



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA SALESIANA
UNIDAD DE POSGRADOS

**MAESTRÍA EN MÉTODOS MATEMÁTICOS
Y SIMULACIÓN NUMÉRICA EN
INGENIERÍA**

Proyecto de investigación y desarrollo
previo a la obtención del grado de
Magister en Métodos Matemáticos y
Simulación Numérica en Ingeniería

**SIMULACIÓN DE LOS VÓRTICES DE
ABRIKOSOV EN MATERIALES
SUPERCONDUCTORES UTILIZANDO
ELEMENTOS FINITOS APLICADO AL
MODELO GL**

Autor:

Ing. Pablo Xavier Jara Palacios.

Dirigido por:

Ing. José Manuel Aller Castro, P.h.D.

**SIMULACIÓN DE LOS VÓRTICES DE
ABRIKOSOV EN MATERIALES
SUPERCONDUCTORES UTILIZANDO
ELEMENTOS FINITOS APLICADO AL
MODELO GL**

SIMULACIÓN DE LOS VÓRTICES DE ABRIKOSOV EN MATERIALES SUPERCONDUCTORES UTILIZANDO ELEMENTOS FINITOS APLICADO AL MODELO GL

ING. PABLO XAVIER JARA PALACIOS

Ingeniero Civil

Candidato a Magister en Métodos Matemáticos
y Simulación Numérica en Ingeniería

Unidad de Posgrados

Universidad Politécnica Salesiana

Dirigido por:

ING. JOSE M. ALLER CASTRO, P.h.D.

Ingeniero Eléctrico

Docente de la Universidad Politécnica Salesiana

Carrera de Ingeniería Eléctrica



Cuenca-Ecuador

JARA PALACIOS PABLO.

Simulación de los vórtices de Abrikosov en materiales superconductores utilizando elementos finitos aplicado al modelo GL.

Universidad Politécnica Salesiana, Cuenca-Ecuador, 2018.

MAESTRÍA EN MÉTODOS MATEMÁTICOS Y SIMULACIÓN NUMÉRICA EN INGENIERÍA.

Formato 170x240

Páginas: 159

Breve reseña del autor e información de contacto:



Pablo Xavier Jara Palacios

Ingeniero Civil.

Candidato a Magister en Métodos Matemáticos y Simulación Numérica en Ingeniería.

Unidad de Posgrados

Universidad Politécnica Salesiana

pabloxjara@gmail.com

Dirigido por:



José Manuel Aller Castro, P.h.D.

Ingeniero Eléctrico.

Docente de la Universidad Politécnica Salesiana.

Carrera de Ingeniería Eléctrica

jaller@ups.edu.ec

Todos los derechos reservados.

Queda prohibida, salvo excepción prevista en la Ley, cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública y transformación de esta obra para fines comerciales, sin contar con autorización de los titulares de propiedad intelectual. La infracción de los derechos mencionados puede ser constitutiva de delito contra la propiedad intelectual. Se permite la libre difusión de este texto con fines académicos o investigativos por cualquier medio, con la debida notificación a los autores.

DERECHOS RESERVADOS

©2018 Universidad Politécnica Salesiana.

CUENCA-ECUADOR-SUDAMÉRICA

JARA PALACIOS PABLO X.

SIMULACIÓN DE LOS VÓRTICES DE ABRIKOSOV EN MATERIALES SUPERCONDUCTORES UTILIZANDO ELEMENTOS FINITOS APLICADO AL MODELO GL

Edición y Producción:

Pablo Xavier Jara Palacios.

Diseño de la portada:

José Aller Castro, P.h.D.

IMPRESO EN ECUADOR-PRINTED IN ECUADOR

ÍNDICE GENERAL

1	MARCO TEORICO	19
1.1	¿Qué es Superconductividad?.....	19
1.1.1	Efecto Meissner	22
1.2	Teoría Macroscópica del Origen de la Superconductividad.....	27
1.2.1	Modelo Ginzburg-Landau de la Superconductividad (Modelo GL) ..	27
1.3	Vórtices de Abrikosov	38
1.3.1	Origen de los Vórtices de Abrikosov.....	39
2	IMPLEMENTACION NUMERICA DEL MODELO GINZBURG-LANDAU	45
2.1	Formulación Débil del Modelo Ginzburg-Landau	45
2.1.1	Formulación Débil del Modelo Estacionario GL	47
2.2	Discretización Espacial del Modelo GL lineal: Aproximación de Garlekin.	48
2.3	DiscretizaciónEspacio-Temporal del Modelo General GL: Linealización mediante el esquema Crank-Nicolson-Garlekin (LCNG).....	52
2.4	Discretización Espacio-Temporal del Modelo General GL: Linealización mediante el esquema Crank-Nicolson-Garlekin Mixto (LCNGM).....	54
3	SIMULACION NUMERICA Y RESULTADOS.	58
3.1	Simulación del Modelo Estacionario Lineal Ginzburg-Landau sobre Superconductores Mesoscópicos 2D.	58
3.1.1	Vórtices de Abrikosov en Dominio Plano Cuadrado.....	59
3.1.2	Vórtices de Abrikosov en Dominio Plano Triangular.	66
3.1.3	Vórtices de Abrikosov en Dominio Plano Hexagonal.....	72
3.1.4	Vórtices de Abrikosov en Dominio Plano Pentagonal.	74
3.1.5	Vórtices de Abrikosov en Dominio Octogonal.	76
3.1.6	Vórtices de Abrikosov en Dominio Tipo "L".....	78
3.1.7	Vórtices de Abrikosov en Dominio Cuadrado con Abertura.....	80
3.2	Simulación del Modelo No Estacionario de Ginzburg-Landau 2D.....	87

3.2.1	Vórtices de Abrikosov en Dominio Cuadrado. Modelo LCNG.	88
3.2.2	Vórtices de Abrikosov en Dominio Triangular Equilátero. Modelo LCNG.	90
3.2.3	Vórtices de Abrikosov en Dominio Circular. Modelo LCNG.	92
3.2.4	Vórtices de Abrikosov en Dominio Cuadrado. Modelo LCNGM.	95
3.2.5	Vórtices de Abrikosov en Dominio Circular. Modelo LCNGM.	97
3.3	Simulación del Modelo No Estacionario de Ginzburg-Landau 3D.	99
3.3.1	Vórtices de Abrikosov en Dominio Paralelepípedo. Modelo LCNG.	100
3.4	Simulación del Efecto de Fallas en el Material sobre los Vórtices.	101
3.4.1	Efecto sobre los Vórtices considerando Defecto Central. Modelo Lineal.	101
3.4.2	Efecto sobre los Vórtices dado Tres Defectos Centrales. Modelo Lineal.	102
3.4.3	Efecto sobre los Vórtices dado Seis Defectos Centrales. Modelo Lineal.	103
3.4.4	Efecto sobre los Vórtices dado Nueve Defectos Centrales. Modelo Lineal.	104
3.4.5	Efecto sobre los Vórtices dado Seis Defectos Centrales. Modelo TDGL.	105
3.4.6	Efecto sobre los Vórtices dado un Defecto Lateral. Modelo TDGL.	107
3.4.7	Efecto sobre los Vórtices dado Abertura Central. Modelo TDGL.	108
4	OBSERVACIONES Y CONCLUSION.	110
4.1	Diagrama de frontera de fase H-T para muestras mesoscópicas.	110
4.2	Comportamiento de vórtices en muestras mesoscópicas utilizando el modelo LGL.	114
4.3	Comportamiento de vórtices utilizando el modelo TDGL.	115
4.4	Comportamiento del vector potencial magnético.	116
4.5	Efecto de fallas presentes en el dominio de muestra superconductor.	117
4.6	Comportamiento entre método LCNG y LCNGM.	118

4.7	Resumen y Conclusión	118
5	ANEXO	121
5.1	Diagrama de flujo del código para resolver el modelo GL por MEF.	121
5.2	Pasos generales para correr el código en Matlab.....	123
5.3	Códigos en Matlab r2012a.....	124

ÍNDICE DE FIGURAS

Fig. 1.1	Diagrama H-T Superconductor Tipo I	30
Fig. 1.2	Vórtices de Abrikosov Superconductor Tipo II.	39
Fig. 3.1	Mallado de Dominio Cuadrado.	59
Fig. 3.2	Potencial Magnético en Dominio Cuadrado.....	60
Fig. 3.3a)	Parámetro de Orden en Dominio Cuadrado 3D, b) Parámetro de Orden 2D, c) Zoom de Vórtices de Abrikosov. Campo Magnético Adimensional Aplicado $He=0.32$	61
Fig. 3.4	Variación del Parámetro de Orden en Función del Campo Magnético Aplicado. a) $He=0.0871$, b) $He=0.20$, c) $He=0.23$, d) $He=0.2544$	62
Fig. 3.5	Variación del Parámetro de Orden. a) $He=0.32$, b) $He=0.45$, c) $He=0.51$, d) $He=0.57$, e) $He=0.76$, f) $He=1.15$	64
Fig. 3.6	Simulación Obtenida en Trabajo de Deang, 1997.	65
Fig. 3.7	Simulación Vórtices de Abrikosov en Muestra Cuadrada. Trabajo de Kim et al. 2009.	65
Fig. 3.8	Vórtices de Abrikosov con Mallado Uniforme. $He=0.32$	66
Fig. 3.9	Mallado de Dominio Triangular.	66
Fig. 3.10	Vector Potencial Magnético en Dominio Triangular.	67
Fig. 3.11	Parámetro de Orden en Dominio Triangular Equilátero, 3D, b) Parámetro de Orden 2D, c) Zoom de Vórtices de Abrikosov. Campo Magnético Aplicado $He=80$	67
Fig.3.12	Variación del Parámetro de Orden. a) $He=40$, b) $He=50$, c) $He=60$, d) $He=70$, e) $He=90$, f) $He=100$, g) $He=120$, h) $He=160$, i) $He=360$, j) $He=580$	69
Fig. 3.13	Variación del Parámetro de Orden en Dominio Isósceles. a) $He=30$, b) $He=40$, c) $He=48$, d) $He=50$, e) $He=60$, f) $He=63$, g) $He=70$, h) $He=90$, i) $He=200$	70
Fig. 3.14	Variación del Parámetro de Orden en Dominio Escaleno. a) $He=50$, b) $He=60$, c) $He=70$, d) $He=73$, e) $He=120$, f) $He=220$	72

Fig. 3.15 Mallado de Dominio Hexagonal.	73
Fig. 3.16 Vector Potencial Magnético en Dominio Hexagonal.	73
Fig. 3.17a) Raíz de Parámetro de Orden en Dominio Hexagonal, 3D, b) Parámetro de Orden 2D, c) Zoom de Vórtices de Abrikosov. Campo Magnético He aplicado de 90.	74
Fig. 3.18Mallado de Dominio Pentagonal.	74
Fig. 3.19Vector Potencial Magnético en Dominio Hexagonal.	75
Fig. 3.20a) Raíz de Parámetro de Orden en Dominio Pentagonal 3D, b) Parámetro de Orden 2D, c) Zoom de Vórtices de Abrikosov. Campo Magnético He aplicado de 20.	75
Fig. 3.21Mallado de Dominio Octogonal.	76
Fig. 3.22Vector Potencial Magnético en Dominio Octogonal.	76
Fig. 3.23a) Raíz de Parámetro de Orden en Dominio Octogonal 3D, b) Parámetro de Orden 2D, c)Zoom de Vórtices de Abrikosov. Campo Magnético He adimensional aplicado de 120, d) Raíz Decima de Parámetro de Orden en He=230, e) Zoom de Vórtices de Abrikosov, f) y g) He=260, h) e i) He=330.	77
Fig. 3.24Mallado de Dominio Tipo "L".	78
Fig. 3.25Vector Potencial Magnético en Dominio Tipo "L".	78
Fig. 3.26Variación del Parámetro de Orden en Dominio Tipo "L". a) Campo adimensional He=30, b) He=38 , c) He=39, d) He=43, e) He=50, f) He=60, g) He=70, h) He=75, i) He=80, j) He=85, k) He=90, l) He=100, m) He=115, n)He=125, o) He=135.	80
Fig. 3.27Mallado Dominio Cuadrado con Abertura.	81
Fig. 3.28Vector Potencial en Dominio Cuadrado con Abertura.	81
Fig. 3.29a) Raíz de Parámetro de Orden en Dominio Cuadrado con Abertura Cuadrada, 3D, b) Parámetro de Orden 2D, c) Zoom de Vórtices de Abrikosov. Campo Adimensional Magnético He aplicado de 60.	81
Fig. 3.30Variación del Parámetro de Orden en Dominio Cuadrado de abertura Cuadrada. a) Campo adimensional He=70, b) He=110, c) He=140, d) He=180, e) He=220.	82
Fig. 3.31Variación del Parámetro de Orden en Dominio Cuadrado de abertura Cuadrada. a) He=60, b) He=150, c) He=180, d) He=200, e) He=230.	83
Fig. 3.32Variación del Parámetro de Orden en Dominio Cuadrado de abertura Triangular. a) Campo adimensional He=60, b) He=110, c) He=135.	84
Fig. 3.33Primer Caso: Abertura Esquina Inferior. Variación del Parámetro de Orden en Dominio Cuadrado de abertura Cuadrada. a) Campo adimensional He=20, b)	

<i>He=25, c) He=30, d) He=40, e) He=45, f) He=50, g) He=55, h) He=60, i) He=130.</i>	85
.....	
Fig. 3.34 <i>Segundo Caso: Dos Aberturas Esquinas Inferiores. Variación del Parámetro de Orden en Dominio Cuadrado de abertura Cuadrada. a) Campo adimensional He=20, b) He=40, c) He=80, d) He=100, e) He=150.</i>	85
Fig. 3.35 <i>Tercer Caso: Tres Aberturas, dos inferiores y una de Doble Tamaño superior. Variación del Parámetro de Orden en Dominio Cuadrado de abertura Cuadrada. a) Campo adimensional He=20, b) He=22.5, c) He=40, d) He=60, e) He=90, f) He=140.</i>	86
Fig. 3.36 <i>Variación del Parámetro de Orden en Dominio Cuadrado de abertura Cuadrada. a) Campo adimensional He=60, b) He=75, c) He=100, d) He=130, e) He=1000.</i>	87
Fig. 3.37 <i>Mallado Dominio Cuadrado.</i>	88
Fig. 3.38 <i>Variación del Módulo del Parámetro de Orden en Dominio Cuadrado. a) t=0.4, b) t=8, c) t=10, d) t=40.</i>	89
Fig. 3.39 <i>Simulación Obtenida en Trabajo de Mu, 1997.</i>	90
Fig. 3.40 <i>Mallado Dominio Triangular.</i>	91
Fig. 3.41 <i>Variación del Módulo del Parámetro de Orden en Dominio Triangular, 3D. a) t=0.4, b) t=5, c) t=10, d) t=40.</i>	91
Fig. 3.42 <i>Variación del Módulo del Parámetro de Orden en Dominio Triangular, 2D. a) t=0.4, b) t=5, c) t=10, d) t=40.</i>	92
Fig. 3.43 <i>Vector Potencial Magnético en Dominio Triangular, t=0.4.</i>	92
Fig. 3.44 <i>Variación del Módulo del Parámetro de Orden en Dominio Circular, 2D .Campo Aplicado He=9. a) t=0.4, b) t=10, c) t=15, d) t=40, e) t=60, f) t=100.</i>	93
Fig. 3.45 <i>Vector Potencial Magnético en Dominio Circular.</i>	94
Fig. 3.46 <i>Variación del Módulo del Parámetro de Orden en Dominio Circular, 2D. Campo Aplicado He=5. a) t=0,4, b) t=10, c) t=15, d) t=40, e) t=60, f) t=100.</i>	95
Fig. 3.47 <i>Variación del Módulo del Parámetro de Orden en Dominio Cuadrado. Método LCNGM, 2D. Campo Aplicado He=5. a) t=100, b) t=700, c) t=900, d) t=1200, e) Vista 3D t=1200.</i>	96
Fig. 3.48 <i>Variación del Módulo del Parámetro de Orden en Dominio Cuadrado. Método LCNGM, 2D. Campo Aplicado He=0.9. a) t=100, b) t=200, c) t=1000, d) t=1200.</i>	96
Fig. 3.49 <i>Variación del Módulo del Parámetro de Orden en Dominio Circular. Método LCNGM, 2D.</i>	97
Fig. 3.50 <i>Variación del Módulo del Parámetro de Orden en Dominio Circular. Método LCNGM, 2D. Campo Aplicado He=0.9. a) t=2, b) t=20, c) t=40, d) t=80, e) t=100, f) t=200.</i>	98

Fig. 3.51 Variación del Módulo del Parámetro de Orden en Dominio Circular. Método LCNGM, 2D. Campo Aplicado $He=0.9$, $t=1200$.	99
Fig. 3.52 Mallado Dominio Paralelepípedo. a) Vista 3D, b) Vista Superior.	100
Fig. 3.53 Variación del Módulo del Parámetro de Orden en Dominio Paralelepípedo. a) $t=3$, b) $t=5$, c) $t=10$, d) $t=15$, e) $t=20$, f) $t=30$, g) $t=40$, h) Vista Isométrica $t=40$.	101
Fig. 3.54 Variación del Parámetro de Orden sobre Dominio Cuadrado con Falla Central. Modelo Lineal GL 2D. a) Configuración de Vórtices $\Phi/\Phi_0=15$, b) Zoom Zona Central.	102
Fig. 3.55 Variación del Parámetro de Orden sobre Dominio Cuadrado con 3 Fallas Centrales. Modelo Lineal GL 2D. a) Mallado del Dominio, b) Configuración de Vórtices $\Phi/\Phi_0=15$.	103
Fig. 3.56 Variación del Parámetro de Orden sobre Dominio Cuadrado con 6 Fallas. Modelo Lineal GL 2D. a) Mallado del Dominio, b) Configuración de Vórtices $\Phi/\Phi_0=12$, c) Configuración de Vórtices $\Phi/\Phi_0=13$, d) Configuración de Vórtices $\Phi/\Phi_0=15$.	104
Fig. 3.57 Variación del Parámetro de Orden sobre Dominio Cuadrado con 9 Fallas. Modelo Lineal GL 2D. a) Mallado del Dominio, b) Configuración de Vórtices $\Phi/\Phi_0=15$.	104
Fig. 3.58 Variación del Módulo del Parámetro de Orden en Dominio Cuadrado con 6 Fallas Laterales. Modelo Temporal TDGL. Método LCNGM, 2D. Campo Aplicado $He=5$. a) $t=80$, b) $t=100$, c) $t=160$, d) $t=200$, e) $t=300$, f) $t=400$, g) $t=500$, h) $t=600$, i) $t=800$, j) $t=1000$, k) $t=1200$.	106
Fig. 3.59 Variación del Módulo del Parámetro de Orden en Dominio Cuadrado con 1 Falla Lateral. Modelo Temporal TDGL. Método LCNGM, 2D. Campo Aplicado $He=5$. a) Mallado del Dominio, b) $t=40$, c) $t=100$, d) $t=200$, e) $t=300$, f) $t=700$.	107
Fig. 3.60 Variación del Módulo del Parámetro de Orden en Dominio Cuadrado con 1 Falla Transversal Central. Modelo Temporal TDGL. Método LCNGM, 2D. Campo Aplicado $He=5$. a) Mallado del Dominio, b) $t=20$, c) $t=40$, d) $t=50$, e) $t=80$, f) $t=100$, g) $t=200$, h) $t=700$.	108
Fig. 4.1 Diagrama de la frontera de fase H-T para muestra cuadrada, triangular y pentagonal.	111
Fig. 4.2 Diagrama de la frontera de fase H-T para muestra cuadrada con aberturas.	112
Fig. 5.1 Diagrama de flujo general para resolver el modelo GL por el MEF.	122
Fig. 5.2 Ejemplo de formato que debe cumplir el archivo .msh para correr el modelo lineal.	124

A mis seres queridos

PREFACIO

En el siguiente proyecto de investigación se presenta la resolución numérica del modelo matemático para la superconductividad de Ginzburg-Landau. Para ello se utilizó el Método de los Elementos Finitos (MEF) implementando el código desarrollado en Matlab. Producto de estos códigos se realizaron variadas simulaciones con el fin de comprender el fenómeno denominado vórtices de Abrikosov obteniéndose importantes conclusiones sobre su comportamiento bajo distintas consideraciones. Las respuestas obtenidas de las simulaciones concuerdan con los resultados de varios trabajos similares.

Para la resolución numérica se consideraron dos modelos. El primero consiste en una aproximación lineal estacionaria del modelo original GL. Este modelo es válido cerca de la frontera límite del diagrama de fase magnético H-T, donde el valor del parámetro de orden es cercano a cero, hecho que justifica la simplificación. Con este modelo se simuló el comportamiento de los vórtices en variadas muestras mesoscópicas cerca del límite mencionado. El segundo modelo es el denominado temporal o por sus siglas en inglés TDGL. Con este modelo se simuló el movimiento de los vórtices en la muestra superconductora. Una característica particular de estas simulaciones con el modelo TDGL es que se realizaron considerando el límite entre el estado Meissner y el estado mixto, en completo contraste con el modelo lineal.

Para utilizar el MEF se consideraron tres métodos. El primero, que se aplica al problema lineal, y que se reduce a la programación del MEF para hallar autovalores y autofunciones. El segundo es el método denominado Crank-Nicolson-Garlekin lineal (LCNG) aplicado al modelo TDGL. Este método permite desacoplar las variables de interés del modelo GL. El tercer método es el mejorado del LCNG. En este método se utiliza un gauge distinto al considerado en LCNG y además es mucho más veloz computacionalmente. De igual manera que el segundo método, este último se aplicó al modelo TDGL.

Finalmente, debido a la concordancia de los resultados de la presente obra con aquellos de trabajos similares, se garantiza que los códigos, a pesar de ciertas limitaciones en cuanto a costo computacional, funcionan de manera satisfactoria.

PRÓLOGO

El presente trabajo aborda el que es considerado uno de los temas y campos de mayor actividad científica de la física actual, me refiero a la superconductividad. Este fenómeno electromagnético pertenece al estudio de la física de materia condensada misma que aborda otros temas como los condensados Bose-Einstein y los superfluidos, mismos que se relacionan hasta cierto punto con la superconductividad. Al igual que muchos de los fenómenos que ocurren en la naturaleza, el origen de la superconductividad se debe a efectos netamente cuánticos. La teoría BCS toma en cuenta los conceptos de mecánica cuántica de campos para explicar el origen de la superconductividad. Sin embargo, esta teoría, a pesar de su reconocimiento por predecir el origen y explicar varias de las características de la superconductividad, aún no es la última palabra sobre el tema. La teoría BCS no puede predecir, por ejemplo, que materiales son superconductores y cuáles no; y además, no predice la existencia de los denominados superconductores de alta temperatura, mismos que concentran actualmente gran actividad intelectual debido al sin número de aplicaciones prácticas que implicarían poseer materiales superconductores que mantengan su propiedad a temperatura ambiente. Por otro lado, un modelo que aún hoy en día es utilizado para estudiar la superconductividad es el denominado modelo Ginzburg-Landau (GL), que a pesar de ser de origen fenomenológico, resulta una teoría adecuada y precisa para estudiar la superconductividad, incluyendo los superconductores de alta temperatura. Es justamente esta exactitud en la predicción, sumado con el hecho de que es una teoría no cuántica, lo que ha motivado el estudio de la superconductividad a través del modelo GL en este trabajo.

Sin embargo, como muchos modelos matemáticos, GL, en general, no puede ser resuelto analíticamente. Es por ello que los métodos numéricos son una herramienta esencial para su estudio. Específicamente, el MEF, muy utilizado en diversos campos de la ciencia e ingeniería, resulta ser un método adecuado para resolver el modelo matemático GL. La resolución numérica del modelo GL ha permitido conocer muchas características del fenómeno, siendo una de las más interesantes desde un punto de vista teórico y práctico el referente a los vórtices de Abrikosov. Es por ello que la simulación del fenómeno de la vorticidad en muestras superconductores a través de la resolución numérica del modelo GL es el objetivo principal del presente trabajo. De manera específica se pretende realizar varias simulaciones numéricas que permitan apreciar el comportamiento básico de los vórtices en muestras superconductoras.

Un propósito adicional y de especial importancia de esta obra, es el de colaborar con la promoción y difusión del estudio de la física teórica a nivel académico. Se verá pues, que al respecto, en el presente trabajo no se aborda tópico práctico alguno, sino que por el contrario el enfoque ha tratado de ser netamente teórico.

Se aclara que no se pretende abordar tema original alguno, ya que este no es el objetivo de la obra. De hecho, muchas de las simulaciones realizadas en este trabajo han sido corroboradas con estudios similares previos. Sin embargo, esta investigación recoge de la manera más clara y breve posible el estado del arte sobre el tópico a tratarse, además si se aporta con códigos computacionales que pueden ser implementados en un software adecuado por parte de aquellos interesados en estudiar el comportamiento de los superconductores. Esto último es importante ya que son pocos los programas actuales desarrollados que permiten realizar este tipo de simulaciones, más aun, los que existen requieren contar con la licencia respectiva para su uso. Es en este sentido el trabajo aporta códigos originales desarrollados por el autor que hacen uso de métodos propuestos en trabajos similares. Con ello se demuestra que, con la capacidad de las computadoras actuales, es posible implementar en una computadora de escritorio el modelo GL en cualquier lenguaje de programación y obtener simulaciones de alta calidad y precisas.

La obra está estructurada en cuatro capítulos. En el primer capítulo se aborda brevemente la teoría de la superconducción, necesaria para comprender el modelo GL y el origen de los vórtices de Abrikosov. En el segundo capítulo se describe y presenta la formulación débil del modelo GL y su discretización. Se tratan dos casos en particular, el modelo lineal GL y el modelo TDGL. El tercer capítulo está dedicado netamente a la presentación de los resultados obtenidos de las simulaciones 2D y 3D utilizando el código implementado en Matlab. En el último capítulo se desarrollan diversas observaciones y conclusiones de la obra. Se adiciona una parte final de anexos donde se encontraran los códigos desarrollados.

Por último el autor desea agradecer a todas aquellas personas que de manera directa o indirecta estuvieron involucradas y colaboraron con el desarrollo de la presente obra.

Pablo Jara P.

INTRODUCCIÓN

Las aplicaciones de los materiales superconductores están presentes ya hoy en día, tanto en el ámbito científico como tecnológico; y es que se cree que su desarrollo tendrá un impacto semejante al descubrimiento de los transistores. Así, por ejemplo, en el Gran Colisionador de Hadrones del CERN, uno de los más grandes aceleradores de partículas del mundo, los descubrimientos y confirmaciones que se han realizado en los últimos años referente a la teoría estándar, siendo sin lugar a dudas hasta la fecha el más relevante el hallazgo del Bosón de Higgs, han sido posibles gracias a la utilización de grandes electroimanes superconductores. De la misma manera en aplicaciones prácticas y cotidianas, y solo por citar algunas, se puede mencionar el uso de superconductores en cables de transmisión de energía, en la fabricación de componentes electrónicos, en el campo de la biología y medicina entre otras. Por ello resulta evidente prever que la investigación de la superconducción tendrá especial importancia en el desarrollo de nuevas tecnologías durante este siglo, aún más cuando ya se estudian materiales superconductores de alta temperatura.

Una de las aplicaciones más ambiciosas de la superconductividad se encuentra en el campo del transporte. La levitación magnética ha hecho posible la existencia de trenes de alta velocidad. La ventaja radica en la eliminación de las ruedas que generan disipación de energía a través de la fricción. Un ejemplo de este tipo de trenes conecta actualmente el aeropuerto y la ciudad en Shanghai. Sin embargo su tecnología aún no utiliza superconducción sino tecnología magnética convencional. Sin embargo, hoy en día existen proyectos pilotos en Japón que estudian la aplicación de la superconductividad para el caso de trenes que leviten. La velocidad esperada es cercana a los 600km/h. Así mismo y siguiendo con las aplicaciones, el campo de la computación y electrónica es un terreno en el cual el uso de la superconductividad resulta evidente. Solo basta considerar que cada vez el mundo está más interconectado y requiere de una capacidad computacional más alta. La superconducción dará origen a la generación de computadoras superconductoras que serán más eficientes que las actuales, ya que entre otras cosas, la superconducción no produce calor que es uno de los problemas de la electrónica (Rice, 2011).

En nuestros días existen también ya aparatos que hacen uso de la superconductividad y quizás no nos damos cuenta de ello. Por ejemplo, en la medicina se aplica el efecto Josephson para medir campos magnéticos. Esto se logra mediante el dispositivo llamado SQUID por sus siglas en inglés (Superconducting Quantum Interference Device). Esto son artefactos muy sensibles a las variaciones del campo magnético y son utilizadas en magnetoencefalogramas que permiten la detección de la actividad cerebral. Así mismo los aparatos de resonancia magnética utilizan imanes superconductores. En el ámbito teórico, específicamente de la física de partículas, los electroimanes que utilizan bobinas con cables superconductores producen campos

magnéticos potentes necesarios para investigaciones de colisiones de partículas. Adicionalmente la superconductividad permite aligerar el peso y dimensiones de los electroimanes utilizados por tales aparatos.

Uno de los efectos más interesantes de la superconductividad es el denominado efecto Meissner. Dicho efecto permite clasificar a los materiales superconductores en dos tipos: los superconductores tipo I y los superconductores tipo II (Olivares, Gonzales, Rosado, Garcia, & Moran, 2005). Un superconductor tipo I excluye el campo magnético en el interior de un superconductor cuando este es enfriado por debajo de cierta temperatura crítica T_c . Un superconductor tipo II, por el contrario, excluye el campo magnético de manera uniforme mas no de forma repentina, esto significa que la transición entre el estado superconductor y el normal atraviesa un estado mixto. El estado mixto, según demostraron Ginzburg & Landau, es una fase donde coexisten en equilibrio el estado superconductor y el normal.

La configuración que se origina en este estado mixto en superconductores tipo II fue estudiada por Alexei Abrikosov en 1957. El resultado de su investigación vislumbró la forma exacta de como un material tipo II alcanza el estado de equilibrio mixto. Abrikosov, tras realizar una resolución analítica aproximada del modelo GL demostró analíticamente la existencia del estado de equilibrio mixto y que la estructura formada es una red simétrica periódica de vórtices. Para ello asumió una solución periódica del parámetro de orden y centró su atención en el análisis de los puntos extremos del rango donde se produce la transición, el denominado rango mixto. Así de acuerdo a (Olivares, Gonzales, Rosado, Garcia, & Moran, 2005), en este estado combinado el campo magnético externo penetrará en regiones delgadas normales a la superficie de manera uniforme; y también, de algún modo, dentro del material superconductor.

Cabe preguntarse entonces si ha sido posible la observación directa de las estructuras de vórtices y confirmar así su existencia y comportamiento. La respuesta resulta ser afirmativa. Por ejemplo, a través del uso del microscopio de Lorentz, Harada, Kamimura, Kasai, Matsuda, Tonomura & Moshchalkov (1996) investigaron experimentalmente el comportamiento de las líneas de flujo en un pedazo de material de Niobio que presentaba un arreglo artificial de forma cuadrada con defectos. Los resultados de sus observaciones muestran que los vórtices forman grillas regulares y rígidas cuando son sometidos a los campos magnéticos. Las líneas de flujo se mueven hacia los agujeros. Conforme se varía el campo magnético nuevos vórtices aparecen mismo que se consideran vórtices en exceso; sin embargo estos últimos ya no ocupan los defectos del material. Además se observó que los vórtices son más difíciles de mover cuando esta sometidos al campo magnético a no ser que una fuerza superior a la fuerza que los sostiene sea aplicada. Por el contrario los vórtices en exceso pueden moverse libremente cuando son sometidos a la fuerza de Lorentz. Otras técnicas para medir vórtices son presentadas por Yu (2012). Por ejemplo, la decoración Bitter, que es una forma indirecta de medir vórtices, consiste en rociar polvo de material ferro magnético sobre el superconductor. Este polvo tiende a alinearse en patrones de

acuerdo al campo magnético permitiendo así la visualización de los vórtices. Otra técnica es la espectroscopia con túneles de exploración que permite detectar el cambio de densidad de los vórtices. Entre estas técnicas de espectroscopia, la técnica μ SR (Muon Spin Rotation), utiliza muones altamente polarizados para detectar las líneas de flujo a través del spin. Los muones decaen y emiten positrones en la dirección del spin. La medida de la distribución de positrones permite detectar la vorticidad.

Por otra parte la importancia práctica de estudiar los vórtices de Abrikosov resulta del hecho de que cuando los conductores tipo II se someten al paso de cierto valor de corriente, los vórtices se desplazan, y este movimiento produce resistencia eléctrica, convirtiéndose en un efecto no deseado debido a las irreversibilidades que conlleva. Para evitar la disipación de corriente que producen los vórtices, se han propuesto varios mecanismos para mantener estáticos a los vórtices. Esto último resulta ser aún un problema abierto de investigación. En general, mecanismos tales como la incorporación de impurezas, defectos, agujeros, barreras de flujo y campos magnéticos se han estudiado por varios autores para tratar la vorticidad. Sin embargo, la mayoría de mecanismos fallan cuando se incrementan las temperaturas que es cuando los superconductores presentan propiedades útiles para las aplicaciones prácticas (UFRN, 2017).

Al respecto de los mecanismos propuestos por varios autores se pueden citar algunos. Por ejemplo Lee, Janko, Derenyi & Barabasi (1999) demuestran que la aplicación de corriente alterna y una adecuada barrera de potencial permiten controlar el movimiento de los vórtices. La principal contribución de su trabajo es la demostración teórica de que se puede utilizar el "efecto ratchet" para remover los vórtices. Así, el análisis propuesto resulta ser una adecuada técnica para el diseño de patrones en materiales superconductores que permitan obtener una menor densidad posible de líneas de flujo (vórtices). L. Civale (1997) estudia la dinámica de los superconductores de alta temperatura (HTSC) y la vorticidad. Para ello incluye defectos en columna que son caminos en el material que se abren de manera amorfa y que no incrementan la energía elástica de los vórtices por lo que pueden ser utilizados como método para fijar las líneas de flujo. El objetivo de su trabajo fue el de medir la temperatura, campo y defectos de densidad de corrientes continuas y su tiempo de relajación en óxido de Itrio Bario Cobre, YBCO por sus siglas en inglés, con defectos en columna. Para ello utilizó modelos teóricos que permitieron identificar varios regímenes de arrastre y fijación de líneas de flujo. Sus resultados muestran que la incorporación de los defectos en columna es efectiva en todos los HTSC para controlar el movimiento de vórtices.

