

**UNIVERSIDAD POLITÉCNICA SALESIANA
SEDE QUITO**

**CARRERA:
INGENIERÍA ELECTRÓNICA**

**Trabajo de titulación previo a la obtención del título de
INGENIERO ELECTRÓNICO**

**TEMA:
DESARROLLO DEL ESTADO DEL ARTE DEL EQUILIBRIO
PARA EL ROBOT UNICICLO**

**AUTOR:
JORGE LUIS GAYBOR VALVERDE**

**TUTOR:
HAMILTON LEONARDO NÚÑEZ VERDEZOTO**

Quito, septiembre del 2019

CESIÓN DE DERECHOS DE AUTOR

Yo, Jorge Luis Gaybor Valverde con documento de identificación N°1716808025, manifiesto mi voluntad y cedo a la Universidad Politécnica Salesiana la titularidad sobre los derechos patrimoniales en virtud de que soy autor del trabajo de titulación, intitulado: “DESARROLLO DEL ESTADO DEL ARTE DEL EQUILIBRIO PARA EL ROBOT UNICICLO”, mismo que ha sido desarrollado para optar por el título de Ingeniero Electrónico, en la Universidad Politécnica Salesiana, quedando la Universidad facultada para ejercer plenamente los derechos cedidos anteriormente.

En aplicación a lo determinado en la Ley de Propiedad Intelectual, en mi condición de autor me reservo los derechos morales de la obra antes citada. En concordancia, suscribo este documento en el momento que hago la entrega del trabajo final en formato impreso y digital a la Biblioteca de la Universidad Politécnica Salesiana.



Jorge Luis Gaybor Valverde
CI: 1716808025

Quito, septiembre del 2019

DECLARATORIA DE COAUTORÍA DEL DOCENTE TUTOR

Yo, declaro que bajo mi dirección y asesoría fue desarrollado el Artículo Académico, “DESARROLLO DEL ESTADO DEL ARTE DEL EQUILIBRIO PARA EL ROBOT UNICICLO” realizado por Jorge Luis Gaybor Valverde, obteniendo un producto que cumple con todos los requisitos estipulados por la Universidad Politécnica Salesiana, para ser considerados como trabajo final de titulación.

Quito, septiembre del 2019.



Hamilton Leonardo Núñez Verdezoto
CI: 1712981487

DEDICATORIA

Agradezco a Dios por haberme permitido culminar con una de las etapas de mi vida. A mis padres por todo su apoyo, sus consejos y sobre todo por su constancia al ayudarme cuando más los necesité. A mis hermanos y hermanas por los ánimos que me dieron. A mi tutor por su constancia en ayudarme a hacer un buen trabajo de titulación; y, a todas las personas que contribuyeron y me apoyaron en esta etapa de mi vida.

Jorge Luis Gaybor Valverde

DESARROLLO DEL ESTADO DEL ARTE DEL EQUILIBRIO PARA EL ROBOT UNICICLO

DEVELOPMENT OF THE STATE OF THE BALANCE ART FOR THE UNICYCLE ROBOT

Jorge L. Gaybor¹, Hamilton L. Nuñez²

Resumen

Este documento analiza tres modelos de robot unicycle, los cuales muestran la estructura, los modelos matemáticos aplicados y el tipo de controlador que actúa para lograr el equilibrio en ambas direcciones, una longitudinal y otra lateral, bajo perturbaciones inciertas y efectos no lineales inherentes que se basan en principios matemáticos de Lagrange para poder obtener el valor del error de cada uno de los modelos con el análisis de medida inercial en los ejes, donde se analizará cuál tiene el mejor desempeño. Además, del control del error por medio de los controles LQR y LQR+I.

Palabras clave: unicycle, controlador, equilibrio, Lagrange, inercial.

1. Introducción

Equilibrar un robot unicycle en direcciones longitudinales y laterales bajo la presencia de perturbaciones inciertas y efectos no lineales es un tema desafiante para el control y el diseño mecánico. Este artículo presenta el análisis de modelación y control de tres tipos de robots unicycles, que actúan sobre la dirección del ángulo de giro y balanceo. Los cuales son: Robot unicycle con rueda lateral para equilibrio, Robot unicycle compensado con fuerza centrífuga y Robot unicycle con volantes dobles.

Abstract

This document details three existing unicycle robot models, which show the structure, the applied mathematical models and the type of controller that acts to achieve balance in both directions, longitudinal and lateral, under uncertain disturbances and inherent nonlinear effects that are based in mathematical principles such as Lagrange to be able to obtain the value of the error of each of the models with the analysis of inertial measurement in the axes, where it is analyzed it has the best performance. In addition, error control by means of the LQR LQR+I controls.

Keywords: unicycle, controller, balance, Lagrange, inertia

El modelo dinámico no lineal se deriva del enfoque lagrangiano. El modelo linealizado se aproxima a la posición vertical y se identifica incorporar un regulador cuadrático lineal convencional LQR para dos modelos analizados y un modelo con acción integral LQR+I para equilibrar el robot en ambas direcciones; además de realizar un análisis comparativo entre los tres modelos, tomado de los resultados, presenta la simulación de resultados experimentales del control de equilibrio y el control de posición del robot.

Estudiante de Ingeniería Electrónica – Universidad Politécnica Salesiana, Quito – Ecuador

¹Estudiante de la Universidad Politécnica Salesiana

Correo electrónico: jgaybor@est.ups.edu.ec

² Docente de la Universidad Politécnica Salesiana, Quito-Ecuador

Correo electrónico: hnunez@ups.edu.ec

2. Robot Uniciclo con Rueda Lateral para Equilibrio

En la Figura 1 se puede observar que el robot tiene dos motores DC y una unidad sensor de análisis de medida inercial de los ejes (IMU). [1] El motor de reacción activa la rueda lateral verificando los ángulos de la dirección de cabeceo y balanceo del robot donde las perturbaciones pueden ser controladas. [2] El modelado dinámico se lleva a cabo bajo la condición del error de offset mínimo en el arranque inicial del robot. [3] Donde las ecuaciones de Lagrange se aplican a cada sistema para derivar modelos cinéticos, donde se tiene, [9]

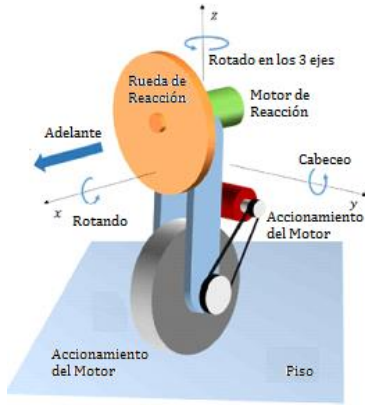


Figura 1. Estructura del robot de una sola rueda [27]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q} \right) = Q \quad (1)$$

La Figura 2 muestra el ángulo de rotación respecto al eje Y, se establece en 0° mientras se controla el movimiento del robot.

