos con interfaces³⁸, que es para la representación de las formas. Más tarde, el método del level-set fue utilizado por Litman para problemas inversos no lineales de dispersión.

³⁷ S. Osher and J. A. Sethian, "Fronts propagating with curvaturedependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations," J. Comput. Phys., Vol. 79, 12-49 (1988)

³⁸ F. Santosa, "A level set approach for inverse problems involving obstacles," ESAIM Control, Optimization and Calculus of Variations, Vol. 1, 17-33, (1996)

Level Set propone controlar el movimiento de interfaces o curvas evolutivas (también llamados fronts) para detectar los bordes correspondientes a alguna geometría. Estos pueden ser dinámicos como llamas de fuego o también estáticos como tumores, o encontrar diferentes figuras en una imagen.

La ventaja del método level set es que se puede realizar cálculos numéricos que involucran curvas y superficies sobre una cuadrícula cartesiana fija sin tener que parametrizar estos objetos (esto se llama el enfoque euleriano)³⁹. Además, el método del conjunto de nivel hace que sea muy fácil seguir las formas que cambian de topología, por ejemplo, cuando una forma se divide en dos, crea agujeros o la inversa de estas operaciones. Todo esto hace que este método sea una gran herramienta para el modelado de objetos que cambian en el tiempo, como el inflado de un airbag o una gota de aceite flotando en el agua.

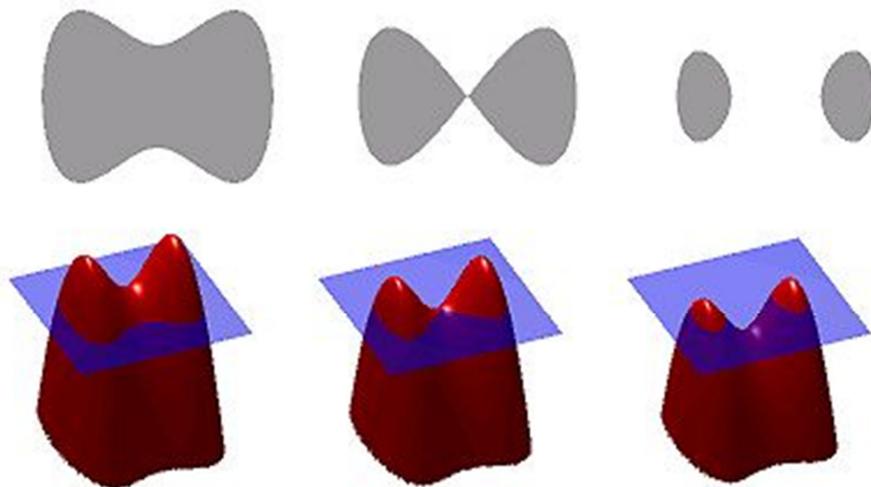


Fig.2. 1 Ilustración del método level set.⁴⁰

³⁹ Osher, S.; Sethian, J. A. (1988), «Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations», *J. Comput. Phys*

⁴⁰ Francisco de Asís Palacios Gutiérrez, “ Diseño óptimo aerodinámico a través del método adjunto continuo, Tesis Doctoral, Madrid, 2008.

En la figura 2.1 en la esquina superior izquierda vemos una forma, es decir, una región delimitada, con un límite de buen comportamiento. Debajo de ella, la superficie roja es la gráfica de una función de conjunto de nivel de ϕ que determina esta forma, y la región azul representa el plano $x - y$. El límite de la forma es entonces el conjunto de nivel cero de ϕ , mientras que la forma en sí es el conjunto de puntos en el plano para el cual ϕ es positivo (interior de la forma) o cero (en el borde).

Desde entonces, este método ha sido ampliamente utilizado en diferentes áreas de investigación. Ejemplos de ello son la aplicación en la física por ejemplo en fluidos dinámicos, en computación gráfica como la creación de efectos especiales, segmentación, visión computacional, y otros; y al poder complementarse con otros métodos, esta teoría matemática resulta muy versátil.

El objeto de este segundo capítulo es el entendimiento de los conceptos básicos para luego entender su representación para llegar a la formulación del método level set y a la aplicación de la segmentación de imágenes.

2.1. Conceptos Básicos.

En un plano Ω de una sola variable, supongamos que dos puntos divide al plano en tres distintas regiones usando los puntos $x=1$ y $x=-1$, esto nos define las siguientes regiones $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$ y $(1, \infty)$, siendo subdominios de la región Ω , y si analizamos obtenemos dos áreas, la interna de $(-1,1)$ y la externa $(-\infty,-1) \cup (1, \infty)$, donde los puntos $(-1,1)$ que divide a la región se le conoce como interface. Un ejemplo si tenemos una función:

$$\phi = x^2 - 1 \quad (2-1)$$

Y si colocamos la interfaz donde sea igual a cero obtenemos los puntos (-1,1) siendo la interface de una sola dimensión, se puede apreciar en la siguiente figura:

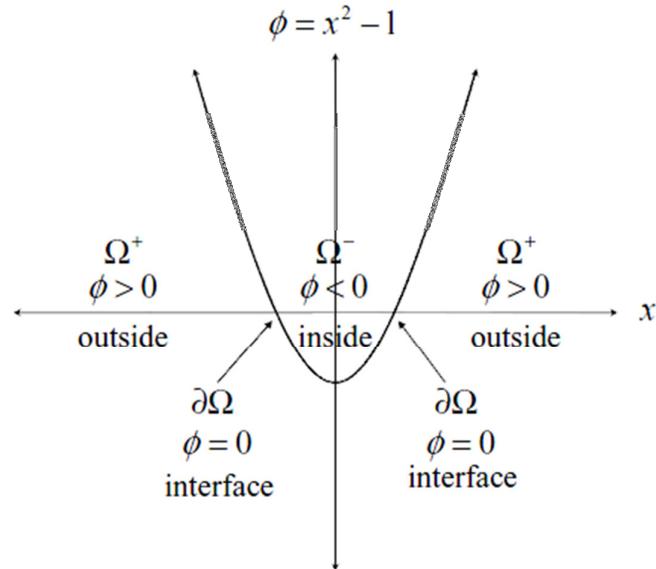


Fig.2. 2 Definición de subdominios en una sola dimensión.⁴¹

Si extendemos la interfaz a una curva obtendremos:

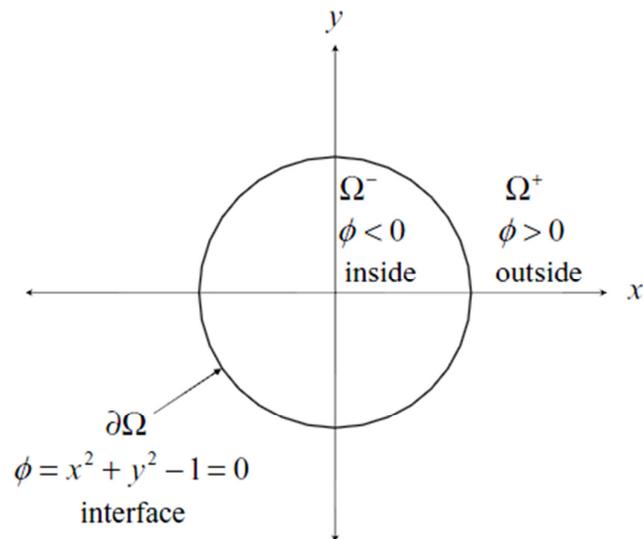


Fig.2. 3 Definición de subdominios en dos dimensiones.⁴²

⁴¹ Stanley J. Osher, Ronald P. Fedkiw, "Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces " Springer, 2000

Y si trabajamos con superficies, obtendremos:

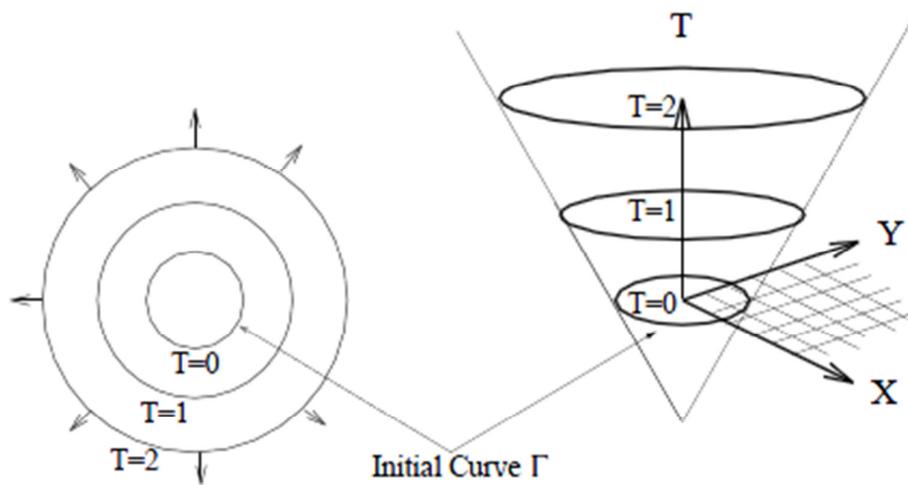


Fig.2. 4 Definición de subdominios en tres dimensiones.⁴³

2.2. REPRESENTACIÓN DEL MÉTODO LEVEL SET.

Las representaciones clásicas que existen para el tratamiento de curvas son las funcionales y las paramétricas pero no son convenientes para el método level set ya que no permiten fusionar las interfaces y además porque limitan la traslación del problema a una dimensión mayor (introducción sistema de coordenadas).

Si usamos un plano xy normalmente de una imagen de 2D, la cual contiene a la interfaz del método level set, añadiremos una coordenada más que mida la altura siendo z , obteniendo una función $z = \phi(x, y, t_0)$, donde al punto (x, y) le asignamos una altura z . Inicialmente consideramos que la distancia desde el punto (x, y) a la interfaz en un tiempo t_0 , dicho valor corresponde a la altura respectiva z . Al construir esta

⁴² Stanley J. Osher, Ronald P. Fedkiw, "Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces " Springer, 2000

⁴³ Stanley J. Osher, Ronald P. Fedkiw, "Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces " Springer, 2000

superficie logramos interceptar al plano xy con la interfaz, como lo observamos en la Fig. 2.5.

El valor de z me da como resultado de la salida entre la función de level set y el punto xy , y si $z=0$ se le considera como un conjunto de nivel cero, o de nivel inicial.