Otra técnica interesante para controlar los vórtices es la presentada por Vélez, Martín, Villegas, Hoffmann, Gonzales, Vincent & Schuller (2008). Su trabajo se centra en estudiar los parámetros más importantes en la dinámica de los vórtices en materiales a través de estructuras magnéticas artificiales compuestas de arreglos ordenados de puntos. Su contribución se enfoca en comprender el fenómeno que resulta al distorsionar el arreglo ordenado de puntos. Para ello hacen uso de la técnica

nano litográfica conocida como "e-beam" que permite la fabricación de nano estructuras magnéticas híbridas en el material bajo estudio. Los resultados de su investigación muestran que al cambiar el arreglo de puntos por medio de la técnica e-beam aparecen efectos en el superconductor tales como el "efecto ratchet", es decir una reconfiguración de los vórtices y anisotropía en la dinámica del material. Los distintos regímenes se resumen en un diagrama de fase que indica la transición que ocurre cuando el arreglo es modificado respecto a la longitud de coherencia del material.

Más recientemente (Timmermans, Serrier-Garcia, Perini, Van de Vondel, & Moshchalkov, 2016), en su investigación, utilizan técnicas STM (Scanning Tunneling Microscopy) en muestras cuadradas superconductoras a nivel de nano escalas. El objetivo específico de su trabajo se concentró en conocer como influyen los defectos a estas escalas sobre la vorticidad. El resultado conseguido fue el de presentar evidencia directa del efecto de los defectos sobre los vórtices. Se observó pues que a las escalas bajo estudio, el efecto del confinamiento o frontera influye en la interacción vórtice-vórtice resultando en diferentes configuraciones en relación a la estructura periódica de Abrikosov en superconductores macroscópicos.

Se comprenderá pues lo importante que resulta el simular numéricamente el fenómeno de Abrikosov y comprender así su funcionamiento. En este intento varias investigaciones existen al respecto. Por ejemplo Reefman&Brom (1991) realizaron una simulación numérica de una red de vórtices en 2-D. Se consideró un material superconductor $Tl_2Ba_2CaCu_2O_8$ y un campo magnético de 5 T. Su investigación trató de dar respuesta al comportamiento en la zona comprendida entre la temperatura crítica y la línea de irreversibilidad presente en HTSC $Tl_2Ba_2CaCu_2O_8$ y $Bi_2Sr_2CaCu_2O_8$ en el diagrama de fase. La simulación que llevaron a cabo se basó en las ecuaciones de London aplicadas sobre una delgada capa de material y en la utilización del método de simulación de Dinámica Molecular (DM). Como resultados se confirmaron las predicciones de Fetter&Hohenberg (1967) de que los vórtices se agrupan entre ellos en una red triangular a bajas temperaturas. Aún más importante es la conclusión de que a altas temperaturas es muy fácil producir una perturbación en la red que hace que los vórtices se fundan entre sí, es decir son menos estables.

Moshchalkov, Dhalle&Bruynseraede (1992) simularon numéricamente las ecuaciones del modelo GL en coordenadas cilíndricas para analizar el fenómeno de nucleación de los vórtices. Para ello utilizaron el número cuántico orbital para construir una solución del parámetro de orden correspondiente a un arreglo de vórtices no periódicos. Los resultados de la simulación muestran que no existe simetría traslacional más si existe simetría rotacional en el arreglo de los vórtices. Esto debido a que se puede ver que los patrones seguidos se transforman continuamente en estructuras más complejas pero conservando la forma concéntrica. Se concluye además que localmente los vórtices presentan cierto grado de orden.

La presencia de vórtices se ha estudiado también en otras configuraciones tales como una esfera. Se debe considerar que se ha observado que la geometría de la muestra de material afecta enormemente el patrón de nucleación de los vórtices. El trabajo de Du & Ju (2004) se concentra en esta geometría que está presente en algunos dispositivos tales como los gravímetros superconductores, giroscopios entre otros. Por ello el objeto de su investigación fue el análisis de la nucleación sobre una esfera hueca de pequeño espesor. Igual que en el caso citado en el párrafo anterior, el modelo GL es utilizado para resolver el problema de manera numérica. Los autores presentan un conjunto de algoritmos numéricos que preservan la invariancia del gauge tanto en las simulaciones estacionarias como no estacionarias. La primera observación realizada sobre los resultados numéricos fue que, sobre la esfera, aparecen vórtices tal como en geometrías planas por lo que se confirmó así la presencia de un estado mixto sobre la geometría estudiada. Sin embargo a diferencia de las configuraciones planas, en la esfera se observa la aparición de vórtices y anti vórtices debido a su simetría. También se observó que si el espesor se incrementa se genera una inclinación sobre los campos inducidos. En cuanto a la nucleación se observa que tienden a juntarse cerca del ecuador y luego se mueven hacia los polos.

Vodolazov, Maksimov & Brandt (2003) se concentraron en los efectos de la superficie del material sobre las líneas de flujo. Mediante la resolución numérica del modelo GL demostraron que existe inestabilidad en el parámetro de orden debido a que el momento cinético alcanza un umbral en los bordes de la superficie. Esto causa que los vórtices se unifiquen cerca de estos lugares lo que conlleva a que penetren de manera más profunda en la muestra. Tomando en cuenta estos resultados propusieron un modelo fenomenológico para explicar el fenómeno tanto en superficies ideales como imperfectas. El método numérico utilizado es el de diferencias finitas y el método de Euler para el término temporal. La unión de los vórtices es controlado solo por la supervelocidad (velocidad asociada a los electrones superconductores) o momento cinético de la superficie. Al incluir defectos en las esquinas de la muestra se observa que el valor de la supervelocidad excede el valor en la frontera. Se concluye además que existe un valor de supervelocidad crítico sobre el cual los vórtices penetran más en la muestra. Este valor prácticamente no depende de la forma ni tamaño del defecto. Pero cuando el tamaño del defecto excede cierto valor, estos logran fijar los vórtices en su interior. Como resultados de la investigación demostraron primero que el criterio de supervelocidad es más preciso que el criterio de supercorriente al tratar de explicar el ingreso de los vórtices en la muestra y; segundo, que estos inician su ingreso por las imperfecciones y defectos de la superficie.

Sorensen, Pedersen, & Ogren, (2016) investigan en su simulación el efecto de los *pinning sites* (centros de sujeción) de los vórtices. En el proceso generan un modelo matemático modificado del modelo original GL que permite simular los efectos de las fallas introducidas en un dominio 2D. Este método se basa en el hecho de que la energía libre de Gibbs se encuentra representada por una potencia de $4th$

orden en el parámetro de orden. El signo del término de 2^{th} orden determina el cambio de fase entre el estado normal y el superconductor y por ende los autores asumen que este coeficiente puede ser utilizado para simular la introducción de pinning sites. El correspondiente coeficiente se modela a través de una función que toma valores entre -1 y +1 donde -1 corresponde al estado normal con pinning sites y el +1 al estado superconductor. La función considerada la obtuvieron a través de experiencias similares en laboratorio y es básicamente una función de la posición r_o de cada pinning site. Como resultado de las simulaciones concluyeron que fallas cercanas a la frontera pueden disminuir el valor del primer campo crítico para superconductores tipo II. Así mismo, cerca del valor del primer campo crítico, la interacción entre vórtices y fallas es no lineal, al igual que la interacción entre vórtices y la frontera. Esta compleja dinámica puede producir efectos no estables entre la interacción vórtice-defecto.

En un trabajo reciente, y aplicando técnicas de inteligencia artificial, que son cada vez más importantes en el estudio de la física actual, Owolabi, Akande, & Olatunji, (2016) desarrollan un método que permite conocer con gran precisión el valor de la temperatura crítica T_c del óxido de Itrio Bario Cobre (YBCO), material que goza de grandes aplicaciones prácticas dada su naturaleza de ser un conductor de alta temperatura. El modelo fue desarrollado en Matlab y se basa en una serie de datos reunidos de valores de T_c obtenidos a través de ensayos experimentales que sirven como valores de prueba y entrenamiento para el algoritmo. El aporte fundamental del trabajo de Owolabi et al. (2016) radica en que proporcionan un método computacional que permite estimar T_c de manera casi precisa (con coeficiente de correlación obtenidos de 96.65% y 95.75% durante las fases de prueba y entrenamiento del modelo) sin la necesidad de recurrir a equipos de alta tecnología para hacerlo.

Por todo lo expuesto, es fácil concluir que dada la variedad de aplicaciones actuales y el potencial para futuros desarrollos involucrados con la superconductividad, resulta evidente la importancia que conlleva estudiar el comportamiento de los superconductores para el desarrollo teórico y tecnológico de la sociedad; resultando fundamental comprender la naturaleza de la superconducción y su modelado en lenguaje matemático. De acuerdo a (ICMM-CSIC, 2017) "En el ámbito de las aplicaciones gran parte de la investigación se centra en la optimización y el abaratamiento de cintas, hilos y láminas superconductoras, en particular en los procesos de producción y el anclaje de vórtices que permitan aumentar las corrientes y campos críticos que pueden soportar los materiales producidos en condiciones aptas para su comercialización". De ello radica la relevancia del estudio de la vorticidad en materiales superconductores cuyo primer paso es obtener una simulación numérica adecuada que prediga su comportamiento.

CAPITULO I

1 MARCO TEORICO

1.1 ¿Qué es Superconductividad?

Tres son los fenómenos actuales más fascinantes de la física de la materia condensada: los superfluidos, los condensados de Bose-Einstein (CBE) y la superconductividad. Sus propiedades sorprendentes, y a veces extrañas, son consecuencia directa de la mecánica cuántica. De hecho, a pesar de que muchos de los efectos de la mecánica cuántica se cree existen solo a nivel microscópico, la superconductividad y la superfluidez son claras expresiones macroscópicas de fenómenos netamente cuánticos (Donnelly, 1995). Las tres *rarezas* anteriormente citadas tienen en común que su presencia se torna evidente a temperaturas extremadamente bajas (salvo ciertas excepciones tales como los Superconductores de Alta Temperatura o por sus siglas en inglés HTSC). De estos tres fenómenos, los CBE son un caso límite en el cual se requiere temperaturas en extremo bajas y cercanas al cero absoluto; y donde para estudiarlos se trabaja a escalas cercanas a los nano-Kelvin (Annett, 2004). Adicionalmente, se puede mencionar que solo la existencia del CBE se predijo teóricamente antes de su confirmación experimental en 1995. Por el contrario, los fenómenos de superfluidez y superconducción se conocían antes del desarrollo de alguna explicación teórica que prediga su existencia.

Cronológicamente, antecede al conocimiento de la superconductividad el de la licuefacción del Helio. Fue el físico holandés Heike Onnes quien en 1908 logró por primera vez transformar en líquido al Helio cuya fase común, a presiones normales y temperatura ambiente, es gaseoso (Van Delft, 2011). Para alcanzar tal hazaña el gas noble se sometió a una temperatura cercana a los $4,20^{\circ}\text{K}$ y a presión normal. No fue hasta 1938 cuando se descubrió y estudió las propiedades del isótopo ^4He a temperaturas cercanas a los 2°K nombrando al efecto presente como superfluido (Donnelly, 1995). Únicamente los isótopos ^3He y ^4He han sido licuados en laboratorio. Este hallazgo sobre el Helio abrió el camino para el descubrimiento del fenómeno de la superconductividad debido a que se lograba, por primera vez, contar a la mano con un medio que alcanzaba temperaturas muy cercanas al cero absoluto.

Posteriormente, se descubriría el fenómeno de la superconductividad mismo que data de 1911 y se atribuye su hallazgo al mismo físico Onnes y a su equipo mientras estudiaban el comportamiento de metales a bajas temperaturas (bajo los $4,20^{\circ}\text{K}$) (CERN, 2017). Entre las primeras investigaciones de Onnes, utilizando el nuevo rango de temperaturas disponible, se hallaba el estudio de la variación de la

resistencia eléctrica de los metales con la temperatura (Rose-Innes & Rhoderick, 1978).

Onnes investigó el efecto de las bajas temperaturas en el metal más puro que existía en la época, el Mercurio, donde observó que, a temperaturas en extremo bajas, la resistencia eléctrica se volvía inmensurablemente pequeña. Este comportamiento quizás no era del todo peculiar, ya que se había supuesto durante mucho tiempo antes que ello ocurriría a bajas temperaturas, donde el movimiento atómico casi cesa por completo. Sin embargo, lo que sí llamo la atención de Onnes fue que la resistencia no llegaba a cero de manera uniforme o "suave" tal como la intuición lo sugería; por el contrario, cerca de cierta temperatura, denominada temperatura de transición o crítica T_c , el valor de la resistencia caía bruscamente a un valor de cero (Rose-Innes & Rhoderick, 1978). Esta característica de resistividad nula que ocurre de manera abrupta resultó ser la primera propiedad particular de un superconductor.

Sin embargo, adicionalmente existe una segunda propiedad que define a un superconductor, a esta propiedad se le denomina *efecto Meissner* en honor a su descubridor el físico Walter Meissner. Tal efecto consiste en que, un superconductor colocado dentro de un campo magnético y enfriado por debajo de su temperatura crítica, expulsa un campo magnético, ver por ejemplo (Geim, Dubonos, Lok, Heinini, & Maan, 1998). Esto significa que un material en estado de superconductor exhibe un comportamiento diamagnético perfecto (Kumar Saxena, 2012). De esta manera, estas dos propiedades (caída en la resistencia y diamagnetismo perfecto) en conjunto son las que describen de manera unívoca el estado de superconductividad de los materiales.

Pues bien, existen varios conceptos en la literatura para definir la superconductividad, y sin lugar a dudas, todos ellos equivalentes. Sin embargo, el concepto de superconductividad que se presenta a continuación, tomado del trabajo de Rose-Innes & Rhoderick (1978) y que a criterio personal es conciso y preciso ya que contiene todos los elementos necesarios para una definición completa del fenómeno que se está tratando, es el siguiente:

"La superconductividad es un estado de la materia el cual presenta una peculiar combinación de propiedades eléctricas y magnéticas; y que se alcanza cuando ciertos metales son enfriados a temperaturas extremadamente bajas".

Es importante analizar los elementos presentes en este concepto. Lo primero que llama la atención es que se habla de un *estado superconductor*. Es decir, se considera a la superconductividad como un estado de la materia, en cierta forma análoga a como lo son el estado sólido, líquido y gaseoso. Como es conocido, estos tres estados varían básicamente en la estructura atómica, o molecular que los conforma. En el estado sólido, por ejemplo, los átomos forman una estructura

cristalina periódica casi perfecta; en el estado líquido la estructura atómica pierde la periodicidad global que contenía en el estado sólido, y en el estado gaseoso esta pérdida de orden es completa. Todos estos tres estados implican un cambio en la estructura fundamental, que se relaciona con una variación en la cantidad de energía interna y volumen. Termodinámicamente, a estos estados se lo conoce como *sistemas de primer orden* (Callen, 1985). Por otro lado, imagínese un pedazo de metal imanado. Este se encuentra en estado sólido, pero el orden o configuración de su estructura atómica es tal que se presenta el fenómeno del magnetismo (Griffiths, Introduction to Electrodynamics, 1999). Entonces, tenemos un material en estado sólido, pero en el cual es posible ordenar de cierta manera sus átomos para que se produzca un efecto magnético. A estos estados se los considera de *segundo orden* (Callen, 1985), donde no existe variación volumétrica pero sí de otras propiedades que se relacionan con segundas derivadas de la función de estado. Es así que, tal como en el caso del metal imanado, la superconductividad en general, entra también en la categoría de estado de segundo orden de la materia, lo que justifica la primera parte del concepto de Rose-Innes & Rhoderick (1978).

Por otro lado, se menciona además que la superconductividad presenta propiedades eléctricas y magnéticas peculiares. Esto se relaciona directamente con las dos características fundamentales de la superconductividad que ya se habían mencionado, resistencia nula y el efecto Meissner. La última parte del concepto relacionada con la temperatura se explica por sí sola.

Es interesante mencionar que no existe razón para concluir que todos los metales deberían ser superconductores incluso en el cero absoluto (Rose-Innes & Rhoderick, 1978). Al respecto, resulta curioso el hecho de que no todos los metales y materiales en general son superconductores, por ejemplo el Cobre (considerando que es uno de los mejores conductores a temperatura ambiente), Hierro y el Sodio no poseen superconductividad a las temperaturas más bajas posibles que se han alcanzado en la actualidad. Interesante resulta también el hecho de que las aleaciones pueden ser superconductoras incluso cuando estén formadas por metales que no son ambos de naturaleza superconductores. Incluso materiales polímeros, tales como el nitrito de polisulfuro presentan superconductividad a bajas temperaturas. Todo esto, que a primera vista puede parecer contradictoria encuentra su explicación a través del estudio de la estructura atómica que conforma a cada material. Literatura introductoria sobre estos conceptos pueden ser hallados en (Kittel, 1997), (Puri & Babbar, 1997) entre otros.

Por último, es importante tratar, con cierto detalle, las características que definen a un superconductor. Los conceptos sobre resistencia eléctrica son conocidos de cursos preliminares de electromagnetismo por lo que no se desarrollará aquí su explicación. Sin embargo, literatura valiosa al respecto puede ser hallada en cualquier tratado sobre electromagnetismo tales como (Griffiths, Introduction to Electrodynamics, 1999). Por otra parte, la segunda característica de la superconducción es una propiedad que merece una explicación algo más detallada ya que no existe análogo en ningún otro fenómeno electromagnético clásico conocido, y es por ello que se tratará sobre el mismo a continuación.

1.1.1 Efecto Meissner

El efecto Meissner es la segunda propiedad, a la par con la resistencia nula, que caracteriza el comportamiento de un superconductor. Este efecto no se presenta en un conductor ideal de resistencia nula, y no es predicho por las ecuaciones de Maxwell. El efecto Meissner produce una repulsión completa del campo magnético aplicado en el interior de un sólido superconductor cuando el sólido es enfriado por debajo de la temperatura crítica T_c . Proceso similar ocurre si el sólido es primero sometido a una temperatura $< T_c$ y luego colocado en un campo magnético. Esto implica que el efecto es independiente de la historia de la muestra (Puri & Babbar, 1997).

¿Cuál es el origen del efecto Meissner? Existen dos formas equivalentes de explicar este fenómeno (Rose-Innes & Rhoderick, 1978). En la primera, considérese un sólido superconductor que es enfriado por debajo de su temperatura crítica. Al hacerlo se originan corrientes eléctricas en la superficie del material, que circulan de tal forma que producen un campo magnético que cancela exactamente al campo magnético aplicado, originando una densidad de flujo magnético nula en el interior. A estas corrientes se las denomina *corrientes de apantallamiento*. La segunda forma de explicar el fenómeno se basa en considerar que existe una propiedad en el volumen del sólido tal que produce el diamagnetismo perfecto y es posible describir esta clase de diamagnetismo considerando que la permeabilidad relativa del sólido $\mu_r=0$. Esto se relaciona con el hecho de que la densidad de flujo magnético producido por un campo externo aplicado B_a es $\mu_r B_a$. Al ser la permeabilidad relativa nula entonces la densidad de flujo en el interior lo es también. En esta explicación no se considera el mecanismo por el cual el diamagnetismo se origina, a saber, las corrientes de apantallamiento, sino que se considera que este se encuentra incluido al considerar $\mu_r=0$.

Una característica que se origina por la imposibilidad de flujo magnético en el interior de un superconductor se relaciona con las corrientes eléctricas que circulan en el material. Es posible demostrar que toda corriente eléctrica queda confinada a moverse únicamente en la superficie del cuerpo superconductor (Hammond, 1986). A este tipo de corriente se la denomina *supercorriente*. Por otro lado, existe una interesante analogía entre la distribución de corrientes en la superficie de un superconductor y la distribución de carga en la superficie de un conductor (Rose-Innes & Rhoderick, 1978). Como se sabe de electrostática, en equilibrio un conductor perfecto presenta un campo eléctrico interno nulo. Todas las cargas deben encontrarse en la superficie del sólido. Adicionalmente, dada la continuidad de la componente paralela del campo eléctrico se concluye que esta debe ser nula, lo que implica que toda línea del campo eléctrico E debe ser perpendicular a la superficie. En aquellos lugares donde las líneas de campo se encuentran más cercanas, tales como las salientes de la superficie, debe existir mayor concentración de cargas. Adicionalmente, las líneas de campo deben ser ortogonales a las líneas equipotenciales. Por otra parte, en el caso del superconductor, toda *corriente* debe encontrarse en la superficie. En este caso la componente normal del campo magnético a la superficie es continua y por lo tanto debe ser nula, por lo que inmediatamente fuera del sólido las líneas del campo magnético deben ser paralelas. Se puede observar que la forma de las líneas del flujo magnético tiene la misma morfología que las líneas equipotenciales en el caso del conductor. Un análisis matemático exhaustivo demuestra que incluso la distribución de corriente en un superconductor es la misma que la distribución de carga en un conductor ideal (Rose-Innes & Rhoderick, 1978).

1.1.1.1 Longitud de Penetración

Aplicando la ley de Ampere sobre un bucle cuya mitad se encuentra dentro de la muestra superconductora y la otra hacia el exterior (Puri & Babbar, 1997) es posible demostrar que la densidad de corriente J debe incrementarse conforme se disminuye el ancho del bucle. Para un área nula, la densidad de corriente debe volverse infinita lo que es físicamente imposible. Esto implica que la corriente no puede volverse abruptamente cero cuando se pasa del exterior al interior del sólido. Para ello, es necesario entonces que el campo magnético penetre dentro de la muestra en una longitud pequeña, hecho que ha sido verificado experimentalmente. Esta es la llamada *longitud de penetración de London* λ_L .

Matemáticamente la longitud de penetración se calcula a partir de la teoría de London (Rose-Innes & Rhoderick, 1978). Si a una distancia x dentro del sólido la densidad de flujo magnético disminuye a un valor $B(x)$ se puede definir la longitud de penetración como:

$$\int_0^{\infty} B(x)dx = \lambda_L B(0) \quad (1.1)$$

London considera que cuando el espesor del cuerpo sea mucho mayor que la longitud de penetración, la variación de la densidad de flujo debe ser exponencial:

$$B(x) = B(0)e^{-\frac{x}{\lambda_L}} \quad (1.2)$$

El valor de la longitud de penetración de acuerdo a Rose-Innes & Rhoderick (1978), es cercano a 10^{-5} cm, aunque su valor varía de material a material y; además, depende de la temperatura. Dada la dimensión de la longitud de penetración, en muestras de tamaño común esta longitud es despreciable y el efecto es como si todo el sólido fuese perfectamente diamagnético. Sin embargo, en muestras de tamaño pequeño, tales como polvo o capas delgadas de material, el efecto de la longitud de penetración se vuelve notorio. En materiales de tales dimensiones ya no se puede hablar de diamagnetismo perfecto, y las propiedades son diferentes a aquellas correspondientes a muestras de mayor tamaño (Rose-Innes & Rhoderick, 1978).

Como ya se había mencionado, la λ_L varía con la temperatura, cuya expresión para calcular su valor es:

$$\lambda_L = \frac{\lambda_0}{\left(1 + \left(\frac{T}{T_c}\right)^4\right)} \quad (1.3)$$

La variación de la longitud de penetración también depende de la pureza del material. Por ejemplo, en un material de estaño que contiene 3% de In, la longitud de penetración es el doble de la correspondiente a estaño puro (Rose-Innes & Rhoderick, 1978).

1.1.1.2 Campo Magnético Crítico.

Onnes en 1913, también observó que un superconductor retorna a su estado de conductor aunque este se encuentre sometido a una temperatura $T < T_c$, siempre y cuando se aplique un campo magnético suficientemente intenso. El campo con el cual el superconductor retorna a su estado normal al ser aplicado se lo conoce como campo crítico H_c . El valor de este campo varía con la temperatura, por lo que el estado de superconductividad es estable en un cierto rango de valores de campo magnético y temperatura. Estos rangos generales son los que se denomina *diagramas de fase*

magnético H - T Fig. 1.1. Las curvas de tales diagramas son casi parabólicas (Puri & Babbar, 1997) y se pueden expresar a través de la relación:

$$H_c = H_c(0) \left(1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right) \quad (1.4)$$

La razón de la existencia del campo magnético crítico se debe a que el momentum (y de manera indirecta la velocidad) de los superelectrones no puede exceder cierto valor, tal que el sólido se mantenga en estado superconductor. Recordando que existe una relación entre la velocidad de las cargas y la corriente, se infiere que existe un valor de corriente que se denomina densidad de corriente crítica J_c (Puri & Babbar, 1997). Por otro lado, se sabe que las corrientes en la superficie de un superconductor generan el apantallamiento que es causa del efecto Meissner. Si el campo magnético aplicado se incrementa, las corrientes superficiales deben también aumentar de tal forma que se siga cancelando el campo en el interior; sin embargo, si el campo magnético se incrementa lo suficiente entonces la corriente crítica es alcanzada y por lo tanto se pierde la superconductividad del espécimen. Existe una relación matemática que vincula la densidad de corriente crítica J_c con el campo magnético crítico H_c que puede ser hallada en trabajos tales como el del Puri & Babbar (1997).

Los metales normales (excluyendo los ferro magnéticos) son virtualmente no magnéticos por lo que la densidad de flujo dentro de ellos es proporcional al campo externo aplicado $B = \mu_0 H_a$ (Rose-Innes & Rhoderick, 1978). En el estado superconductor, por el contrario, mientras el valor del campo crítico no se alcance, la densidad de flujo en su interior permanece nula. Es solo por encima de H_c que un superconductor se comporta como un metal normal. Lo importante en este punto es que para un espécimen ideal de material superconductor, el comportamiento indicado es completamente reversible. Sin embargo, un espécimen normalmente no es ideal, ya que presenta fallas ya sea por impurezas o imperfecciones en la red cristalina. En este caso, el comportamiento de la magnetización es diferente al descrito en líneas anteriores. La característica más importante en el caso real resulta del hecho de que las curvas H - T no sufren cambios bruscos; sino que por el contrario, se producen de manera gradual. En este caso se observa que no existe un valor único del campo crítico, sino que se debe hablar más bien de un rango de valores de H . Aún más relevante es el hecho de que este proceso ya no es reversible, ya que al disminuir el campo aplicado, la curva seguida por la muestra no es la misma que la original. Este comportamiento se denomina *histéresis*. Adicionalmente, al disminuir el campo aplicado a cero, un valor residual de densidad de flujo magnético B_T y una magnetización I_T pueden aparecer (Rose-Innes & Rhoderick, 1978).

1.1.1.3 Densidad de Corriente Crítica

Como ya se había mencionado, los primeros investigadores de la superconductividad descubrieron que al conducir cierto valor de corriente en un espécimen en estado superconductor, este perdía el estado de superconducción y se originaba resistencia eléctrica. De igual manera, ya se había indicado que existen dos tipos de corrientes superficiales en un superconductor, las de transporte y las de apantallamiento. Estas dos corrientes obedecen el principio de superposición de efectos, por lo que en general, la densidad de corriente que circula en la superficie de un superconductor es:

$$J = J_t + J_H \quad (1.5)$$

Si el valor de J sobrepasa el valor de la densidad de corriente crítica J_c , entonces se esperaría que exista un cambio de fase en el superconductor hacia un estado de conducción normal. De la misma forma que se mostró que el valor del campo crítico depende de la temperatura, la densidad de corriente crítica también se relaciona con esta variable termodinámica. La expresión fue desarrollada por Onnes y es la siguiente:

$$J_c(T) = \frac{J_c(0)(T_c - T)}{T_c} \quad (1.6)$$

La corriente crítica está asociada al campo crítico H_c , por lo que esto ha permitido plantear la siguiente hipótesis general: un superconductor pierde su resistencia nula cuando, en cualquier punto de su superficie, la intensidad total del campo magnético producto de corrientes de transporte y a un campo aplicado, excede el valor del campo crítico H_c . Esta es conocida como la *hipótesis de Silsbee* (Dew-Hughes, 2001) misma que ha sido corroborada experimentalmente. La corriente crítica no es una propiedad intrínseca del material, sino que por el contrario, además de su dependencia de la temperatura, depende de sus dimensiones (Dew-Hughes, 2001). En ausencia, o en el caso de un campo magnético débil, la corriente crítica puede llegar a ser alta, por ejemplo, en un cable de 1mm de diámetro de Plomo enfriado a 4.2 K el campo crítico puede llegar a ser de 550 gauss, y la corriente crítica puede llegar a ser de hasta 140A (Rose-Innes & Rhoderick, 1978). Por otro lado, la forma en la que disminuye la densidad de corriente por causa de un campo magnético externo puede ser comprendida a través del siguiente ejemplo: Considérese un cable de longitud infinita que se somete a un campo magnético externo H_a paralelo a su eje. Por el cable se hace pasar corriente; y como resultado de ello un campo magnético. Como los

campos magnéticos obedecen el principio de superposición se concluye que el campo magnético total en la superficie del cable es:

$$H^2 = H_a^2 + \left(\frac{I}{2\pi a}\right)^2 \quad (1.7)$$

El valor de H_c se vincula con I_c utilizando (1.7) por:

$$H_c^2 = H_a^2 + \left(\frac{I_c}{2\pi a}\right)^2 \quad (1.8)$$

La expresión (1.8) representa una elipse, y como H_c es constante para una determinada temperatura, esta expresión indica la variación de I_c con H_a . En el caso de que el campo magnético aplicado sea perpendicular al eje del cable, la densidad de flujo magnético total no es uniforme sobre la superficie del cable. Esto se debe a que en una parte las densidades se suman y en otras se restan. En este caso el campo magnético total es:

$$H = 2H_a + \frac{I}{2\pi a} \quad (1.9)$$

Siguiendo la hipótesis de Silsbee, la corriente crítica se relaciona con H_c por medio de (1.9) de la manera siguiente:

$$H_c = 2H_a + \frac{I_c}{2\pi a} \quad (1.10)$$

En este caso la variación de I_c con H_a es evidentemente lineal.

1.2 Teoría Macroscópica del Origen de la Superconductividad

1.2.1 Modelo Ginzburg-Landau de la Superconductividad (Modelo GL)

Como ya se comentó, el estado superconductor es considerado, termodinámicamente, como un estado de la materia. El estado metálico normal y el superconductor son dos fases diferentes en una manera análoga a lo que acontece con la fase sólida, líquida y gaseosa. Cada una de estas transiciones de fase puede ser caracterizada por la aparición de singularidades en diversas variables termodinámicas

tales como el calor específico, cuando se alcanza cierta temperatura crítica T_c . Es por ello que el fenómeno de superconductividad puede ser comprendido por medio del estudio termodinámico de las transiciones de fase. El modelo de Ginzburg-Landau (GL) considera la superconductividad justamente desde este punto de vista.

La teoría GL, originalmente fue considerada como una teoría fenomenológica. Sin embargo, (Gor'kov, 1959) demostró que la misma puede ser derivada de la teoría BCS al considerar un caso límite, el cual es normalmente cercano a la temperatura crítica, por lo que la teoría GL es válida cerca de esta temperatura. Adicionalmente, el modelo desarrollado considera al medio como isótropo y homogéneo. De la misma manera, la teoría, a pesar de ser concebida como una teoría de campo medio aplicada a un estado termodinámico, ha mostrado ser precisa más allá de esta limitación, dando origen, tal como se verá al final de este capítulo, a la aparición del fenómeno de los *vórtices de Abrikosov* en superconductores del tipo II (Annett, Superconductivity, Superfluids and Condensates, 2004).

Antes de proseguir, es importante considerar algunos conceptos de la termodinámica que se aplica a la transición de fase del estado superconductor, por lo que a continuación se revisaran estos conceptos.

1.2.1.1 La Energía de Condensación

Se recordará de la teoría termodinámica, la gráfica de fases entre el estado sólido, líquido y gaseoso, que se deriva de la ecuación de estado de van del Waals. En este diagrama son tres las variables necesarias para describir macroscópicamente el sistema, a saber, la presión P , el volumen V y la temperatura T . En directa analogía, la transición a la fase de superconductor puede ser descrita con un diagrama de transición, en el cual, sin embargo, las variables de estado de relacionadas son el campo magnético H y la magnetización M (Annett, Superconductivity, Superfluids and Condensates., 2004).

Si consideramos un cilindro de longitud infinita dentro de un campo magnético perpendicular a su superficie generado por una bobina, entonces, el campo en el interior del cilindro es:

$$\vec{H} = \frac{N}{L} I \hat{k} \quad (1.11)$$

Al considerar la primera ley de la termodinámica, el trabajo dW necesario para incrementar la corriente una cantidad infinitesimal dI es:

$$dW = +\mu_o V (\vec{H} d\vec{M} + \vec{H} d\vec{H}) \quad (1.12)$$

La ecuación (1.12) implica que el trabajo total necesario para incrementar la corriente infinitesimalmente se puede dividir en dos partes. La primera parte $\mu_o \vec{H} d\vec{M}$ es el trabajo magnético realizado sobre la muestra por unidad de volumen. La segunda parte $\mu_o \vec{H} d\vec{H}$ es el trabajo que se realizaría incluso si no existiese muestra dentro de la bobina, es decir, es el trabajo realizado por auto inductancia de la bobina. Por convención, este trabajo no se incluye de donde el trabajo realizado sobre la muestra es únicamente el primer término (Annett, Superconductivity, Superfluids and Condensates., 2004).

Con esta última consideración es posible escribir la primera ley de la termodinámica de la siguiente manera:

$$dU = T dS + \mu_o V \vec{H} d\vec{M} \quad (1.13)$$

Se observa, por analogía, que el trabajo del campo magnético es similar al trabajo de la presión sobre un gas, es decir $-PdV$. De la misma manera, como en teoría de gases, la energía interna U es función de la entropía y el volumen $U(S, V)$. Algo similar ocurre para el caso magnético, donde la energía interna es considerada función de la entropía y la magnetización $U(S, M)$ (Callen, 1985). De ello se deduce, aplicando los conceptos de teoría termodinámica, que:

$$T = \frac{\partial U}{\partial S} \quad (1.14)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_o V} \frac{\partial U}{\partial \vec{M}} \quad (1.15)$$

A pesar de que las expresiones (1.14) y (1.15) son física y matemáticamente correctas, las variables que en ellas aparecen, tales como la entropía y la magnetización no son útiles desde un punto de vista práctico. Es por lo tanto conveniente utilizar otras variables que sean las que se puedan controlar de manera directa, tales como la temperatura T y el campo H . Es por ello, que al aplicar la teoría de transformaciones de Legendre a la energía interna, se hallan funciones de estado tales como la energía libre de Helmholtz F y de Gibbs G :

$$F(T, M) = U - TS \quad (1.16)$$

$$G(T, H) = U - TS - \mu_0 V \vec{H} \cdot \vec{M} \quad (1.17)$$

De estas dos transformaciones, es evidente que las más útil para estudiar el estado superconductor resulta ser la energía libre de Gibbs (1.17) que es función de las variables T y H . A partir de (1.17) es posible calcular la diferencia de energía libre entre dos estados, que para el presente caso, serían el estado normal y el superconductor. Considérese por ejemplo el diagrama de fase H-T para un superconductor tipo I Fig. 1.1:

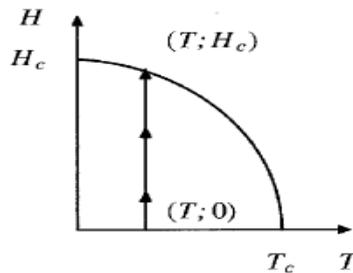


Fig. 1.1 Diagrama H-T Superconductor Tipo I.