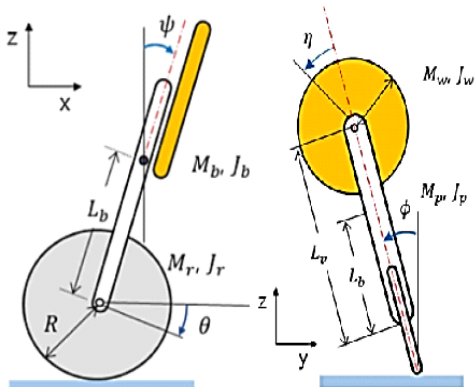


Figura. 2 Modelado Ángulo de inclinación y Ángulo de Balanceo [27]

Donde:

ψ = ángulo de inclinación del robot,
 θ = ángulo de rotación de la rueda motriz,
 M_b = masa corporal del robot [kg]

L = distancia entre el centro de masa corporal y centro de la rueda motriz [m]

R = radio de la rueda motriz [m]

J_b = momento de inercia del cuerpo del robot con rueda de reacción [kg.m²]

g = gravedad [m/s²]

M_r = masa de la rueda motriz [kg]

J_r = momento de inercia de la rueda motriz

M_w = masa de la rueda motriz

J_w = momento de inercia de la rueda motriz [kg.m²]

M_p = masa de robot con exclusión de rueda de reacción [kg]

J_p = momento de inercia del robot incluyendo rueda de reacción [Kg.m²].

La ecuación cinética de dirección de inclinación se indica a continuación.

$$M_b L R \cos \psi \ddot{\theta} + (M_b L^2 + J_b) \ddot{\psi} - M_b g L \sin \psi = -\tau_\theta \quad (2)$$

La Ecuación 2 está linealizada alrededor del punto $y=0$ y el modelo para el motor de accionamiento [3], se tiene:

$$M_b L R \ddot{\theta} + (M_b L^2 + J_b) \ddot{\psi} - M_b g \dot{L} \psi = -\tau_\theta \quad (3)$$

$$\tau_\theta = \frac{n K_t}{R_a} i + \frac{n K_b K_t}{R_a} \dot{\theta} \quad (4)$$

Donde:

τ_θ = par de accionamiento del motor.

n = relación de reducción de engranajes.

R_a = resistencia de la armadura [Ω]

K_b = constante de FEM [V / RPM]

K_t = torque constante motor de accionamiento.

De las Ecuaciones 3 y 4 se obtiene el vector de estado $X = [\theta \psi \dot{\theta} \dot{\psi}]^T$ define la velocidad angular como $\dot{\theta}, \dot{\psi}$ en cada rueda, obteniendo la ecuación de estado $\dot{X} = A_x + B_u$, donde \dot{X} es la dirección de inclinación y A_x, B_u son matrices de ponderación de tiempo continuo que complementan los valores que requiere compensar el ángulo de dirección de giro en 0°. Además, se realiza la ecuación de modelado dinámico para la dirección de balanceo del motor [3], así:

$$(M_b L^2 + (M_w L^2 + J_p + J_w) \dot{\eta} + J_w \phi - (M_b l_b + (M_w L_w g) \times \sin \phi) = 0 \quad (5)$$

$$J_w \ddot{\eta} + J_w \ddot{\phi} = \tau_r \quad (6)$$

$$\tau_r = \frac{n K_t}{R_a} i + \frac{n K_b K_t}{R_a} \dot{\eta} \quad (7)$$

Donde:

τ_r = momento accionamiento motor reacción.

ϕ = ángulo de balanceo del robot,
 η = ángulo de rotación rueda de reacción motor.

Las Ecuaciones 5, 6 y 7 obtienen el vector de estado de la dirección de balanceo logrando $Z = [\eta \ \phi \ \dot{\phi}]^T$ que defina a $\dot{\phi}$ como velocidad angular del rodillo, obteniendo la ecuación de estado $\dot{Z} = A_Z + B_u$, donde \dot{Z} es la dirección de balanceo y A_Z, B_u son matrices de ponderación de tiempo continuo que toman los valores necesarios para estabilizar al robot.

La Figura 3 es un diagrama de bloques del sistema de robot, desarrolla un estudio del anillo externo, y se divide aproximadamente en una fuente de alimentación, una unidad de control y una unidad de conducción [3].

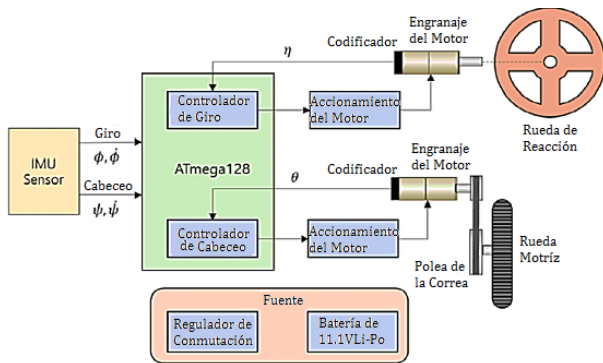


Figura 3. Diagrama de bloques del robot [27]

Para obtener el control de equilibrio óptimo [4], se asume que el sistema del robot de rueda lateral es un sistema invariante de tiempo lineal, utilizando un controlador de regulador cuadrático lineal (LQR), el cual es un sistema de tiempo continuo [4],

$$\dot{x} = A_x + B_u \quad (8)$$

La función del momento de inercia motriz se analiza de [4],

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q_x + u^T R u) dt \quad (9)$$

Donde, de acuerdo a las especificaciones de control deseadas, x^T es la dirección de inclinación, u^T representa la estabilidad del control y las matrices de ponderación de estado y control Q, R deben ser seleccionadas apropiadamente de acuerdo a las especificaciones de estabilidad correspondiente a ganancia óptima K del sistema de tiempo continuo [5].

Con el fin de confirmar el resultado del control de giro del robot se establece a un ángulo de 8° , suponiendo como vector de estado inicial, pero

para llegar a los resultados definitivos se realiza con un ángulo de giro $2,5^\circ$.

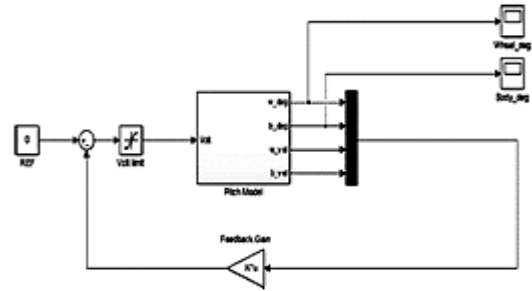


Figura 4. Diagrama de Bloques de Simulink de control de giro [27]

El tiempo de estabilización es de aproximadamente 2s, como se puede ver en la Figura 5 donde muestra la respuesta para el ángulo de giro de la rueda motriz, el ángulo del valor objetivo de captura centro 0° . Se puede observar que convergen parámetros simulados.