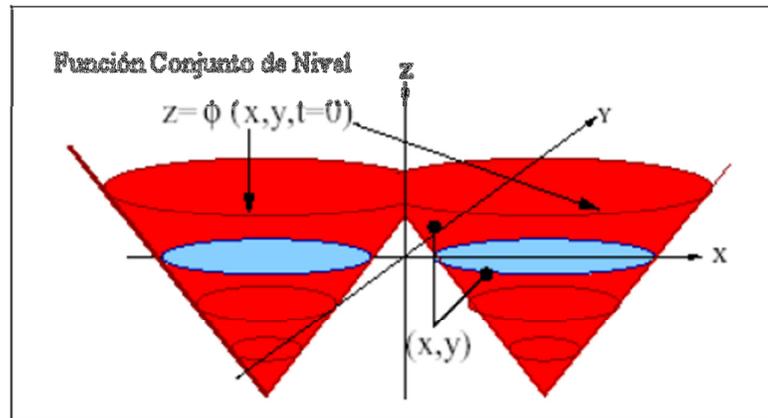


Fig.2.5 La Superficie de Conjunto de Nivel (en rojo) dibuja la distancia de cada punto (x,y) a la interfaz (en azul).⁴⁴

Para poder comprender mejor al método level set, las funciones ϕ se pueden imaginar como un mapa topográfico con superficies elevadas afuera y con una laguna dentro, cuyo nivel corresponde al borde(s) de nuestra interfaz.

Pasado un tiempo la altura de la superficie cambia ya que t sería 1, y obtendríamos el contorno 1, como se muestra en la Fig. 2.6, donde la interfaz evoluciona. La complicación es muy grande pero si analizáramos señales de más dimensiones el trabajo matemático de level set sería muy trabajoso.

La razón de la dimensión extra es que estamos en condiciones de posicionar cada punto (x,y) y ajustar la altura de la función de level set. Esto justifica, el soporte de los

⁴⁴ J Sethian, Level Set Methods: Evolving Interfaces in Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision and Materials Sciences. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. Cambridge University Press. 1996

problemas debido a cambios topológicos, tales como la fusión o separación de interfaces.⁴⁵

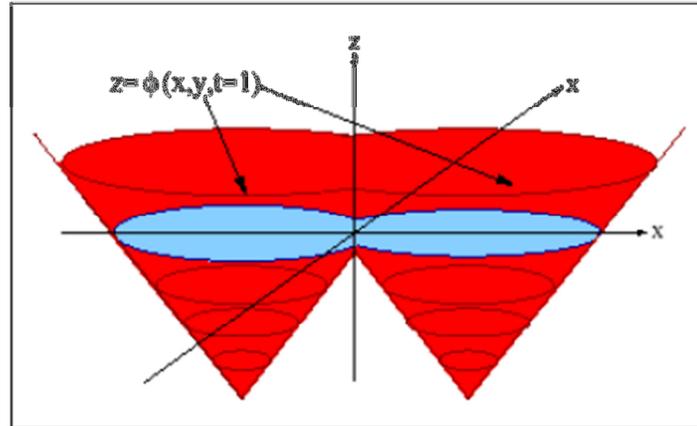


Fig.2. 6 La Superficie de Conjunto de Nivel (en rojo) fue movida, produciendo una nueva interfaz (en azul).⁴⁶

En el ejemplo anterior estamos tomando en cuenta que la interface es un círculo y se mueve a velocidad constante en todas las direcciones, pero en el ámbito de la optimización de forma, este tipo de método se emplea de tal manera que la interface separa el cuerpo sólido y el fluido que lo rodea, y esta se mueve con una velocidad normal que proviene del cálculo de gradientes del funcional de interés respecto de movimientos infinitesimales en la dirección normal a la superficie, donde este corte no tiene porqué ser una curva única a medida que el tiempo avanza como se muestra en la figura 2.7.

La optimización mediante level set permite resolver una serie de problemáticas que se plantean al tratar de diseñar mediante el empleo de optimización de forma. En la Figura 2.7 se exponen los problemas clásicos que puede resolver esta formulación:

⁴⁵ J Sethian, J. Level Set Methods: An Act of Violence. Applied and Computational Mathematics Department. Berkeley University. 1996.

⁴⁶ J Sethian, Level Set Methods: Evolving Interfaces in Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision and Materials Sciences. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. Cambridge University Press. 1996

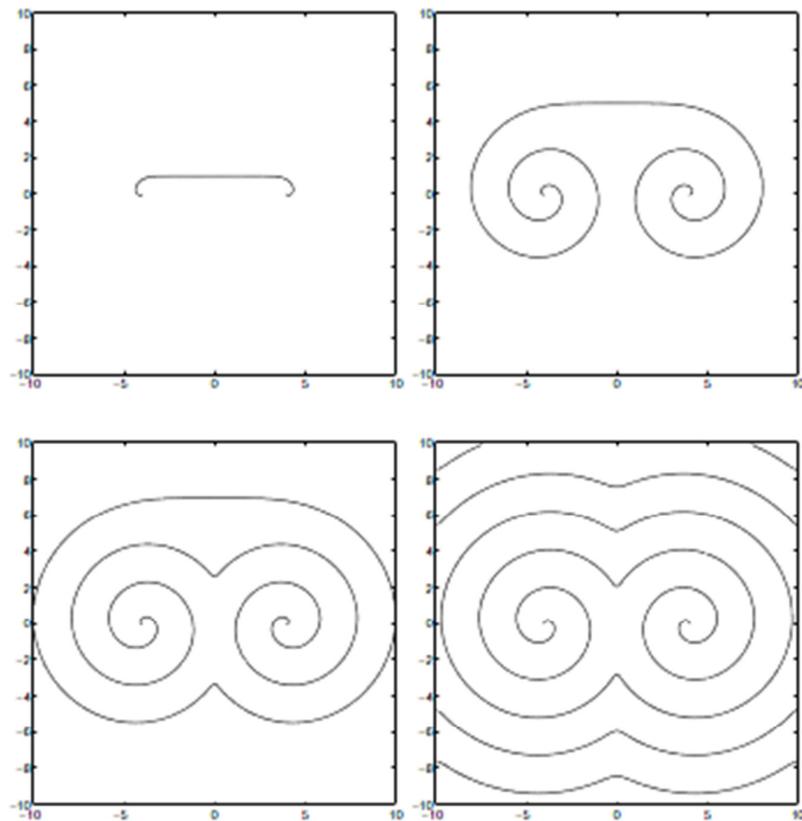


Fig.2. 7 La Superficie de Level Set en diferentes tiempos.⁴⁷

- El primer ejemplo refleja el problema resultante cuando se cruzan los vectores de desplazamiento de puntos sobre la superficie. En esta situación, una formulación tradicional no permitiría el cálculo de una nueva forma del objeto dado que existe un área (rayada en rojo) común al desplazamiento de los contornos.
- El segundo ejemplo ocurre cuando la superficie se deforma de tal manera que alcanza a otro objeto. La metodología level set permite que los dos objetos se fusionen.
- Por último, el caso de un cuerpo que se divide en dos debido a la distribución de velocidades de la interface que induce esa división.

⁴⁷ Stanley J. Osher, Ronald P. Fedkiw, "Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces " Springer, 2000

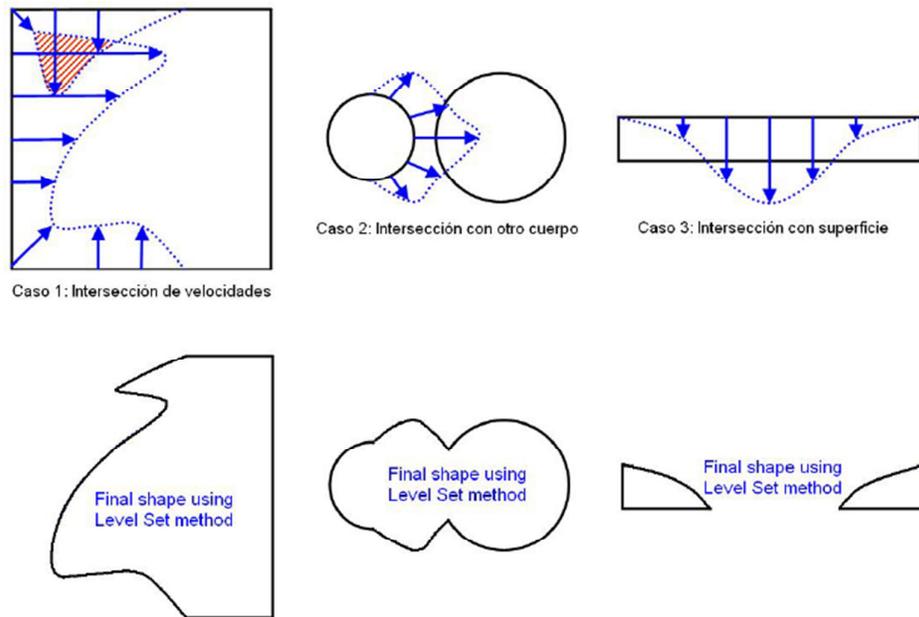


Fig.2. 8 Resolución de problemas (arriba) por el método level set (abajo).⁴⁸

2.3. FORMULACIÓN DE LEVEL SET.

Como apreciamos en la representación del método, tenemos que dada una interfaz G_t en R^n acotando una región abierta Ω en un tiempo t , es posible analizar el movimiento de G en un campo de velocidad $v=(v_1, v_2, \dots, v_n)$.

La velocidad v no es más que un movimiento en dirección perpendicular a la interfaz dependiente además de una serie de factores o propiedades de la interfaz de tal forma que puede formalizarse en una función como esta

$$v = v(L, G, I) \quad (2-2)$$

- L = Propiedades Locales, están determinados por información geométrica, como la curvatura y la dirección normal.

⁴⁸ Anaí J. Alfaro Alfaro, Ivan A. Spirán Mendoza, "Diseño de un Algoritmo de Segmentación de Imágenes aplicando el Funcional de Mumford-Shah para mejorar el desempeño de los

- G = Propiedades Globales, depende de la forma y posición de la interfaz.
- I = Propiedades Independientes, precisamente son independientes de la forma y tienen que ver por ejemplo con la velocidad de fluido que sirve para transportar la interfaz⁴⁹.

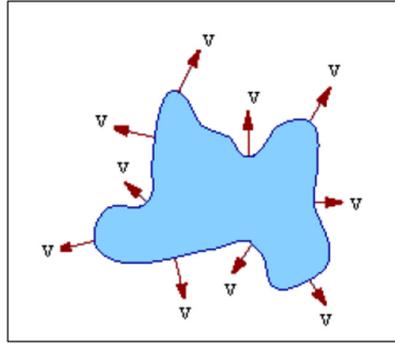


Fig.2. 9 Movimiento perpendicular de la interfaz a una velocidad dada.⁵⁰

Otra definición básica es la curvatura k que se define como la rapidez con que la interfaz G se dobla en cualquiera de sus puntos.

Por ejemplo si citamos a un círculo tiene una curvatura constante ya que siempre se dobla en una misma proporción sobre cada uno de sus puntos, pero si suponemos un círculo más pequeño, éste tiende a tener una curvatura también constante pero mayor, pues se dobla más rápido aún.