Considerando el efecto Meissner, se puede calcular la diferencia de energía libre de Gibbs en el estado superconductor entre dos puntos de la gráfica H-T, de la siguiente manera (Rose-Innes & Rhoderick, 1978):

$$G_s(T, H_c) - G_s(T, 0) = \mu_0 V \frac{H_c^2}{2} \quad (1.18)$$

Al igual que ocurre en el diagrama de fase de líquido a gas, por ejemplo, es posible hallar una frontera en la cual ambos estados coexisten en equilibrio. En el caso del diagrama para un superconductor tipo I, esta frontera es la curva de H_c . En cada uno de estos puntos el estado normal y el superconductor se encuentran en equilibrio termodinámico. Esto quiere decir que su energía interna es la misma, lo que en términos de la energía libre de Gibbs significa que el valor de G en el estado superconductor y en el estado normal es el mismo.

Ahora, si suponemos que el estado normal se hubiese mantenido por debajo de H_c hasta un valor de campo nulo (es decir, suponiendo que no existiese el estado superconductor), entonces se tendría que:

$$G_s(T, 0) - G_n(T, 0) = -\mu_o V \frac{H_c^2}{2} \quad (1.19)$$

La expresión (1.19) indica que el estado superconductor posee una energía libre de Gibbs inferior al estado normal. Ya que la naturaleza tiende a buscar el estado de menor energía, esto no hace más que demostrar que la *fase de superconducción es más estable que la normal*, por lo que es un estado estable de la materia.

La cantidad $\mu_o V \frac{H_c^2}{2}$ recibe el nombre de *energía de condensación*. Como se puede concluir de la formula (1.19), esta cantidad es una medida de la ganancia de energía libre por unidad de volumen en el estado superconductor comparada con el estado normal a la misma temperatura. La formación de los vórtices ocurre cuando esta energía es negativa y es lo que ocurre en los superconductores tipo II.

1.2.1.2 Orden de la Fase de Transición.

Hasta aquí se ha mencionado varias veces el término fase de primer y segundo orden y su relación con la superconducción. Es por ello conveniente tratar este asunto desde el punto de vista termodinámico para comprender a que se refiere exactamente. Justamente esto es lo que se pretende abordar brevemente en este numeral. Se define como orden de transición de fase al orden de la menor derivada de G que presenta una discontinuidad al cruzar la curva de coexistencia de fases (Rose-Innes & Rhoderick, 1978). Si se observa un diagrama típico de van der Wals del cambio de fase sólido-liquido-gaseoso se aprecia que en el cambio de fase existe una discontinuidad en la curva de frontera. Este cambio abrupto en el comportamiento se conoce como *transición de fase de primer orden*. La razón de este nombre se debe a que matemáticamente la función de Gibbs, es continua pero no diferenciable, específicamente en su primera derivada, ya que la pendiente de la curva antes de un punto es diferente a la pendiente posterior al punto. Físicamente, esto implica que el cambio de fase viene acompañado de un cambio en el volumen y la entropía.

Queda claro entonces que una discontinuidad en la primera derivada de G , implica cambios repentinos en el volumen V y en la entropía S del sistema. Adicionalmente, partiendo de la entropía es posible definir una cantidad que se conoce como *calor latente*. El calor latente es una medida de la energía absorbida o emitida durante el cambio de fase y se expresa mediante:

$$\Delta Q_L = T_o (S_2 - S_1) \quad (1.20)$$

Dado que en las transiciones de primer orden la entropía es discontinua, la existencia de un valor finito de calor latente se puede también utilizar como definición de una transición de primer orden. Por otro lado, el estado superconductor, cuando no se aplica campo magnético, representa un ejemplo de una transición de *fase de segundo orden*. Es posible demostrar (Annett, Superconductivity, Superfluids and Condensates., 2004) que en el caso de que se aplique un campo magnético la transición es de primer orden, ya que existe un valor finito distinto de cero para el calor latente. Sin embargo, en general, se considera a la superconductividad como una cambio de fase de segundo orden. El nombre implica por lo tanto que las segundas derivadas de la energía libre de Gibbs presentan discontinuidades.

En este caso, los parámetros como el volumen y la entropía de la muestra no cambian drásticamente en la transición, ya que es únicamente la segunda derivada la que presenta discontinuidades, más no la primera derivada. De hecho, como se había mencionado, es posible demostrar que en el caso de superconductores tipo I el calor latente es nulo, por lo que la entropía no varía en el cambio de fase. Lo mismo ocurre con el volumen de la muestra que no sufre variación a temperatura constante.

1.2.1.3 Modelo Ginzburg Landau (modelo GL) de la Transición de Fase

El modelo GL para explicar la superconductividad está basado en la teoría de Landau sobre transiciones de fase de segundo orden. Landau había observado que transiciones de este tipo, tales como la temperatura de Curie en materiales ferro magnéticos, involucran algún cambio en la simetría del sistema. En su teoría, Landau caracteriza estos cambios de transición mediante lo que se denomina *parámetro de orden*. Este parámetro es nulo por encima de la temperatura crítica o en el estado de menor orden y no nulo por debajo de la misma. En general no existe una interpretación física directa de lo que representa el parámetro de orden, por lo que su elección está sujeta a las ecuaciones y restricciones matemáticas que lo definen y luego podría ser definido físicamente. Por ejemplo, en el caso de un magneto, un adecuado parámetro de orden es normalmente la magnetización M . Esto se debe a que por encima de la temperatura de Curie, en este caso T_c , su valor es nulo ya que es un estado desordenado en el cual los átomos apuntan en diversas direcciones. Sin embargo, bajo T_c su valor es distinto de cero.

En el modelo GL de la superconductividad se utiliza también un parámetro de orden, representado comúnmente por la letra griega Ψ , para estudiar la fase superconductora. Sin embargo, a diferencia que en el caso de la magnetización, el parámetro Ψ no posee un significado físico directo. Sino que más bien, viene a ser un símil a la función de onda en mecánica cuántica, de tal forma que se considera que Ψ caracteriza el estado del sistema. Adicionalmente, el modelo GL postula que el parámetro de orden debe ser un número complejo. Fue gracias a la teoría BCS que Gor'kov demostró que la representación física de Ψ , se relaciona con la densidad del número de pares de Cooper (Cooper, 1956) presentes en la muestra (Tinkham, Introduction to Superconductivity, 1996), mediante:

$$n_s = |\Psi|^2 \quad (1.21)$$

El parámetro de orden se considera además que es función de la temperatura T . GL postulan además que la energía libre del sistema debe depender de este parámetro. Como la energía es de valor real y el parámetro es complejo, entonces la dependencia se presenta a través del módulo $|\Psi|$. Esto es válido ya sea para la energía libre de Gibbs G o la de Helmholtz F . De la definición del parámetro de orden se tiene que a la temperatura crítica T_c su valor es cero. Esto se debe a que este es el punto en el cual empiezan a formarse los pares de Cooper. GL utilizaron esta propiedad en T_c para expandir la energía libre de Helmholtz en serie de Taylor alrededor de esta temperatura. Específicamente, utilizaron la densidad de energía libre ($f=F/V$) tal que su expansión resulta:

$$f(T)_s = f(T)_n + a(T)|\Psi|^2 + \frac{b(T)}{2} |\Psi|^4 + \dots \quad (1.22)$$

Dada la naturaleza de la teoría GL, que se basa mayormente en hechos experimentales, los términos impares en Ψ no se consideran en la densidad de energía libre ya que no producen una función de energía adecuada a los criterios fenomenológicos, además de que su eliminación se relaciona con criterios necesarios de simetría que es esencial en la teoría de transición de fases de segundo orden (Callen, 1985). Por otra parte existen dos parámetros fenomenológicos dependientes de la temperatura en (1.22) $a(T)$ y $b(T)$. Estos parámetros deben cumplir con ciertas características tales como ser continuos y diferenciables. Además, sabemos que la energía libre (o la densidad de energía) debe poseer un mínimo cuando $\Psi=0$ en el estado normal tal que garantice la estabilidad del estado. La existencia de dicho mínimo es posible únicamente si $b(T)$ es siempre positivo para todo T . En el caso de

ser negativo (1.22) no sería físicamente correcto. Por otro lado el parámetro $a(T)$ puede ser positivo o negativo.

El modelo GL considera que por encima de la temperatura crítica T_c , el único estado estable es el normal, es decir donde el parámetro de orden se anula. Sin embargo, cuando el signo de $a(T)$ es negativo, existe más de un mínimo; y en valores de Ψ distintos de cero. Así, en el modelo GL se considera además que, conforme la temperatura decrece, el valor de $a(T)$ también lo hace de manera continua. Existe un punto en el cual su valor es nulo, y posteriormente negativo. De esta manera, la temperatura que anula $a(T)$ es la temperatura crítica T_c , y el estado donde el parámetro $a(T)$ es negativo y $\Psi \neq 0$ se considera el estado superconductor.

Uno de los objetivos del estudio de la superconductividad a través del modelo GL es, como se habrá notado, el calcular el parámetro de orden. El parámetro de orden, en general, no tiene porque ser uniforme en todo el volumen de la muestra, sino que puede llegar a depender de la posición \vec{r} . El modelo GL postula que la forma general de la densidad de energía libre es igual a la presentada en (1.22) más un término adicional:

$$f(T)_s = f(T)_n + a(T)|\Psi(\vec{r})|^2 + \frac{b(T)}{2}|\Psi(\vec{r})|^4 + \frac{\hbar^2}{2m^*}|\nabla\Psi(\vec{r})|^2 + \dots \quad (1.23)$$

En (1.23) m^* representa la masa del par de Cooper, que es 2 veces la masa del electrón, es decir $m^*=2m_e$. Si se considera Ψ independiente de \vec{r} entonces es posible reducir (1.23) a (1.22). Hallar el parámetro de orden en este último caso ya no es tan simple. Sin embargo, Ψ debe ser tal que minimice la función de energía libre F (o G):

$$F(T)_s = F(T)_n + \int \left(a(T)|\Psi(\vec{r})|^2 + \frac{b(T)}{2}|\Psi(\vec{r})|^4 + \frac{\hbar^2}{2m^*}|\nabla\Psi(\vec{r})|^2 \right) d\tau^3 \quad (1.24)$$

La derivación formal utiliza el procedimiento variacional de funcionales (Annett, Superconductivity, Superfluids and Condensates., 2004) con el objetivo de hallar la función Ψ que minimice el funcional F . Así, es común considerar F como un funcional de Ψ , es decir $F[\Psi]$. Aplicando técnicas variacionales a (1.24) se obtiene:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*}\nabla^2\Psi(\vec{r}) + \Psi(\vec{r})(a + b|\Psi(\vec{r})|^2) = 0 \quad (1.25)$$

La ecuación (1.25) es la condición sobre Ψ que minimiza a F . Así mismo esta es la primera ecuación general del modelo GL y se aplica en ausencia de campo magnético. Al comparar la ecuación (1.25) con la ecuación de Schrödinger se observa que es similar, a excepción del término no lineal correspondiente al paréntesis. Esta diferencia implica que al utilizar (1.25) no es posible aplicar el principio de superposición.

Un parámetro importante en la teoría GL es la denominada *longitud de coherencia* ξ . Su expresión se halla al encontrar la solución para el caso unidimensional en (1.25) a través de los métodos convencionales de ecuaciones diferenciales.

$$\xi(T) = \left(\frac{\hbar^2}{2m^*|\alpha(T)|} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.26)$$

Esta cantidad, que tiene dimensión de longitud, es la longitud de coherencia de Ginzburg-Landau. Su significado físico se relaciona con la distancia, desde la superficie de la muestra, donde el parámetro de orden adquiere un valor constante en el volumen Ψ_0 (Tinkham, Introduction to Superconductivity, 1996). Es decir, se relaciona de cierta manera con la variación del parámetro de orden. Obsérvese que ξ depende de la temperatura y del material.

Como se había mencionado, (1.25) es la primera ecuación del modelo GL. A pesar de que es general, esta no incluye los efectos de la corriente y el campo magnético aplicado. Una forma aún más conveniente y generalizada de (1.25) se desarrolla al considerar justamente el efecto del campo magnético, o más concretamente el vector potencial magnético \vec{A} . Informalmente, la idea es utilizar un concepto análogo de la mecánica cuántica para introducir este nuevo factor. En mecánica cuántica el operador que considera el vector potencial magnético sobre una función de onda de partículas cargadas es (Annett, Superconductivity, Superfluids and Condensates., 2004):

$$\frac{\hbar}{i} \nabla - q\vec{A} \quad (1.27)$$

GL postulan por lo tanto, que el modelo general de la energía libre, considerando los efectos de un campo magnético, adquiere la forma siguiente:

$$f(T)_s = f(T)_n + a(T)|\Psi|^2 + b(T)|\Psi|^4 + \frac{\hbar^2}{2m^*} \left| \left(\frac{\hbar}{i} \nabla + 2e \right) \Psi \right|^2 + \dots \quad (1.28)$$

El valor de q en (1.27) se ha reemplazado por $2e$ en (1.28). Este hecho se debe a que la carga de la corriente superconductor es debida al par de Cooper, que como sabemos, se conforma de dos electrones de carga $-e$. Tomar a q como $-2e$ o $+2e$ no es relevante para el cálculo ya que se obtienen los mismo resultados (Annett, Superconductivity, Superfluids and Condensates., 2004). De igual forma que como se realizó en el caso deducido en (1.25), es necesario hallar la expresión de la energía libre total F . Para ello se debe integrar (1.28) sobre todo el volumen del espécimen, pero se debe adicionar la contribución del campo magnético $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ que se extiende a todo el espacio. De ello, resulta que la energía total es:

$$F(T)_s = F(T)_n + \int \left(a|\Psi|^2 + \frac{b}{2}|\Psi|^4 + \frac{\hbar^2}{2m^*} \left| \left(\frac{\hbar}{i} \nabla + 2e\vec{A} \right) \Psi \right|^2 \right) d^3r + \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 d^3r \quad (1.29)$$

El problema, una vez planteada la ecuación (1.29), se reduce a minimizar la función F . La expresión que minimiza F en este caso resulta ser:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\nabla + \frac{2e\vec{A}}{\hbar} \right)^2 \Psi(\vec{r}) + \Psi(\vec{r})(a + b|\Psi(\vec{r})|^2) = 0 \quad (1.30)$$

Sin embargo, si se observa la expresión (1.29) existen dos variables sobre las cuales se debe efectuar la minimización. La primera es Ψ , de la cual se obtuvo (1.30) y la otra es el potencial vectorial \vec{A} . Esto implica que la condición de mínimo para F se satisface a través de dos ecuaciones, (1.30) y la que se obtiene al derivar F respecto de \vec{A} que resulta ser la densidad de corriente superconductor \vec{J}_s :

$$\vec{J}_s = -\frac{2e}{m^*} \text{Re} \left\{ \Psi^* (-i\hbar \nabla - 2e\vec{A}) \Psi \right\} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times \vec{A} - \vec{J}_{ext} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} - \vec{J}_{ext} \quad (1.31)$$

Estas dos últimas ecuaciones (1.30) y (1.31), en conjunto con las ecuaciones del Maxwell definen el modelo de Ginzburg-Landau para la superconductividad. Dado que la corriente se relaciona con el campo magnético a través de la ley de Ampere, el problema GL se reduce a un sistema de dos ecuaciones diferenciales no lineales en las variables Ψ y \vec{A} .

Otro parámetro, que en conjunto con ξ , involucra el modelo GL tiene que ver con la longitud de penetración de London λ que ya se había definido anteriormente. Sin embargo, en el modelo GL adquiere una expresión que involucra parámetros diferentes, pero equivalente a la expresión (1.3):

$$\lambda(T) = \left(\frac{m_e b}{2\mu_0 e^2 \dot{a}(T_c - T)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.32)$$

En la teoría GL se trabaja con un parámetro adimensional (Tinkham, Introduction to Superconductivity, 1996), que se define como:

$$\kappa = \frac{\lambda(T)}{\xi(T)} \quad (1.33)$$

El modelo GL hasta aquí presentado se aplica de manera exitosa al caso estático, es decir independiente del tiempo. Sin embargo, (Gor'kov, 1959), introdujo el termino temporal en las dos ecuaciones del modelo GL para considerar los efectos dinámicos sobre el sistema. Gorkov demostró que tales ecuaciones temporales eran correctas al deducirlas dentro de la teoría BCS. El modelo dependiente del tiempo es denominado modelo TDGL por sus siglas en inglés (Time Dependent Ginzburg Landau) y está formado por el siguiente sistema de ecuaciones (Tang & Wang, 1995):

$$\frac{\hbar^2}{2m^*D} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{2ie}{\hbar} \phi \right) \Psi - |a|\Psi + b|\Psi|^2\Psi + \frac{1}{2m^*} \left(-\frac{\hbar}{i}\nabla + \frac{2e}{c}\vec{A} \right)^2 \Psi = 0 \quad (1.34)$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} - \nabla \times \vec{H} = -\frac{4\pi\sigma}{c} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla \phi \right) + \frac{4\pi}{c} \left[\frac{2e\hbar}{2m^*i} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) - \frac{4e^2}{m^*c} |\Psi|^2 \vec{A} \right] \quad (1.35)$$

D es el coeficiente de difusión, c la velocidad de la luz, H el campo aplicado y σ la conductividad eléctrica. Se observa que (1.34) y (1.35) se reducen a (1.30) y (1.31) cuando no se considera el parámetro tiempo. Sin embargo, al considerar el tiempo y por ende cargas en movimiento aparece un término adicional en las dos últimas ecuaciones que se relaciona con el campo eléctrico que estas cargas producen, y este es Φ . Este parámetro es un potencial eléctrico, y forma una incógnita más del problema. Al tener únicamente dos ecuaciones, es necesario por lo tanto adicionar condiciones extras al problema de tal forma que resulte solucionable. Estas nuevas

condiciones se logran al elegir un gauge adecuado (Fleckinger-Pelle & Kaper, 1995). Con ello, a las dos ecuaciones (1.34) y (1.35) se añaden las condiciones de frontera e iniciales siguientes (Tang & Wang, 1995):

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0 \text{ en el dominio } \Omega \quad (1.36)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{n} = 0 \text{ en la frontera } \partial\Omega \quad (1.37)$$

$$\nabla \times \vec{A} \times \vec{n} = H \times \vec{n} \quad \text{en } \partial\Omega \quad (1.38)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \vec{n}} = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \quad (1.39)$$

$$(\Psi, \vec{A})|_{t=0} = (\Psi_0, \vec{A}_0) \quad \text{en } \Omega \quad (1.40)$$

En las anteriores condiciones, \vec{n} es el vector normal a la frontera, H , Ψ_0 y \vec{A} son funciones conocidas y establecidas para el problema particular. Estas condiciones junto con las ecuaciones (1.34) y (1.35) representan el modelo completo dependiente del tiempo de Ginzburg-Landau. Las mismas condiciones son utilizadas para el caso estacionario definido por (1.30) y (1.31). Por último es importante volver a mencionar lo que ya se había dicho en párrafos anteriores, el modelo GL es válido cerca de T_c y además para medios isótropos y homogéneos. Existen modificaciones que se deben incluir en el modelo GL para considerar efectos anisotrópicos (Deang, 1997) pero que para el presente trabajo no se estudiarán.

1.3 Vórtices de Abrikosov

Una de las consecuencias más interesantes, tanto desde el punto de vista teórico, como práctico que surgen de las ecuaciones estacionarias del modelo GL es la existencia de lo que se conoce como los *vórtices de Abrikosov*. Descubiertos en 1957 por el físico ruso Alexander Abrikosov, este fenómeno se presenta en los conductores tipo II (Abrikosov A. A., 1957), es decir aquellos con densidad de energía negativa. Los conductores tipo I son aquellos en los cuales el campo magnético dentro del conductor permanece nulo, hasta que repentinamente, en un valor de campo mayor a

H_c , el valor del campo dentro del material cambia bruscamente a un valor finito distinto de cero. Los superconductores tipo II, por el contrario, no presentan un cambio de campo magnético de forma brusca, sino que más bien este cambio ocurre de manera continua. Para este tipo de materiales existen dos valores del campo magnético que se consideran críticos, H_{c1} y H_{c2} . Para valores pequeños del campo magnético aplicado, $H < H_{c1}$, en el interior del material aún se presenta el efecto Meissner. Conforme el campo aumenta y sobrepasa H_{c1} , comienza a existir campo magnético en el interior del material que se incrementa de manera gradual conforme aumenta H , hasta que al alcanzar H_{c2} , el efecto superconductor se destruye y el material se convierte en un conductor normal.

Una característica interesante del ingreso del flujo magnético en los superconductores tipo II, es que se presenta a través de vórtices Fig.1.3. Adicionalmente, el flujo de campo magnético que se presenta en cada uno de los vórtices está cuantificado (Puri & Babbar, 1997). El valor de este flujo cuántico es un múltiplo entero del cuanto de magnetización $\Phi_0 = \frac{h}{2e}$.

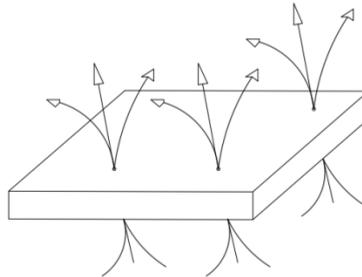


Fig. 1.2 Vórtices de Abrikosov Superconductor Tipo II.

1.3.1 Origen de los Vórtices de Abrikosov

Hasta el momento se ha visto que en los superconductores tipo II existe paso del flujo magnético cuando el campo aplicado es de magnitud comprendida entre H_{c1} y H_{c2} . Se sabe además, que el flujo magnético producto de la corriente de los pares de Cooper está cuantizado (Puri & Babbar, 1997). La deducción completa sobre el origen de los vórtices se halla en el trabajo original de Abrikosov (Abrikosov A. A., 1957). Sin embargo, a continuación se presenta un breve resumen de los principales conceptos utilizados en su desarrollo. Se parte con la observación de que, cerca de

H_{c2} el parámetro de orden debe ser de una magnitud muy pequeña, ya que es en este punto crítico donde se produce el paso, gradual en el caso de superconductores tipo II, al estado normal. Esto implica además que la magnetización M puede ser despreciada, de donde, una buena aproximación para el campo magnético sería:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (1.41)$$

Por otro lado, cerca de H_{c2} , las variaciones en el campo son despreciables, así que se puede considerar que el campo es constante:

$$\vec{B} = (0, 0, B) \quad (1.42)$$

En (1.42) se ha considerado que el campo actúa en la dirección del eje z ; sin embargo, esta elección es arbitraria ya que el resultado final es el mismo cualquiera sea la elección. La deducción de Abrikosov sugiere que es conveniente expresar el vector potencial \vec{A} , en función del gauge de Landau, es decir:

$$\vec{A} = (0, xB, 0) \quad (1.43)$$

Con estas consideraciones, la ecuación (1.30) del modelo GL se puede escribir como:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\nabla + \frac{2eiB}{\hbar} x\hat{y} \right) \cdot \left(\nabla + \frac{2eiB}{\hbar} x\hat{y} \right) \Psi(\vec{r}) + \Psi(\vec{r})(a + b|\Psi(\vec{r})|^2) = 0 \quad (1.44)$$

Como ya se había mencionado, el valor del parámetro de orden es muy pequeño cerca de H_{c2} , por lo que en (1.44) los términos de orden cubico pueden ser despreciados. De esta manera, desarrollando el cuadrado de (1.44) resulta:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\nabla^2 + \frac{4eiB}{\hbar} x \frac{\partial}{\partial y} - \frac{(2eB)^2}{\hbar^2} x^2 \right) \Psi(\vec{r}) + \Psi(\vec{r})a = 0 \quad (1.45)$$

En el material, en el estado superconductor, los pares de Cooper circulan en trayectorias circulares, en un símil a una partícula cargada que ingresa perpendicular en un campo magnético constante. De ello, Abrikosov utiliza la frecuencia ciclotrónica para reemplazar \vec{B} en (1.45), de donde:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\nabla^2 + \hbar\omega_c ix \frac{\partial}{\partial y} - \frac{m^*\omega_c^2}{2} x^2 \right) \Psi(\vec{r}) = \Psi(\vec{r})|a| \quad (1.46)$$

La ecuación (1.46) es similar a la ecuación de Schrödinger para la función de onda de una partícula cargada en un campo magnético. Esta ecuación tiene una solución conocida como los niveles de Landau (Annett, Superconductivity, Superfluids and Condensates., 2004) y la ecuación de la función de onda es de la forma:

$$\Psi(\vec{r}) = e^{i(k_y y + k_z z)} f(x) \quad (1.47)$$

En (1.47) no se conoce la función $f(x)$. Para hallar dicha función se reemplaza (1.47) en (1.46), se completa el cuadrado entre paréntesis y luego de algunas simplificaciones se obtiene la siguiente ecuación:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{m^*\omega_c^2}{2} (x - x_o)^2 f = \left(|a| - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m^*} \right) f \quad (1.48)$$

El término x_o es equivalente a $-\frac{\hbar k_y}{m\omega_c}$ y surge al completar el cuadrado en (1.46). La ecuación (1.48) es una ecuación del tipo Schrödinger que representa un oscilador armónico simple (Tinkham, Introduction to Superconductivity, 1996), con la diferencia de que el origen ha sido cambiado al punto x_o . Como se observa, el término entre paréntesis de la derecha es la energía del oscilador, que como sabemos tiene la forma:

$$\left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_c = |a| - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m^*} \quad (1.49)$$

Considerando la aproximación sobre a expuesta en numerales anteriores, (1.49) resulta:

$$\left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_c + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m^*} = \dot{a}(T_c - T) \quad (1.50)$$

Recuérdese que T_c es la temperatura crítica de un material que no está sometido a un campo magnético. La solución a la menor energía posible se obtiene

cuando $n=Kz=0$. Esto permite hallar el valor de T_c cuando el cuerpo está sometido a un campo externo H constante:

$$\left(\frac{1}{2}\right) \hbar \omega_c = \dot{a}(T_c(0) - T_c(H)) \Rightarrow T_c(H) = T_c(0) - \frac{2e\hbar\mu_o}{2\dot{a}m^*} H \quad (1.51)$$

Alternativamente, si se inicia con un campo magnético por encima de H_{c2} y se lo reduce gradualmente, manteniendo la temperatura constante, de (1.51) y ω_c se deduce que:

$$\mu_o H_{c2} = B_{c2} = \frac{2m^* \dot{a}(T_c - T)}{\hbar^2} \frac{\hbar}{2e} = \frac{\Phi_o}{2\pi\xi(T)^2} \quad (1.52)$$

Esta última expresión nos indica que el flujo magnético en H_{c2} esta cuantizado. Además, existe un solo cuanto de flujo (una sola línea de vórtice) por unidad de área $2\pi\xi(T)^2$. Es posible además, hallar H_{c2} en función del campo H_c de un superconductor tipo I:

$$H_c = \frac{\dot{a}}{(\mu_o b)^{\frac{1}{2}}} (T_c - T) = \frac{\Phi_o}{2\pi\mu_o\sqrt{2}\xi\lambda} = \frac{H_{c2}}{\kappa\sqrt{2}} \Rightarrow H_{c2} = \sqrt{2}\kappa H_c \quad (1.53)$$

En función de (1.53), Abrikosov clasificó los superconductores en tipo I y II tal como ya se había explicado anteriormente. Cuando $k > \frac{1}{\sqrt{2}}$, entonces se tiene un superconductor tipo II. En el caso complementario de k , se obtendría un superconductor tipo I. Hasta aquí se ha mostrado que la teoría de Abrikosov a permitido hallar H_{c2} . Sin embargo, el objetivo es hallar el parámetro de orden en valores de campo menores que H_{c2} . En general, la idea es resolver la ecuación no lineal (1.44). Esto es complejo de realizarlo analíticamente, pero Abrikosov realizó la brillante observación (Annett, Superconductivity, Superfluids and Condensates., 2004) de que, basado en la solución de la ecuación lineal (1.46) solo las soluciones $n=kz=0$ que representa las soluciones del estado fundamental de un oscilador armónico son significativas, Así, (1.47) implica que:

$$\Psi(\vec{r}) = C e^{i(k_y y)} e^{-\frac{(x-x_o)^2}{\xi^2(T)}} \quad (1.54)$$

En (1.54) se tienen infinitos estados degenerados, ya que k_y puede tomar cualquier valor. Abrikosov, para dar solución al problema, asumió que es posible

combinar las infinitas soluciones en una red periódica. Así, buscando una solución que sea periódica en y , que presenta un período de red l_y , entonces los valores de k_y se restringen a:

$$k_y = \frac{2\pi}{l_y} n \quad (1.55)$$

De esta forma, la solución general con periodicidad en y para el parámetro de orden resulta ser:

$$\Psi(\vec{r}) = \sum_{n=-\infty, \infty} C_n e^{i(2\pi n y / l_y)} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\xi^2(T)}} \quad (1.56)$$

El valor de x_0 en (1.56) se puede reemplazar con el de $-\frac{\hbar k_y}{m \omega_c}$ y tomando en cuenta (1.55), (1.56) se escribe como:

$$\Psi(\vec{r}) = \sum_{n=-\infty, \infty} C_n e^{i(2\pi n y / l_y)} e^{-\frac{(x+n\Phi_0/Bl_y)^2}{\xi^2(T)}} \quad (1.57)$$

Para generalizar la periodicidad en x , Abrikosov observó que es posible hacerlo al asegurar que los coeficientes cumplan que:

$$C_{n+v} = C_n \quad (1.58)$$

El valor de v es siempre entero. Bajo este supuesto la periodicidad en x hallada por Abrikosov toma la forma:

$$l_x = v \frac{\Phi_0}{Bl_y} \quad (1.59)$$

Abrikosov estudió el caso con $v=1$ que corresponde a una red cuadrada. De la solución obtenida comprobó que el parámetro de orden se anula en un punto de cada celda unidad, y que además existe un cuanto de flujo por celda. Esto demostró que la solución (1.57) genera una red de vórtices periódicos. En aquellos puntos donde el parámetro de orden se anula, el campo penetra con su valor máximo correspondiente al valor de H aplicado (Abrikosov A. A., 1957). A este estado donde coexisten el superconductor y el estado normal, se lo denomina *estado mixto*. Se debe haber observado en la deducción que el diámetro de un vórtice se relaciona directamente con el valor de ξ . Es importante mencionar que la red de vórtices se presenta únicamente

en una muestra ideal, que entre varias condiciones debe ser infinita de tal forma que los efectos de la frontera no tengan influencia sobre la formación de los vórtices. En los casos reales, es decir, muestras finitas y en general anisótropas no homogéneas, los vórtices existen pero no forman una red perfecta. Se puede verificar, y esto se observará en las simulaciones del capítulo III, que el tamaño de la muestra tiene gran influencia sobre la formación de los vórtices; tanto más notorio mientras más pequeña es la muestra.

CAPITULO II

2 IMPLEMENTACION NUMERICA DEL MODELO GINZBURG-LANDAU

2.1 Formulación Débil del Modelo Ginzburg-Landau

El modelo GL, tal como se expuso en el capítulo anterior, representa la formulación fuerte del problema. Esta formulación, en general, es compleja de resolver y no siempre es posible realizarlo analíticamente. De ello surge la necesidad de utilizar técnicas numéricas para su resolución. Entre las diversas técnicas que se pueden estudiar, las más común y de uso en diversos campos de la ciencia y la ingeniería, es sin lugar a duda el método de los elementos finitos (MEF). Como se conoce, el MEF consiste en discretizar el dominio sobre el cual se busca la/s solución/es de la/s ecuación/es diferencial/es. Posteriormente se utiliza una aproximación a la solución por medio de funciones de forma y al final se resuelve un sistema de ecuaciones lineales ordinarias (Oñate, 1995).

Para iniciar la aplicación del MEF al modelo GL, es práctica común, dadas las ventajas de manipulación que representa, utilizar un cambio de variables que *normalice* o *escale* matemáticamente las ecuaciones del modelo GL, de tal forma que no se tome en cuenta las unidades de cada uno de sus parámetros. El detalle del escalado de las dos ecuaciones que conforman el modelo se presenta en varios trabajos, como por ejemplo en (Tang & Wang, 1995). El primer paso es definir los siguientes parámetros:

$$|\Psi_0|^2 = \frac{|a|}{b}$$

$$H_c = \left(\frac{4\pi|a|^2}{b} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\lambda = \lambda(T) = \left(\frac{m_s c^2 b}{4\pi e^2 |a|} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\xi = \xi(T) = \frac{\hbar}{(2m_s |a|)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.1)$$

$$\kappa = \frac{\lambda}{\xi}$$

$$\eta = \frac{4\pi\sigma D}{c^2}$$

$$\tau = \frac{\lambda^2}{D}$$

Obsérvese que Hc , y en general H , tienen unidades de densidad de flujo magnético, es decir del campo B , sin embargo es prácticamente común en casi toda la literatura sobre el tema representarlo con la letra H . Comentado esto no habrá lugar en lo que sigue confusión respecto de si se trata de densidad de flujo magnético o intensidad. Adicionalmente, se consideran los siguientes cambios de variables, donde aquellas con representadas con primas son adimensionales:

$$x = \lambda x'$$

$$t = \tau t'$$

$$\Psi = \Psi_o \Psi'$$

$$\vec{A} = \sqrt{2}H_c \lambda \vec{A}' \quad (2.2)$$

$$\Phi = \frac{D\sqrt{2}H_c}{c} \Phi'$$

$$H = \sqrt{2}H_c H'$$

De esta manera, los parámetros introducidos en (2.1) sirven para escalar longitudes (λ), campos ($\sqrt{2}H_c$) donde el radical se incluye por conveniencia, corrientes ($\frac{cH_c}{2\sqrt{2}\pi\lambda}$), potencial magnético ($\sqrt{2}H_c\lambda$) y el parámetro de orden ($\left(\frac{|a|}{b}\right)^{\frac{1}{2}}$) (Du, Gunzburger, & Peterson, Analysis and Approximation of the Ginzburg-Landau Model of Superconductivity, 1992). El siguiente paso es utilizar los cambios de variable (2.2) en conjunto con las ecuaciones del modelo GL (1.30) y (1.31). Al

realizar los reemplazos respectivos, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones escaladas del modelo GL para el caso estacionario (Tinkham, Introduction to Superconductivity, 1996):

$$\left(-\frac{i}{\kappa}\nabla - \vec{A}\right)^2 \Psi - \Psi + |\Psi|^2\Psi = 0 \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = -\frac{i}{2\kappa}(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) - |\Psi|^2\vec{A} + \nabla \times \vec{H} \quad (2.4)$$

Las condiciones de frontera también deben ser normalizadas, resultando para el caso estacionario:

$$\left(\frac{i}{\kappa}\nabla\Psi + \vec{A}\Psi\right) \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \quad (2.5)$$

$$\nabla \times \vec{A} \times \vec{n} = \vec{H} \times \vec{n} \quad \text{en } \partial\Omega \quad (2.6)$$

Una vez que se ha normalizado el modelo GL, el siguiente paso hacia el MEF es formular las ecuaciones (2.3), (2.4), (2.5) y (2.6) en formulación débil. Para hacerlo, el método más utilizado en elementos finitos es el *Método de los Residuos Ponderados de Garlekin MRPG* (Daryl, 2007).