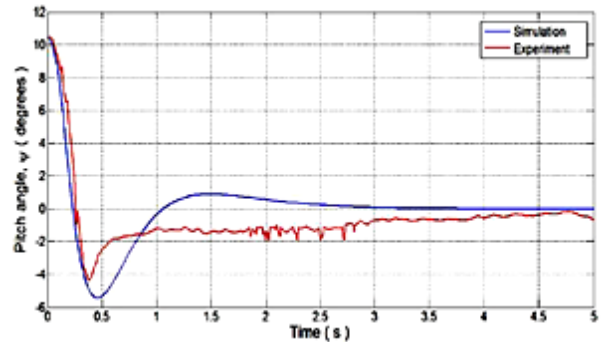


Figura 5. Ángulos de giro de simulación y experimento [27]

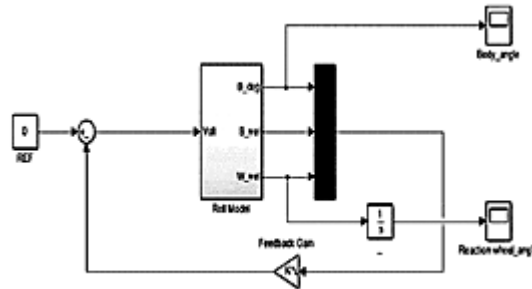


Figura 6. Diagrama de bloques de Simulink de control de balanceo [27]

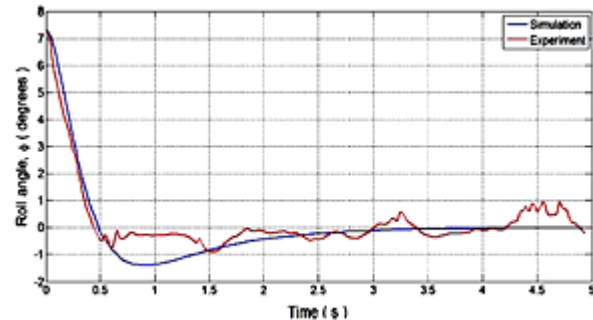


Figura 7. Ángulo de balanceo de la simulación y experimento [27]

Los resultados de la simulación experimental que compara la dirección de ángulo de giro (cabeceo), ver Figura 5 y la respuesta del ángulo respecto a la dirección de balanceo, ver Figura 7 la cual indica que el robot se estabiliza superando las condiciones de estabilidad inicial planteadas.

3. Robot Uniciclo Compensado con Fuerza Centrífuga

En la Figura 8, el robot uniciclo de volante vertical [6-8] y el método de control de la dirección, se basa en el efecto de precesión del robot uniciclo de doble giroscopios [9-12], el mismo que controla la dirección del ángulo de balanceo y la velocidad del ángulo de rodadura, más apropiado según el análisis dinámico.

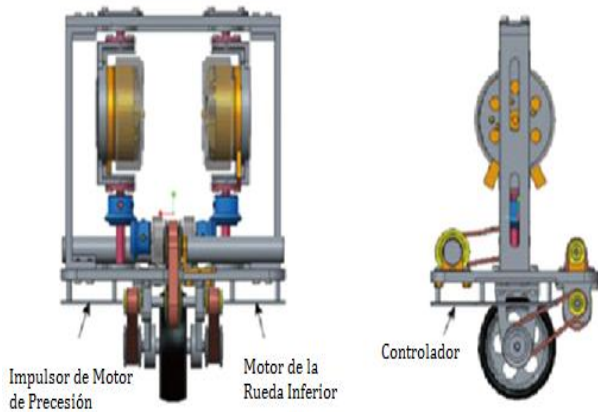


Figura 8. Estructura 3D Robot Uniciclo [28].

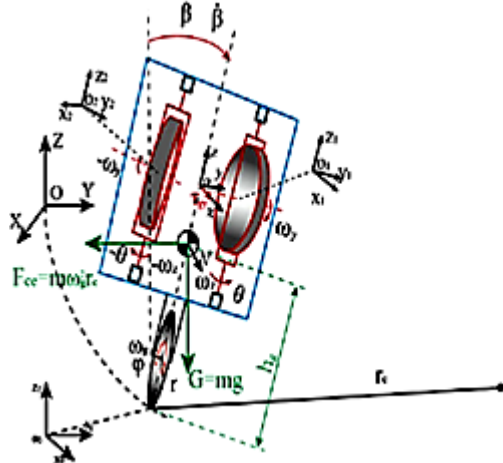


Figura 9. Análisis de la estructura del Diseño General de Robot uniciclo [28]

Donde,
 $M_{1,2}$ = masa de giroscopios izquierda y derecha.
 L_{p1}, L_{p2} = distancia centro gravedad del cuadro.
 φ = ángulo de desvío del robot
 δ = ángulo de rodadura del robot.
 β = ángulo de inclinación del cuerpo
 ω = ángulo giratorio de la rueda inferior

α_1, α_2 = ángulo de precesión de izquierda y derecha.

Considerando un sistema de péndulo invertido sobre ruedas. Ver Ecuación 1. La ecuación de estado para el giro es la siguiente [9]:

$$\begin{bmatrix} m_{33} & m_{34} \\ m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\omega} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n_3 \\ n_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_w \end{bmatrix} \quad (10)$$

Donde,

$m_{33}, m_{34}, m_{43}, m_{44}$ = masas de izquierda-derecha.

n_3, n_4 = relación de reducción de engranajes.

τ_w = Par de la rueda inferior

Las ecuaciones dinámicas simplificadas sobre el ángulo de inclinación son las siguientes. Ver Ecuaciones 11 y 12 [10]:

$$\ell_{10}\theta + c\theta \ell_2 \ddot{\omega} - (M_b g L_b + 2M_{p1} g L + 2M_1 g L) s\theta = 0 \quad (11)$$

$$c\theta \ell_2 \ddot{\theta} \ell_1 \ddot{\omega} - \dot{\theta}^2 s\theta \ell_2 = \tau_w \quad (12)$$

Donde,

L_b = distancia del centro de gravedad del bastidor al centro de la rueda.

$\ell_1, \ell_2, \ell_{10}$ = distancia del centro de gravedad del giroscopio desde el centro de gravedad.

$c\theta$ = constante de ángulo de inclinación

$s\theta$ = constante de ángulo de cabeceo.