Algunos puntos a considerar son por ejemplo restringir el movimiento de cada parte de una curva siguiendo sólo la dirección de su normal con una velocidad v (proporcional a su curvatura k) e ignorando el movimiento de la interfaz en su dirección tangencial. Sabiendo que la curvatura k puede ser positiva o negativa (si

Algoritmos Clásicos de Segmentación”, Tesis para el título de Ingeniero Informático de la Escuela Académico-profesional de Informática de la Universidad Nacional de Trujillo.

⁴⁹ Sethian, J. Level Set Methods: Evolving Interfaces in Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision and Materials Sciences. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. Cambridge University Press. 1996.

⁵⁰ Anaí J. Alfaro Alfaro, Ivan A. Spirán Mendoza, “Diseño de un Algoritmo de Segmentación de Imágenes aplicando el Funcional de Mumford-Shah para mejorar el desempeño de los algoritmos Clásicos de Segmentación”, Tesis para el título de Ingeniero Informático de la Escuela Académico-profesional de Informática de la Universidad Nacional de Trujillo.

lleva sentido horario o antihorario, respectivamente), obviamente algunas partes de la curva pueden moverse hacia adentro y otras hacia afuera, ya que se mueven siguiendo a su normal.

También podemos deducir, según la figura siguiente, que las flechas más largas indican una magnitud más alta que las flechas cortas, por tanto la curvatura es más alta en las zonas convexas.

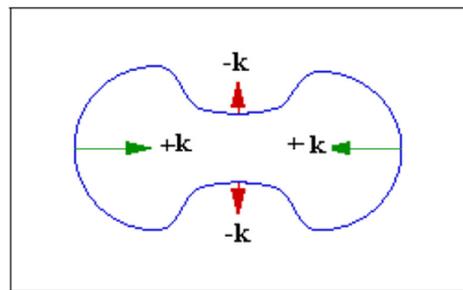


Fig.2. 10 Cambios de la curvatura.⁵¹

Habiendo revisado ya algunas definiciones básicas y sabiendo que la curvatura es una componente de muchos fenómenos físicos, el modelo computacional que a continuación describimos se sustenta considerando lo que sucede en una interfaz evolutiva moviéndose con respecto a su curvatura.

Dada una interfaz cerrada (N-1) dimensional G_0 , produciremos una formulación Euleriana para controlar el movimiento de la interfaz propagándose a lo largo de su normal con una velocidad v .

Dicha interfaz está dada por una función suave $\phi(x; t)$ representando la interfaz como un conjunto donde $\phi(x; t) = 0$ (con un nivel cero que representa el borde de la interfaz) y $x = (x_1; x_2; \dots; x_n) \in \mathbb{R}^n$. Es decir, $\phi(x, t)$ es la función de level set concebida

⁵¹ Analí J. Alfaro Alfaro, Ivan A. Spirán Mendoza, "Diseño de un Algoritmo de Segmentación de Imágenes aplicando el Funcional de Mumford-Shah para mejorar el desempeño de los

como curvas cerradas en dos o más dimensiones y que sirven para dividir un dominio en regiones⁵².

Entonces expresando la normal N de la interfaz G_t asumida como una función de level set, tendremos:

$$N = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \quad (2-3)$$

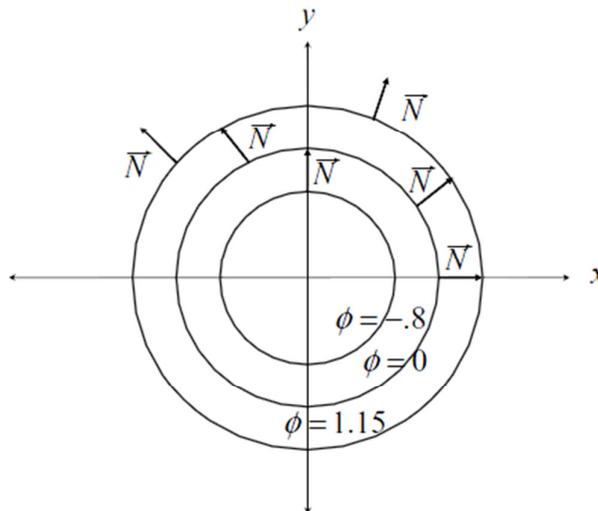


Fig.2. 11 Dirección Normal.⁵³

Si bien se dice que la interfaz G se mueve siguiendo la dirección de la normal de cada uno de los puntos que la componen, debemos considerar que es la curvatura la que realmente determina como se mueven estos puntos, es decir, si lo hacen hacia afuera o hacia adentro de la interfaz. Entonces es bueno hacer una definición más formal de la curvatura, la cual se expresa como un vector de puntos en dirección a la normal de la función de level set.

Algoritmos Clásicos de Segmentación”, Tesis para el título de Ingeniero Informático de la Escuela Académico-profesional de Informática de la Universidad Nacional de Trujillo.

⁵² Osher, S., Paragios, .N *Geometric Level Set Methods in Imaging, Vision, and Graphics*. Springer-Verlag, New York. 2003

⁵³ Sethian, J. *Level Set Methods: Evolving Interfaces in Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision and Materials Sciences*. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. Cambridge University Press. 1996

$$K = -\nabla \cdot \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \quad (2-4)$$

Además sea la región Ω_t abierta acotada por $\Gamma_t : \left\{ x \mid \phi(\vec{x}, t) < 0 \right\}$ define la parte interior de la interfaz, y $\Gamma_t : \left\{ x \mid \phi(\vec{x}, t) > 0 \right\}$ la parte exterior.

La función de level set ϕ tiene las siguientes propiedades [23]:

- $\phi(x,t) < 0$ para $x \in \Omega$.
- $\phi(x,t) > 0$ para $x \notin \Omega$.
- $\phi(x,t) = 0$ para $x \in \partial\Omega = G(t)$.

sabiendo que la idea es hacer pasar la interfaz de propagación como una función de level set cero. La función ϕ puede ser perfectamente una función de distancia con signo, como esta:

$$\phi(x, t_0) = \bar{d}(x, \Gamma_0) \quad (2-5)$$

Donde d es la distancia de x a la interfaz Γ_0 (distancia Euclídeana) y el signo \pm depende de si el punto x se encuentra afuera o adentro, respectivamente de la interfaz Γ_0 ⁵⁴.

$$\bar{d} = \begin{cases} +d(x, \Gamma_0) & \text{Si } x \text{ está fuera de } \Gamma_0 \\ -d(x, \Gamma_0) & \text{Si } x \text{ está dentro de } \Gamma_0 \end{cases} \quad (2-6)$$

Ahora tenemos que $\phi(x, t_0) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con la propiedad de qué:

$$\Gamma_0 = [x \mid \phi(x, t_0) = 0] \quad (2-7)$$

⁵⁴ Aubert, G., Kornprobst, P. Mathematical Problems in Image Processing: Partial Differential Equations and the Calculus of Variations. Springer-Verlag. 2002.

Lo siguiente es introducir una ecuación evolutiva $\phi(x,t)$ que incluya el movimiento de G_t cuando el conjunto de nivel $\phi = 0$. Para lograr esto, necesitamos que la distancia entre x_t y la interfaz de propagación G_t sea cero. Es decir, x_0 es un punto sobre la interfaz inicial G_0 , y además $v_{x_t} = N$, donde N naturalmente es la normal.

Además sabiendo que, la función de level set cero debe corresponderse con la interfaz, eso significa que:

$$\phi(x_t, t) = 0 \quad (2-8)$$

En consecuencia tengo la siguiente condición:

$$z = \phi(x_t, t) = \phi(x, y, t_0) = 0 \quad (2-9)$$

Derivando para el tiempo:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= \frac{\delta\phi}{\delta x} \frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\delta\phi}{\delta y} \frac{\delta y}{\delta t} + \frac{\delta\phi}{\delta t} \frac{\delta t}{\delta t} \\ \frac{d\phi}{dt} &= \frac{\delta\phi}{\delta x} \frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\delta\phi}{\delta y} \frac{\delta y}{\delta t} + \frac{\delta\phi}{\delta t} \end{aligned} \quad (2-10)$$

Aplicando el producto punto tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= \nabla\phi \cdot v + \frac{\delta\phi}{\delta t} = 0 \\ \text{Donde} \\ \nabla\phi &= \frac{\delta\phi}{\delta x} + \frac{\delta\phi}{\delta y} \\ v &= \frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\delta y}{\delta t} \end{aligned} \quad (2-11)$$

Sabiendo que los dos vectores tienen la misma dirección ya que la velocidad va en dirección de la normal podemos simplificar en:

$$\frac{d\phi}{dt} = |\nabla\phi| \cdot |v| + \frac{\delta\phi}{\delta t} \quad (2-12)$$

Aplicando la condición inicial que es igual a cero:

$$\frac{d\phi}{dt} = |\nabla\phi| \cdot |v| + \frac{\delta\phi}{\delta t} = 0 \quad (2-13)$$

Y obtenemos la ecuación de level set:

$$\phi_t + v \cdot |\nabla\phi| = 0 \quad (2-14)$$

2.4. SEGMENTACIÓN DE IMÁGENES CON EL MÉTODO DE LEVEL SET.

La segmentación de imágenes es una herramienta para poder extraer la información necesaria de imágenes, descartando lo innecesario, ya que con la imagen segmentada se puede realizar procesamiento digital y se nos ahorraríamos tiempo, ya que la cantidad de información es menor, además se lo puede realizar de varias regiones dependiendo el método a utilizar.

2.4.1. Método.

Para la aplicación del método level set, se agrega dos términos más a la ecuación básica:

- Término dependiente a la curvatura.
- Término de velocidad externa.

Y así obtenemos la ecuación diferencial genérica para una función de level set.

$$\frac{d\phi}{dt} = \lambda \cdot \nabla \cdot \phi + \alpha \cdot |\nabla \phi| + \varepsilon |\nabla \phi| \quad (2-16)$$

Donde primer término representa un término de desplazamiento, el segundo es de propagación (expansión), y el último un modificador espacial para la curvatura. Las constantes escalares λ , ε y α introducen los pesos relativos de cada uno de los términos del movimiento de la interfaz. Donde primer término representa un término de desplazamiento, el segundo es de propagación (expansión), y el último un modificador espacial para la curvatura. Las constantes escalares λ , ε y α introducen los pesos relativos de cada uno de los términos del movimiento de la interfaz.

Los algoritmos de tipo *level-set* toman esta ecuación general como base, y podrán usar todos estos términos u omitir uno o más de ellos.