2.1.1 Formulación Débil del Modelo Estacionario GL

A continuación se aplicará el método de Garlekin al modelo estacionario GL normalizado. Para empezar debemos notar ciertas características del problema que nos compete. Lo primero es que se trata de dos ecuaciones diferenciales parciales acopladas del tipo elípticas, donde existen dos incógnitas a resolver, Ψ y \vec{A} . La primera de ellas, es generalmente un número complejo, mientras que la segunda es una cantidad vectorial de componentes reales. El problema, por lo tanto, es complejo, ya que involucra un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden y grado tres no lineal, donde las soluciones existen en dos espacios vectoriales distintos. Esto último implica que se deben definir formalmente los espacios vectoriales donde existen las soluciones al problema.

Por lo tanto el problema a ser resuelto se plantea de la siguiente manera: considérese un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ que es de tipo Lipschitz por lo que Ω posee una frontera $\partial\Omega$ tipo Lipschitz (Chen, Elliott, & Tang, 1998). Por otro lado, $H^s(\Omega)$ designa un espacio común de Sobolev de funciones reales (Mu, 1997). $\mathcal{H}^s(\Omega) = \{u + vi/u, v \in H^s, \}$ es otro espacio de Sobolev definido para funciones complejas, y $\mathbf{H}^s(\Omega) = [H^s(\Omega)]^d$ está definido para vectores con funciones como d componentes, que corresponden a 2 o 3 para el caso bi o tridimensional respectivamente. Si se considera la condición de frontera (2.5) se requiere, adicionalmente, un subespacio de $\mathbf{H}^s(\Omega)$ definido como $\mathbf{H}_n^s(\Omega) = \{\vec{A}/\vec{A} \in \mathbf{H}^s(\Omega), \vec{A} \cdot \vec{n} = 0\}$ para definir la condición de frontera. Con esta notación, la formulación débil del modelo GL estacionario se reduce en hallar $(\Psi, \vec{A}) \in \mathcal{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}_n^1(\Omega)$ tal que:

$$\left\langle \frac{i}{\kappa} \nabla \Psi + \vec{A} \Psi, \frac{i}{\kappa} \nabla \tilde{\Psi} + \vec{A} \tilde{\Psi} \right\rangle + \langle (|\Psi|^2 - 1) \Psi, \tilde{\Psi} \rangle = 0, \quad \forall \tilde{\Psi} \in \mathcal{H}^1(\Omega) \quad (2.7)$$

$$\langle \nabla \times \vec{A}, \nabla \times \tilde{A} \rangle + \langle |\Psi|^2 \vec{A}, \tilde{A} \rangle + \left\langle \frac{i}{2\kappa} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*), \tilde{A} \right\rangle = \langle \vec{H}, \nabla \times \tilde{A} \rangle, \quad \forall \tilde{A} \in \mathbf{H}_n^1(\Omega) \quad (2.8)$$

Con las condiciones iniciales para el caso temporal:

$$\Psi(\vec{r}, 0) = \Psi_o, \quad \vec{A}(\vec{r}, 0) = \vec{A}_o \quad (2.9)$$

Este es el planteamiento débil del modelo donde las funciones $\tilde{\Psi}$ y \tilde{A} son las funciones de prueba o peso del parámetro de orden y vector potencial magnético respectivamente. Debe recordarse, además, que los símbolos $\langle \rangle$ son integrales, tal como lo define el producto interior de funciones (Maximenko, 2017).

2.2 Discretización Espacial del Modelo GL lineal: Aproximación de Garlekin.

Los casos más interesantes de estudio son aquellos que se presentan al aplicar un campo perpendicular a una muestra superconductor. Sin embargo, ya que la resolución numérica, del modelo GL es compleja, se requieren considerar suposiciones que permitan resolver el modelo. Una de ellas consiste en estudiar una aproximación al modelo GL que se conoce como el *modelo GL lineal* (Tinkham,

Introduction to Superconductivity, 1996). El mismo se obtiene al despreciar los términos no lineales en la ecuación (1.30). Esta aproximación se justifica únicamente cerca de la frontera del diagrama de fase H-T, es decir, cuando la muestra se encuentra en un estado superconductor muy cercano al estado de conductor normal. Esto implica que el parámetro de orden es ligeramente diferente de cero, y por lo tanto su cuadrado en (1.30) puede despreciarse. Obsérvese que similar suposición fue realizada por Abrikosov al inicio de su deducción.

Por otro lado, existe una relación entre la longitud de coherencia ξ y el parámetro $a(T)$ del modelo GL tal que:

$$\xi^2 = \frac{\hbar^2}{2m^*|a|} \quad (2.10)$$

Haciendo uso de esta relación, la ecuación (1.30) del modelo estacionario GL se reduce a:

$$\left(-i\nabla - \frac{2\pi A}{\Phi_0}\right)^2 \Psi = \frac{\Psi}{\xi^2} \quad (2.11)$$

Una simplificación adicional surge del hecho de que en (1.30) $\vec{A} = \vec{A}_{\text{ext}}$ ya que cerca de la frontera de H-T, el campo magnético inducido puede ser ignorado, y por lo tanto el potencial magnético en (2.11) corresponde a aquel del campo magnético externo (Kim, Gunzburger, Peterson, & Hu., 2009). De esta manera, la segunda ecuación del modelo estacionario (1.31) se desacopla de la primera (Tinkham, Introduction to Superconductivity, 1996). Por lo tanto el problema se reduce a hallar primeramente un vector potencial magnético \vec{A} que cumpla las condiciones de frontera, y posteriormente hallar Ψ a partir de (2.11).

El esquema de MEF para el modelo lineal que se presentara a continuación se basa en las pautas presentadas en el trabajo de (Kim, Gunzburger, Peterson, & Hu., 2009). El primer paso consiste en normalizar (2.11). Para ello se utilizan las relaciones (2.2):

$$\left(-i\nabla - K\vec{A}\right)^2 \Psi = \eta^2 \Psi \quad (2.12)$$

$$K = \frac{2\pi}{\Phi_0} \sqrt{2} H_c \lambda^2; \quad \eta = \frac{\lambda^2}{\xi^2} \quad (2.13)$$

La condición de frontera correspondiente (2.5) también se debe adimensionar, resultando:

$$\vec{n} \cdot (i\nabla + K\vec{A})\Psi = 0; \quad \nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (2.14)$$

El siguiente paso hacia MEF es representar la aproximación del parámetro de orden Ψ^h y de la función de prueba $\tilde{\Psi}^h$ en el espacio discreto a través de funciones de forma base $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ nodales:

$$\Psi^h = \sum \phi_i \Psi_i; \quad \tilde{\Psi}^h = \sum \phi_i \tilde{\Psi}_i \quad (2.15)$$

Hecho esto, se utiliza el método de Galerkin (2.7), el cual al desarrollarlo, en conjunto con (2.12), (2.13) y (2.15) resulta que en el dominio Ω :

$$[A]\Psi = \eta[B]\Psi \quad (2.16)$$

$$[A] = \begin{pmatrix} C & D \\ D^t & C \end{pmatrix}; \quad [B] = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}; \quad (2.17)$$

$$C_{ij} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} + K|\vec{A}|^2 \phi_i \phi_j \right) d\Omega \quad (2.18)$$

$$D_{ij} = \int_{\Omega} K \left[\left(A_x \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + A_y \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right) \phi_j - \left(A_x \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + A_y \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) \phi_i \right] d\Omega \quad (2.19)$$

$$M_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i \phi_j d\Omega \quad (2.20)$$

Se ha obtenido así la forma discreta del modelo lineal GL. Para tratar con el hecho de que Ψ consiste de una parte imaginaria y otra real, se ha seguido el método propuesto en (Sehra, 2006) para facilitar la resolución numérica. Para la simulación se han utilizado las funciones base más simples para el caso 2D que consisten en polinomios lineales de Lagrange correspondientes a una triangulación del dominio.

Como se había mencionado, para resolver Ψ se requiere conocer \vec{A} . Este campo vectorial requiere de un gauge adecuado, de manera que se defina Ψ y \vec{A} unívocamente. El gauge comúnmente utilizado requiere que la componente normal de \vec{A} en la frontera del dominio Ω debe ser nula. Adicionalmente se considera que \vec{A} este

libre de divergencia en el dominio. Obsérvese que con el gauge escogido, la condición de frontera (2.12) se reduce a una condición homogénea tipo Neumann ($\vec{n} \cdot i\nabla\Psi = 0$). Esta condición se ha considerado de manera natural al utilizar integración por partes en el MRPG para obtener (2.16). Por otra parte (Chibotaru, Ceulemans, Morelle, Teniers, Carballeira, & Moshchalkov, 2005) deducen expresiones analíticas para hallar \vec{A} que cumpla el gauge escogido. Sin embargo, a pesar de ser correctas, son de difícil resolución para geometrías distintas a la rectangular o triangular. Además, poseen la limitación de que el método es aplicable solo a figuras que presenten simetría, tales como polígonos regulares. Sin embargo, (Kim, Gunzburger, Peterson, & Hu., 2009) presentan un método general basado en métodos de optimización.

En esencia, el método es similar al de los multiplicadores de Lagrange para hallar los extremos de una función bajo ciertas restricciones. Kim et al. (2009) minimizan la energía magnética (2.21) sobre la muestra sujeta a las condiciones de divergencia nula (gauge de London o Coulomb) en todo el dominio y componente normal nula en la frontera:

$$F = \int_{\Omega} [(\nabla \times \vec{A} - H_{ext})^2 + so(\nabla \cdot \vec{A})^2] d\Omega + co \int_{\partial\Omega} (\vec{A} \cdot \vec{n})^2 d\Gamma \quad (2.21)$$

Los parámetros *so* y *co* deben ser mayores a cero y se denominan parámetros de peso. Según los autores del método, los valores óptimos de los parámetros pueden ser hallados ajustando el algoritmo para algunos polígonos regulares estándar, y entonces se puede generalizar el método con esos valores para geometrías arbitrarias. Por otra parte, para resolver *F* se utiliza MEF. Para ello, es necesario expresar \vec{A} en función de las funciones base $\{\phi_i\}_{i=1}^N$:

$$Ax^h = \sum e_i \phi_i; \quad Ay^h = \sum f_i \phi_i \quad (2.22)$$

Al reemplazar las expresiones anteriores en *F* y minimizando la función para cada e_i y f_i , se obtiene un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas a resolver son justamente e_i y f_i . Este sistema debe ser ensamblado globalmente siguiendo los pasos comunes del MEF. Al final, se resuelve el sistema global, se halla \vec{A} , y posteriormente Ψ . Nótese que el modelo lineal GL se reduce básicamente a un problema de

autovalores generalizado donde el autovalor es η y los autovectores correspondientes son Ψ . El esquema aquí presentado, es el implementado en la resolución numérica para el presente trabajo. Una cuestión sumamente importante sobre el modelo GL lineal que se debe indicar es que, dada la aproximación realizada, este modelo es sumamente útil para estudiar el efecto de la geometría de la muestra sobre la formación de los vórtices. Así que, en las simulaciones que se presentarán en el siguiente capítulo, este es el efecto primordial que se estudiara al implementar el modelo lineal.

2.3 Discretización Espacio-Temporal del Modelo General GL: Linealización mediante el esquema Crank-Nicolson-Garlekin (LCNG).

Si bien es de mucha utilidad el esquema lineal anterior por lo ya comentado, es importante también conocer el comportamiento del modelo completo, sin aproximaciones. Es por ello, que en este numeral se presenta un esquema que permite realizar el estudio del modelo temporal general TDGL. Para ello, se considerara el esquema propuesto por (Mu, A Linearized Crank-Nicolson-Garlekin Method for the Ginzburg-Landau Model, 1997). El citado autor presenta un modelo para resolver las ecuaciones (1.34) y (1.35), de tal forma que logra desacoplar las variables, a saber, el parámetro de orden y el vector potencial magnético. Finalmente, el modelo propuesto por Mu se reduce a resolver un sistema de dos ecuaciones lineales. Se comprenderá las ventajas que esto acarrea; ya que el costo computacional se reduce relativamente si consideramos otros métodos como por ejemplo el de Newton -Raphson para resolver sistema de ecuaciones acopladas no lineales.

Al igual que para el modelo lineal GL, los detalles del método de Mu pueden ser hallados en su trabajo. Sin embargo, en síntesis, el método consiste en que, para resolver el valor de cada variable, se requieren utilizar los valores respectivos de pasos anteriores del cálculo. Es por ello que, como se necesita conocer valores previos de las variables, para iniciar el cálculo se recomienda utilizar el método corrector-predictor tal como lo sugiere Mu. El primer paso es utilizar el MRPG y conceptos de linealidad para representar la formulación débil del modelo GL (1.34) y (1.35) del tal forma que se obtiene:

$$\langle \delta_t \Psi_h^n, \tilde{\Psi}_h \rangle + \langle \frac{i}{k} \nabla \bar{\Psi}_h^n + \hat{A}_h^n \bar{\Psi}_h^n, \frac{i}{k} \nabla \tilde{\Psi}_h + \hat{A}_h^n \tilde{\Psi}_h \rangle + \langle (|\hat{\Psi}_h^n|^2 - 1) \bar{\Psi}_h^n, \tilde{\Psi}_h \rangle = 0 \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \langle \delta_t A_h^n, \tilde{A}_h \rangle + \langle \nabla \times \bar{A}_h^n, \nabla \times \tilde{A}_h \rangle + \langle |\hat{\Psi}_h^n|^2 \bar{A}_h^n, \tilde{A}_h \rangle \\ = \langle He, \nabla \times \tilde{A}_h \rangle - \langle \frac{i}{2k} ((\hat{\Psi}_h^n)^* \nabla \hat{\Psi}_h^n - \hat{\Psi}_h^n \nabla (\hat{\Psi}_h^n)^*), \tilde{A}_h \rangle \end{aligned} \quad (2.24)$$

En esta formulación ya se ha considerado las condiciones de frontera y gauges, es decir, gradiente del parámetro de orden nulo y componente normal nula del vector potencial en la frontera respectivamente. Así, esta es básicamente la formulación lineal de Crank-Nicolson-Garlekin (LCNG) para el modelo TDGL propuesta por Mu. El valor de la función U^n (ya sea Ψ^n o A^n) es la variable buscada, es decir el valor actual. Por otra parte obsérvese que en el modelo surgen tres parámetros producto de la discretización temporal, y de las aproximaciones lineales realizadas, a saber, $\delta_t U^n = \frac{1}{\Delta t} (U^n - U^{n-1})$, $\bar{U}^n = \frac{1}{2} (U^n + U^{n-1})$, $\hat{U}^n = \frac{3}{2} U^{n-1} - \frac{1}{2} U^{n-2}$. Al reemplazar estas tres últimas expresiones y separar las variables actuales "n" de las variables en un paso anterior "n-1" se llega a las siguientes expresiones discretas (Mu, A Linearized Crank-Nicolson-Garlekin Method for the Ginzburg-Landau Model, 1997):

$$M_\Psi \Psi^n = F_\Psi; \quad M_A A^n = F_A \quad (2.25)$$

Para la ecuación del parámetro de orden se tiene:

$$M_\Psi = C_\Psi + B_\Psi \quad (2.26)$$

$$C_\Psi^{ij} = \frac{\phi_i \phi_j}{\Delta t} \quad (2.27)$$

$$B_\Psi^{ij} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{i}{k} \nabla \phi_j + \hat{A}_h^n \phi_j, \frac{i}{k} \nabla \phi_i + \hat{A}_h^n \phi_i \right) + \left((|\hat{\Psi}_h^n|^2 - 1) \phi_j, \phi_i \right) \right] \quad (2.28)$$

$$F_\Psi = (C_\Psi - B_\Psi) \Psi^{n-1} \quad (2.29)$$

Para el vector potencial:

$$M_A = C_A + B_A \quad (2.30)$$

$$C_A^{ij} = \frac{\phi_i \phi_j}{\Delta t} \quad (2.31)$$

$$B_A^{ij} = \frac{1}{2} \left[(\nabla \times \phi_j, \nabla \times \phi_i) + (|\widehat{\Psi}_h^n|^2 \phi_j, \phi_i) \right] \quad (2.32)$$

$$F_A = (C_A - B_A)A^{n-1} + G_A \quad (2.33)$$

$$G_A^i = (He, \nabla \times \phi_i) - \left(\frac{i}{2k} ((\widehat{\Psi}_h^n)^* \nabla \widehat{\Psi}_h^n - \widehat{\Psi}_h^n \nabla (\widehat{\Psi}_h^n)^*), \phi_i \right) \quad (2.34)$$

De esta forma, estos dos modelos, lineal y general, han sido implementados en Matlab a través de un código que hace uso del MEF. A continuación se presentan las simulaciones logradas a través de estos códigos. Se debe comentar por último, que el modelo general, tal como ha sido expuesto aquí, es aplicable para geometrías tridimensionales tal como se verá más adelante. Los códigos desarrollados en este trabajo se presentan en la sección de anexos.

2.4 Discretización Espacio-Temporal del Modelo General GL: Linealización mediante el esquema Crank-Nicolson-Garlekin Mixto (LCNGM).

El método de Mu (1997) presenta algunas desventajas según los trabajos recientes de varios autores. Por ejemplo, (Gao & Sun, 2016) utilizan en el desarrollo de su metodo denominado LCNG Mixto (LCNGM) el gauge de Lorentz. Sugieren que si bien el metodo de Mu es correcto en cuanto a resultados, el uso del gauge de potenciaol electrico nulo lo vuleve lento computacionalmente. Por otro parte, varios autores tales como (Gao, 2017), (Li & Zhang, 2015), (Gao & Sun, An efficient fully linearized semi-implicit Garlekin-mixed FEM for the dynamical Ginzburg-Landau equations of superconductivity, 2015) entre otros han propuesto distintos metodos basados en la aproximacion utilizada por Mu (1997) para resolver de manera mas eficiente computacionalmente el modelo GL temporal. Incluso autores como Gao (2017), proponen un modelo lineal basado en el gauge de Lorentz a diferencia del gauge de potencial electrico nulo utilizado por Mu.

Todos los métodos desarrollados por estos autores se basan además en la misma forma de obtener al sistema lineal de ecuaciones; sin embargo, con la gran ventaja de que no solo se desacoplan las dos variables \vec{A} y Ψ , sino que además se generan dos ecuaciones adicionales que permiten hallar simultáneamente el potencial eléctrico θ y el campo magnético σ . Eso produce resultados mucho más precisos en la búsqueda de estas dos últimas variables, ya que con el método de Mu, por ejemplo, se requiere realizar una derivación numérica sobre los valores hallados del vector

potencial y el parámetro de orden, lo que conlleva a que se obtengan resultados de σ y θ menos precisos debido a errores de aproximación y además es más costoso computacionalmente hablando.

A continuación se presenta el método propuesto por Gao (2017, que es hasta el momento el más completo y versátil para resolver el modelo TDGL. La intención de presentar este método es que se realizaran simulaciones para comparar los resultados y tiempos de cómputo entre el método LCNG de Mu con gauge temporal y el LCNGM de Gao con gauge Lorentz. El método trabaja sobre la segunda ecuación del modelo GL, donde se propone tomar el rotacional y la divergencia de esta ecuación para obtener el siguiente sistema lineal:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} - ik\theta\Psi + \left(\frac{i}{k}\nabla + \vec{A}\right)^2 \Psi + (|\Psi|^2 - 1)\Psi = 0 \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} - \Delta\sigma + \text{Re}\left(\frac{i}{k}\nabla \times \Psi \cdot \nabla \Psi^*\right) + |\Psi|^2\sigma - \vec{A} \cdot \nabla \times |\Psi|^2 = -\Delta H_e \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta\theta + \text{Re}\left(\frac{i}{k}\Psi^* \Delta \Psi\right) + |\Psi|^2\theta - \vec{A} \cdot \text{div}|\Psi|^2 = 0 \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\theta + \nabla \times \sigma + \text{Re}\left(\frac{i}{k}\Psi^* \Delta \Psi\right) + |\Psi|^2\vec{A} = \nabla \times H_e \quad (2.38)$$

Con este nuevo sistema, las condiciones de contorno e iniciales son:

$$\left. \begin{array}{l} \left(\frac{i}{k}\nabla\Psi + \vec{A}\Psi\right) \cdot \vec{n} = 0 \\ \sigma = He \\ \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 \end{array} \right\} \text{ en } \partial\Omega \times [0, T] \quad (2.39)$$

$$\Psi(x, 0) = \Psi_o(x), \quad \sigma(x, 0) = \nabla \times \vec{A}_o, \quad \theta(x, 0) = \text{div}\vec{A}_o(x), \quad \vec{A}(x, 0) = \vec{A}_o \quad (2.40)$$

Luego, al aplicar el método de Garlekin, y linealizar con el método de Crank-Nicolson el sistema (2.35)-(2.39) se obtiene el siguiente sistema para ser resuelto numéricamente:

$$(D_t \Psi_h^n, w_h) + \frac{1}{k^2} (\nabla \Psi_h^n, \nabla w_h) = i \left(k - \frac{1}{k} \right) (\theta_h^{n-1} \psi_h^{n-1}, w_h) \quad (2.41)$$

$$- \frac{2i}{k} (\vec{A}_h^{n-1} \nabla \psi_h^{n-1}, w_h) - \left((|\vec{A}_h^{n-1}|^2 + |\psi_h^{n-1}|^2 - 1) \psi_h^{n-1}, w_h \right)$$

$$(D_t \sigma_h^n, \xi_h) + (\nabla \sigma_h^n, \nabla \xi_h) = - \left(\text{Re} \left(\frac{i}{k} \nabla \times \psi_h^{n-1} \cdot \nabla (\psi_h^{n-1})^* \right), \xi_h \right) \quad (2.42)$$

$$- \left(|\psi_h^{n-1}|^2 \sigma_h^{n-1}, \xi_h \right) + (\vec{A}_h^{n-1} \cdot \nabla \times |\psi_h^{n-1}|^2, \xi_h) - (\Delta H_\sigma^n, \xi_h)$$

$$(D_t \theta_h^n, \chi_h) + (\nabla \theta_h^n, \nabla \chi_h) = \left(\text{Re} \left(\frac{i}{k} (\psi_h^{n-1})^* \cdot \nabla \psi_h^{n-1} \right), \nabla \chi_h \right) \quad (2.43)$$

$$- \left(|\psi_h^{n-1}|^2 \theta_h^{n-1}, \chi_h \right) + (\vec{A}_h^{n-1} \cdot \nabla |\psi_h^{n-1}|^2, \chi_h)$$

$$(D_t \vec{A}_h^n, v_h) = (\nabla \theta_h^{n-1}, v_h) - (\nabla \times \sigma_h^{n-1}, v_h) - \left(\text{Re} \left(\frac{i}{k} (\psi_h^{n-1})^* \cdot \nabla \psi_h^{n-1} \right), \nabla v_h \right) \quad (2.44)$$

$$- \left(|\psi_h^{n-1}|^2 \vec{A}_h^{n-1}, v_h \right) + (\nabla \times H_\sigma^n, v_h)$$

Con la ecuación para el cambio temporal:

$$D_t U^n = \frac{U^n - U^{n-1}}{\Delta t} \quad (2.45)$$

Para la resolución por el MEF, el sistema (2.41)-(2.45) anterior puede ser escrito en forma matricial como:

$$\left(M_\Psi + \frac{t}{k^2} K_\Psi \right) \Psi_h^n = b_\Psi^{n-1}$$

$$(M_\sigma + t K_\sigma) \sigma_h^n = b_\sigma^{n-1} \quad (2.46)$$

$$(M_\theta + t K_\theta) \theta_h^n = b_\theta^{n-1}$$

$$(M_A) A_h^n = b_A^{n-1}$$

El sistema (2.46) se resuelve al considerar un valor inicial para Ψ , \vec{A} , θ , σ y luego calcular el correspondiente valor en el tiempo "n". Otra de las grandes ventajas del método LCNGM radica en que no se requiere promediar los valores en dos tiempos anteriores como ocurre en el método LCNG de Mu, sino únicamente conocer el valor de la variable en el paso anterior respectivo. Aún más importante, las matrices \mathbf{M} y \mathbf{K} del lado izquierdo de (2.46) se deben ensamblar una sola vez y no para cada intervalo de tiempo, lo que implica evidentes ahorros computacionales.

Por otra parte, el interés en el presente trabajo radica en resolver el modelo GL para conocer la variación del parámetro de orden, y por ende la vorticidad en el dominio. Por ello, el sistema (2.46) puede ser reducido al siguiente sistema que permite calcular únicamente las variables Ψ y \vec{A} :

$$\begin{aligned}
 (D_t \psi_h^n, w_h) + \frac{1}{k^2} (\nabla \psi_h^n, \nabla w_h) &= i\kappa \left((\operatorname{div} \vec{A}_h^{n-1}) \psi_h^{n-1}, w_h \right) - \frac{i}{\kappa} \left(\vec{A}_h^{n-1} \nabla \psi_h^{n-1}, w_h \right) \\
 + \frac{i}{\kappa} \left(\vec{A}_h^{n-1} \psi_h^{n-1}, \nabla w_h \right) &- \left(\left(|\vec{A}_h^{n-1}|^2 + |\psi_h^{n-1}|^2 - 1 \right) \psi_h^{n-1}, w_h \right) \\
 (D_t \vec{A}_h^n, v_h) + (\operatorname{div} \vec{A}_h^n, \operatorname{div} v_h) + (\nabla \times \vec{A}_h^n, \nabla \times v_h) &= - \left(\operatorname{Re} \left(\frac{i}{\kappa} (\psi_h^{n-1})^* \cdot \nabla \psi_h^{n-1} \right), v_h \right) \\
 - \left(|\psi_h^{n-1}|^2 \vec{A}_h^{n-1}, v_h \right) + (H_\theta^n, \nabla \times v_h) &
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

Este último sistema es el que se ha implementado en Matlab para realizar las simulaciones y comparar la ventaja del método LCNGM de Gao con el método LCNG de Mu. Esto también permitirá observar si existe alguna ventaja computacional al utilizar gauges diferentes.

CAPITULO III

3 SIMULACION NUMERICA Y RESULTADOS.

En este capítulo se utiliza el modelo GL implementado a través del MEF en un algoritmo desarrollado en Matlab para la simulación de la formación de los vórtices de Abrikosov sobre varias geometrías. Todos los mallados, a no ser que se indique lo contrario, han sido generados en el software libre Gmsh. Se inicia con los resultados obtenidos con el modelo reducido lineal GL, luego se simulan los casos no estacionarios TDGL 2D y 3D. Para los casos 2D se consideran secciones planas de cilindros de longitud infinita o cuyo efecto del espesor es insignificante. Se han utilizado en todas las simulaciones elementos lineales de Lagrange. Todas las simulaciones fueron realizadas en una laptop Toshiba Satellite core i5. Se utilizó Matlab R2012a.

3.1 Simulación del Modelo Estacionario Lineal Ginzburg-Landau sobre Superconductores Mesoscópicos 2D.

Como ya se había mencionado, el interés principal en las siguientes simulaciones aplicando el modelo lineal, es observar la influencia de la geometría de la muestra sobre la configuración de los vórtices. Este efecto es tanto más notorio mientras más pequeña sea la muestra. Desde el punto de vista práctico, tienen gran importancia las muestras superconductoras de pequeño tamaño, como por ejemplo en la fabricación de microchips. Por otro lado esto de *pequeño tamaño* es ambiguo, por lo que es conveniente mencionar que, al decir pequeño o mesoscópico se está hablando de muestras menores a una micra, donde la longitud de penetración y la longitud de coherencia son mayores o del mismo orden de magnitud que la dimensión mayor de la muestra (Teniers, Moshchalkov, Chibotaru, & Ceulemans, 2003). Estas características son justamente las que definen un superconductor *mesoscópico*. Resulta muy interesante mencionar un punto comentado en el trabajo de los anteriores autores; y es que para muestras mesoscópicas, aquellos conductores tipo I, es decir $k < \frac{1}{\sqrt{2}}$, pueden comportarse como superconductores tipo II. Esto implica que se formaran vórtices. Esto es interesante ya que para muestras del mismo material tipo I pero de dimensiones macroscópicas no existen vórtices en la muestra. El efecto del tamaño de

la muestra se encuentra íntimamente ligado a la mecánica cuántica, ya que sus efectos empiezan a ser notables a escalas microscópicas. Son estas fluctuaciones cuánticas las que originan los vórtices en materiales que normalmente no deberían presentar este fenómeno. Adicionalmente, se menciona que los vórtices en superconductores mesoscópicos no se ordenan de manera periódica, es decir, no forman una red de Abrikosov. Esto se debe al efecto que genera la proximidad de la frontera tal como se mencionó al final del capítulo I.

Para verificar esta influencia de la geometría, se utilizará en la siguiente simulación de dominio cuadrado el campo crítico H_c del Aluminio, cuyo valor experimental es de 105 Oe. Adicionalmente al campo H_c , se utiliza una longitud λ para escalar longitudes como se define en (2.2) cuyo valor se indicará en cada simulación. Definidos estos dos parámetros entonces, se puede hallar K en el modelo lineal utilizando la expresión (2.13) En lo que sigue la escala de colores varia en un rango desde **1** (Rojo) a **0** (Azul).

3.1.1 Vórtices de Abrikosov en Dominio Plano Cuadrado.

En esta primera simulación se ha utilizado una geometría cuadrada de dimensiones 1×1 . El valor de λ se ha considerado de $2 \mu\text{m}$. El valor de K calculado es de 180.3. Para el estudio en este dominio se han utilizado tres mallados presentados en la Fig.3.1. El tercer mallado ha sido desarrollado en Matlab de manera directa utilizando triángulos rectángulos como elementos finitos:

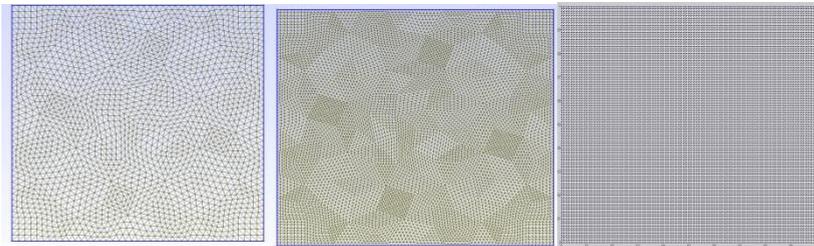


Fig. 3.1 Mallado de Dominio Cuadrado.

El primer mallado consiste en 2017 nodos, el segundo en 7095 nodos y el tercero en 10201 nodos. A continuación se calcula el vector potencial magnético en el dominio. Dicho potencial debe cumplir con las condiciones siguientes: ser libre de divergencia (gauge de London) en el volumen de la muestra Ω , y poseer componente normal nula en la frontera del dominio $\partial\Omega$. El método utilizado e implementado en el

algoritmo desarrollado para este trabajo es el expuesto en (Kim, Gunzburger, Peterson, & Hu., 2009) como ya se explicó en el capítulo anterior. El resultado obtenido para el dominio cuadrado aplicando MEF en el software desarrollado en Matlab es el siguiente Fig.3.2:

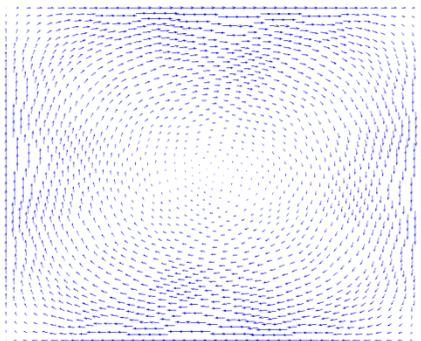


Fig. 3.2 *Potencial Magnético en Dominio Cuadrado.*

Es fácil observar como este potencial cumple con las condiciones de ser libre de divergencia y además, componente nula en la frontera. Obsérvese que para cumplir con este último requisito, el potencial alcanza un máximo en la mitad de la frontera y disminuye hasta ser nulo en los vértices.

Hallado el vector potencial anterior, el último paso es calcular el parámetro de orden en el dominio. Ya que se está aplicando el modelo lineal GL, nótese que el problema se ha simplificado a resolver autovalores y autovectores. La resolución del parámetro de orden también ha sido desarrollada mediante un algoritmo implementado en Matlab. Como era de esperarse, en la resolución se obtienen un sin número de autovalores (por analogía puede mencionarse el caso de la ecuación de Schrödinger de una partícula confinada en una barrera de potencial infinita. En este caso existen infinitos autovalores correspondientes a los distintos niveles de energía permitidos), de los cuales, sin embargo, el que resulta útil es aquel que posee un valor mínimo mayor a cero (estado fundamental) (Tinkham, Introduction to Superconductivity, 1996). En parte, esto se requiere porque el modelo GL minimiza la energía libre, así que se busca valores de los parámetros del modelo GL que cumplan este objetivo. Al aplicar el algoritmo desarrollado el resultado obtenido es:

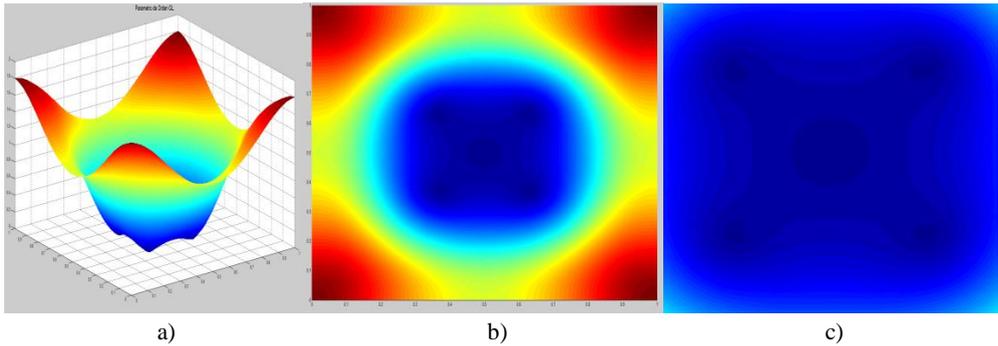


Fig. 3.3a) Parámetro de Orden en Dominio Cuadrado 3D, b) Parámetro de Orden 2D, c) Zoom de Vórtices de Abrikosov. Campo Magnético Adimensional Aplicado $H_e=0.32$.