De las Ecuaciones 11 y 12 se obtiene las ecuaciones dinámicas [10]:

$$\ddot{\theta} = \frac{\beta \cos \theta \tau_w + \beta^2 \cos \theta \sin \theta \theta^2 - CD \sin \theta}{\beta^2 \cos^2 \theta - AD}$$

$$\ddot{\omega} = \frac{A \tau_w + AB \sin \theta \theta^2 - BC \cos \theta \sin \theta}{\beta^2 \cos^2 \theta - AD}$$

Donde los coeficientes son:

$$A = \ell_{10}$$

$$B = \ell_2$$

$$C = M_b g L_b + 2M_{p1} g L + 2M_1 g L$$

$$D = \ell_1$$

Las ecuaciones dinámicas para el rodillo se derivan de la Ecuación 3. Las ecuaciones dinámicas simplificadas [10] Ecuaciones 13 y 14:

$$(2Q_2)\delta + 2\beta \frac{\alpha_1 \alpha_2 \ell_{1z} - (M_w g R_w + M_b g \ddot{L}_b + -M_b g R_w + 2M_{p1} g L)}{+ 2M_{p1} g R_w} s\delta = 0 \quad (13)$$

$$(\ell_{1x} + \ell_{1z})\alpha - \frac{1}{2} \dot{s}^2 (4s a a \ell_{1z}) 2\delta \beta \dot{\alpha} \ell_{1z} = \tau_c \quad (14)$$

Donde,

$I_{1x}, I_{1y}, I_{1z}, I_{2x}, I_{2y}, I_{2z}$ = momentos de inercia del centro de gravedad de los giroscopios sobre los ejes, para izquierda y derecha.

R_W = radio de la rueda.

β_1, β_2 = ángulo de giro de giroscopios para izquierda y derecha.

De las Ecuaciones 13 y 14 es la fuerza centrípeta para el círculo de ángulo de desvío, para cuando el robot uniclo tiene una velocidad de ángulo de desvío y de precisión estable, el par de precisión es estable a cero. La ecuación dinámica para Y deriva de la Ecuación 3. La ecuación estado para orientación es:

$$m_{11} \dot{\varphi} - n_1 = 0. \quad (15)$$

De la Ecuación 15 es el estado de ecuación para el derrape, se deriva a partir de la ecuación de Lagrange, ecuación 1, donde $q_3 = \varphi$ y $Q_3 = 0$. Sobre la base del análisis dinámico, el ángulo de inclinación del robot uniclo se equilibra mediante la torsión de la parte inferior del volante en el que se balancea el sistema de pesos. [13-15].

La entrada de la rueda inferior es la siguiente:

$$\tau_w = k_{p\theta} e_\theta + k_{D\theta} \dot{e}_\theta + k_{p\omega} e_\omega + k_{I\omega} \ddot{\omega} \quad (16)$$

De la Ecuación 16 es la diferencia entre el ángulo de giro en tiempo real θ y el ángulo establecido. Se da como:

$$e_\theta = \theta - \theta_r \quad (17)$$

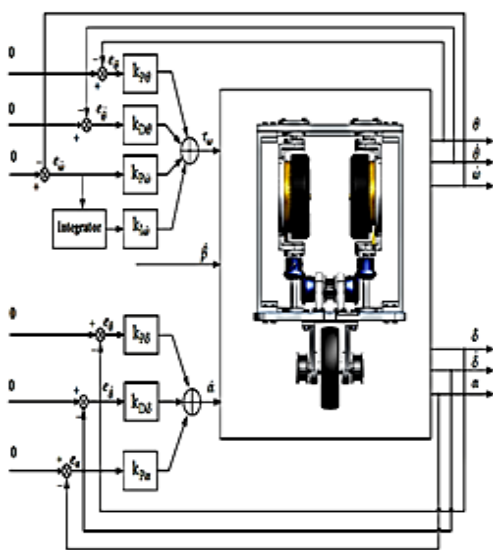


Figura 10. Diagrama del control de equilibrio estático. [28]

El par de la rueda inferior τ_w incluye el controlador PD del ángulo de paso θ y el controlador PI de la velocidad angular de la

rueda. La entrada de velocidad angular de precesión es la siguiente:

$$\dot{\alpha} = kP\delta e\delta + kD\delta \dot{e}\delta + kPa\alpha \quad (18)$$

De la Ecuación 18, $P\delta, kD\delta, kP\alpha$ son ganancias del controlador, $e\delta$ es la diferencia entre el ángulo de balanceo en tiempo real, δ y el ángulo establecido δ_r se obtiene la Ecuación 19.

$$e\delta = \delta - \delta_r \quad (19)$$

Esto significa que el par de giro del sistema de precisión del giro es más pequeño a medida que aumenta el ángulo de precesión. El ángulo de giro del robot uniclo está relacionado con las velocidades angulares del rodillo y la rueda inferior. La entrada de la velocidad angular de precesión sigue:

$$\dot{\alpha} = kP\delta e\delta + kD\delta \dot{\delta} + kPa\alpha \quad (20)$$

Las diferencias son $\dot{\delta}r$ y δr . Se da como:

$$\delta r = kDe \quad (21)$$

De la Ecuación 21 $e\varphi$ es la diferencia entre la velocidad angular de balanceo en tiempo real φ y la velocidad angular de derrape ajustada. Se da como:

$$e\varphi = \varphi - \varphi_r \quad (22)$$

En el proceso de control de la dirección, la rueda inferior obtiene una velocidad angular y la velocidad angular configurada es un valor constante. Bloque de control Figura 11.

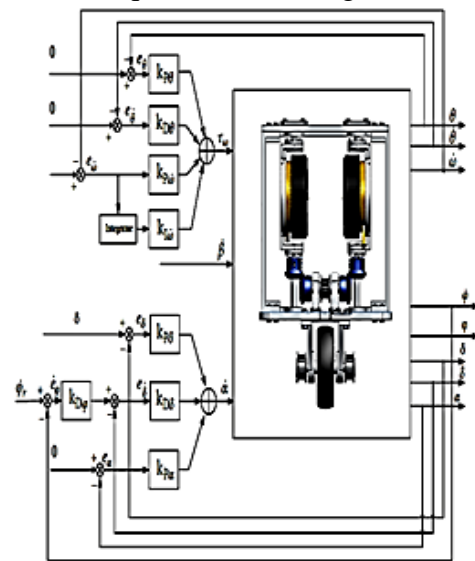


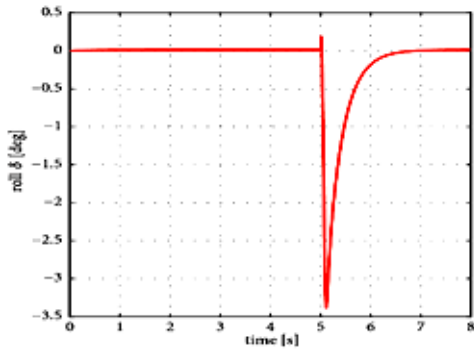
Figura 11. Diagrama de control de dirección. [28]

En esta sección se verifica en la Figura 10 dos experimentos. En primer lugar, el equilibrio

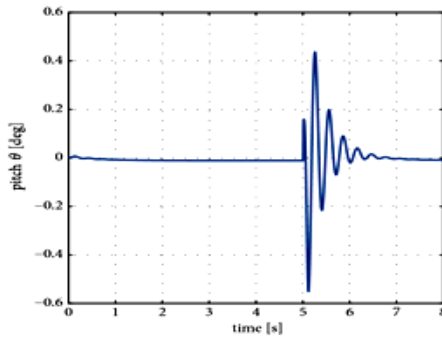
estático y en segundo lugar, el método de control de la dirección del robot.