Donde cada iteración nos da una nueva imagen teniendo en cuenta la interfaz obteniendo:

$$x_{new} = x + (\phi_{new} - \phi(x)) \cdot N \quad (2-17)$$

Existen dos consideraciones importantes al analizar el tiempo de procesamiento para cualquier tarea de segmentación level-set, a saber: El área de la superficie de la interfaz envolvente, y la distancia total que la superficie debe recorrer. El tiempo que tarda cada iteración dependerá del número de puntos de la superficie. Esto implica que conforme la superficie crezca, la resolución de la ecuación se irá ralentizando proporcionalmente. Como la superficie ha de avanzar lentamente para evitar inestabilidades numéricas en la solución, la distancia que la superficie debe recorrer en la imagen dictamina el número total de iteraciones requeridas.

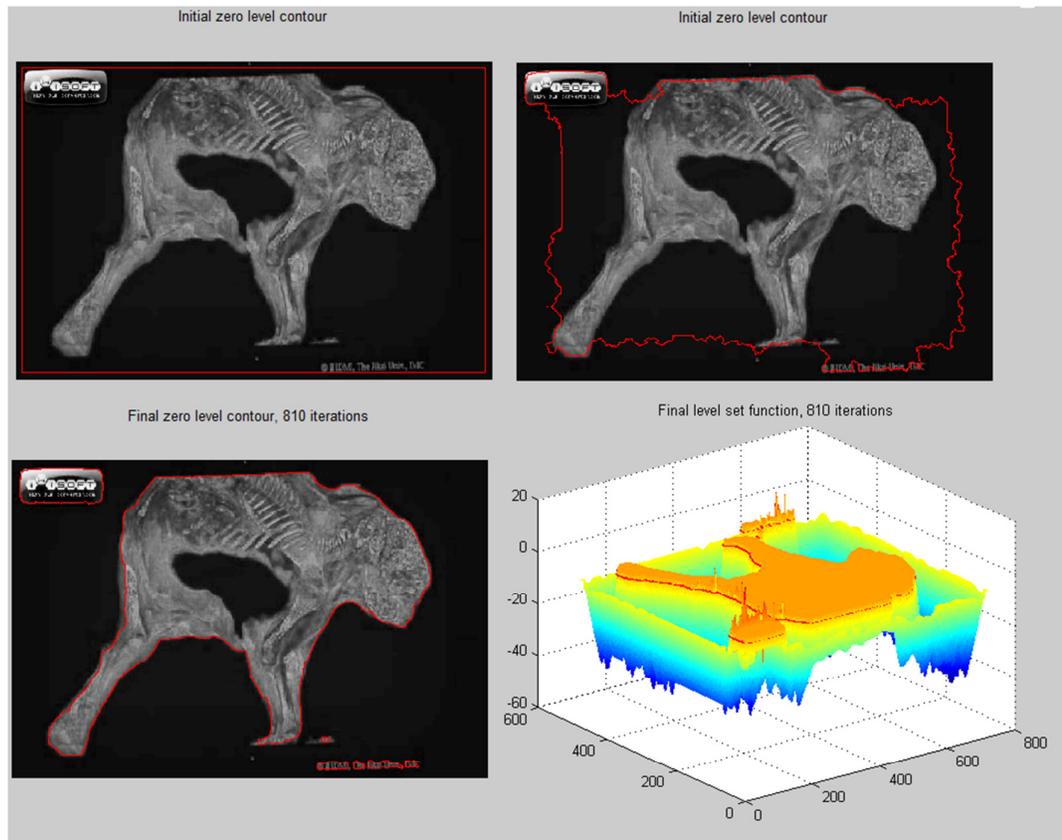


Fig.2. 12 Segmentación de una imagen con 810 iteraciones.

CAPITULO 3

IMPLEMENTACION DE FILTRADO Y SEGMENTADO DE IMAGENES

3.1 ALGORITMO DE FILTRADO CON LA TRANSFORMADA WAVELET

El algoritmo utilizado para el filtrado de las imágenes se demuestra en la siguiente figura, donde primero se escoge el tipo de wavelet y si es el caso el orden, obteniendo la wavelet madre, luego se adquiere su respuesta al impulso unitario conociendo si es pasa bajo o pasa alto, para llegar al Filtro Wavelet y se le aplica a la imagen a tratar y como resultado obtenemos la imagen filtrada.

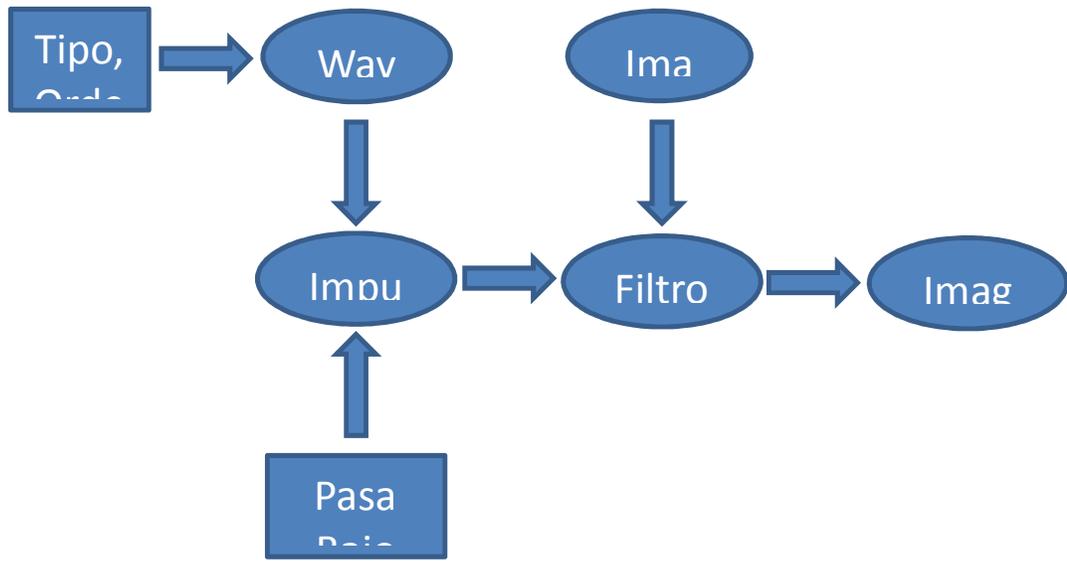


Fig. 3. 1 Algoritmo del Filtro Wavelet para Imágenes.

3.2. ALGORITMO DE SEGMENTACION DE IMÁGENES.

Los parámetros de entrada del algoritmo de un sistema básico de level set (excluyendo los triviales como imagen a segmentar y nombre del archivo de salida) son las iteraciones, el tamaño del salto de la interfaz (la velocidad), los diferentes pesos de λ , ϵ y α son constantes para este método base, siendo el algoritmo.

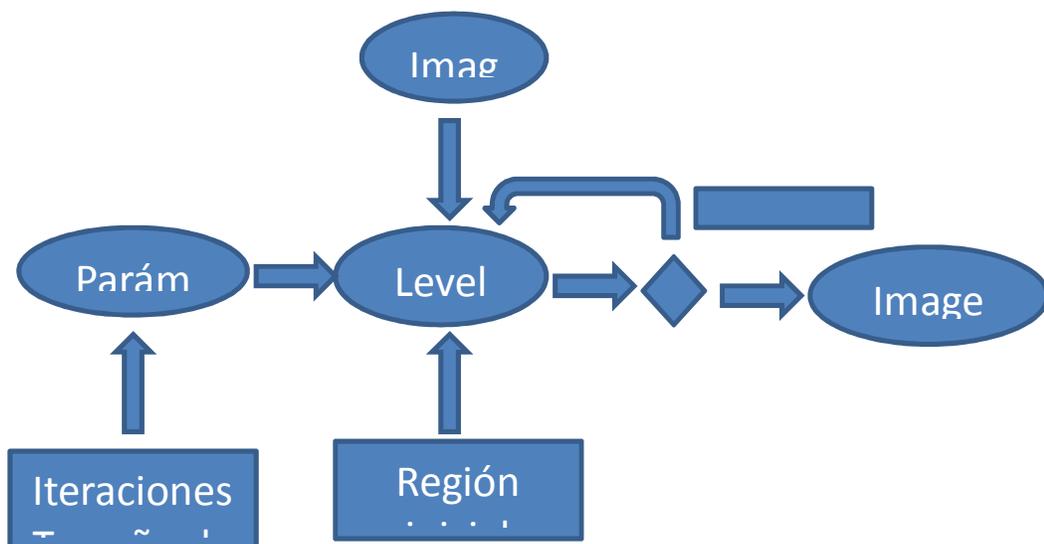


Fig. 3. 2 Algoritmo del Método Level Set.

Para la aplicación en el software del método Level Set para segmentar las imágenes se utilizan dos códigos desarrollados por Chunming Li, mediante los papers:

- **"Minimization of Region-Scalable Fitting Energy for Image Segmentation", Chunming Li IEEE Trans. Image Processing, vol. 17 (10), pp.1940-1949, 2008.**

El algoritmo RSF utiliza la minimización de la energía para la segmentación de imágenes, donde el autor desarrollo cinco casos, donde los pesos o parámetros fueron obtenidos tras varios estudios, y los resultados se muestran en el programa desarrollado.

- **"Distance Regularized Level Set Evolution and Its Application to Image Segmentation" Chunming Li, Chenyang Xu, Senior Member, IEEE, Changfeng Gui, and Martin D. Fox, Member, IEEE Image Processing vol. 19 (12), pp.3243-3254, 2010.**

El algoritmo DRLSE utiliza la regularización de la distancia, por lo que el cálculo computacional es sumamente mayor, y en el programa desarrollado se da la opción de modificar los parámetros de la segmentación, conociendo que los parámetros originarios por el autor son:

Peso	Valor	Descripción
l	5	Longitud
a	1.5	Área
e	1.5	Curvatura (Ancho Dirac)

Tabla 3. 1 Pesos para la segmentación de imágenes con el método level set.

Conociendo que para la aplicación del método level set se debe aplicar una suavización de la imagen por la que se utiliza la función especial gaussiana (sigma) con un valor de 1.5.

Para mayor información se puede referir a:

```
% Author: Chunming Li, all rights reserved
% E-mail: lchunming@gmail.com
%       li_chunming@hotmail.com
% URL:  http://www.engr.uconn.edu/~cml/
```

3.3 APLICACIÓN DE LOS ALGORITMOS.

Para la aplicación se utiliza el software MATLAB 2011b, con una ventana principal, el cual se puede acceder a varios subprogramas.

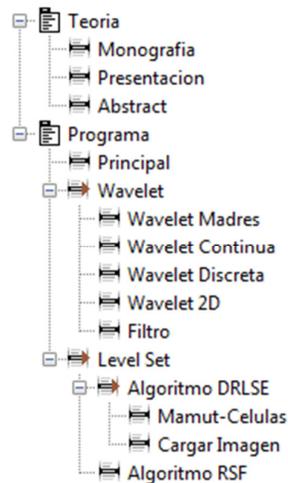


Fig. 3. 3 Menú del Programa.