En la Fig. 3.3 a) se observa la variación del parámetro de orden en el dominio. En los vértices el parámetro llega a su valor máximo. Esto quiere decir que esta zona permanece aún en estado superconductor. Sin embargo, conforme se avanza hacia el centro del dominio el parámetro de orden disminuye. Existen 5 regiones de interés en las cuales el parámetro de anula. Estas regiones forman una estructura de cuatro nodos con simetría cuadrada y el quinto en el centro tal como se observa en Fig.3.3 b) y c). Estas zonas representan los vórtices de Abrikosov en una muestra mesoscópica. Es en estos puntos por donde el campo magnético externo inicia su penetración en la muestra. Recuérdese además, que se está utilizando Al, que es un superconductor tipo I en muestras macroscópicas por lo que resulta interesante la presencia de vórtices.

Es interesante también conocer cómo influye la variación del campo magnético externo aplicado sobre la muestra en el comportamiento del parámetro de orden. En la Fig.3.4 se ilustra la variación de Ψ para un campo aplicado adimensional H_e de 0.0871, 0.20, 0.23 y 0.2544 respectivamente. Para el campo menor la muestra se encuentra prácticamente en estado superconductor, a excepción de la región central donde el parámetro de orden presenta un valor nulo en su magnitud. Existe un solo vórtice. Cuando el campo se aumenta a 0.2 el área de la región en estado normal crece, sin embargo aún no se observan vórtices adicionales (sin embargo esto no implica que no existan vórtices adicionales. Véase el siguiente capítulo). Para un valor de 0.23 del campo magnético, la región central se torna cuadrada y crece aún más. Para un valor de 0.2544 la región central es cuadrada y en su interior aparecen cuatro vórtices. El estado superconductor retrocede hacia los vértices del dominio y la muestra inicia su transición al estado normal conductor.

Es importante recordar que se está utilizando el modelo lineal adimensional GL, por lo que He es adimensional y no posee una unidad específica para estas simulaciones, sin embargo utilizando las expresiones (2.2) es posible calcular su valor si se requiere. En las simulaciones de este capítulo el objetivo es enfocarse en el comportamiento de los vórtices, por lo que conocer los valores con unidades de los parámetros para este fin no es de relevancia.

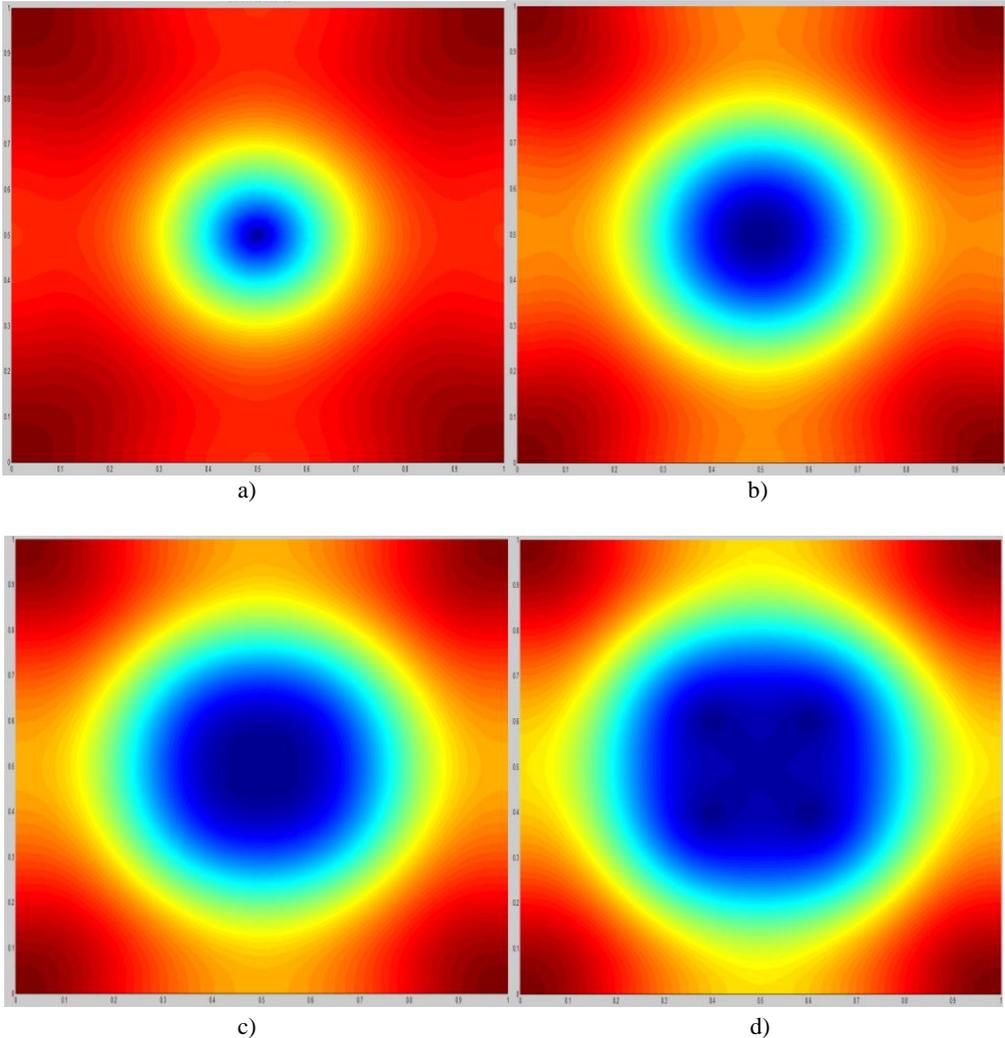
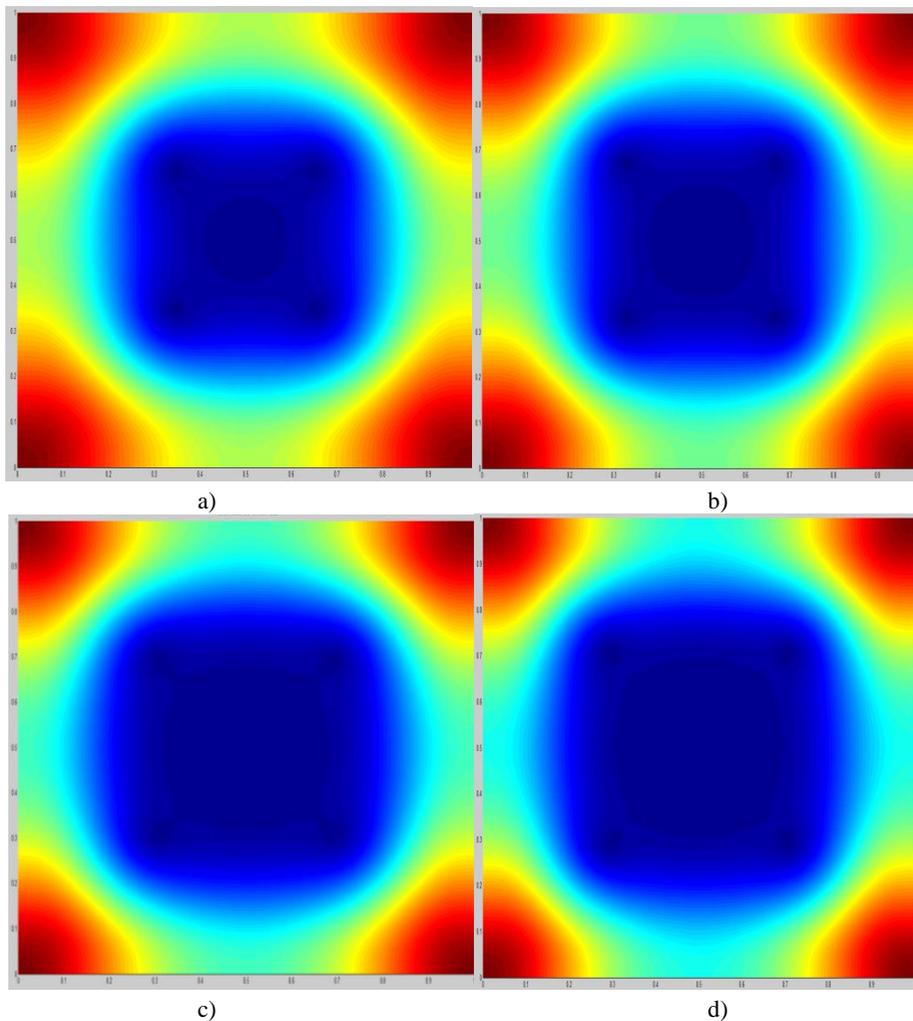


Fig. 3.4 Variación del Parámetro de Orden en Función del Campo Magnético Aplicado. a) $He=0.0871$, b) $He=0.20$, c) $He=0.23$, d) $He=0.2544$.

Posteriormente, al aumentar el campo, aparece un quinto vórtice plenamente visible Fig.3.5 b). Los cuatro primeros se alejan entre sí. Si se aumenta aún más el campo, la distancia entre los vórtices aumenta más y el estado superconductor en los vértices del dominio tiende a desaparecer Fig.3.5 f):



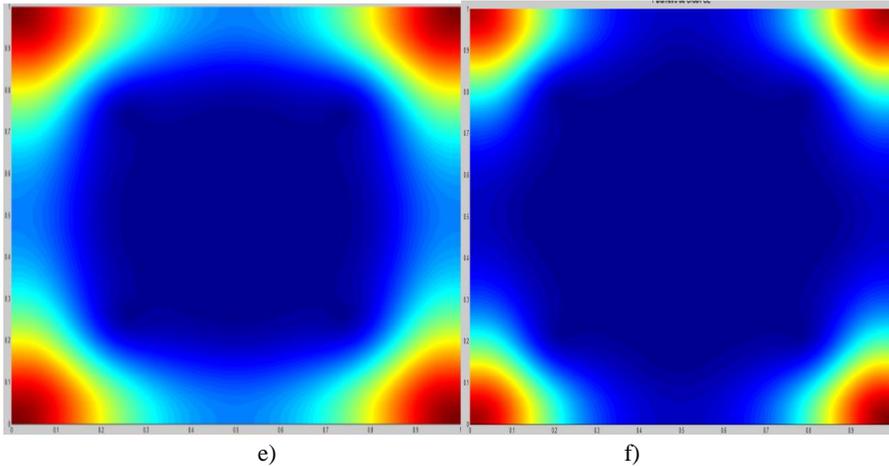


Fig. 3.5 Variación del Parámetro de Orden. a) $He=0.32$, b) $He=0.45$, c) $He=0.51$, d) $He=0.57$, e) $He=0.76$, f) $He=1.15$.

Obsérvese además, que al aumentar el campo, el vórtice central aumenta de tamaño Fig.3.5 e). Este efecto es el que, a la postre, lleva a la muestra a un estado normal conductor; y donde el estado superconductor se ha perdido totalmente. También es importante recalcar que cuando se habla aquí de movimientos de los vórtices, no se refiere a un movimiento real en el sentido de que varían en el tiempo. Recuérdese que se está tratando aun el caso estacionario. El asunto es que al variar el campo aplicado, los vórtices que aparecen para cada valor de campo se originan en distintas localizaciones de la muestra en comparación con campos anteriores. El movimiento real de los vórtices se observará en el caso de las simulaciones para el modelo TDGL.

Por otra parte, al tratarse de una simulación numérica, los resultados deberían ser validados mediante experimentación; después de todo como saber si lo que se ha obtenido es correcto. Si bien es cierto, en el presente trabajo no se ha realizado experimentación física; sin embargo, existen investigaciones de diversos autores sobre el tema que presentan imágenes de simulaciones similares que han permitido corroborar la validez del comportamiento de la simulación presentada, y por ende confirmar que el código desarrollado es correcto. Por ejemplo en la investigación de (Deang, 1997) se ilustran las siguientes imágenes de simulaciones sobre muestras superconductoras cuadradas sometidas a un campo externo creciente Fig.3.6. Es evidente que el comportamiento de la simulación del presente trabajo concuerda con Deang (1997):

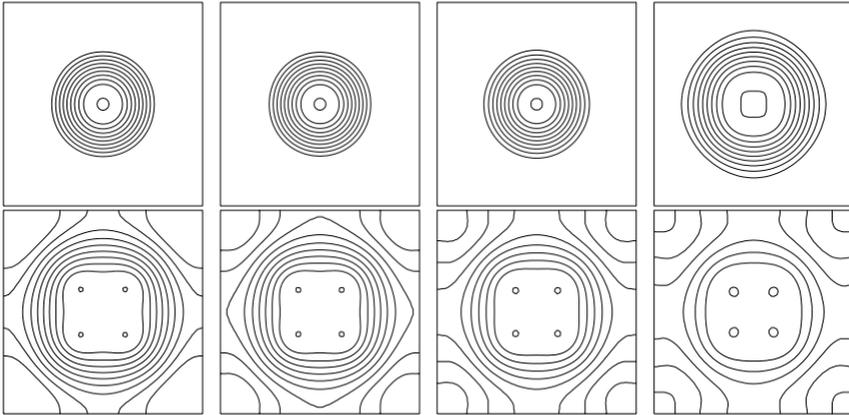


Fig. 3.6 Simulación Obtenida en Trabajo de Deang, 1997.

De la misma manera, Kim et al. (2009) presentan la simulación en una muestra 2D cuadrada, donde obtiene el siguiente resultado Fig.3.7. Similares simulaciones se pueden hallar en los trabajos de Chibotaru et al. (2005):

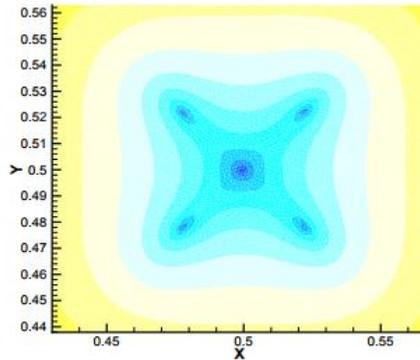


Fig. 3.7 Simulación Vórtices de Abrikosov en Muestra Cuadrada. Trabajo de Kim et al. 2009.

¿Cómo afecta la calidad del mallado en la simulación de los vórtices? Este es un punto importante. Para averiguarlo se ha implementado en Matlab, sobre la muestra cuadrada, un mallado uniforme compuesto de elementos triangulares rectángulos Fig.3.1 c). Con este mallado se obtuvieron resultados similares (Fig.3.8) a los obtenidos con los mallados a y b). Sin embargo, con tiempos de computo más largos en comparación con aquellos obtenidos con el mallado Delaunay. En esencia, esto se debe a que para obtener resultados adecuados, se requirió una mayor cantidad de nodos que los necesarios con el método de triangulación Delaunay.

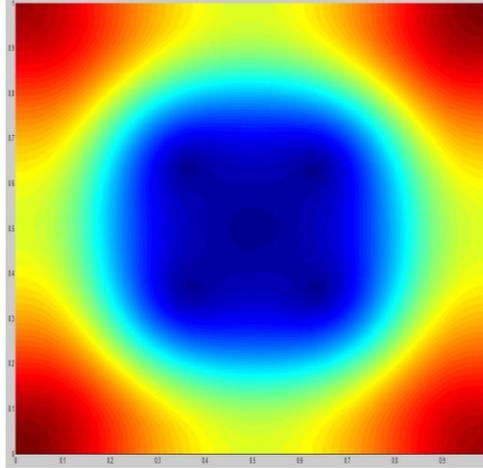


Fig. 3.8 Vórtices de Abrikosov con Mallado Uniforme. $He=0.32$.

3.1.2 Vórtices de Abrikosov en Dominio Plano Triangular.

En la segunda simulación se utiliza un dominio de triángulo equilátero cuya longitud de lados es igual a la unidad. El mallado generado en Gmsh para el cálculo por MEF es el ilustrado en la Fig.3.9. El primer mallado se compone de 7664 elementos y 3833 nodos, el segundo de 30176 elementos y 15089 nodos y el tercero de 16768 elementos y 8385 nodos. Para este caso se cambió del valor de K . Con el fin de observar el comportamiento de los vórtices se escogió el caso con $K=1$, sin que esto represente necesariamente algún material en particular. Puede confirmarse, sin embargo, que con este valor de K , las dimensiones de la muestra se encuentran aún en el rango mesoscópico.

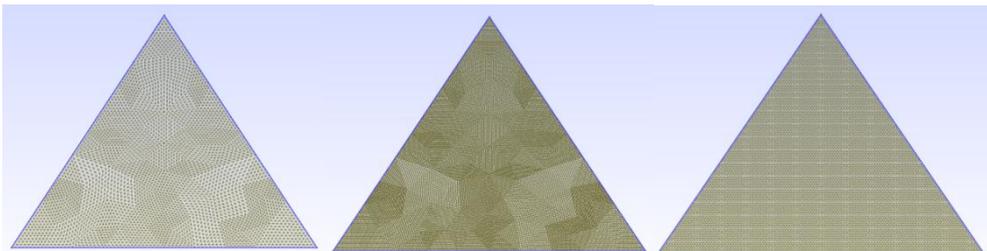


Fig. 3.9 Mallado de Dominio Triangular.

El potencial magnético obtenido utilizando el algoritmo desarrollado en Matlab para este dominio triangular es el presentado en Fig.3.10. Obsérvese como, al igual que para el caso anterior, este potencial cumple las condiciones de ser libre de divergencia y poseer componente nula en la frontera. También la magnitud del potencial alcanza un máximo en el centro de cada lado y se anula en los vértices.

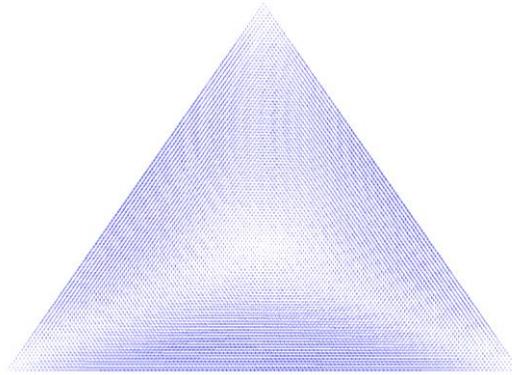


Fig. 3.10 Vector Potencial Magnético en Dominio Triangular.

Al correr el algoritmo para el cálculo del parámetro de orden por MEF, se obtiene la variación representada en la Fig.3.11. El campo magnético externo aplicado externo es de 80 adimensional. Al igual que para el caso cuadrado, se observa la concentración de estado superconductor en los vértices del dominio. Por otro lado, en este dominio se obtiene la presencia de tres vórtices de Abrikosov. Estos tres vórtices además presentan la simetría de la geometría triangular en su configuración espacial.

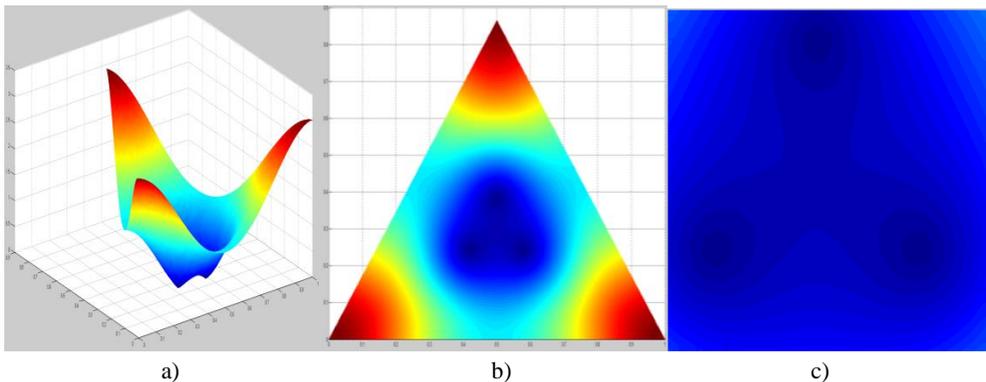
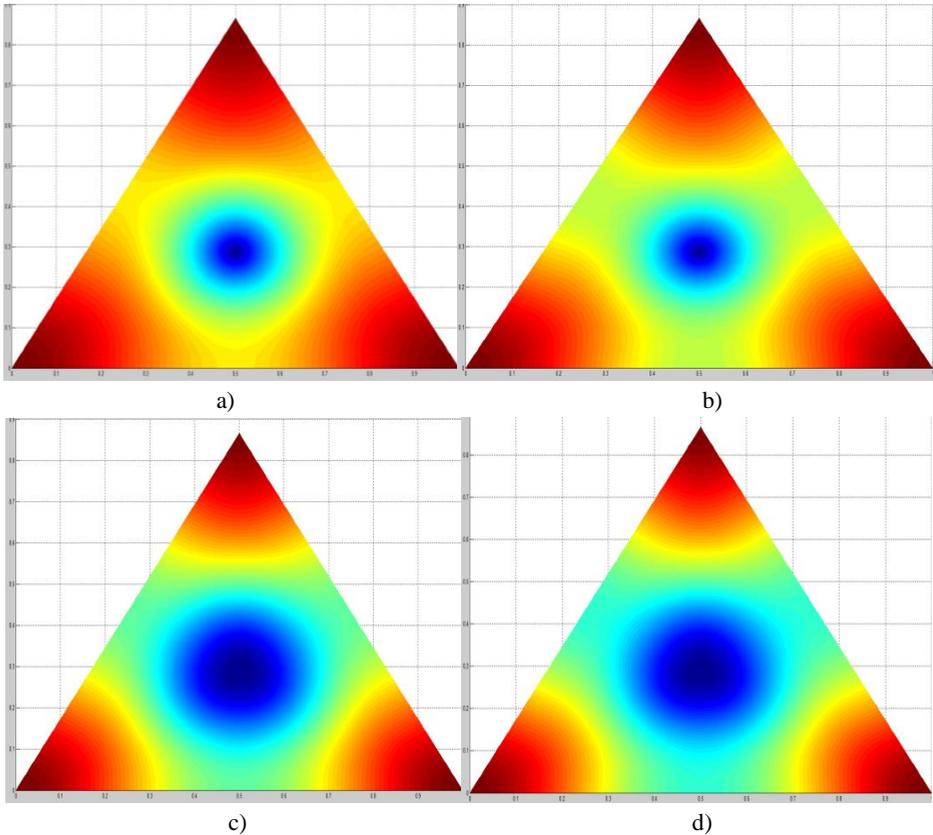


Fig. 3.11 Parámetro de Orden en Dominio Triangular Equilátero, 3D, b) Parámetro de Orden 2D, c) Zoom de Vórtices de Abrikosov. Campo Magnético Aplicado $H_e=80$.

En general, salvo las evidentes diferencias en simetría, el comportamiento del parámetro de orden al variar el campo externo aplicado es similar para este dominio como lo fue para el caso de dominio cuadrado. Esto quiere decir, tal como se evidencia en la Fig.3.12, que para cierto valor de campo aplicado, inicia la formación del estado normal conductor a través de un solo vórtice. Al incrementar el campo, este vórtice aumenta de tamaño mientras que, al mismo tiempo, el estado superconductor remanente disminuye retrocediendo hacia los vértices del dominio. El vórtice central adquiere la simetría del dominio mientras crece tal como se observa en la Fig.3.12 d). En cierto valor del campo externo, en el interior del vórtice central nacen tres vórtices Fig.3.12 e). Al incrementar el campo aún mas, un cuarto vórtice central aparece Fig.3.12 f).



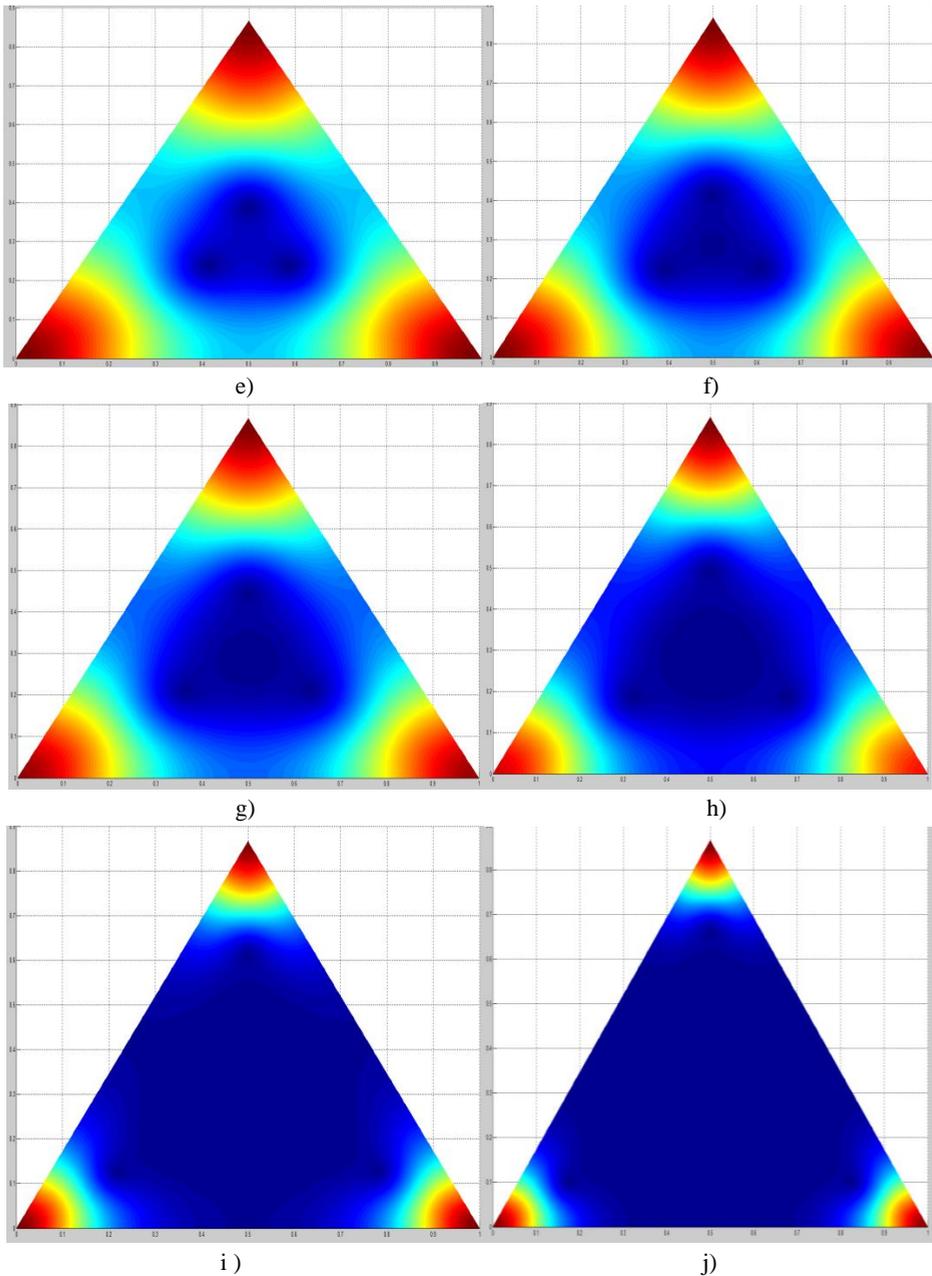


Fig.3.12 Variación del Parámetro de Orden. a) $He=40$, b) $He=50$, c) $He=60$, d) $He=70$, e) $He=90$, f) $He=100$, g) $He=120$, h) $He=160$, i) $He=360$, j) $He=580$.

Comparaciones cualitativas en el comportamiento del parámetro de orden en un dominio de triángulo equilátero puede ser hallada en trabajos de simulaciones tales como los citados para el caso de dominio cuadrado. Sin embargo, resulta interesante

conocer cómo influye el tipo de triángulo, y por ende la simetría del dominio, sobre la formación de los vórtices. Para ello, se estudian a continuación simulaciones sobre dominios triangulares isósceles y escalenos. Para ello, se inicia con una simulación sobre un dominio triangular isósceles de base y altura la unidad Fig.3.13:

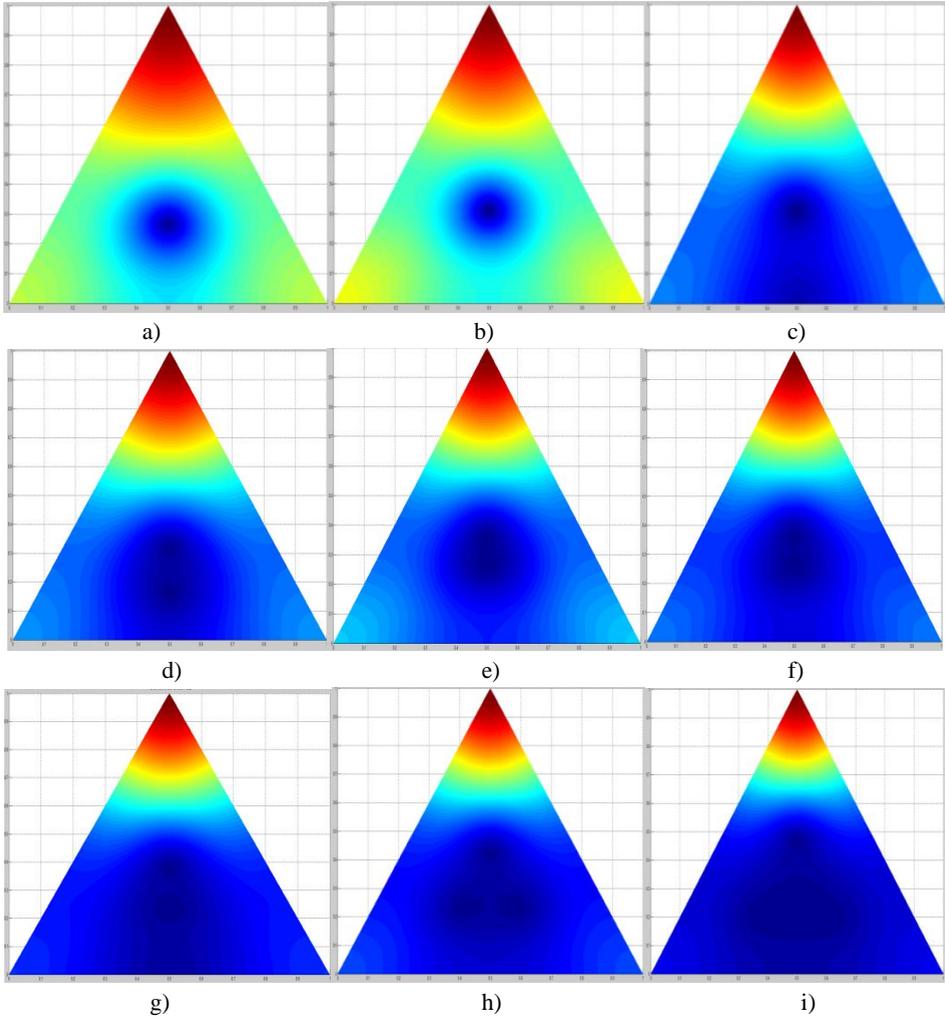


Fig. 3.13 Variación del Parámetro de Orden en Dominio Isósceles. a) $He=30$, b) $He=40$, c) $He=48$, d) $He=50$, e) $He=60$, f) $He=63$, g) $He=70$, h) $He=90$, i) $He=200$.

La variación del parámetro de orden en el dominio isósceles es diferente a la correspondiente en dominio equilátero. Principalmente, la concentración de superelectrones tiende a acumularse en el vértice más agudo. La nucleación del primer vórtice ocurre en un valor de campo magnético similar al correspondiente de dominio equilátero; sin embargo, los siguientes vórtices en aparecer, si bien lo hacen en un campo similar, la simetría es notablemente distinta a la del triángulo equilátero. Además, se observa que el siguiente vórtice en aparecer no lo hace dentro del primero, sino que se origina desde el lado opuesto al vértice más lejano Fig.3.13 c). Este hecho contrasta con lo que ha ocurrido en las simulaciones anteriores donde los vórtices nuclean siempre cerca del centro de gravedad de la muestra. La nucleación de los primeros dos vórtices ocurre en un campo relativamente cercano al que origina el segundo vórtice Fig.3.13 e) en contraste con lo ocurrido para el caso anterior Fig.3.12.

Conforme el campo se incrementa, se observa que la primera nucleación no es definitiva. El núcleo formado se separa nuevamente en dos vórtices y se desplazan hacia el vértice lejano Fig.3.13 f) y g). Además, el segundo vórtice aumenta de tamaño, pero si se aumenta el campo ligeramente, este vórtice se divide en dos, formándose así una configuración triangular con el primero Fig.3.13 h). Esta configuración no permanece en ese estado por mucho, ya que al variar el campo ligeramente, los dos vórtices formados nuevamente se unen entre sí Fig.3.13 i). Para siguientes incrementos en el campo, el núcleo formado crece hasta que en algún punto la muestra se encontrará en un estado normal conductor. Se concluye entonces que un ligero cambio en la geometría del dominio (altura de triángulo equilátero 0.866 y de isósceles 1 en términos adimensionales) genera un comportamiento distinto de los vórtices.

La siguiente simulación es en un dominio escaleno de ángulo obtuso, de base unidad y altura 0.9. Como es de esperarse, basados en la simulación anterior, la simetría influye en el comportamiento de los vórtices Fig.3.14. Sin embargo, al ser completamente asimétrico el dominio, no se observa en la simulación la formación de una estructura triangular de vórtices como en los casos precedentes. De hecho, solo dos vórtices se formaron, e iniciaron la nucleación en un valor de campo relativamente cercano al de la formación del segundo vórtice Fig. 3.14 b).

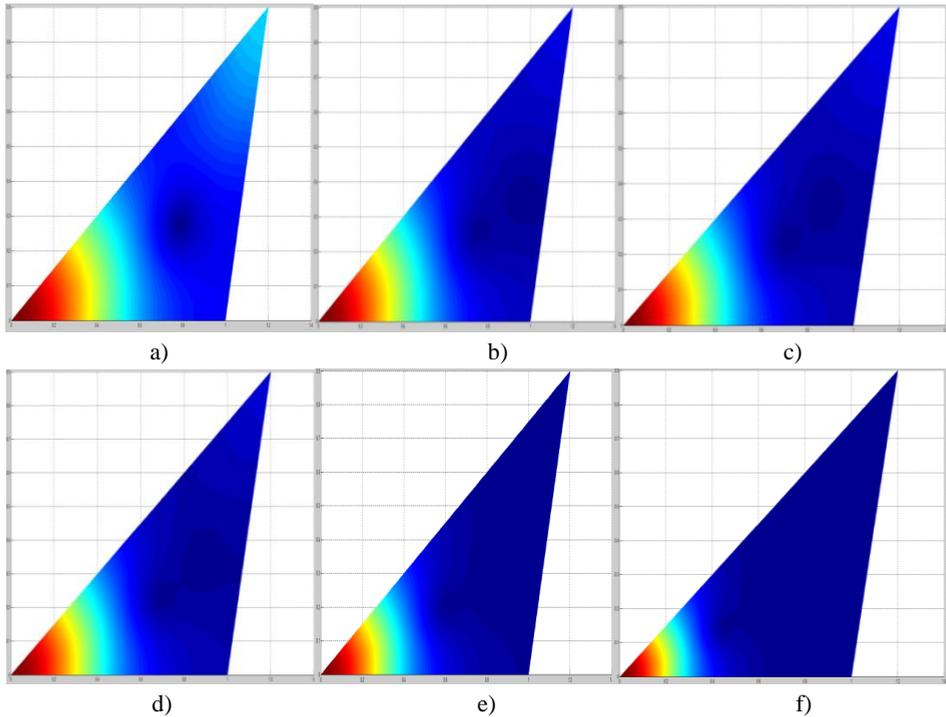


Fig. 3.14 Variación del Parámetro de Orden en Dominio Escaleno. a) $He=50$, b) $He=60$, c) $He=70$, d) $He=73$, e) $He=120$, f) $He=220$.