Tabla 1. Parámetros de control estático.

Parámetro	ω_b	$k_{p\theta}$	$k_{D\theta}$	$k_{p\dot{\omega}}$	$k_{I\dot{\omega}}$	$k_{p\delta}$	$k_{D\delta}$	$k_{p\alpha}$	$k_{D\alpha}$
Valor	3000rpm	12	0,3	0,03	0,02	15	1,2	1,5	1,1



(a)



(b)

Figura 12. (a) ángulo de balanceo. (b) ángulo de inclinación simulación. [28]

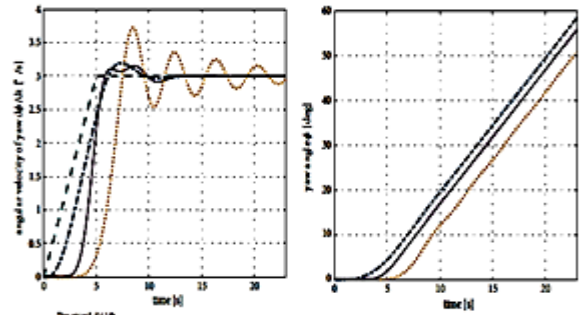
La Figura 12 muestra la simulación del equilibrio estático, las gráficas del ángulo de balanceo y cabeceo en la simulación de equilibrio estático. En 5s, el ángulo de balanceo y de inclinación varía según la interferencia lateral de fuerza. En un tiempo de simulación de 5s, hay una fuerza de interferencia lateral de 10 N (la duración es de 0.01s), la Tabla 1 muestra el valor de los parámetros de control de la estrategia de control estático en la simulación.

La simulación de control de dirección basado en el equilibrio estático, control de la dirección agrega una velocidad angular de la rueda inferior $\dot{\omega}_r$. La Tabla 2 muestra el valor de los parámetros de control. La Figura 13 muestra la velocidad angular de giro del filtro.

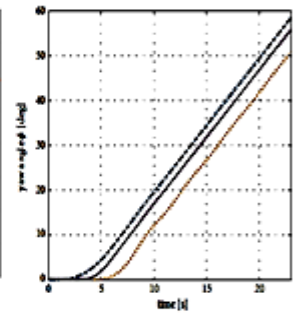
Cuando la velocidad angular se estabilizó en un valor constante, la velocidad angular de balanceo se vuelve estable nuevamente. [16]

Tabla 2. Parámetros valor de la estrategia de control de dirección en simulación.

Parámetro	$\dot{\phi}_r$	$k_{p\theta}$	$k_{D\theta}$	$k_{p\dot{\omega}}$	$k_{I\dot{\omega}}$	$k_{p\delta}$	$k_{D\delta}$	$k_{p\alpha}$	$k_{D\alpha}$
Valor	50°/s	12	0,3	0,03	0,02	15	1,2	1,5	1,1

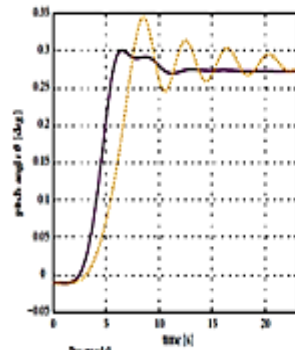


(a)

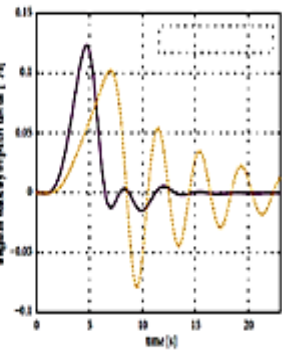


(b)

Figura 13. a) La velocidad angular, b) el ángulo de giro en la simulación del control del ángulo de giro. [28]



(a)



(b)

Figura 14. a) El ángulo de inclinación y b) la velocidad angular de inclinación en la simulación. [28]

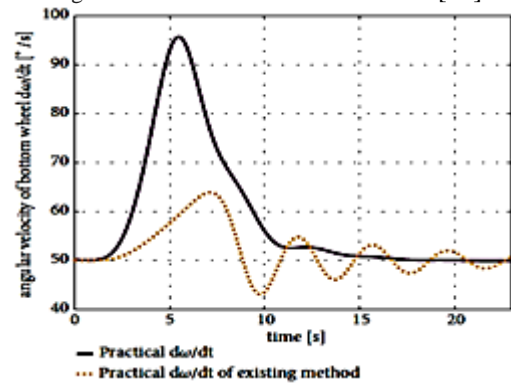


Figura 15. La velocidad angular de la rueda inferior en la simulación de control de ángulo de giro. [28]

Los resultados de la simulación que se muestran en las Figuras 14 y 15, demostraron que la estrategia de control es efectiva para el controlar la dirección, en comparación con el método de control de dirección existente [17].

4. Robot Uniciclo con Volantes Dobles

La Figura 16 muestra el movimiento angular de una rueda giratoria, o volante, que está unida al robot para mantener el momento angular. [18-21] El volante se acelera o desacelera para generar el par de equilibrio en el ángulo de balanceo, por lo que el robot uniciclo puede estar cayendo en dirección lateral y longitudinal. Cuando se cambia el momento angular girando el eje del volante, se produce el par de rodadura del robot.

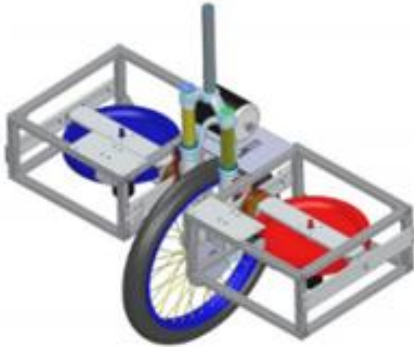


Figura 16. Modelo del Robot Uniciclo.[29]

El modelo dinámico se deriva utilizando Euler-Lagrange. Ver Ecuación 1. Siendo L la diferencia entre la energía cinética total y la energía potencial, así:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + G(q) + D = F \quad (23)$$

Donde,

M = matriz de inercia.

C = matriz de Coriolis.

G = matriz de la gravedad.

D = matriz de la perturbación.

F = matriz de fuerza de entrada.

El método de expansión de la serie de Taylor se aplica para linealizar el modelo de robot y se reorganiza a la forma del espacio de estado como se muestra en la Ecuación 8. Se selecciona el regulador cuadrático lineal (LQR) convencional y el regulador cuadrático lineal con acción integral (LQR+I) para equilibrar el robot y sus rendimientos [23].