El menú está formado por: Teoría y el Programa. La teoría despliega las opciones de abrir los diferentes documentos de la tesis, como es la monografía, una presentación en power point y el abstract del tema. El Programa consta de tres ítem, como los tres capítulos, el principal es el programa que contiene el procesamiento de la imagen, otro es el wavelet que consta de subprogramas para el entendimiento de la teoría como es la wavelets madre, wavelet continua, wavelet discreta, wavelet en 2D y

el filtro; y por ultimo level set, el cual posee los dos diferentes algoritmos como DRLSE y RSF.



Fig. 3. 4 Ventana del menú del Programa

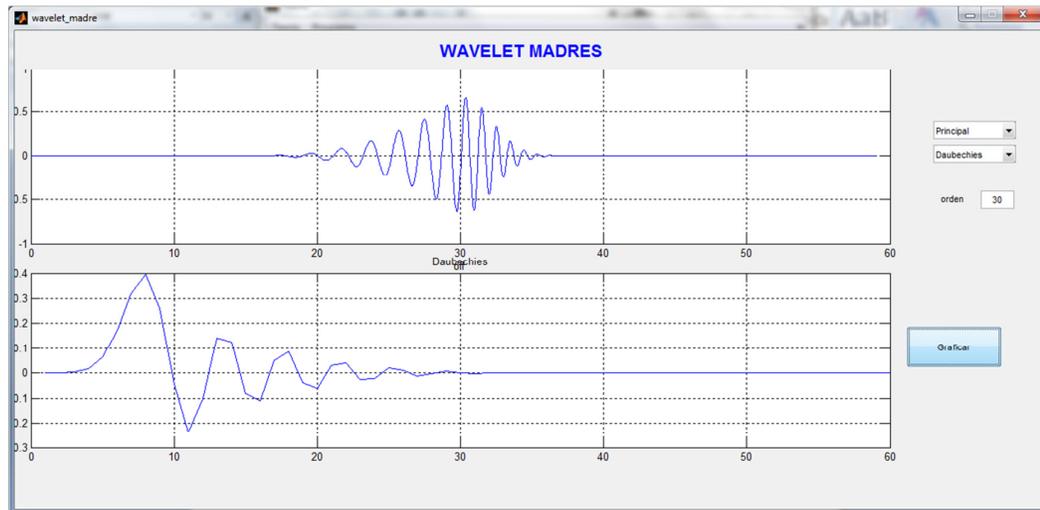


Fig. 3. 5 Wavelet Madre.

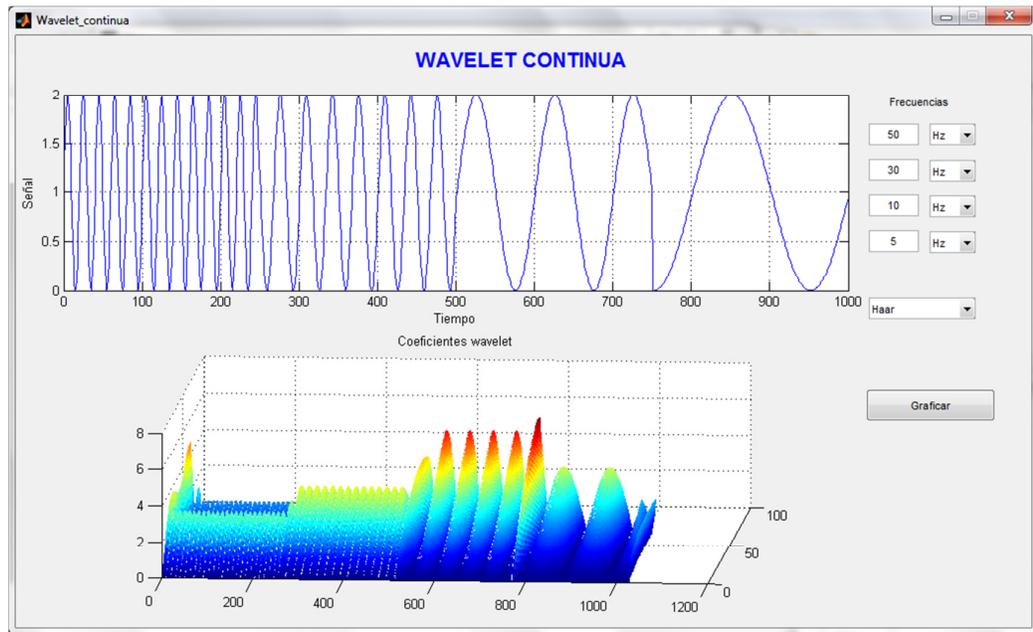


Fig. 3. 6 Wavelet Continua.

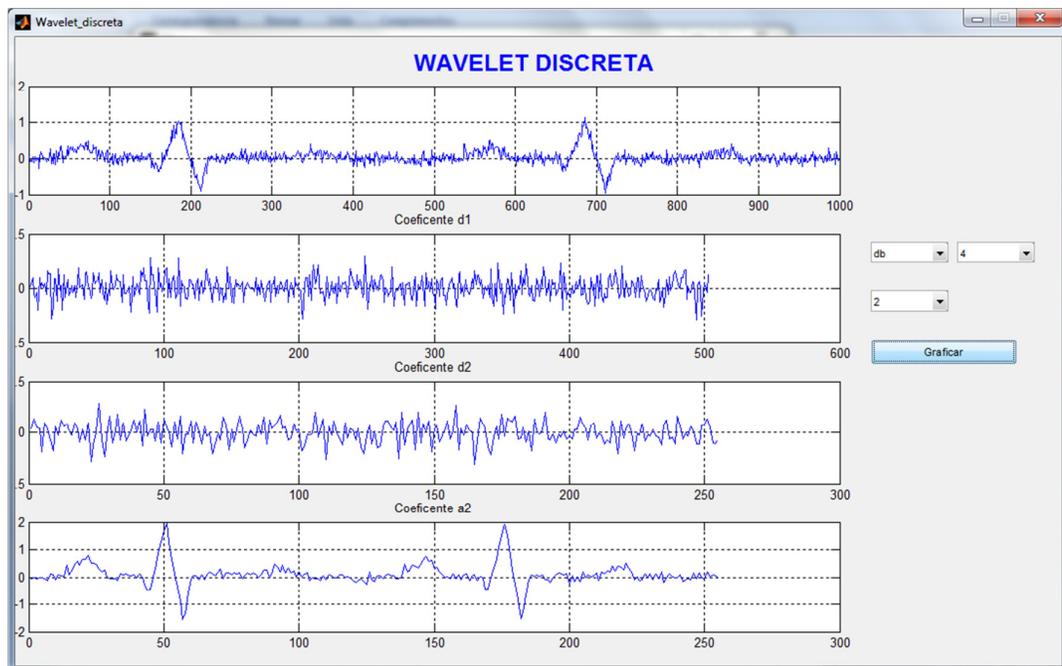


Fig. 3. 7 Wavelet Discreta.

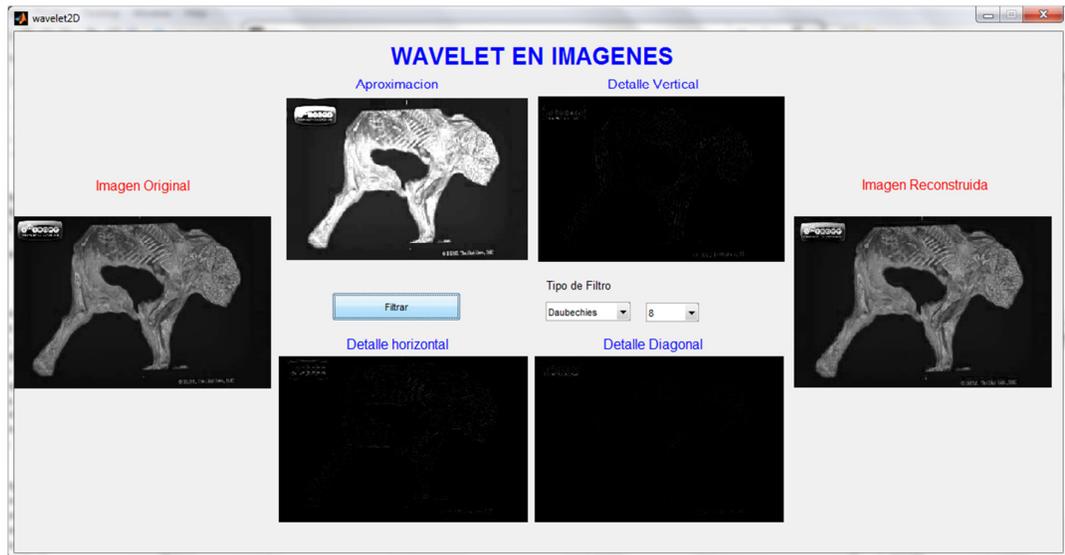


Fig. 3. 8 Wavelet 2D.

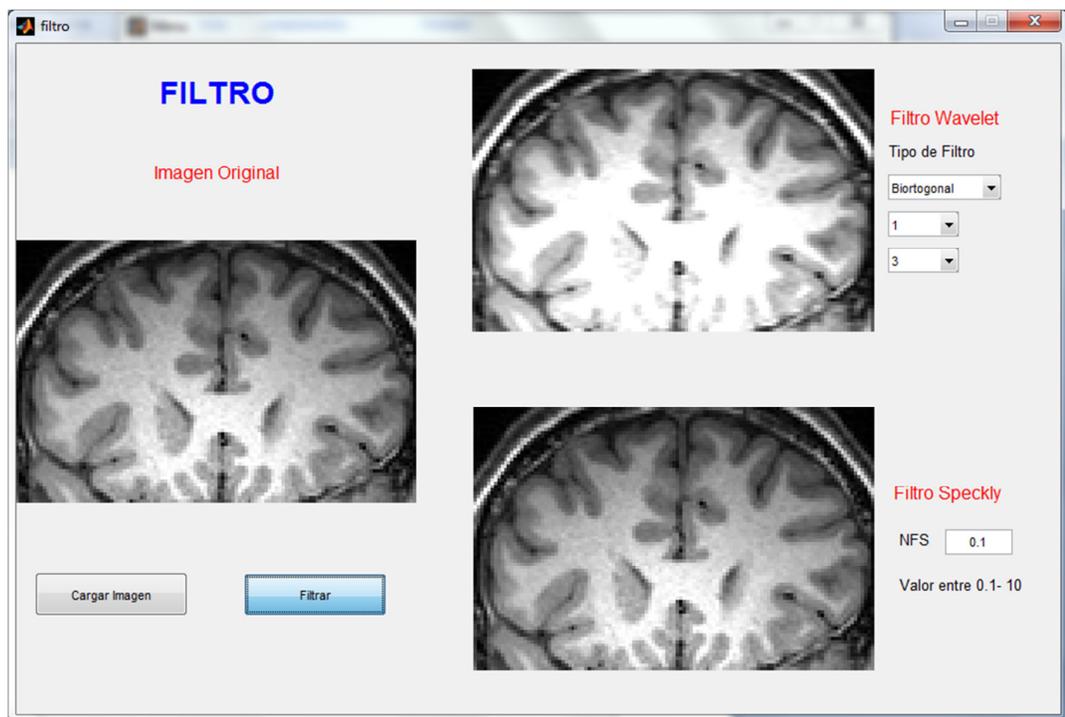


Fig. 3. 9 Wavelet Filtro.