3.1.3 Vórtices de Abrikosov en Dominio Plano Hexagonal.

El dominio es un hexágono de apotema igual a la unidad. El mallado generado para el dominio hexagonal es el presentado en Fig.3.15. El número de nodos es de 12481 y 24960 elementos. En este caso $K=1$.

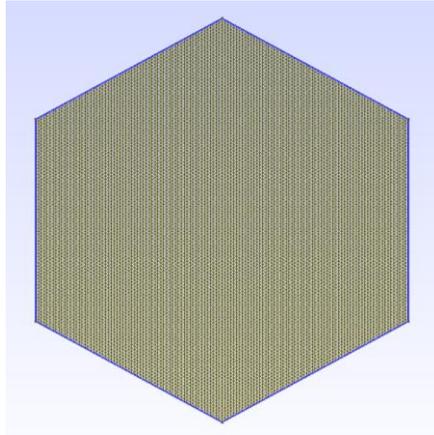


Fig. 3.15 Mallado de Dominio Hexagonal.

El vector potencial magnético resultante es el ilustrado en Fig.3.16.:

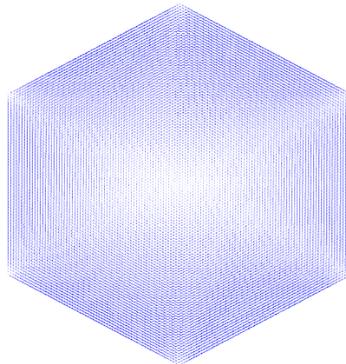


Fig. 3.16 Vector Potencial Magnético en Dominio Hexagonal.

Para este dominio, se observó, al realizar el cálculo con el algoritmo desarrollado, que si bien la presencia de vórtices existe, su tamaño es mucho más pequeño en comparación a los casos anteriores. Es así que se utilizó una escala igual a la raíz del parámetro de orden para visualizar los vórtices con mayor facilidad. En ocasiones es posible, o incluso necesario, utilizar una escala logarítmica que permita la visualización de los vórtices. De esta manera, con la escala indicada, en el dominio en estudio se obtiene la siguiente configuración de los vórtices Fig. 3.17:

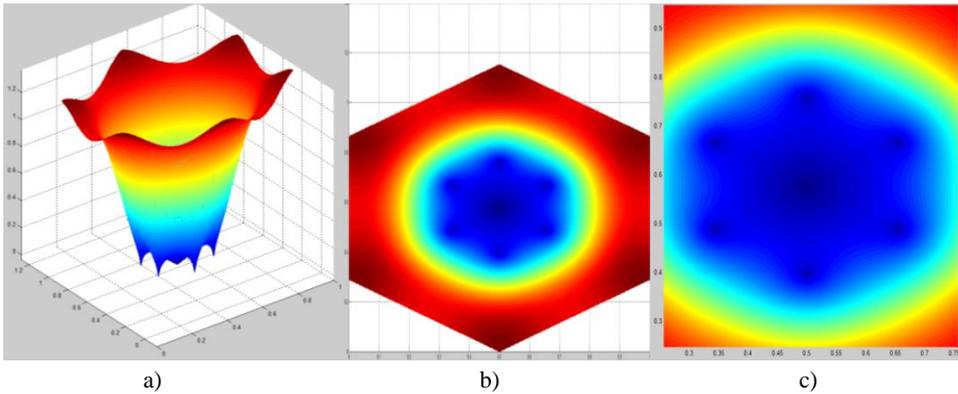


Fig. 3.17 a) Raíz de Parámetro de Orden en Dominio Hexagonal, 3D, b) Parámetro de Orden 2D, c) Zoom de Vórtices de Abrikosov. Campo Magnético He aplicado de 90.

En general, el comportamiento es semejante a los casos simétricos anteriores. Las diferencias ocurren en los tamaños de los vórtices. Una vez más la concentración de electrones superconductores ocurre en los vértices del dominio. Es interesante el patrón que forman los vórtices, que concuerda con la simetría del dominio. Además, los vórtices se alinean siguiendo las diagonales principales del hexágono. Vale la pena estudiar un poco más el efecto de la simetría sobre la configuración de los vórtices. A continuación se simula el modelo lineal GL sobre otros dominios poligonales regulares.

3.1.4 Vórtices de Abrikosov en Dominio Plano Pentagonal.

El dominio es un pentágono de apotema igual a la unidad. El mallado generado para el dominio es el presentado en Fig.3.18. El número de nodos es de 10401 y 20800 elementos. El valor de $K=1$.

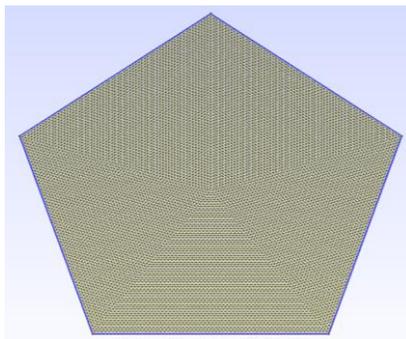


Fig. 3.18 Mallado de Dominio Pentagonal.

El vector potencial magnético resultante es el ilustrado en Fig.3.19.:

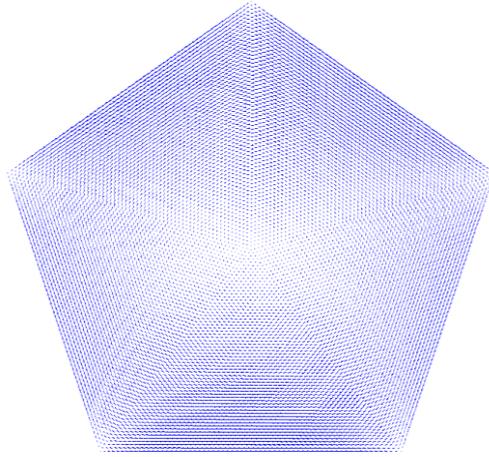


Fig. 3.19 Vector Potencial Magnético en Dominio Hexagonal.

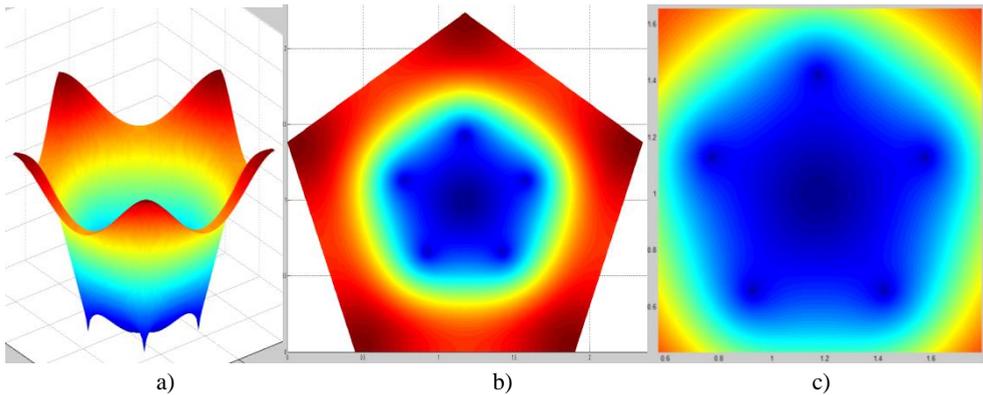


Fig. 3.20 a) Raíz de Parámetro de Orden en Dominio Pentagonal 3D, b) Parámetro de Orden 2D, c) Zoom de Vórtices de Abrikosov. Campo Magnético He aplicado de 20.

El comportamiento es similar al correspondiente para dominio hexagonal. Se observa una vez más una influencia directa en los vórtices por parte de la simetría del dominio.

3.1.5 Vórtices de Abrikosov en Dominio Octogonal.

El dominio es un octágono de lado igual a 0.4 unidades. El mallado generado para el dominio es el presentado en Fig.3.21. El número de elementos es de 33280 y 16641 nodos. El valor de $K=1$.

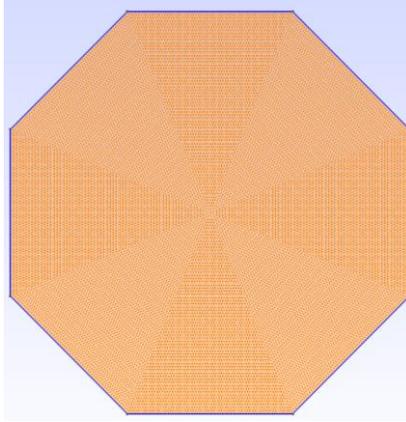


Fig. 3.21 Mallado de Dominio Octogonal.

El vector potencial magnético sobre este dominio es el siguiente:

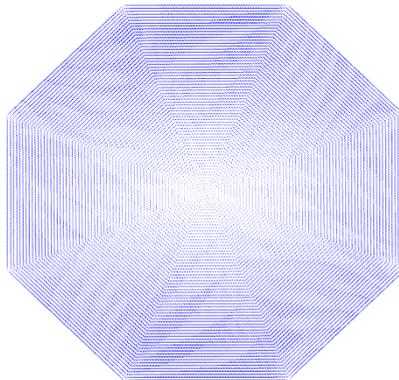


Fig. 3.22 Vector Potencial Magnético en Dominio Octogonal.

La variación del parámetro de orden y la configuración de los vórtices de Abrikosov obtenidos para este dominio es el representado en la Fig.3.23. Se observa, como en el resto de polígonos, que los vórtices se alinean siempre con la diagonal al centro de gravedad.

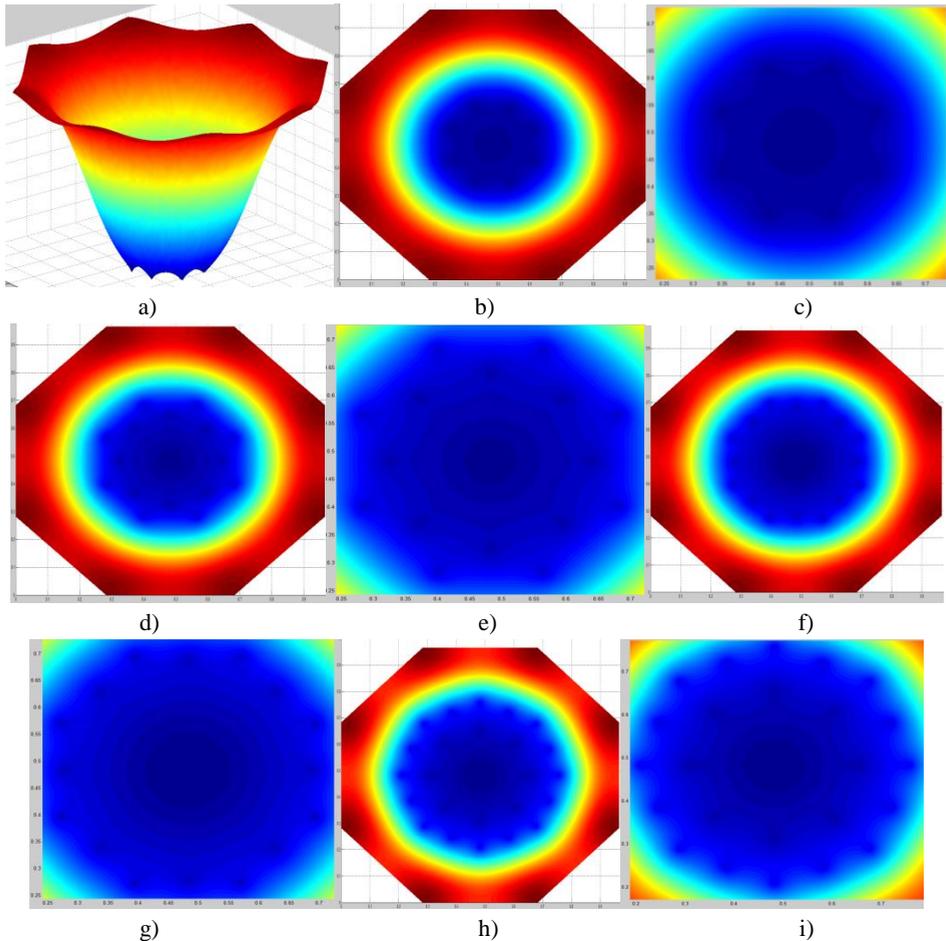


Fig. 3.23 a) Raíz de Parámetro de Orden en Dominio Octogonal 3D, b) Parámetro de Orden 2D, c) Zoom de Vórtices de Abrikosov. Campo Magnético He adimensional aplicado de 120, d) Raíz Decima de Parámetro de Orden en He=230, e) Zoom de Vórtices de Abrikosov, f) y g) He=260, h) e i) He=330.

Para apreciar de manera más adecuada el patrón de formación de los vórtices en este dominio, se probó un cambio de escala. Para ello se halló la raíz quinta del parámetro de orden. Adicionalmente se varió el campo a He=230. Con ello resultó posible vislumbrar el patrón de formación de los vórtices de manera más detallada. Una de las peculiaridades en este caso es que se aprecia la presencia de una segunda capa de vórtices. La primera formada por los vórtices de la Fig.3.23 a), b) y c). Mientras que la segunda capa nace del vórtice central de la Fig. c). Se observa que el tamaño de los vórtices de la primera capa son menores, y además, se desplazan hacia los vértices del octágono. Por otro lado, los vórtices de la segunda capa se desplazan

hacia el centro de los lados del octágono y lo hacen con mayor rapidez, siempre tomándose en cuenta el significado de movimiento y rapidez discutido anteriormente.

3.1.6 Vórtices de Abrikosov en Dominio Tipo "L".

El dominio consiste en una "L" de lado mayor la unidad y lado menor 0.5 unidades. El mallado utilizado consiste de 6273 nodos y 12544 elementos Fig. 3.24. El valor de $K=1$:

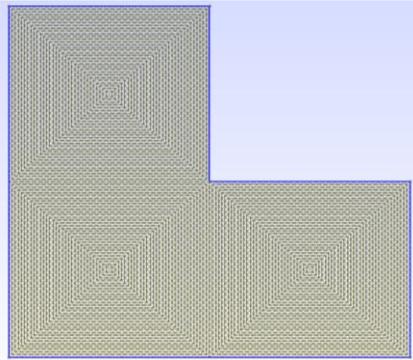


Fig. 3.24 Mallado de Dominio Tipo "L".

El vector potencial magnético resultante es el ilustrado en Fig.3.25:

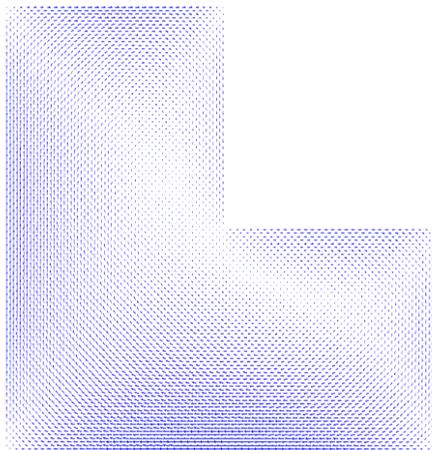
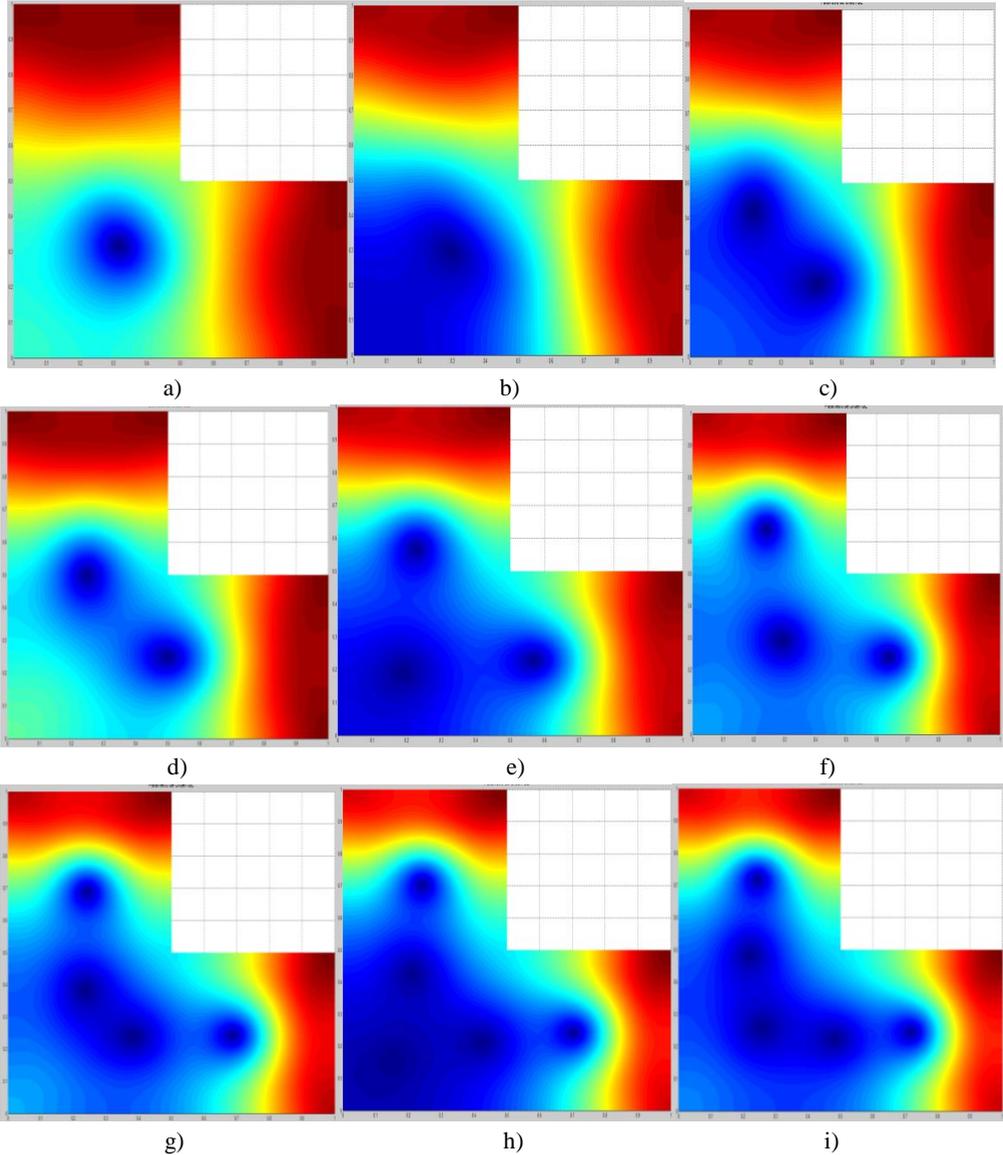


Fig. 3.25 Vector Potencial Magnético en Dominio Tipo "L".

¿Cómo influye esta geometría sobre el parámetro de orden? La Fig.3.26 muestra la variación del parámetro sobre el dominio. Lo primero en observar es que la concentración de superelectrones se acumula cerca de los vértices adyacentes al lado corto, pero su distribución es distinta a los casos anteriores. Su tendencia es formar un patrón rectangular cerca de los vértices. Por otro lado, para un campo He de 30 se aprecia que se forma el primer vórtice.



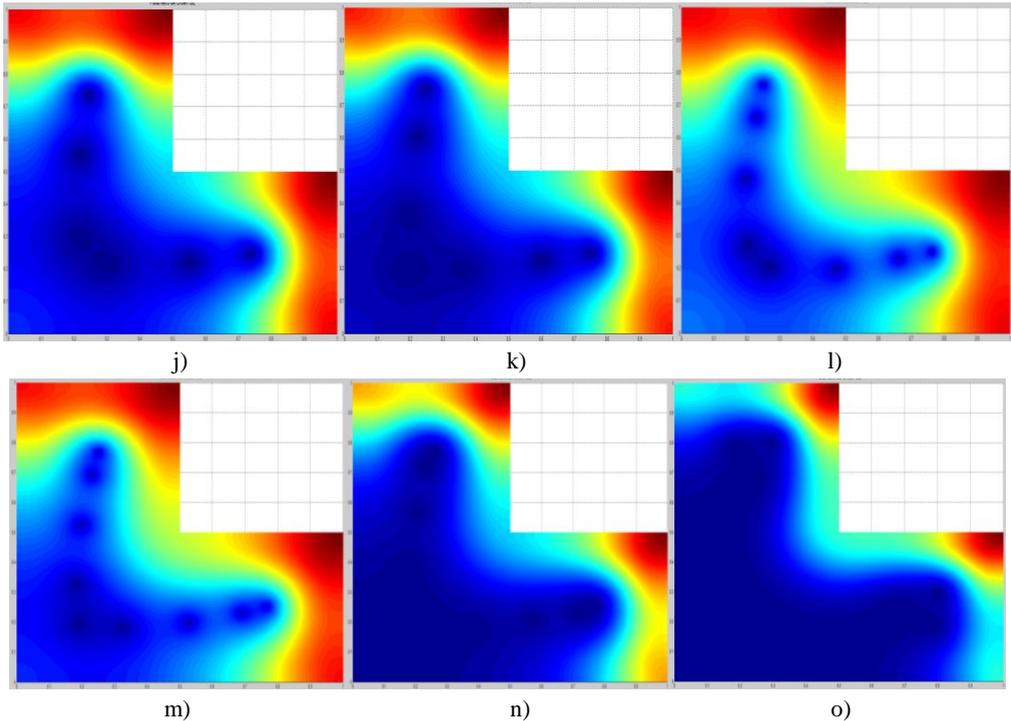


Fig. 3.26 Variación del Parámetro de Orden en Dominio Tipo "L". a) Campo adimensional $He=30$, b) $He=38$, c) $He=39$, d) $He=43$, e) $He=50$, f) $He=60$, g) $He=70$, h) $He=75$, i) $He=80$, j) $He=85$, k) $He=90$, l) $He=100$, m) $He=115$, n) $He=125$, o) $He=135$.

En este caso se observa a simple vista la formación de 9 vórtices. Esta visualización se ha logrado utilizando en la Fig.3.26 m) la raíz del parámetro de orden. El patrón que conforman los vórtices es similar al dominio. Además, se observa que los vórtices se desplazan hacia los lados cortos del dominio.

3.1.7 Vórtices de Abrikosov en Dominio Cuadrado con Abertura.

A continuación se presenta una simulación realizada sobre el mismo dominio que la primera. Sin embargo, la diferencia radica en que ahora se introduce una abertura en el dominio con la finalidad de observar cómo afecta su presencia en la formación de los vórtices. Para iniciar, se introduce una abertura cuadrada de 0.2 veces el lado, que es igual a la unidad. El mallado es el ilustrado en Fig.3.27 y consiste en 8128 nodos y 16256 elementos. El valor de $K=1$. Se indica que estas simulaciones no han sido corroboradas con resultados de trabajos similares:

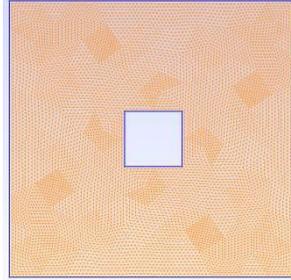


Fig. 3.27 Mallado Dominio Cuadrado con Abertura.

El vector potencial magnético resultante se presenta a continuación:

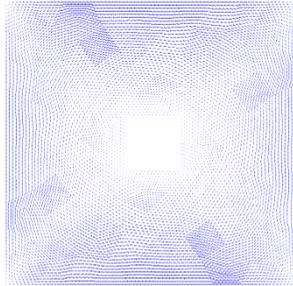


Fig. 3.28 Vector Potencial en Dominio Cuadrado con Abertura.

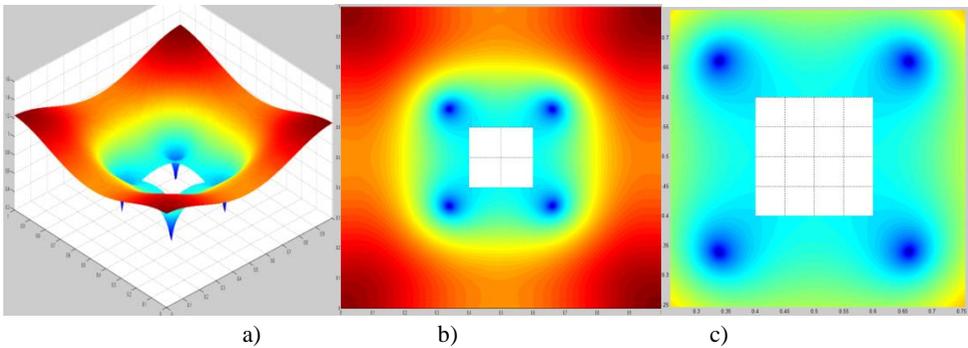


Fig. 3.29 a) Raíz de Parámetro de Orden en Dominio Cuadrado con Abertura Cuadrada, 3D, b) Parámetro de Orden 2D, c) Zoom de Vórtices de Abrikosov. Campo Adimensional Magnético He aplicado de 60.

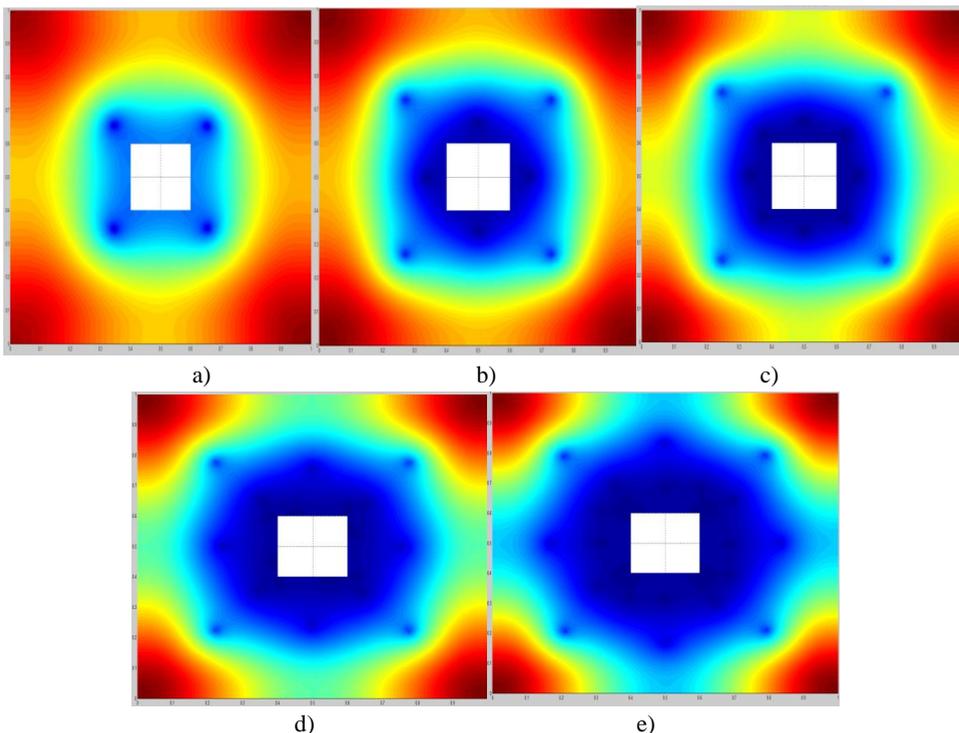


Fig. 3.30 Variación del Parámetro de Orden en Dominio Cuadrado de abertura Cuadrada. a) Campo adimensional $He=70$, b) $He=110$, c) $He=140$, d) $He=180$, e) $He=220$.

La formación de los vórtices se inicia cerca de la abertura. En general, el comportamiento es similar al hallado en la primera simulación. El estado superconductor se retrae hacia los vértices externos del dominio. El movimiento de los vórtices es similar. Se observa la formación de vórtices adicionales cerca de la abertura. Sin embargo, esto se debe a que la escala utilizada en esta simulación permite observar su formación, lo que quiere decir que, si se varía la escala de la primera simulación realizada en este capítulo, se obtendrán vórtices adicionales. ¿Cómo afecta el tamaño de la abertura en la formación de los vórtices? Para responder esta pregunta, a continuación se presenta la simulación con un orificio de 0.6 veces el lado del cuadrado de lado unidad Fig. 3.31:

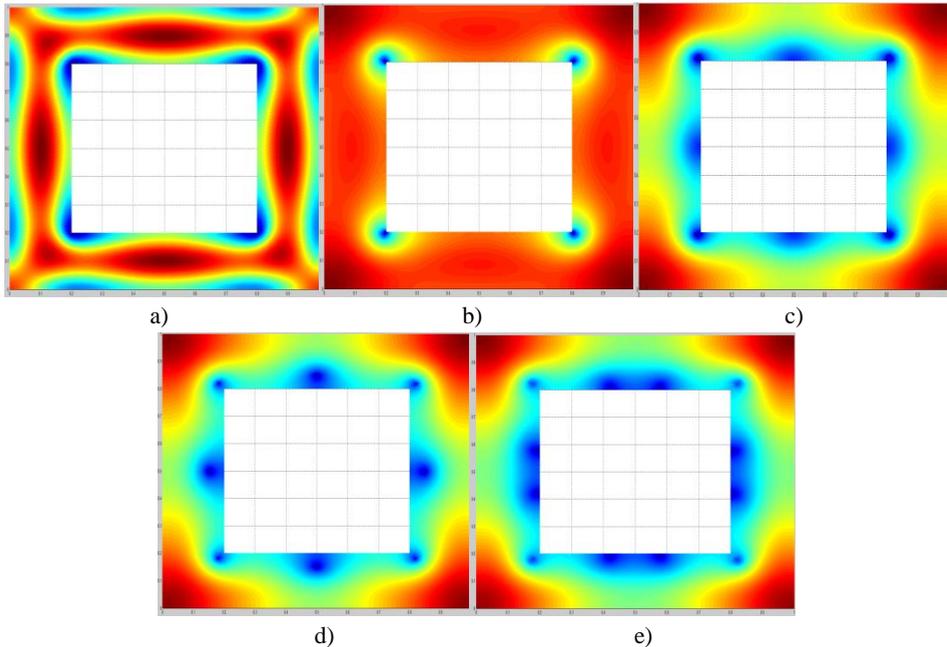


Fig. 3.31 Variación del Parámetro de Orden en Dominio Cuadrado de abertura Cuadrada. a) $He=60$, b) $He=150$, c) $He=180$, d) $He=200$, e) $He=230$.

Lo interesante de esta última simulación, es que los vórtices, con total claridad, se originan en los vértices de la abertura Fig. 3.31 b). Para valores de campo aplicado más altos, también se observa que vórtices adicionales aparecen en los puntos medios de la abertura. Es también interesante notar que, para el mismo valor de $He=60$, utilizado en la simulación anterior, en el presente dominio no se encuentra aún presencia de vórtices, mientras que en el caso anterior, los vórtices están plenamente formados en este magnitud de campo. Es decir, se requiere mayor intensidad de campo para que la aparición de los vórtices sea notable. Ahora, ¿afecta la forma de la abertura en la formación de los vórtices?. En la siguiente simulación, utilizamos la abertura inicial, pero truncada para formar un triángulo rectángulo. Los resultados obtenidos son:

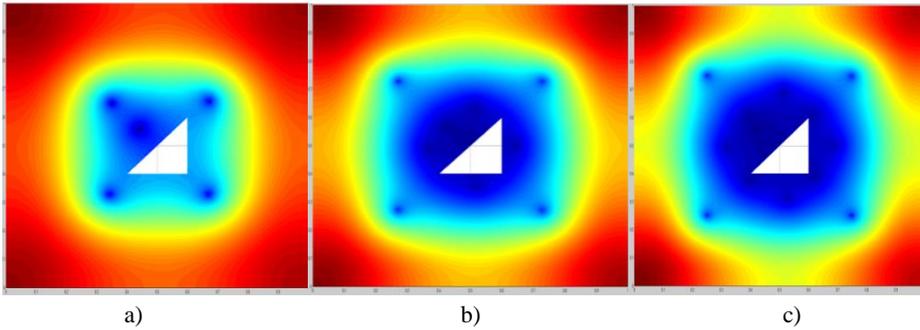
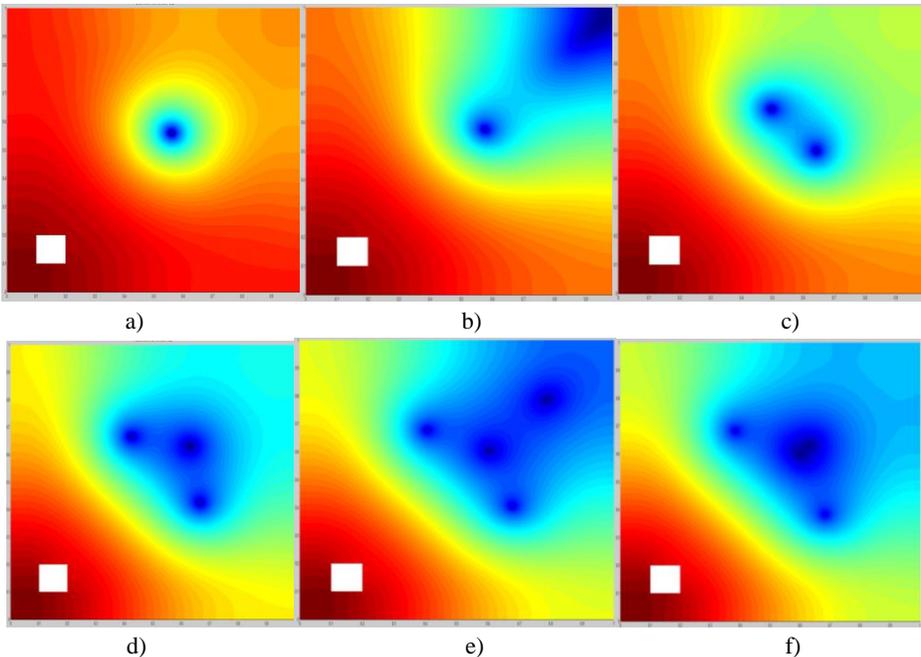


Fig. 3.32 Variación del Parámetro de Orden en Dominio Cuadrado de abertura Triangular. a) Campo adimensional $He=60$, b) $He=110$, c) $He=135$.

Se forman cuatro vórtices diagonales como en los casos anteriores. Sin embargo, para el mismo campo $He=60$, existe un cuarto vórtice que se origina en la hipotenusa del triángulo. Para un campo de $He=110$, dos vórtices más se originan desde los puntos medios de los catetos. La retracción del estado superconductor se concentra en los vértices, pero con mayor cantidad cerca del vértice opuesto a la hipotenusa, o lado mayor de la abertura.