La función de LQR se expresa en la ecuación 9.

$$u = -Kx \quad (24)$$

De la expresión 24 las matrices Q y R que se visualizan en la ecuación 9, son el estado y

control, de ponderación siguen la señal de control u .

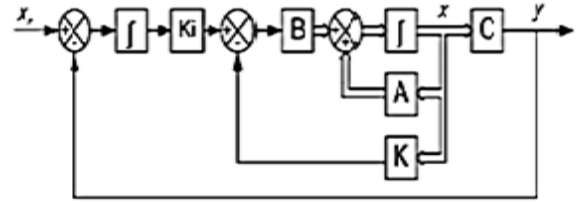


Figura 17. Diagrama de bloques del sistema controlado [29]

La matriz de ganancia óptima K se determina resolviendo la ecuación algebraica de Riccati [24], así:

$$P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0 \quad (24)$$

$$K = R^{-1}B^T P \quad (25)$$

De las Ecuaciones 24 y 25, Q y R son las matrices de ponderación que dependen del estado significativo, la matriz Q es la combinación de muchos estados del robot uniciclo, los estados de balanceo e inclinación del robot uniciclo son establecer la prioridad más alta. Por sustitución de la matriz de estado (A) y la matriz de entrada (B), se puede obtener la matriz P .

$$P[n] = u[n-1] + [K \quad K_1] \begin{bmatrix} e_\varphi[n] - e_\varphi[n-1] \\ e_\beta[n] - e_\beta[n-1] \\ e_\theta[n] - e_\theta[n-1] \\ e_\gamma[n] - e_\gamma[n-1] \\ (e_\varphi[n] - 2e_\varphi[n-1] + e_\varphi[n-2])/\Delta t \\ (e_\beta[n] - 2e_\beta[n-1] + e_\beta[n-2])/\Delta t \\ (e_\theta[n] - 2e_\theta[n-1] + e_\theta[n-2])/\Delta t \\ (e_\gamma[n] - 2e_\gamma[n-1] + e_\gamma[n-2])/\Delta t \end{bmatrix} \quad (26)$$

Donde,

$$u[n] = [\dot{\Omega} \quad \tau_\beta \quad V_\gamma]$$

Δt es el tiempo muestreo

$e_\varphi, e_\beta, e_\theta, e_\gamma$ son las variables de estado de error del robot.

τ_ϕ = salida de par del volante.

I_{cFW} = momento de inercia del volante.

ω_s = velocidad de giro del volante.

$\dot{\Omega}$ = Velocidad de precesión angular.

LQR+I mejora el rendimiento de LQR al introducir la acción integral que mejora el error de estado offset estable, posiblemente causado por un modelado dinámico incompleto, fricción y errores paramétricos. [25] Para implementar el LQR+I, las variables de estado integrales se aumentan y la ecuación de estado original se modifica a la Ecuación. (27)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{X}_e \\ \dot{Z}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{X} - X_e \\ \dot{X} - X_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_e \\ Z_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u = \tilde{A} \tilde{B} u \quad (27)$$

La señal de control se expresa como:

$$u = -Kx = -\begin{bmatrix} K & K_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_e \\ Z_e \end{bmatrix} = -K(x - x_r) - K_i C \int (x - x_r) dt \quad (28)$$

Donde:

X_e = error de la dirección de inclinación.

$Z_e = \int edt$, estado de error de la dirección de balanceo.

x_r = entrada de referencia.

De la Ecuación 28 las ganancias óptimas K y K_i se pueden obtener por el mismo procedimiento de LQR.

El diagrama de bloques del sistema controlado por LQR+I se muestra en la Figura 17 y su algoritmo de control discreto se puede implementar utilizando la Ecuación 27.

En esta sección, se simulan y comparan los resultados de equilibrio y seguimiento del robot unicyclo entre los controladores convencionales LQR y LQR+I.

Para la simulación de balanceo, el estado del robot se inicializa a un estado inestable de 0,872 rad (5°) en los ángulos de balanceo, inclinación, giro y rueda.

El rendimiento de seguimiento del controlador LQR en la Figura 18 muestra que el robot puede rastrear el comando al que se hace referencia a lo largo del eje x mientras se equilibra. [26]

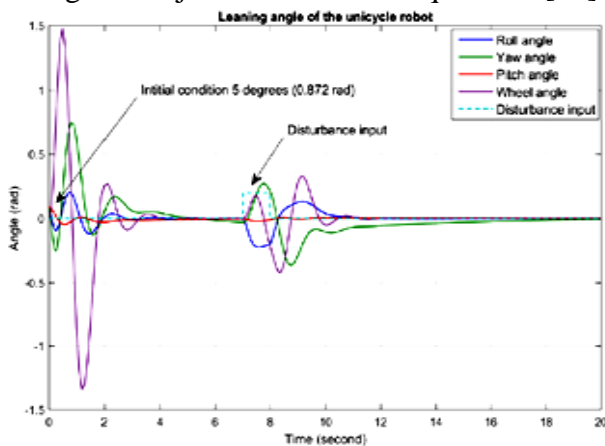


Figura 18. Resultados de simulación del balanceo y control de seguimiento del robot unicyclo utilizando LQR + I. [29]

Para eliminar el error de estado estable y mejorar el rendimiento, se simula y evalúa el controlador LQR+I. Los resultados de la simulación del controlador LQR+I muestran

que los errores de estado estable de los ángulos de balanceo, rodadura, giro y rueda se eliminan en las simulaciones de balanceo y seguimiento. Sin embargo, existe cierto aumento del tiempo de asentamiento.

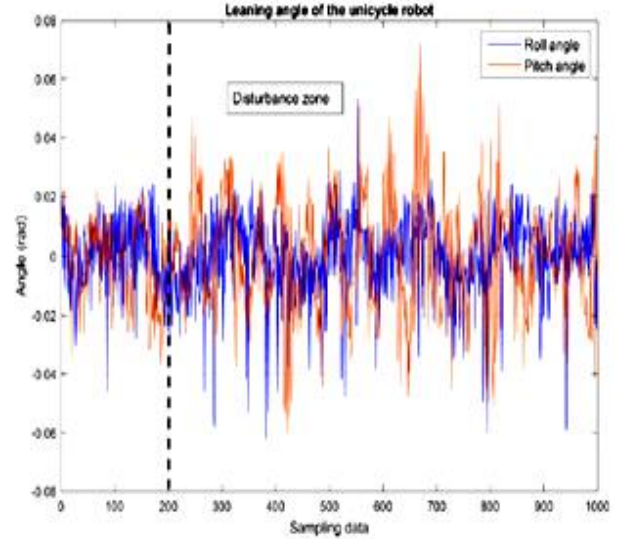


Figura 19. Resultados experimentales de los ángulos de balanceo y cabeceo del robot con perturbaciones usando LQR+I [29]

5. Análisis Comparativo

Se puede demarcar los errores sistemáticos y dinámicos que se producen en cada modelamiento para encontrar el error porcentual de estabilización, por medio de aplicar las ecuaciones 29 y 30.

$$E_p = \frac{E_a}{R_e} \times 100\% \quad (29)$$

$$E_e = 100\% - E_p \quad (30)$$

$$Ee.e. = (\sum_1^n E_e) / n \quad (31)$$

Donde:

E_p = error porcentual.