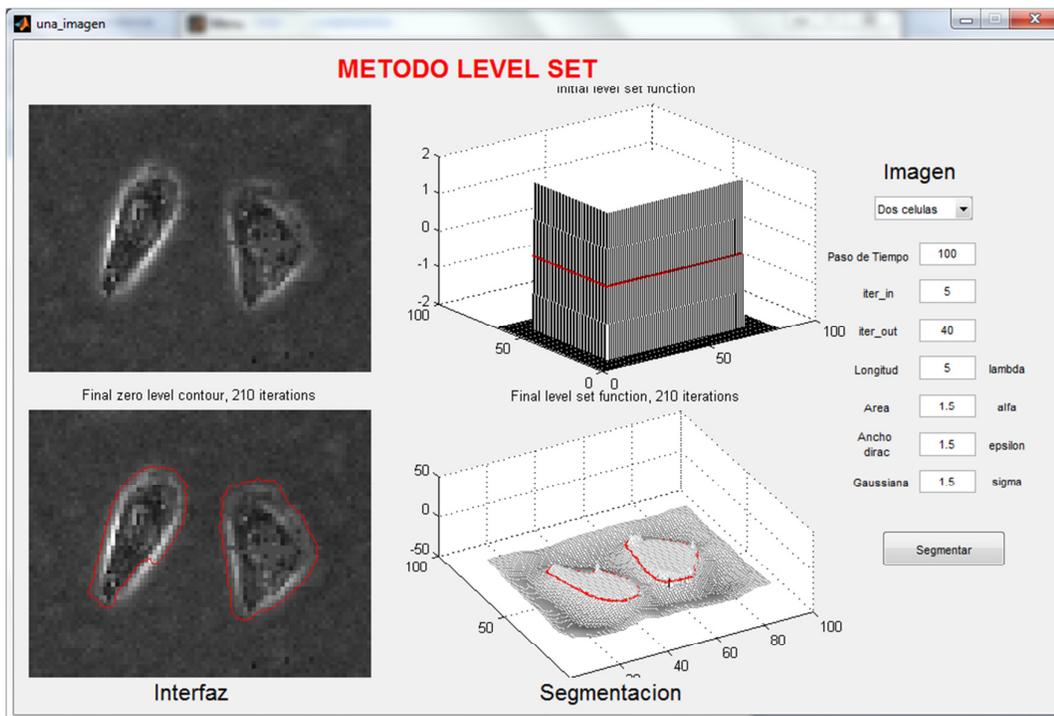


Fig. 3. 10 Level Set Algoritmo DRLSE Mamut-Dos Células.

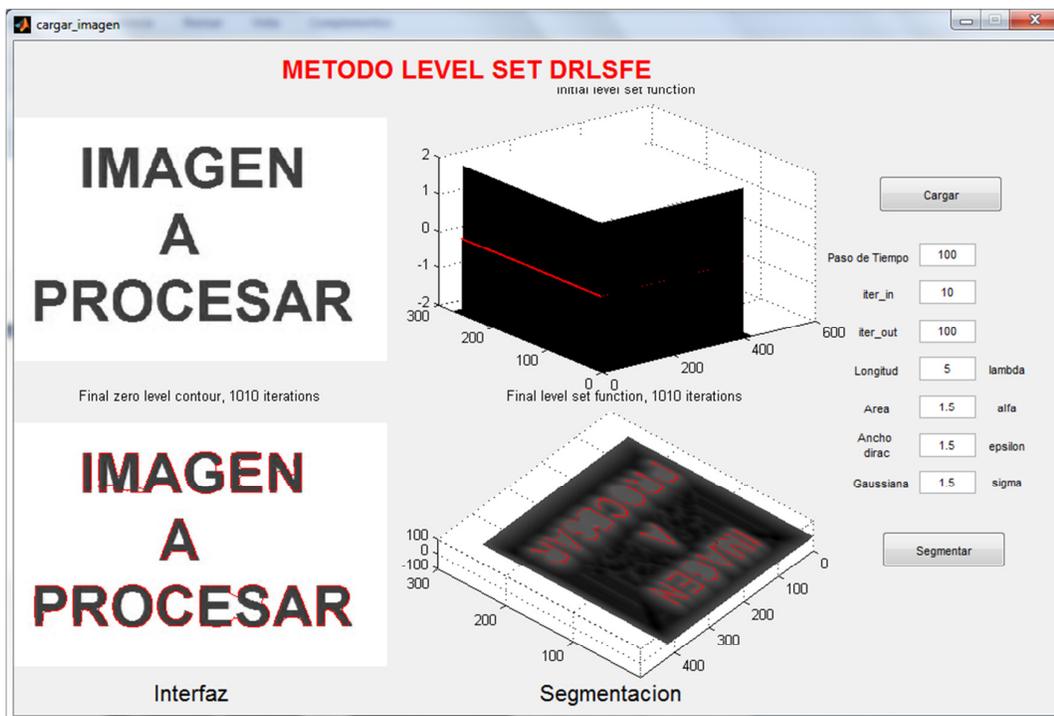


Fig. 3. 11 Level Set Algoritmo DRLSE Cargar Imagen

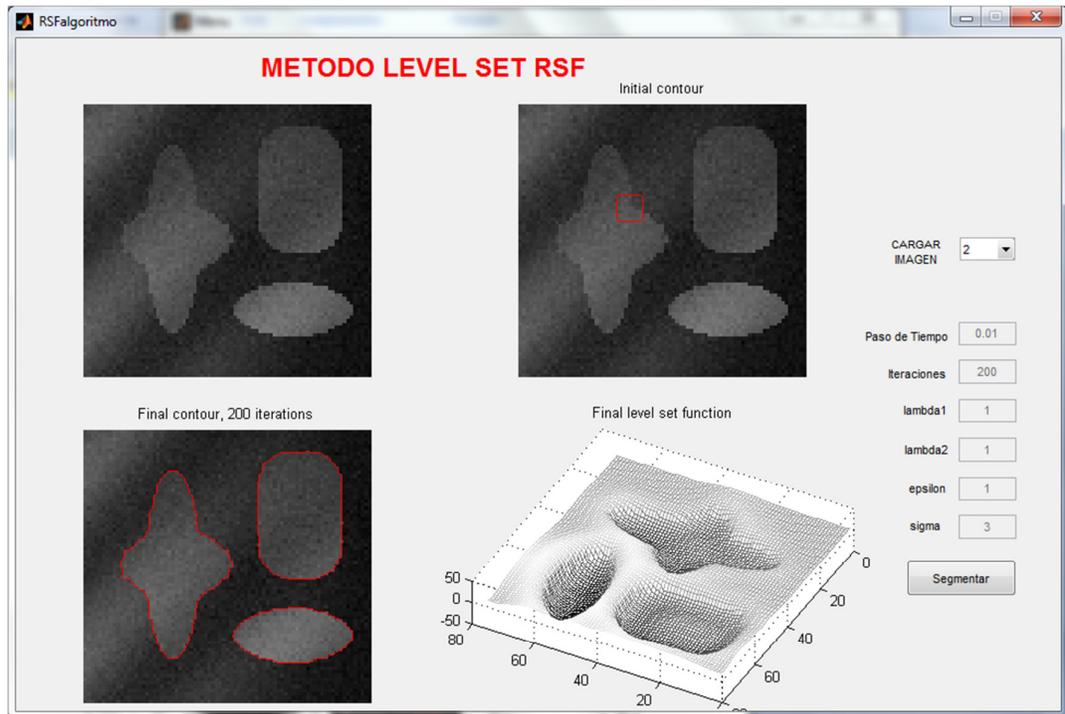


Fig. 3. 12 Level Set Algoritmo RSF.

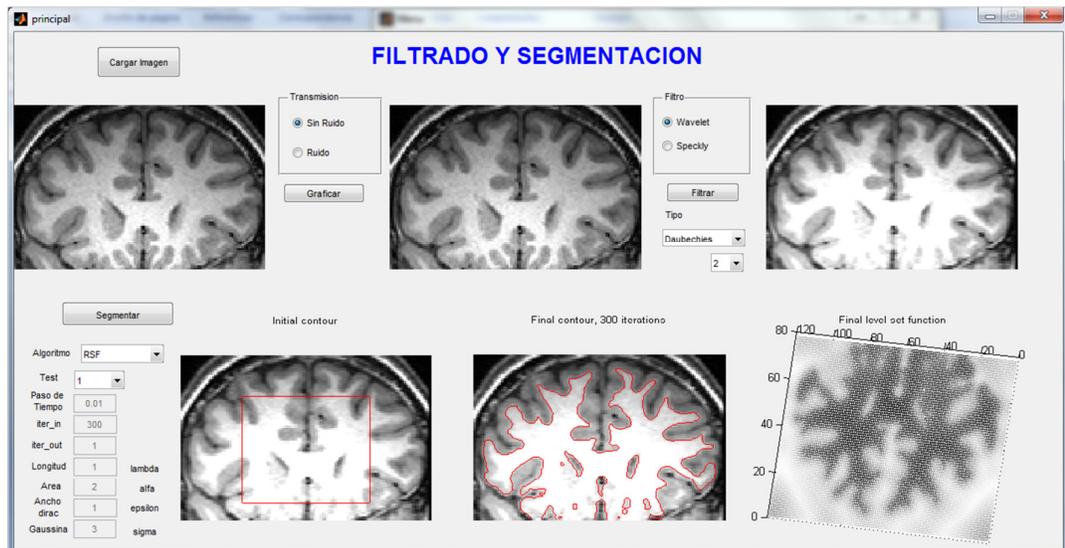


Fig. 3. 13 Principal con Filtrado y Segmentación.

3.4 ANÁLISIS DE RESULTADOS.

Considerando el estudio realizado sobre los dos diferentes métodos, es posible determinar que la Transformada Wavelet nos da otra opción que podemos tomar para el filtrado de imágenes, y como se observó en el programa principal si tiene una buena respuesta para eliminar el ruido que se pudiera producir ya sea por la transmisión o comprensión o el mismo análisis de la imagen,

El método Level Set es un algoritmo que permite la segmentación de las imágenes mediante una curva que se va acercando a los diferentes objetos, produciendo el concepto de viscosidad ya que la interfaz atrapa al objeto.