Ahora, si se desplaza el orificio hacia uno de los vértices, por ejemplo, se obtienen resultados interesantes sobre los vórtices Fig. 3.33:



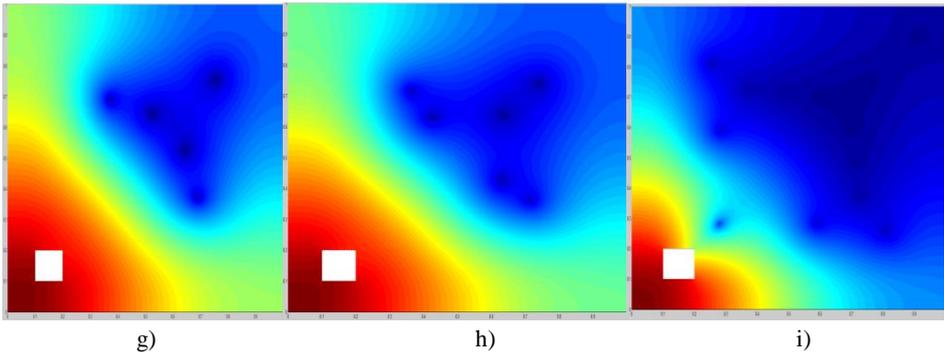


Fig. 3.33 Primer Caso: Abertura Esquina Inferior. Variación del Parámetro de Orden en Dominio Cuadrado de abertura Cuadrada. a) Campo adimensional $He=20$, b) $He=25$, c) $He=30$, d) $He=40$, e) $He=45$, f) $He=50$, g) $He=55$, h) $He=60$, i) $He=130$.

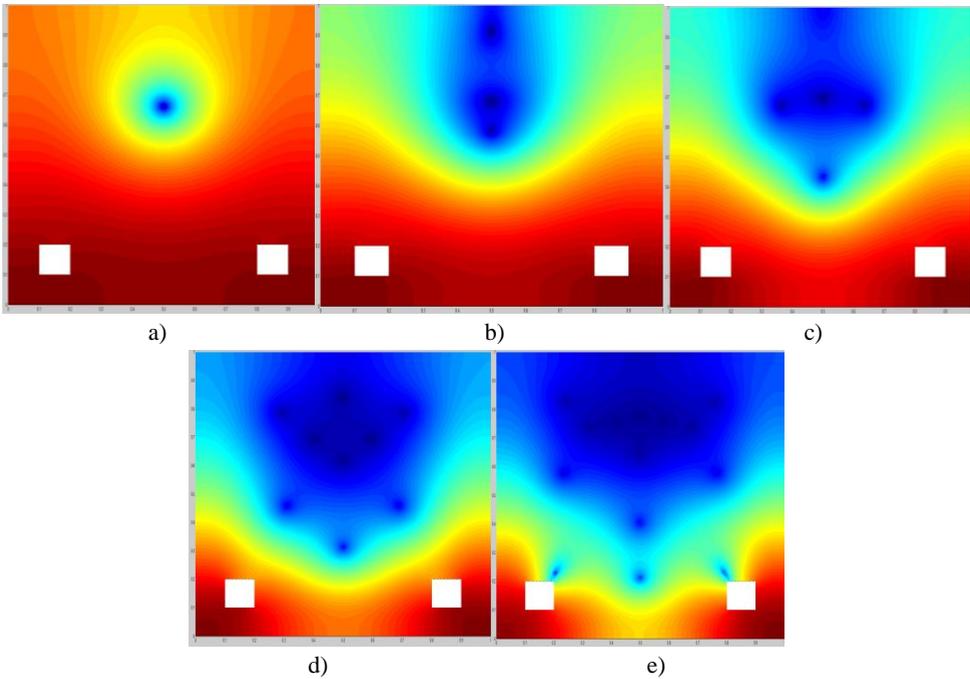


Fig. 3.34 Segundo Caso: Dos Aberturas Esquinas Inferiores. Variación del Parámetro de Orden en Dominio Cuadrado de abertura Cuadrada. a) Campo adimensional $He=20$, b) $He=40$, c) $He=80$, d) $He=100$, e) $He=150$.

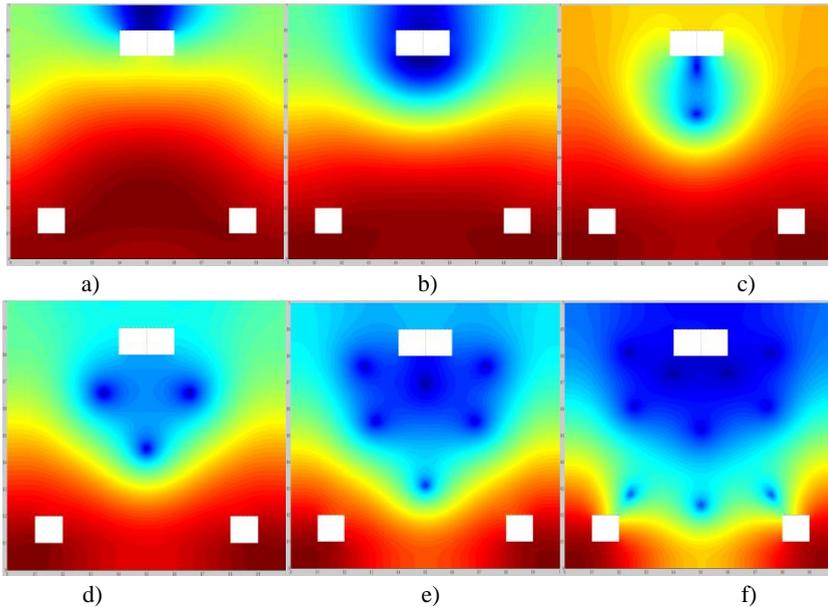
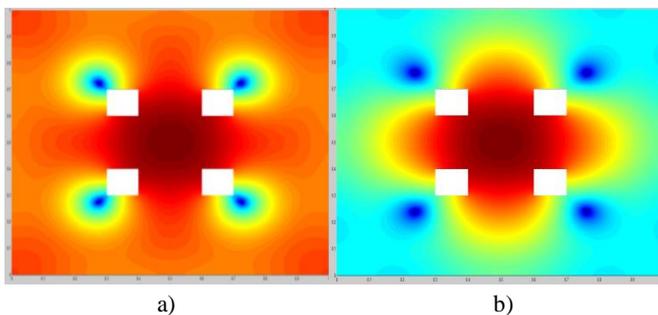


Fig. 3.35 Tercer Caso: Tres Aberturas, dos inferiores y una de Doble Tamaño superior. Variación del Parámetro de Orden en Dominio Cuadrado de abertura Cuadrada. a) Campo adimensional $He=20$, b) $He=22.5$, c) $He=40$, d) $He=60$, e) $He=90$, f) $He=140$.

En los dos primeros casos, los vórtices se originan opuestos a la/s abertura/s. Solo en el tercer caso se observa que los vórtices se originan en la abertura mayor Fig. 3.35. En todos los casos, los vórtices se desplazan en el sentido de las aberturas opuestas. No se observa una configuración particular de los vórtices. Es interesante que en el tercer caso, la menor densidad de superelectrones se aglomeran alrededor de la abertura superior. Por último, se estudiara el caso en el que se colocan cuatro aberturas cuadradas en los lugares exactos donde aparecieron los vórtices en la primera simulación de este numeral. El objetivo es observar que ocurre cuando existen orificios en donde se espera que se originen los vórtices. Para ello se aplicará el mismo campo, es decir $He=60$ Fig.3.36:



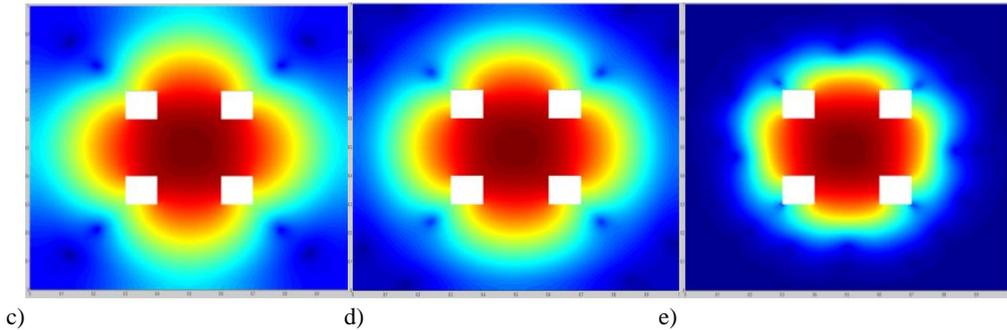


Fig. 3.36 Variación del Parámetro de Orden en Dominio Cuadrado de abertura Cuadrada. a) Campo adimensional $He=60$, b) $He=75$, c) $He=100$, d) $He=130$, e) $He=1000$.

A pesar de que las aberturas se encuentran en el lugar exacto donde se esperaba que los vórtices aparezcan, estos se desplazan, de manera que se originan adyacentes a las aberturas. Sin embargo, al comparar este caso con la simulación de la Fig.3.1, se observa una concentración máxima de superelectrones en el centro de gravedad del dominio. En el caso de la Fig.3.1 esta concentración se localizaba en los vértices, ahora, el estado normal es el que se concentra en los vértices del dominio.

3.2 Simulación del Modelo No Estacionario de Ginzburg-Landau 2D.

Una vez estudiadas las simulaciones del caso estacionario lineal, en este numeral se presentan los resultados obtenidos al aplicar el esquema LCNG al modelo TDGL. Se ha desarrollado en Matlab el MEF utilizando este esquema. El mallado se ha vinculado igualmente con Gmsh. Sin embargo, como se comprenderá, el número de iteraciones necesarias para estas simulaciones es mucho más elevado que para el caso anterior. De hecho, mientras que para el modelo lineal se armaban dos matrices de rigidez de aproximadamente 16000 elementos, para este caso se deben armar esas mismas dos matrices pero para cada intervalo de tiempo. Así que, mientras más corto sea este intervalo, más costo computacional se requiere. Situación semejante ocurre al afinar el mallado. Es por ello que se optó utilizar para cada simulación un mallado de pocos nodos, con un paso temporal relativamente corto. Si bien la finura del mallado afecta la calidad numérica de resultados, en general, la forma cualitativa de variación del parámetro de orden sigue un patrón evidente con los mallados utilizados. Además, para su validación se han utilizado las simulaciones realizadas por (Mu, A Linearized Crank-Nicolson-Garlekin Method for the Ginzburg-Landau Model, 1997), mismas que han sido corroboradas exitosamente.

3.2.1 Vórtices de Abrikosov en Dominio Cuadrado. Modelo LCNG.

Se ha generado un mallado regular dentro de un dominio cuadrado de lado igual a la unidad Fig.3.37. El número de nodos es de 1089:

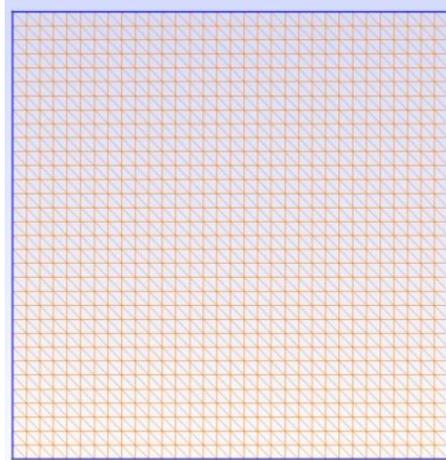


Fig. 3.37 Mallado Dominio Cuadrado.

Para el cálculo temporal se ha utilizado un intervalo de 0.05 adimensional. Como se recordará, el modelo TDGL está adimensionalizado por lo que el intervalo de tiempo no posee unidad específica. Se realizó un cálculo hasta un valor de tiempo igual a 40. El valor de k es de 10, es decir un superconductor tipo II, y el campo adimensional $H_e=3.5$. Para el valor inicial del parámetro de orden se considera que la muestra se encuentra en un estado superconductor total, es decir $|\Psi_0|^2 = 1$. Es por ello que se asume $\Psi_0 = 0.8 + 0.6i$. El valor inicial para el vector potencial es $A=(0,0)$. Todos estos parámetros han sido seleccionados acorde al ejemplo presentado por Mu (1997). Esto con el fin de lograr realizar comparaciones entre las simulaciones. Igualmente, los tiempos en los cuales se presentan las simulaciones son los intervalos 0.4, 8,10 y 40. Los resultados obtenidos al aplicar la implementación desarrollada en Matlab son:

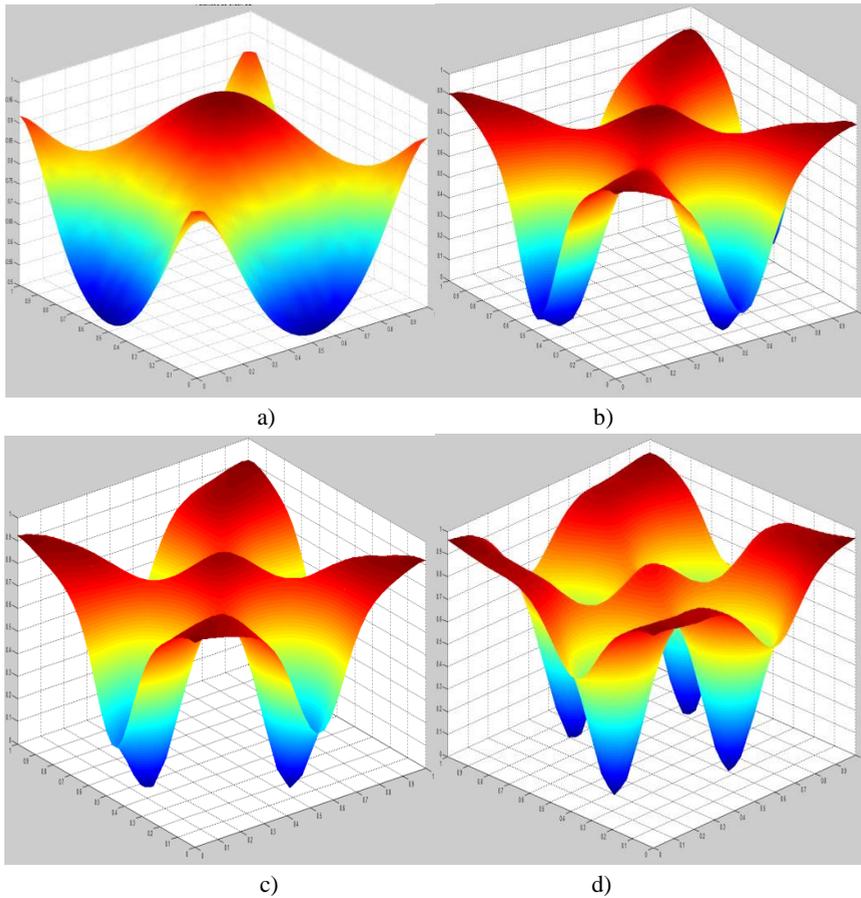


Fig. 3.38 Variación del Módulo del Parámetro de Orden en Dominio Cuadrado. a) $t=0.4$, b) $t=8$, c) $t=10$, d) $t=40$.

Al comparar la variación del módulo del parámetro de orden de la Fig. 3.38 con las correspondiente al trabajo del Mu (1997) Fig. 3.39, es evidente que la configuración y los valores de la variable concuerdan. Debe mencionarse que Mu utiliza elementos de segundo orden mientras que en esta simulación se han utilizado elementos lineales, y sin embargo, los resultados son similares. Se observa, además, que el parámetro de orden inicia cerca de un valor igual a la unidad para $t=0.4$. Mientras el tiempo avanza, los vórtices ingresan desde los lados del dominio. Esta es una de las diferencias más notorias comparando con las simulaciones del modelo lineal, donde los vórtices se generaban en el centro del dominio. Otra característica observada es que los vórtices se desplazan hacia el centro donde se estabilizan.

Por otro lado, afinando el mallado se lograría una mejor calidad de la simulación, pero es interesante que con relativamente pocos nodos se pueda obtener información de los vórtices adecuada. A pesar de que se ha tratado de optimizar al máximo el algoritmo desarrollado, el tiempo de simulación fue de 35 minutos aproximadamente, mientras que para el caso lineal con 10 veces más nodos, el tiempo aproximado fue de 2 minutos. Esto evidencia lo comentado en párrafos anteriores.

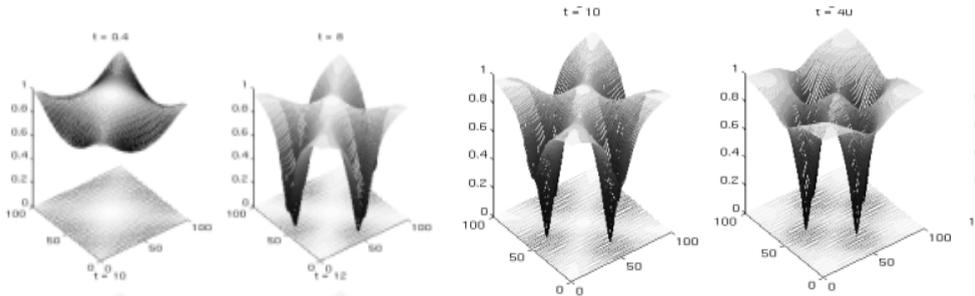


Fig. 3.39 Simulación Obtenida en Trabajo de Mu, 1997.

3.2.2 Vórtices de Abrikosov en Dominio Triangular Equilátero. Modelo LCNG.

En esta simulación, al igual que en la anterior, se ha utilizado una malla de pocos elementos con el fin de obtener resultados cualitativos del comportamiento de la simulación en un tiempo de cómputo razonable. Es por ello que el mallado utilizado tiene 861 nodos y es una malla estructurada Fig. 3.40. El campo aplicado en esta caso es $He=9$. El coeficiente de Ginzburg-Landau $k=10$. Las dimensiones del triángulo en términos adimensionales son las mismas que las utilizadas para el modelo lineal.

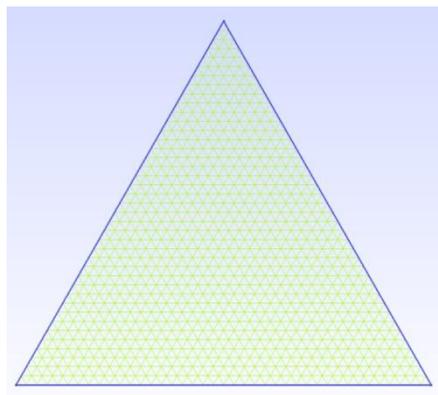


Fig. 3.40 *Mallado Dominio Triangular.*

Los resultados de la simulación sobre la variación del parámetro de orden se muestran en la Fig. 3.41:

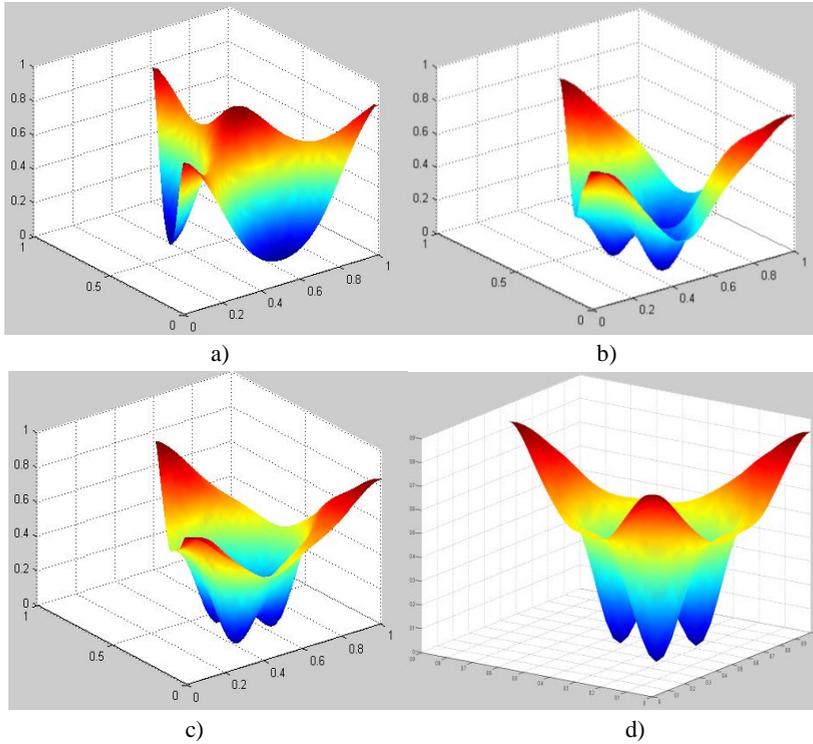
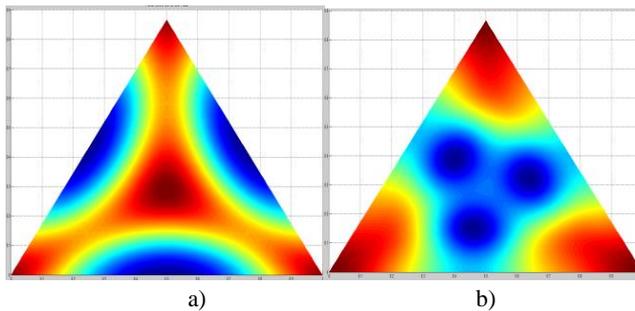


Fig. 3.41 *Variación del Módulo del Parámetro de Orden en Dominio Triangular, 3D. a) $t=0.4$, b) $t=5$, c) $t=10$, d) $t=40$.*



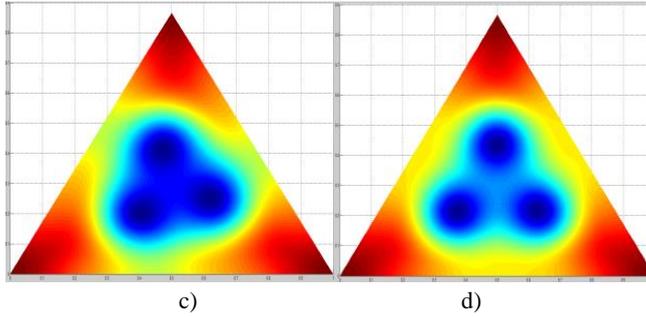


Fig. 3.42 Variación del Módulo del Parámetro de Orden en Dominio Triangular, 2D. a) $t=0.4$, b) $t=5$, c) $t=10$, d) $t=40$.

El comportamiento en general sigue el mismo patrón que en el caso cuadrado, es decir, los vórtices se originan en los lados del dominio y se desplazan hacia el centro donde se estabilizan. Obsérvese que en este trayecto los vórtices se reacomodan hasta hallar la posición más estable. El campo vectorial magnético cumple con las condiciones adecuadas al utilizar el método LCNG sobre el modelo TDGL tal como puede observarse a continuación:

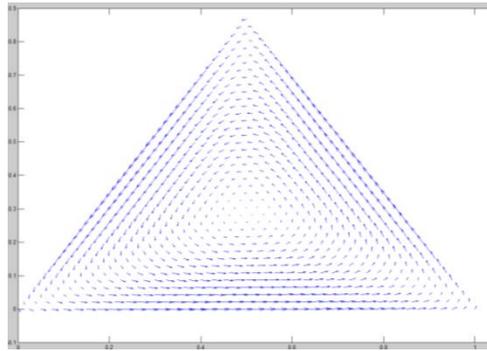


Fig. 3.43 Vector Potencial Magnético en Dominio Triangular, $t=0.4$.

3.2.3 Vórtices de Abrikosov en Dominio Circular. Modelo LCNG.

Una geometría importante que es utilizada en la creación de varios artefactos en la práctica es la circular. Sobre esta geometría hasta el momento no se ha realizado simulación alguna, y tomando en cuenta su relevancia es momento de conocer cómo se comportan los vórtices en dicho dominio. Para ello se generó una circunferencia de diámetro igual a la unidad. El mallado utilizado consistió en 546 nodos. Es un número

corto de nodos, pero sirve para visualizar el comportamiento cualitativo de los vórtices. El campo aplicado es $He=9$ y $k=10$. Los resultados obtenidos sobre el parámetro de orden fueron:

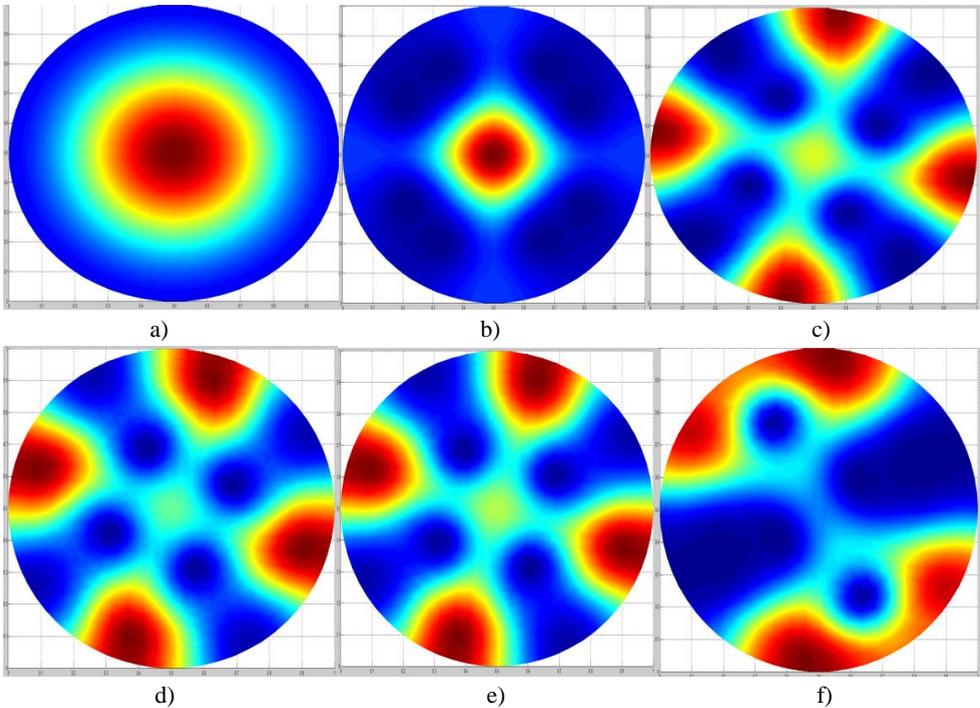


Fig. 3.44 Variación del Módulo del Parámetro de Orden en Dominio Circular, 2D. Campo Aplicado $He=9$. a) $t=0.4$, b) $t=10$, c) $t=15$, d) $t=40$, e) $t=60$, f) $t=100$.

El comportamiento en esta geometría es peculiar. Se observa la entrada de vórtices desde el perímetro hacia el centro en un número de cuatro. Estos vórtices no poseen un patrón definido de formación, aunque si se atraviesa un eje cartesiano girado un cierto ángulo hacia la derecha entonces el patrón de formación es simétrico. Interesante resulta la simulación en $t=100$. Mientras parecía que antes de este tiempo la configuración se mantenía, en un tiempo de 100 esta cambia completamente. Aquí se observa con claridad dos vórtices perfectamente definidos y opuestos, mientras aparentemente se forman más vórtices. Se espera que el número de vórtices aumenten y se configuren siguiendo un aro concéntrico con la circunferencia en su estado estable. Se requieren simulaciones con mallados más finos y tiempos más amplios para estudiar con mayor detalle esta configuración. En cuanto al vector potencial magnético este se ajusta perfectamente a las condiciones esperadas tal como se ilustra a continuación:

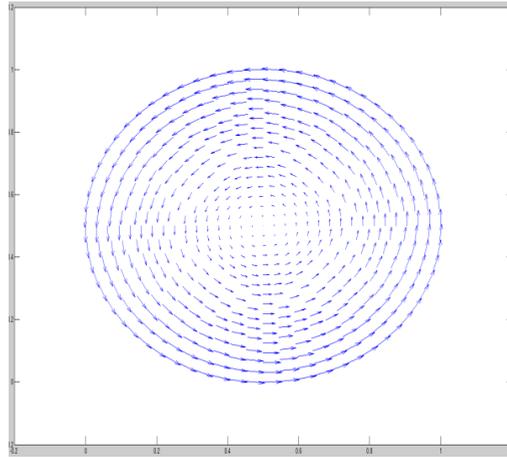
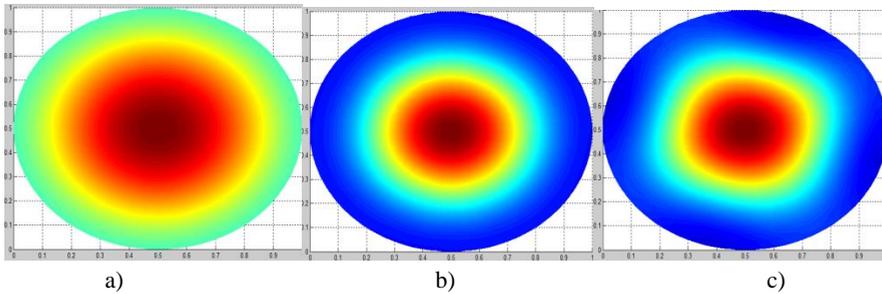


Fig. 3.45 Vector Potencial Magnético en Dominio Circular.

Se realizó también la simulación con un campo $H_e=5$ con el fin de estudiar cómo influye la variación del campo sobre los vórtices. Los resultados obtenidos muestran que definitivamente este parámetro tiene total influencia sobre la configuración de los vórtices. Se puede observar que para este valor de campo son cuatro vórtices que nuclean en la muestra. Se verá en una simulación posterior que la configuración de la Fig. 3.36 no es estable aun.



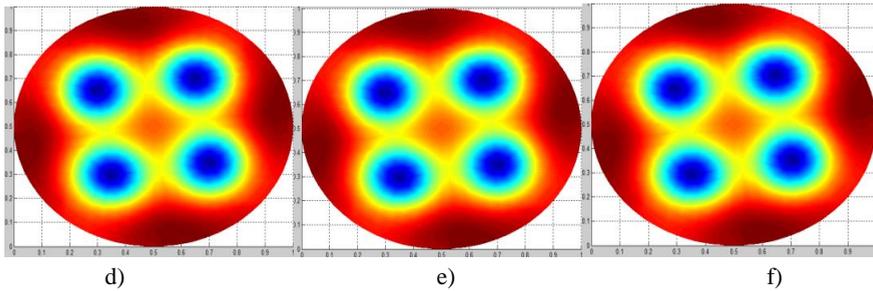
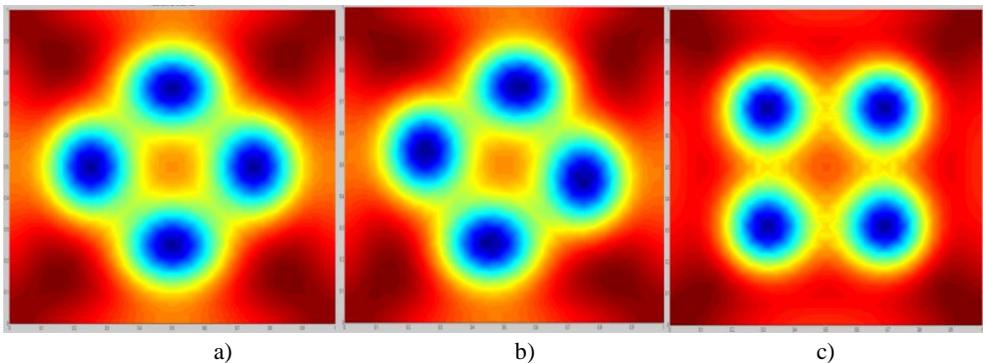


Fig. 3.46 Variación del Módulo del Parámetro de Orden en Dominio Circular, 2D. Campo Aplicado $He=5$. a) $t=0,4$, b) $t=10$, c) $t=15$, d) $t=40$, e) $t=60$, f) $t=100$.

3.2.4 Vórtices de Abrikosov en Dominio Cuadrado. Modelo LCNGM.

Se aplicara ahora el método desarrollado por Gao (2017). Como en la presente investigación el enfoque es en el comportamiento de los vórtices, se hará uso de la versión que involucra únicamente el cálculo de \vec{A} y Ψ . Los resultados obtenidos son similares a los hallados con el método LCNG, sin embargo, el objetivo ahora es mostrar la ventaja computacional que presente el LCNGM. Esto, como se observara, ha permitido simular el comportamiento temporal en tiempos superiores a los presentados en las simulaciones con el método LCNG. Con fines comparativos se utilizaron los mismos datos de los parámetros involucrados en el modelo y el mismo mallado. Los resultados obtenidos se presentan a continuación:



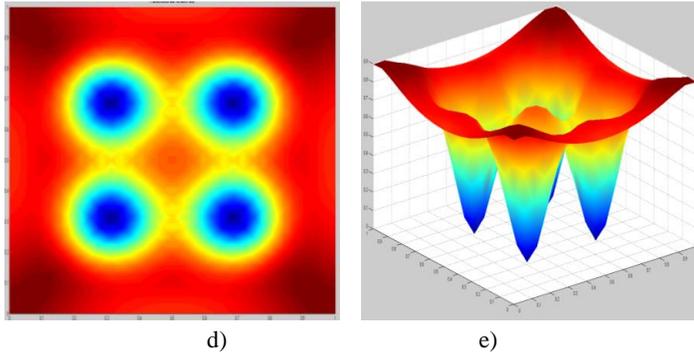


Fig. 3.47 Variación del Módulo del Parámetro de Orden en Dominio Cuadrado. Método LCNGM, 2D. Campo Aplicado $He=5$. a) $t=100$, b) $t=700$, c) $t=900$, d) $t=1200$, e) Vista 3D $t=1200$.

Comparando con la simulación obtenida utilizando el método de Mu LCNG se concluye que con LCNGM se obtienen tiempos de computo 30 veces menores y se logran los mismo resultados. Esto ha permitido apreciar que la configuración en el tiempo $t=100$ con LCNG no es completamente estable. En Fig. 3.47 se observa que en el tiempo $t=700$ la configuración de vórtices se modifica, hasta alcanzar una nueva configuración como la que se aprecia en los tiempo $t=900$, 1000 y 1200 . A continuación se realiza una simulación donde se ha modificado el campo aplicado a $He= 0.9$ y la constante GL a $k=4$ en una muestra cuadrada de 10×10 adimensional:

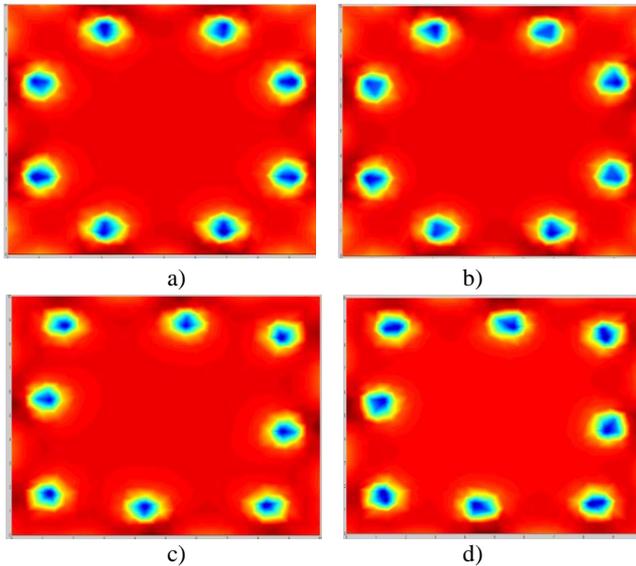


Fig. 3.48 Variación del Módulo del Parámetro de Orden en Dominio Cuadrado. Método LCNGM, 2D. Campo Aplicado $He=0.9$. a) $t=100$, b) $t=200$, c) $t=1000$, d) $t=1200$.