R_e = resultado exacto.

R_a = resultado aproximado.

E_e = error de estabilidad.

$Ee.e.$ = error total de estado estacionario.

En la Tabla 3, se puede apreciar los errores de los tres modelos de robot unicyclo. Para un total de tres iteraciones.

Tabla 3. Errores Cuantificados durante el tiempo de estabilización de cada Robot Modelado [30]

ROBOT	A		B		C	
Controlador	LQR		LQR		LQR+I	
Ángulo	Giro	Balaneo	Giro	Balaneo	Giro	Balaneo
Iteración 1						
SP = 1°	-1,5	-0,3	3	0,3	2,9	2,2
Tiempo Ra1 (s)	2,5	2,5	1	1,6	0,25	0,4
Ep (%)	50	50	80	68	95	92
Ee (%)	50	50	20	32	5	8
Iteración 2						
SP= 2°	-1,2	0	3,2	0,3	2	2,9
Tiempo Ra2 (s)	3	3	1,5	2,2	0,3	0,5
Ep (%)	40	40	70	56	94	90
Ee (%)	60	60	30	44	6	10
Iteración 3						
SP= 3°	-1	0,2	3	0,25	2,3	2,3
Tiempo Ra3 (s)	3,5	3,5	2,5	2,5	0,3	0,7
Ep (%)	30	30	50	50	94	86
Ee (%)	70	70	50	50	6	14
Ee.e. (%)	60	60	33,3	42	5	10,7

A = Uniciclo con rueda lateral para equilibrio.

B = Uniciclo compensado con fuerza centrífuga.

C = Uniciclo con volantes dobles.

SP= Set Point.

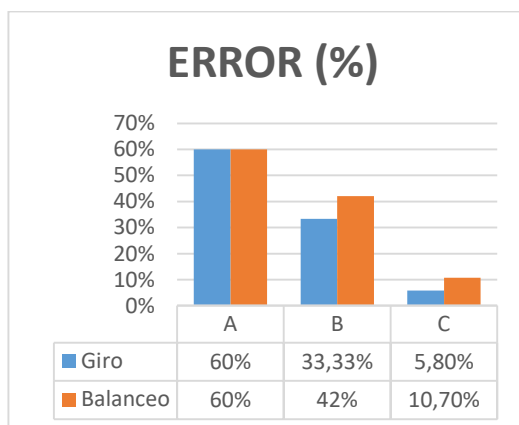


Figura 20. Análisis de errores cuantificados

De la Tabla 3, se mide el tiempo de estabilización de cada robot tanto en balanceo como en giro, de ahí, el error promedio de estado estacionario para A es del 60%, B es del 42% y C es del 10,7%, de esta manera se puede deducir que el modelo con menos error porcentual de estabilidad es el modelo C.

El modelo C es el más estable para superficies diferentes, debido a que utiliza un controlador LQR+I, donde el factor integral hace posible minimizar los errores de inestabilidad, con esto se consigue un mejor manejo del equilibrio en 2s porque reduce el sobre impulso del robot. En el caso del modelo B se centra en los pesos verticales. Ver Figura 10, por medio del controlador LQR, este modelo es menos estable que el C, debido a que el tiempo de estabilización se demora 6 veces más por su estructura y sus características el centro de masa hace que sea inestable el ángulo de giro, lo cual genera que el balanceo se demore más para poder equilibrarse. El modelo A se demora 15 veces más que el modelo C, este tiene la característica de una rueda de reacción con pesos distribuidos en la forma del volante. Ver Figura 16, al introducir la acción integral que mejora el error de estado estacionario que es causado por el modelado dinámico incompleto, la fricción y los errores paramétricos, esto quiere decir que si el ángulo de giro y del balanceo no están al mismo tiempo controlados, el robot uniciclo cae antes que tome los 5s para poder estabilizarse.

Tomando en consideración los modelos de robot uniciclo analizados se comprueba que la construcción e implementación del modelo A es más realizable, debido a que resulta sencillo conseguir a bajo costo los materiales y elaboración de su estructura, siendo accesible la programación, en comparación con los modelos B y C, donde las unidades controladoras y el lenguaje de programación son más sofisticados lo que hace que sean más elaborados en tiempo y costos.

6. Futuras investigaciones con el robot uniciclo

Para futuras investigaciones es necesario tomar en cuenta que el tercer modelo se lo puede implementar con otro tipo de controladores más robustos como lo son las redes neuronales, lógica difusa de inteligencia artificial podría hacer que se mejore el tiempo de establecimiento y el robot no solo siga una

línea, sino también pueda ser utilizado para aplicaciones de rescate en caso de estar en superficies que sean inclinadas y no pueda ingresar un ser humano a explorar en esos lugares.

7. Conclusiones

El funcionamiento del robot unicycle consiste en poder realizar un análisis dinámico de cada estructura, utilizando el principio matemático de Lagrange para los tres modelos con los controladores LQR y LQR+I.

Entre las tres estructuras se puede determinar que el modelo A es de menor costo para implementarlo, debido a que posee una rueda de reacción que busca linealizar al robot con el centro de gravedad a 0° en menor tiempo, a diferencia de los otros dos modelos que tienen dos pesos verticales de compensación de la fuerza centrífuga o dos platos horizontales que disminuyen la incertidumbre del sobre impulso del tiempo de establecimiento de equilibrio del robot.

En el modelo A el factor del error es del 60% mientras que los modelos B y C, su error es 42% y 10,5% respectivamente, donde A es el que más incertidumbre tiene, B es el intermedio y C es el de menor error.

Los controladores de los tres modelos del robot unicycle utilizan tiempos de establecimiento de 0,01s a 5s, para equilibrarlos considerando parámetros preestablecidos de análisis de la dirección del ángulo de giro y balanceo con los controladores LQR y LQR+I donde el controlador LQR+I es más estable debido a que posee su factor integrante que hace disminuir el error en el tercer modelo.

Para futuras investigaciones hay que tener en cuenta los controladores con inteligencia artificial como lógica difusa y redes neuronales para que de esta manera se pueda utilizar el robot unicycle en otras aplicaciones como lo es de robot explorador en lugares donde el ser humano no pueda ingresar.