Es menester como profesionales mantenernos a la par de los progresos en cuanto al procesamiento de imágenes, se recomienda el estudio y enseñanza de estos dos temas en la Universidad Politécnica. Salesiana con la finalidad de actualizar los diferentes seminarios, materias selectivas, etc. y así preparar a los estudiantes a futuros desafíos

Para la elección correcta de las familias Wavelet, se estudio dos comandos de Matlab, donde el primero ("FamiliaWavelet=dbwavf(wname)") tiene una respuesta inmediata pero la forma y el estudio es muy simple como se pudo observar en la figura inferior de la Fig. 13, mientras que el segundo comando ("FamiliaWavelet=wavfun(wname,i);") el tiempo de respuesta es mayor i veces al primero, ya que depende de un número de iteraciones, mientras mas iteraciones mayor detalle de la onda como se observa en la figura superior de la Fig. 3.5.

Para la Wavelet Continua se obtuvo mejores resultados con la Familia Wavelet Ortogonales, por sus características como su ortogonalidad, su soporte compacto y

sobre todo la mejor respuesta en tiempo y en resultado, y los coeficientes de la TW Ortogonal se obtienen mas detalles que las otras transformadas.

Para el Filtrado se comparo la Transformada Wavelet con el Filtro Speckly, obteniendo que el tiempo de respuesta es 3 veces menor y la calidad de imagen de filtrado le supera la TW como se observa en la Fig. 3.9.

En el Filtrado con la Transformada Wavelet se puede realizar de dos maneras, una solamente obteniendo la imagen de aproximación con la Transformada Wavelet Discreta, como se observa en la Fig. 3.7, la cual la respuesta es casi inmediata, pero si se toma en cuenta el algoritmo utilizado se le puede resumir con el comando “Filtro Wavelet=wfilters(wname)” y luego se obtiene la imagen filtrada con “ImagenFiltrada=imfilter(Imagen,LO_D)”:

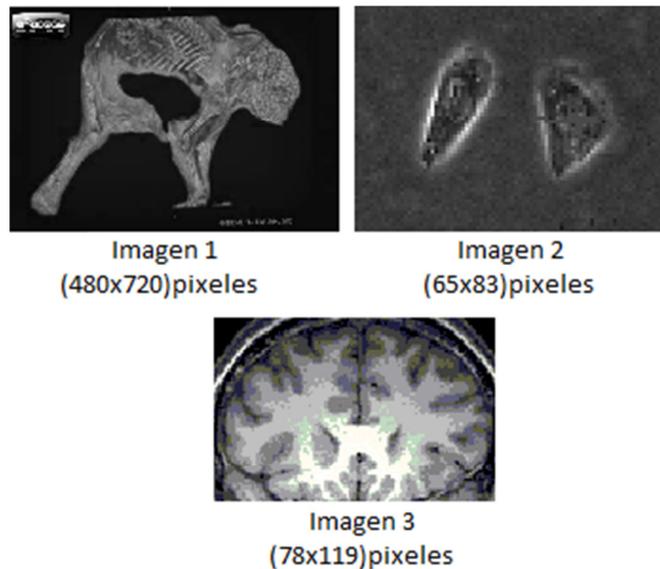


Fig. 1 Imágenes analizadas.

Se aplican las diferentes familias de la Transformada Wavelet, para el filtrado de tres imágenes que se muestra en la Fig. a, obteniendo el valor porcentual del error PSNR (Relación de la señal filtrada con la señal original), obteniendo los siguientes valores

Filtro			Error PSNR (Pico de la señal filtrada a la señal original)		
Familia	Orden	Orden	Imagen 1	Imagen 2	Imagen 3
Haar	x	x	19.7533	19.1678	14.5590
Daubechies	2	x	19.2637	17.8779	13.4594
	3	x	18.7248	16.8110	12.3305
	4	x	18.3000	16.2114	11.5765
	5	x	17.9882	15.9910	11.1870
	6	x	17.7333	15.9244	10.9889
	7	x	17.4814	15.8306	10.8379
	8	x	17.2268	15.6743	10.6740
	9	x	16.9923	15.5558	10.5071
Symlets	2	x	19.2637	17.8779	13.4594
	3	x	18.7248	16.8110	12.3305
	4	x	19.8371	19.3749	14.7746
	5	x	19.7975	19.2299	14.6966
	6	x	19.8342	19.3578	14.7727
	7	x	19.0616	17.2816	12.9391
	8	x	19.8305	19.3425	14.7647
	9	x	19.7970	19.2257	14.6981
Coiflet	1	x	19.4587	18.3489	13.9101
	2	x	18.7985	16.9122	12.4567
	3	x	18.3047	16.2579	11.5896
	4	x	17.9332	16.0228	11.1749
	5	x	17.5964	15.8196	10.9178
Birtogonal	1	1	19.7533	19.1678	14.5590
	1	3	19.7233	19.0544	14.5298
	1	5	19.7124	19.0074	14.5128
	2	2	19.319	17.9647	13.7043
	2	4	19.3275	17.9687	13.7013
	2	6	19.3274	17.9599	13.6977
	2	8	19.3259	17.9502	13.6929
	3	1	19.5619	18.5597	14.3374
	3	3	19.5779	18.5742	14.3337
	3	5	19.5742	18.5459	14.3216
	3	7	19.5688	18.5163	14.3087
	3	9	19.5642	18.4900	14.2985
	Birtogonal	4	4	19.5919	18.2989
5		5	19.533	18.5421	13.9657
6		8	19.4323	18.2485	13.8435

Tabla 1 Error PSNR de los diferentes filtros Wavelet.

Para las diferentes imágenes filtradas el mejor resultado se obtiene con la Transformada Wavelet Daubechies de orden 9, ya que el error PSNR es menor.

El Algoritmo DRLSE del Método Level Set el cálculo es más prolongado que por lo que utiliza el vector distancia para lo que calcula la normal, la curvatura, la velocidad de la interfaz para realizar el salto de la interfaz y el tiempo dependerá del numero de iteraciones, del tamaño de la imagen, etc, como se muestra en la siguiente tabla.

No. Iteraciones	Imagen 1		Imagen 2		Imagen 3	
	Tiempo	Segmentación	Tiempo	Segmentación	Tiempo	Segmentación
100	59 seg	Incompleta	1.5 seg	Completa	2.5 seg	Incompleta
200	2 min 8seg	Incompleta	3 seg	Completa	4 seg	Incompleta
300	3 min 4 seg	Incompleta	4seg	Completa	6 seg	Incompleta
400	4 min 17 seg	Incompleta	5 seg	Completa	7.5 seg	Incompleta
500	5 min 23 seg	Incompleta	6 seg	Completa	9 seg	Incompleta
600	6 min 27 seg	Completa	8 seg	Completa	10.5 seg	Incompleta

Tabla 2 Tiempo de Segmentación con el Algoritmo DRSLE.

Como se puede observar el tiempo de procesamiento es directamente proporcional al tamaño de la imagen, pero la segmentación depende de la interfaz colocada y en la imagen 3 no llega a una segmentación completa aunque aumentemos el numero de iteraciones, por lo que se utiliza otro algoritmo como es el RSF, que consiste en modificar la interfaz inicial en forma y ubicación.

En el Algoritmo RSF al utilizar la energía de la imagen, es una segmentación de prueba y error, por lo que se modifica también la interfaz para así lograr obtener la mejor respuesta en segmentación y tiempo, por lo que el autor Chunming Li, ya carga cinco modelos de imágenes obteniendo los diferentes valores de pesos para el mejor resultado.

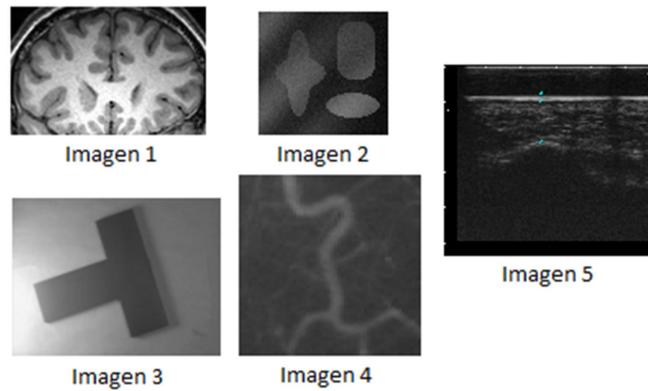


Fig. 2 Imágenes Segmentadas con Algoritmo RSF.

	Imagen 1	Imagen 2	Imagen 3	Imagen 4	Imagen 5
Tiempo	6 seg	3 seg	6 seg	3 seg	19 seg

Tabla 3 Tiempo de Segmentación con el Algoritmo RSF.

El tiempo del Algoritmo RSF es mucho mas optimo que del DRSLE, y además la segmentación es totalmente completa, pero este algoritmo fue realizado prueba y error con la variación de los diferentes pesos de la interfaz y la forma y ubicación de la misma.

CAPITULO 4

CONCLUSIONES Y

RECOMENDACIONES

4.1 CONCLUSIONES.

- Las wavelets son empleadas en el procesamiento de señales debido a su característica principal que hace posible una mejor concentración entre tiempo y frecuencia.
- En análisis periódicos, la transformada wavelet es una buena solución pero puede ser superada o igualada por las diferentes transformadas, pero en señales no transitorias,

la transformada wavelet es muy utilizada por obtener los diferentes detalles tanto en el tiempo, escala y frecuencia.

- La transformada wavelet permite realizar el filtrado de las imágenes de una forma mucho más óptima, ya que su algoritmo es extendido a señales dinámicas.
- En el procesamiento de imágenes la transformada Wavelet obtiene una imagen de aproximación y tres de detalles reduciendo su tamaño y en consecuencia la información, y así logra realizar un proceso de filtrado más rápido que las otras transformadas.
- Al existir varias familias wavelets, es necesario realizar un análisis con cada una de ellas, para así llegar a una correcta elección, ya que en el procesamiento de imágenes cada caso es un mundo diferente; pero en los diferentes estudios realizados la familia wavelet ortogonal es la más utilizada por sus aciertos en las investigaciones presentadas en los papers de la IEE.
- El método Level set utiliza las ecuaciones de euler para el análisis de la interfaz que va a segmentar las regiones, por su gran respuesta a las diferentes formas que puede tomar sin importar cruces, separaciones, etc. ya sea con la misma interfaz o el objeto a segmentar.