Referencias

[1] Lauwers, T. B., Kantor, G. A., Hollis, R. L., 2006, A Dynamically Stable Single-Wheeled Mobile Robot with Inverse Mouse-Ball Drive, IEEE International

- Conference on Robotics and Automation, Orlando, Florida, 2884-2889.
- [2] Sheng, Z., Yamafuji, K., 1997, Postural Stability of a Human Riding a Unicycle and Its Emulation by a Robot, IEEE Transactions on Robotics and Automation, 13:5 709-720.
- [3] Xu, Y., Au, S. K., 2004, Stabilization and Path Following of a Single Wheel Robot, IEEE/ASME TRANSACTIONS ON MECHATRONICS, 9:2 407~419.
- [4] Majima, S., Kasai, T., 2005, A Controller for Changing the Yaw Direction of an Underactuated Unicycle Robot, International Conference on Technology and Automation, 5:1 73-88.
- [5] Anderson, B. D. O., Moore, J. B., 2007, Optimal Control: Linear Quadratic Methods, Dover Publications, New York, USA.
- [6] A. Schoonwinkel, Design and test of a computer-stabilized unicycle [Ph.D.dissertation], Stanford University, 1987.
- [7] D. W. Vos, Nonlinear control of an autonomous unicycle robot: practical issues [Ph.D. thesis], MIT, 1991.
- [8] Z. Sheng and K. Yamafuji, "Study on the Stability and Motion Control of a Unicycle (Part I: Dynamics of a Human Riding a Unicycle and Its Modeling by Link Mechanisms)," JSME international journal. Ser. C, Dynamics, control, robotics, design and manufacturing, vol. 38, no. 2, pp. 249-259, 1995.
- [9] Y. Naveh, P. Z. Bar-Yoseph, and Y. Halevi, "Nonlinear modeling and control of a unicycle," Dynamics and Control. An International Journal, vol. 9, no. 4, pp. 279-296, 1999.
- [10] H. Jin, J. Hwang, and J. Lee, "A Balancing Control Strategy for a One-Wheel Pendulum Robot Based on Dynamic Model Decomposition: Simulations and Experiments," IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, vol. 16, no. 4, pp. 763-768, 2011.
- [11] J. Zhao, M. Xiong, and H. Jin, "Dynamics and a convenient control design approach for a unicycle robot," in Proceedings of the IEEE International Conference on Information and Automation, ICIA, pp. 706-711, China, June 2010.
- [12] S. I. Han and J. M. Lee, "Balancing and velocity control of a unicycle robot based on the dynamic model," IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. 62, no. 1, pp. 405-413, 2015.
- [13] M.-T.Ho, Y. Rizal, and Y.-L.Chen, "Balance control of a unicycle robot," in Proceedings of the IEEE International Symposium on Industrial Electronics, ISIE, pp. 1186-1191, Turkey, June 2014.
- [14] T. Saleh, Y. H. Hann, Z. Zhen, A. Al Mamun, and V. Prahlad, "Design of a gyroscopically stabilized single-wheeled robot," in Proceedings of the IEEE Conference on Robotics, Automation and Mechatronics, pp. 904-908, Singapore, December 2004.
- [15] M. Dao and K. Liu, "Gain-Scheduled Stabilization Control of a Unicycle Robot," JSME International Journal Series C Mechanical Systems, Machine Elements and Manufacturing, vol. 48, no. 4, pp. 649-656, 2005.
- [16] H. Jin, T. Wang, F. Yu, Y. Zhu, J. Zhao, and J. Lee, "Unicycle Robot Stabilized by the Effect of Gyroscopic Precession and Its Control Realization Based on

- Centrifugal Force Compensation,” IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, vol. 21, no. 6, pp. 2737–2745, 2016.
- [17] Y. Isomi and S. Majima, “Tracking control method for an underactuated unicycle robot using an equilibrium state,” in Proceedings of the IEEE International Conference on Control and Automation, ICCA, pp. 1844–1849, NewZealand, December 2009.
- [18] D. Gong and X. Li, “Dynamics modeling and controller design for a self-balancing unicycle robot,” in Proceedings of the Chinese Control Conference, CCC, pp. 3205–3209, China, July 2013.
- [19] X.-Q. Zhu, X.-G. Ruan, R.-Y. Sun, X. Wang, and R.-Y. Wei, “Single-wheel robots with yaw ability,” Beijing Gongye Daxue Xuebao/Journal of Beijing University of Technology, vol. 40, no. 7, pp. 1099–1104, 2014.
- [20] Nakajima R, Tsubouchi T, Yuta S, Koyanagi E. A development of a new mechanism of an autonomous unicycle. In: Proceedings of the 1997 IEEE/RSJ international conference on intelligent robots and systems. Real-world Application IROS '97, 2; 1997. p. 906–12.
- [21] Daud Y, Mamun AAl, Xu J-X. Properties of lateral-pendulum-controlled unicycle robot in states of balance and motion. In: 6th IEEE conference on robotics, automation and mechatronics; 2013. p. 162–7.
- [22] Lee JH, Shin HJ, Lee SJ, Jung S. Balancing control of a single-wheel inverted pendulum system using air blowers: evolution of Mechatronics capstone design. Mechatronics 2013; 23:926–32.
- [23] Majima S, Kasai T, Kadohara T. Design of a control method for changing yaw direction of an underactuated unicycle Robot. In: TENCON 2006 IEEE Conference, vol. 10; 2006. p. 1–4.
- [24] Daoxiong G, Qi P, Guoyu Z, Xinghui L. LQR control for a self-balancing unicycle robot on inclined plane. J Syst Des Dyn 2012; 6:685–99.
- [25] Thanh BT, Parnichkun M. Balancing control of bicyrobo by particle swarm optimization based structure-specified mixed H_2/H_∞ control. Int J Adv Robot Syst 2008; 5:395–402.
- [26] Lee J, Han S, Lee J. Decoupled dynamic control for pitch and roll axes of the unicycle robot. IEEE Trans Ind Electron 2013; 60:3814–22.
- [27] Department of Mechanical System Design Engineering, Seoul National University of Science and Technology, 232, Gongneung-ro, Nowon-gu, Seoul 01811, Korea
<https://doi.org/10.7735/ksmte.2017.26.1.144>
- [28] State Key Laboratory of Robotics and Systems, School of Mechatronics Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin, Heilongjiang150080, China
<https://doi.org/10.1155/2018/5240594>
- [29] Surachat Chantarachit*, Manukid Parnichkun, Mechatronics, Asian Institute of Technology, P.O. Box 4, Klong Luang, Pathumthani 12120, Thailandia
<http://dx.doi.org/10.1016/j.mechatronics.2016.10.011>
- [30] Hurtado, A. N., & Sanchez, F. C. (s.f.). *Instituto Tecnológico Tuxtla Gutiérrez*. Obtenido de 1.2 Tipos de errores: Error absoluto, error relativo, error porcentual, errores de redondeo y truncamiento.: sites.google.com