- El Método Level Set, es muy utilizado en la medicina, por su gran respuesta a la segmentación de imágenes, pudiendo obtener anomalías o deformidades de los diferentes órganos a analizarse, como se demuestran en los últimos estudios realizados en la medicina.
- El algoritmo RSF utilizado nos brinda cinco casos específicos, los cuales fueron un gran estudio por el autor para poder llegar a obtener los valores correctos de las diferentes variables, ya que al modificar cualesquiera tuviéramos un resultado muy diferente.
- El algoritmo DRSLE nos da la posibilidad de modificar los diferentes constantes para así llegar a obtener la mejor respuesta para cada caso que nos brinda la imagen a estudiar.
- EL algoritmo DRSLE necesita un cálculo computacional mucho mayor al algoritmo RSF, ya que el primero utiliza una regularización de distancia que va paso a paso, mientras que RSF utiliza para el salto y las constantes la minimización de la energía de la imagen.
- El filtrado nos permite eliminar el ruido de las imágenes, para así lograr una mejor segmentación, pero no queda ahí el procesamiento de imágenes ya que los siguientes pasos serían la selección del objeto a analizar y por último realizar la respectiva aplicación para lograr un objetivo específico.

- Para las diferentes imágenes filtradas el mejor resultado se obtuvo con la Transformada Wavelet Daubechies de orden 9, ya que el error PSNR es menor a comparación de los demás filtros.
- El tiempo de procesamiento es directamente proporcional al tamaño de la imagen.
- El Algoritmo DRLSE del Método Level Set el cálculo es más prolongado que por lo que utiliza el vector distancia para lo que calcula la normal, la curvatura, la velocidad de la interfaz para realizar el salto de la interfaz y el tiempo dependerá del numero de iteraciones.
- En el Algoritmo RSF al utilizar la energía de la imagen, es una segmentación de prueba y error.

4.2 RECOMENDACIONES

- La transformada wavelet es muy utilizada hoy en día por sus prestaciones, como se puede ver que ya está absorbiendo a la transformada de Fourier en los diferentes papers de la IEEE, por lo que sería excelente que el análisis y estudio formar parte de la investigación o materias electivas de la universidad.
- Las aplicaciones de la transformada wavelet son muy extensas y en cada caso es un mundo diferente, pero con la misma base matemática y sería bueno motivar a los

estudiantes que realicen un estudio más profundo de la transformada wavelet en las diferentes aplicaciones como las telecomunicaciones, la visión artificial, análisis de imágenes, estudio de los armónicos de los motores con periodos no periódicos, etc.

- Al ser un estudio básico del método level set, en estudios posteriores se podrían analizar los diferentes tipos que derivan de este método, y así lograr tener una multasegmentación con más precisión y mejores resultados.

CAPITULO 5

BIBLIOGRAFIA

5.1 BIBLIOGRAFIA.

- “Introduction of wavelet analyses to rainfall/runoffs relationship for a karsticbasin: the case of Licq-Atherey karstic system”, Ababou, L.D., Mangin, A., (France), 2001
- “Anomaly Detection and Prediction in Communication Networks Using Wavelet Transforms”, Addison, P. S.; Alarcon Aquino; PhD thesis, Imperial College London, University of London. UK 2003
- “Estudio de técnicas basadas en la Transformada wavelet y optimización de sus parámetros para la Clasificación por texturas de imágenes Digitales”, Fernández Alfonso, Universidad Politécnica de Valencia, Febrero 2007.

- “Algoritmos Clásicos de Segmentación”, Cuzco María, Tesis para el título de Ingeniero Informático de la Escuela Académico-profesional de Informática de la Universidad Nacional de Trujillo, 1998.
- “A Unified Approach to Short-Time Fourier Analysis and Synthesis”, Allen J. B., and Rabinar L. R, Proc. IEEE, 65, 1558-1564, 1977.
- “Diseño de un Algoritmo de Segmentación de Imágenes aplicando el Funcional de Mumford-Shah para mejorar el desempeño de los Algoritmos Clásicos de Segmentación”, Spirán Mendoza; Tesis para el título de Ingeniero Informático de la Escuela Académico-profesional de Informática de la Universidad Nacional de Trujillo
- “Image coding using wavelet transform CNRS”, Antonini, M.; Barlaud, M.; Mathieu, P., Daubechies, I; Universidad de Nice-Sophia Antipolis, Valbonne, 1992
- “Algoritmo para detección de vibraciones anormales en maquinarias utilizando la Transformada Wavelet”, Osorio Sánchez, Universidad de las Américas Puebla, Cholula, Puebla, México a 11 de mayo de 2006
- “Mathematical Problems in Image Processing: Partial Differential Equations and the Calculus of Variations”, Aubert, G., Kornprobst, P., Springer-Verlag. 2002
- “Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms”, BURRUS, C.S., R.A. GOPINATH, H. GUO; taco.poly.edu., 1998.

- “Distance Regularized Level Set Evolution and Its Application to Image Segmentation”
Chunming Li, Chenyang Xu, Senior Member, IEEE, Changfeng Gui, and Martin D. Fox,
Member, IEEE Image Processing vol. 19 (12), pp.3243-3254, 2010.
- “A level set approach for inverse problems involving obstacles,” F. Santosa; ESAIM
Control, Optimization and Calculus of Variations, Vol. 1, 17-33, (1996)
- “Diseño óptimo aerodinámico a través del método adjunto continuo”, Palacios
Gutiérrez; Tesis Doctoral, Madrid, 2008.
- “An introduction to wavelets”. GRAPS, A; IEE Computational Science and engineering;
1995.
- “Análisis Comparativo de Algoritmos para Reducción de Ruido en Señales Utilizando
Wavelets”; Hernández Marianito; Tesis de Licenciatura Universidad de las Américas
Puebla, 2003
- “Análisis de Fourier”; Hsu Hwei P; Ed. Addison Wesley Iberoamericana, E.U.A, 1987
- “Level Set Methods: Evolving Interfaces in Geometry, Fluid Mechanics, Computer
Vision and Materials Sciences”; J Sethian; Cambridge Monographs on Applied and
Computational Mathematics. Cambridge University Press. 1996
- “LEVEL SET AND FAST MARCHING METHODS”; J. A.SETHIAN, University of
California, Berkeley, 1999

- “Método para la reducción de ruido en imágenes utilizando la Transformada Wavelet Compleja con un algoritmo de Umbral Óptimo”, Rosas Orea, Maestría en Ciencias con Especialidad en Ingeniería Electrónica, Universidad de las Américas Puebla Cholula, Puebla, México, 2006
- ” ALGORITMOS Y APLICACIONES EN EL ANÁLISIS DE GRÁFICOS DE INTERFAZ”, Touriño Lado, Méndez Penín ; Departamento de Informática. Universidad de Vigo; 2003
- "Minimization of Region-Scalable Fitting Energy for Image Segmentation", Chunming Li IEEE Trans. Image Processing, vol. 17 (10), pp.1940-1949, 2008.
- “Wavelet Toolbox For Use with MATLAB”. Misiti Michel; Oppenheim Georges; The Math Works, Inc 1997
- “Geometric Level Set Methods in Imaging, Vision, and Graphics”; Osher, S., Paragios, N.; Springer-Verlag, New York. 2003
- “Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations”, Osher, S.; Sethian, J. A; J. Comput. Phy, 1998.
- “Visión por Computador: Imágenes Digitales y Aplicaciones”; Pajares, G., & de la Cruz, J. M.; Madrid: RA-MA, 2001.
- “Técnicas matemáticas para la reconstrucción de imágenes de fluorescencia con aplicaciones en biomedicina”; Medina Vásquez UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID, Abril de 2009.

- “Wavelet Methods for Time Series Analysis~ Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics”; Percival Donald B; Walden Andrew T.; Cambridge University Press, 2002.
- “Implementación de la Transformada Wavelet Discreta 2-D con filtros no separables”; Colom Ricardo, Gadea Rafael, Martínez Marco, Ballester Francisco Herrero Vicente; Universidad Politécnica de Valencia 2001.
- “Caracterización de Yacimientos Usando el Método de Conjuntos de Nivel”; Villegas Velásquez, TESIS DOCTORAL, UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID, Julio de 2007.
- “Fronts propagating with curvaturedependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations”; S. Osher and J. A. Sthian, J. Comput; Phys., Vol. 79, 12-49 (1988).
- “From Fourier Transform to Wavelets”, Seppala Otto, Abril 2001.
- “Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces “Stanley J. Osher, Ronald P. Fedkiw; Springer, 2000.
- “Primer on Wavelets and their Scientific Applications”; Walker, James S.A; Chapman & Hall 1999.
- “Statistical texture characterization from discrete wavelet representation”; Wouwer, Gert Van; University of Antwerp, 1998.

- "Wavelet image compression"; Xiong and K. Ramchandran; Handbook of Image and Video Processing, A. Bovik, ed., Academic Press, 2000

REFERENCIAS WEB

18/Febrero/2012

- <http://ebookbrowse.com/seppala-wavelet-pdf-d20188254>.

25/Febrero/2012

- http://www7.nationalacademies.org/spanishbeyonddiscovery/mat_008276-02.html.

5/Marzo/2012

- http://www7.nationalacademies.org/spanishbeyonddiscovery/mat_008276-03.html#TopOfPage

ANEXO

FILTRO SPECKLE

El moteado o speckle es una característica inherente a las imágenes radar. En estas existen dos tipos de textura: la de la propia escena y la de la varianza de la imagen, conocida como speckle, debido al sistema de obtención de la propia imagen (Henderson y Lewis, 1998).

Por lo tanto, se debe distinguir entre la “textura de la escena” que debe ser contemplada como la variación espacial de los patrones de reflectividad, y la “textura de la imagen” que representa la variación espacial de la radiometría captada por un sistema parcialmente coherente como el SAR, siendo la textura de la imagen más compleja que la textura de la escena. La diferencia entre la textura de la escena y la de la imagen se debe al moteado o speckle.

La señal emitida por el sensor se transmite en fase, de forma coherente sin producir interferencias hasta que interacciona con el objeto, entonces deja de estar en fase y las ondas producen interferencias que generan píxeles claros y oscuros denominados “ruido de moteado o speckle”. El speckle debe ser eliminado antes de proceder a la utilización de los datos. Es crucial el orden de aplicación de los algoritmos en las imágenes radar, dado que cualquier proceso aplicado a una imagen antes de reducir el speckle, genera un ruido que se incorpora a la propia imagen, produciendo una degradación de la misma. El speckle no puede ser nunca eliminado totalmente, pero si reducido significativamente. Por ello, los filtros de speckle tienen como objetivo dicha reducción, procurando conservar las características espaciales y las estructuras lineales de la escena.

Jain presenta un modelo general para representar un ruido speckle multiplicativo.

$$F(l,k) = g(l,k)\eta_m(l,k) + \eta_a(l,k) \quad (1)$$

donde $g(l,k)$ es un ruido libre de la imagen original a ser recuperada.

$\eta_m(l,k)$ y $\eta_a(l,k)$ son ruido multiplicativo y ruido aditivo respectivamente y $f(l,k)$ es un ruido de observación de $g(l,k)$. Las variables k and l representa la localización espacial.