Es interesante observar que al variar las dimensiones y los parámetros del modelo se presenta un mayor número de vórtices. Para la geometría aquí expuesta, estos aparecen desde el perímetro y tienden a estabilizarse cerca del mismo. Su número no cambia en el transcurso del tiempo, pero si existe movimiento de los mismos hasta hallar su configuración estable Fig.3.48 d). De acuerdo a la simulación presentada en (Ma, Wang, & Zhou, 2016) o en (Barba-Ortega, Sardella, & Albino Aguiar, 2015) la distribución de vórtices aun no es estable, pues en las simulaciones realizadas por el autor mencionado los dos vórtices medios superior e inferior tienden a trasladarse hacia el centro del dominio. Esto ocurre para un tiempo $t=4000$ según Ma et al. (2016).

3.2.5 Vórtices de Abrikosov en Dominio Circular. Modelo LCNGM.

Se simuló también la vorticidad en dominio circular tal como se realizó anteriormente utilizando los mismos datos. Se logró también conocer la configuración en tiempos mucho más altos. En la Fig. 3.49 se presenta los vórtices en $t=1200$ para el dominio circular presentado en el numeral 3.2.3.

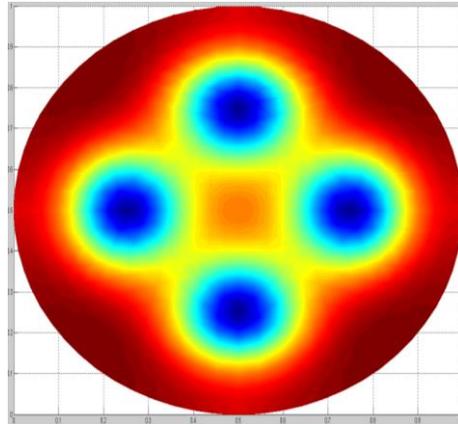


Fig. 3.49 Variación del Módulo del Parámetro de Orden en Dominio Circular. Método LCNGM, 2D.

Variando las dimensiones del dominio es posible observar una mayor cantidad de vórtices. Así, por ejemplo, para el caso circular si se aplica el método LCNGM en un dominio de radio 5, con $He=0.9$ y $k=4$ se obtiene el siguiente sistema de vórtices:

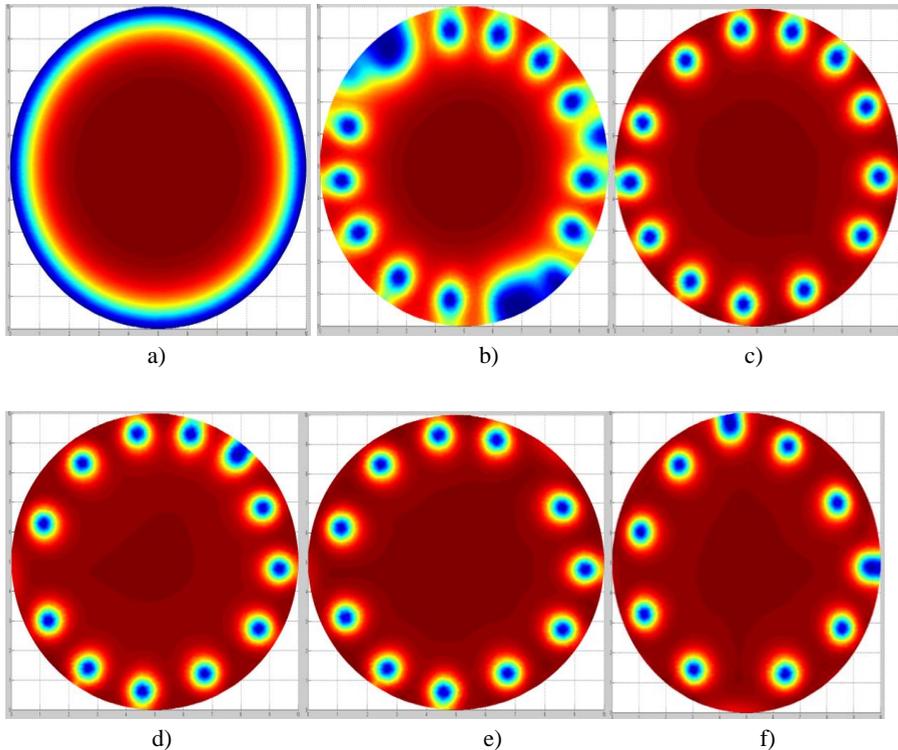


Fig. 3.50 Variación del Módulo del Parámetro de Orden en Dominio Circular. Método LCNGM, 2D. Campo Aplicado $He=0.9$. a) $t=2$, b) $t=20$, c) $t=40$, d) $t=80$, e) $t=100$, f) $t=200$.

Es interesante observar que los vórtices se acomodan muy cerca del perímetro del dominio. Sin embargo, para los tiempos aquí considerados los vórtices aun no hallan una configuración estable. Se observa por ejemplo que el número de vórtices disminuye con el tiempo. Para este caso particular se utilizó un mallado de 1905 nodos. Con esta cantidad de nodos el costo computacional, a pesar de aplicar el método LCNGM, sigue siendo demasiado alto. Para observar que ocurre en tiempos más amplios se utilizara un mallado menos fino consistente en 493 nodos. Se sacrificará la exactitud pero se tendrá conocimiento sobre el comportamiento cualitativo de los vórtices. El resultado obtenido Fig. 3.51 para $t=1200$ es:

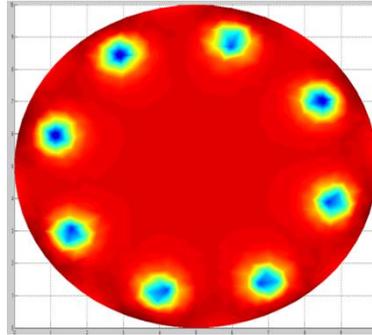


Fig. 3.51 Variación del Módulo del Parámetro de Orden en Dominio Circular. Método LCNGM, 2D. Campo Aplicado $He=0.9$, $t=1200$.

Con esta simulación se pudo observar que en un tiempo $t=1200$ la configuración no es aun completamente estable ya que los vórtices presentan movimiento. Sin embargo para tiempos superiores a $t=700$ se observó que el número de vórtices se redujo a 8 y que este número se mantiene constante para tiempos superiores.

3.3 Simulación del Modelo No Estacionario de Ginzburg-Landau 3D.

Por último, se presentan una simulación 3D del modelo TDGL. Los datos físicos utilizados son los mismos que para el caso 2D anterior. Sin embargo, no se realizaron simulaciones sobre dominios de dimensiones geométricas similares ya que, si bien el algoritmo desarrollado funciona correctamente para cualquier geometría, se requiere cierta cantidad de tetraedros para obtener resultados adecuados. Sin embargo, este número necesario implica altos costos computacionales para el código 3D desarrollado. Es por ello que resulta más fácil utilizar geometrías con una de sus dimensiones, tal como la altura, igual al orden de los elementos finitos utilizados. La razón es que en este caso, la altura del solido puede ser escogida igual a las dimensiones de los tetraedros necesarios para el cálculo. Esto permite obtener un número menor de elementos para una finura de malla adecuada, lo que implica costos computacionales menores, pero con las obvias limitaciones en la simulación.

3.3.1 Vórtices de Abrikosov en Dominio Paralelepípedo. Modelo LCNG.

El primer caso a estudiarse es sobre un paralelepípedo adimensional de base 1x1 y altura 0.1. El número de elementos es de 3840 y el número de nodos 729. Los resultados obtenidos sobre esta geometría se presentan en la Fig.3.48: El comportamiento obtenido de la simulación 3D es similar al 2D. Es decir, tal como se esperaba, los vórtices se originan en los puntos medios de las caras del volumen y paralelos al campo aplicado. Conforme el tiempo avanza, los vórtices se movilizan hacia el centro y se estabilizan.

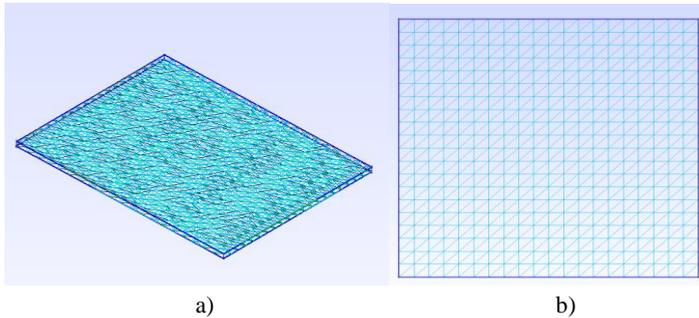
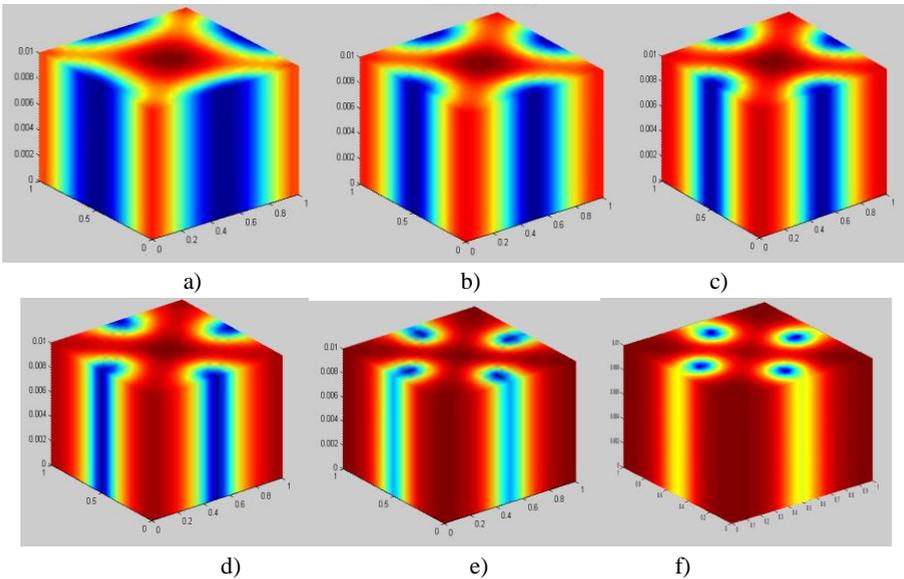


Fig. 3.52 Mallado Dominio Paralelepípedo. a) Vista 3D, b) Vista Superior.



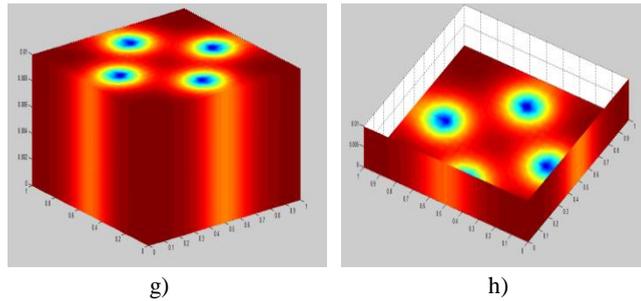


Fig. 3.53 Variación del Módulo del Parámetro de Orden en Dominio Paralelepípedo. a) $t=3$, b) $t=5$, c) $t=10$, d) $t=15$, e) $t=20$, f) $t=30$, g) $t=40$, h) Vista Isométrica $t=40$.

3.4 Simulación del Efecto de Fallas en el Material sobre los Vórtices.

A continuación se presentan simulaciones en las cuales se intentara observar el efecto de defectos en el material sobre el comportamiento de los vórtices. Estos defectos han sido simulados considerando aberturas diminutas en relación al tamaño del dominio. Como ya se había mencionado, los defectos en el material tales como impurezas, cambios de parámetros en el material, imperfecciones físicas, etc., son de gran interés en la física de los superconductores ya que su presencia en la muestra limita, en cierta forma, el movimiento de los vórtices, lo que a su vez implica que se evita la aparición de resistencias que es un efecto poco deseado en la práctica. Se debe aclarar que estas simulaciones no han sido corroboradas con resultados de trabajos similares.

3.4.1 Efecto sobre los Vórtices considerando Defecto Central. Modelo Lineal.

En esta simulación se ha considerado un diminuto efecto central de geometría cuadrada de lado unidad. El modelo matemático utilizado para este fin será el modelo lineal GL. Con este modelo no se puede observar el movimiento de los vórtices dado que el parámetro temporal no se considera. Sin embargo, el efecto esperado es que los vórtices se estabilicen en un rango cercano al defecto. El número de nodos del mallado generado sobre esta geometría es de 22064. Se utilizó una relación de flujo Φ/Φ_0 de 15 y el tamaño del defecto es de 0.01 adimensional que es 100 veces menor a la longitud lateral del dominio.

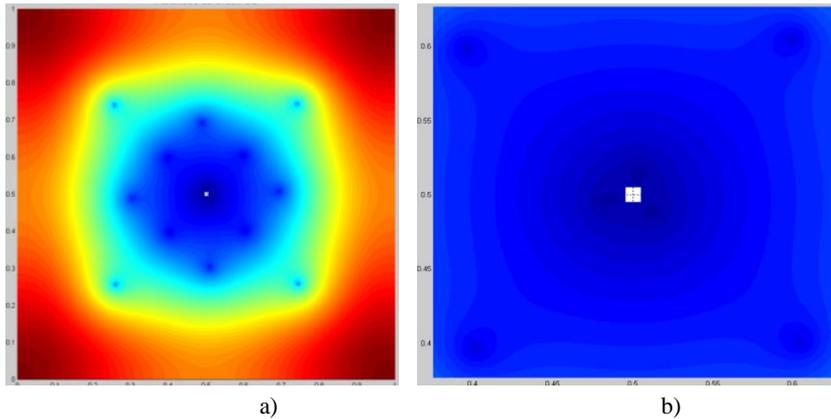


Fig. 3.54 Variación del Parámetro de Orden sobre Dominio Cuadrado con Falla Central. Modelo Lineal GL 2D. a) Configuración de Vórtices $\Phi/\Phi_0=15$, b) Zoom Zona Central.

La simulación permite observar que los vórtices se aglomeran cerca de la abertura Fig. 3.54 b). En este caso para la relación de flujo considerada, se observan 3 vórtices estabilizados alrededor de la abertura.

3.4.2 Efecto sobre los Vórtices dado Tres Defectos Centrales. Modelo Lineal.

Ahora se simula el efecto de tres aberturas diminutas colocadas en el eje central vertical del dominio. Los datos utilizados en la simulación son los mismos mencionados para la anterior, a excepción del mallado que ahora consta de 21174 nodos Fig.3.55 a). El efecto de las tres aberturas en esta simulación es mucho más evidente que el anterior. En primer lugar, a pesar de ser aberturas diminutas la configuración global de los vórtices es diferente al caso anterior. En este caso se aprecia que el número de vórtices observables a simple vista para la misma relación de flujo es menor. Además, dos vórtices se aprecian que se encuentran cerca de dos aberturas, a saber, al superior y la inferior. En este caso el defecto central no aglomera vórtices como en la simulación anterior, pero 4 vórtices se estabilizan muy cerca de este defecto.

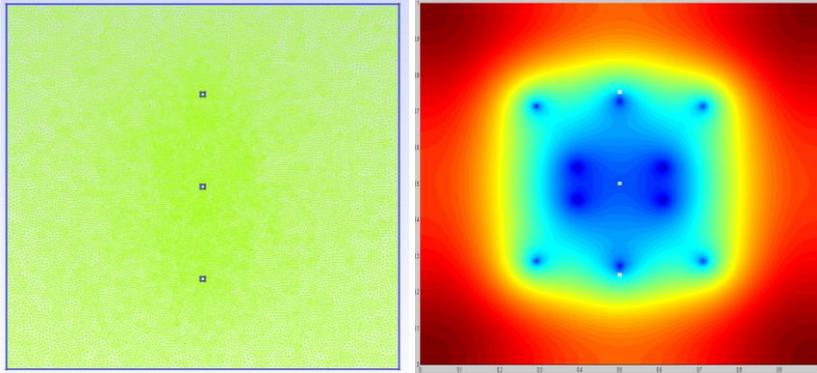


Fig. 3.55 Variación del Parámetro de Orden sobre Dominio Cuadrado con 3 Fallas Centrales. Modelo Lineal GL 2D. a) Mallado del Dominio, b) Configuración de Vórtices $\Phi/\Phi_0=15$.

3.4.3 Efecto sobre los Vórtices dado Seis Defectos Centrales. Modelo Lineal.

En esta simulación se colocan 6 defectos en hileras verticales, en número de 3 por hilera Fig.3.56 a). El mallado utilizado consiste en 7338 nodos. Una vez más, el número de aberturas y su ubicación altera completamente la distribución de vórtices respecto a los casos anteriores. En este caso, para la relación de flujo de 15 se observa con total claridad la acumulación de vórtices, dos vórtices adicionales que se ubican en la parte media superior e inferior respectivamente Fig. 3.56 d). Se realizaron también dos simulaciones con relaciones de flujo de 12 y 13 respectivamente, Fig. 3.56 b) y c). De estas dos simulaciones se observa cómo los 4 vórtices extremos se acumulan cerca de las aberturas extremas, mientras que se aprecia como desde el centro dos vórtices se abren camino hacia las aberturas centrales de las hileras. Adicionalmente, para el flujo de 13 se observa la aparición de un vórtice central. Una característica de los efectos de esta simulación es que permite concluir que en esta la región superconductora es mayor respecto a las anteriores ya que los vórtices se hallan *mejor definidos* tal como se aprecia en la Fig.3.56 d) para flujo de 15.

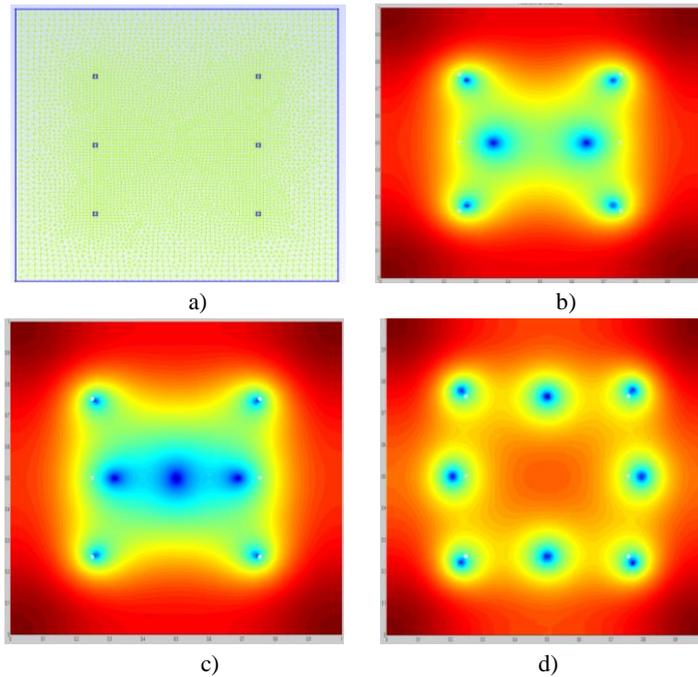


Fig. 3.56 Variación del Parámetro de Orden sobre Dominio Cuadrado con 6 Fallas. Modelo Lineal GL 2D. a) Mallado del Dominio, b) Configuración de Vórtices $\Phi/\Phi_0=12$, c) Configuración de Vórtices $\Phi/\Phi_0=13$, d) Configuración de Vórtices $\Phi/\Phi_0=15$.

3.4.4 Efecto sobre los Vórtices dado Nueve Defectos Centrales. Modelo Lineal.

En este caso se colocan nueve aberturas igualmente espaciadas Fig.3.57 a). El número de nodos utilizado es de 7876.

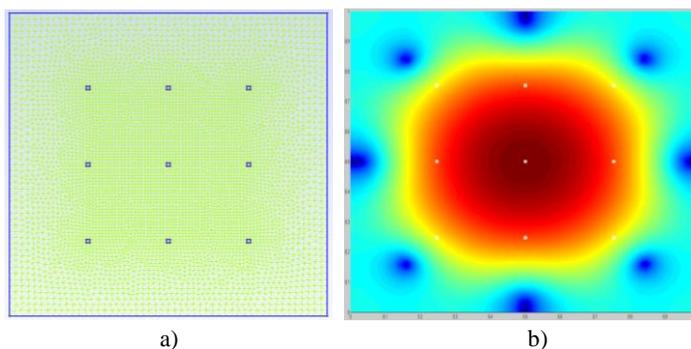
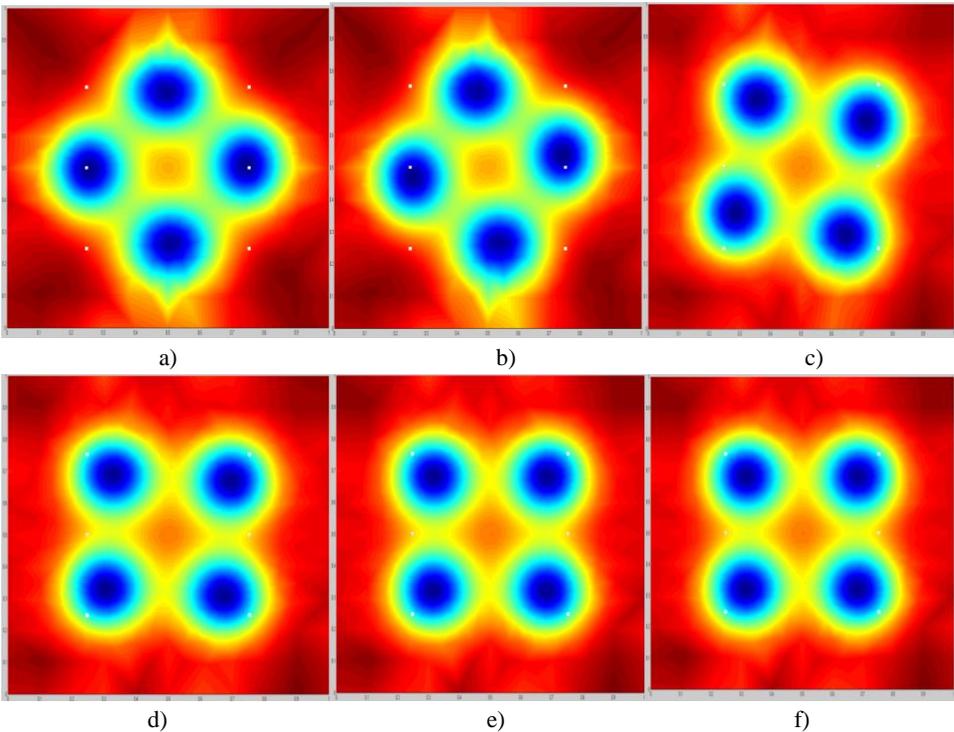


Fig. 3.57 Variación del Parámetro de Orden sobre Dominio Cuadrado con 9 Fallas. Modelo Lineal GL 2D. a) Mallado del Dominio, b) Configuración de Vórtices $\Phi/\Phi_0=15$.

Esta simulación permite observar que en primer lugar el efecto de las aberturas genera una configuración completamente distinta a los casos anteriores ya que resulta que los vórtices se originan desde el perímetro del dominio. Por otro lado, los vórtices se configuran de tal manera que parecen alinearse con las aberturas tomando la forma de la distribución de estas últimas Fig. En general se aprecia que los vórtices tienden a acumularse cerca de las fallas.

3.4.5 Efecto sobre los Vórtices dado Seis Defectos Centrales. Modelo TDGL.

Ahora se presenta una simulación utilizando el modelo temporal GL. Para ello el método aplicado será el LCNGM que permite obtener resultados confiables en tiempos más cortos que con el método de Mu. Lo interesante de esta simulación temporal es que permite observar cómo se mueven los vórtices dentro del dominio y como se los defectos tienden a controlar ese movimiento. El campo aplicado He es de 5 adimensional y el valor de k de 10. El mallado consta de 541 nodos.



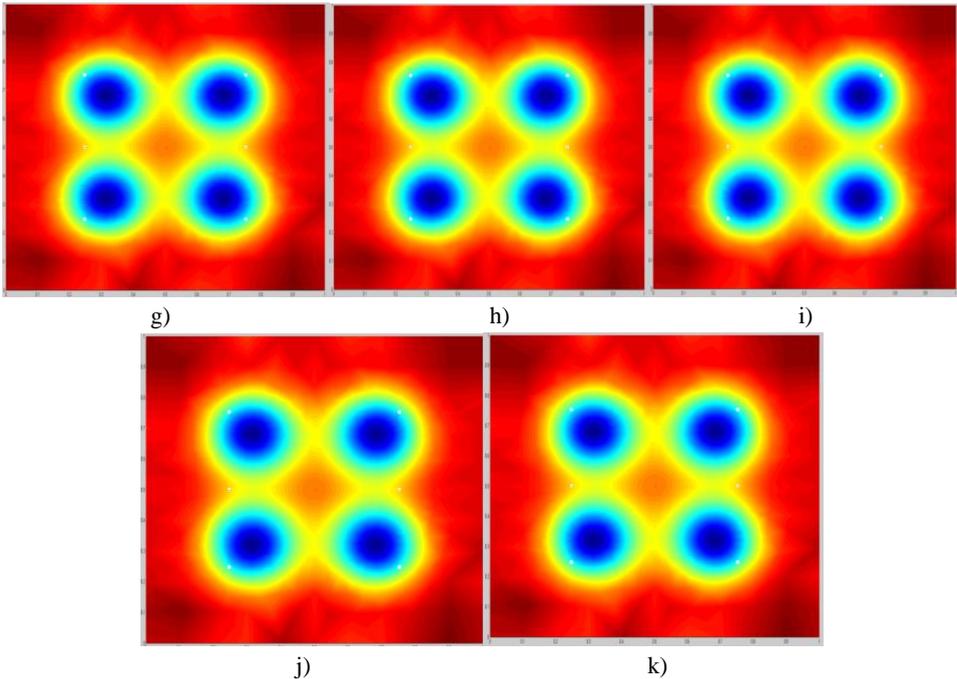


Fig. 3.58 Variación del Módulo del Parámetro de Orden en Dominio Cuadrado con 6 Fallas Laterales. Modelo Temporal TDGL. Método LCNGM, 2D. Campo Aplicado $He=5$. a) $t=80$, b) $t=100$, c) $t=160$, d) $t=200$, e) $t=300$, f) $t=400$, g) $t=500$, h) $t=600$, i) $t=800$, j) $t=1000$, k) $t=1200$.

El efecto de los defectos sobre el movimiento de los vórtices es evidente. Si se sigue la secuencia temporal de la Fig. 3.58, se puede apreciar que los 4 vórtices rotan en sentido anti horario hasta que los mismos quedan *fijados* a las 4 aberturas extremas. Es interesante observar que para tiempos mayores a $t=200$ la configuración se estabiliza. Si se observa la simulación sin aberturas sobre este mismo dominio realizada anteriormente, el tiempo para que los vórtices adquieran la misma configuración estable que la presentada en la Fig. 3.58 d), era mayor a 700. Esto quiere decir que la presencia de fallas controla el movimiento de los vórtices en un tiempo menor y de esta forma se llega a la estabilización de los mismos de manera más rápida, siendo esto un efecto completamente positivo.

3.4.6 Efecto sobre los Vórtices dado un Defecto Lateral. Modelo TDGL.

Se simulara ahora el efecto de un defecto lateral colocado en la parte inferior derecha del dominio. Los parámetros son los mismos utilizados en la simulación anterior, pero con un mallado de 1186 nodos.

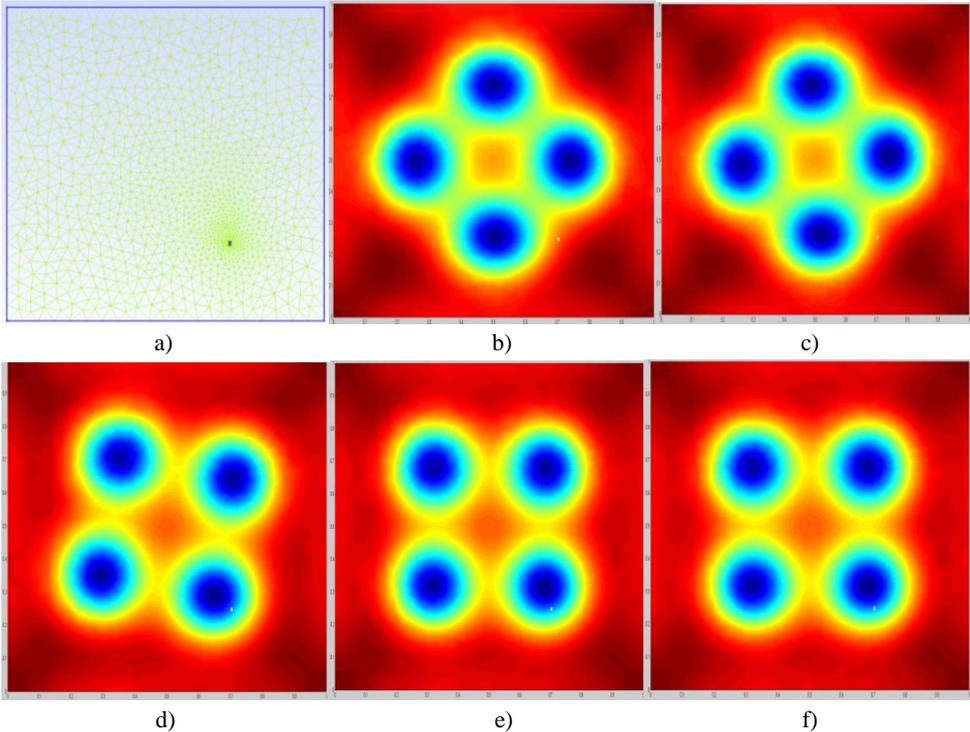


Fig. 3.59 Variación del Módulo del Parámetro de Orden en Dominio Cuadrado con 1 Falla Lateral. Modelo Temporal TDGL. Método LCNGM, 2D. Campo Aplicado $He=5$. a) Mallado del Dominio, b) $t=40$, c) $t=100$, d) $t=200$, e) $t=300$, f) $t=700$.

El efecto de la falla introducida para esta simulación es similar al anterior. Se logra una estabilización en un tiempo corto, que para este caso es similar a $t=200$. Se puede apreciar que existe un giro anti horario donde el vórtice inferior de la Fig. 3.59 a) se desplaza hacia la falla Fig. 3.59 d). Luego, los vórtices parecen girar respecto a este punto de falla Fig. 3.59 e) y f).

3.4.7 Efecto sobre los Vórtices dado Abertura Central. Modelo TDGL.

Por último se simula el efecto de una falla que represente una abertura central en el dominio. Esta abertura es de ancho 0.01, mientras que su longitud es de 0.5 adimensionales Fig.3.60 a). El mallado consta de 569 nodos.

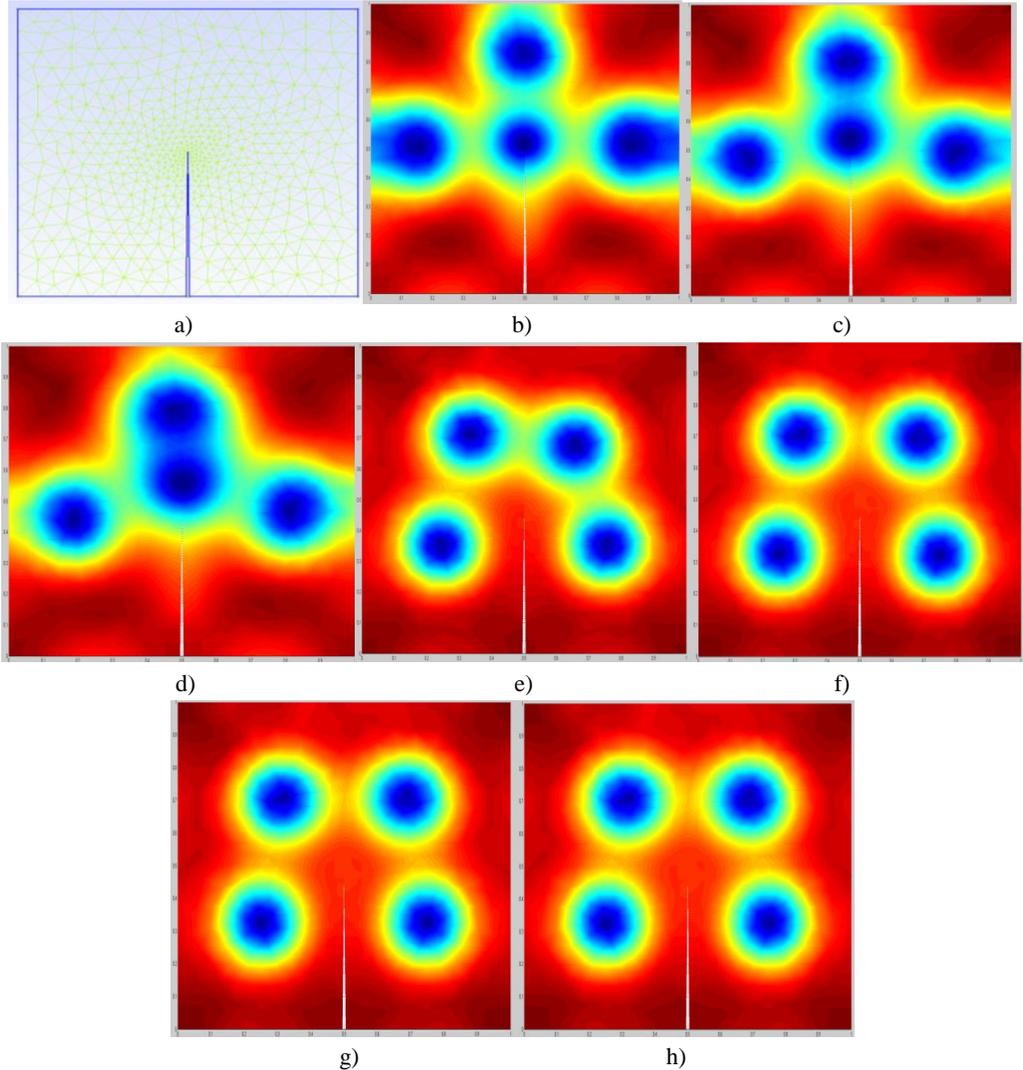


Fig. 3.60 Variación del Módulo del Parámetro de Orden en Dominio Cuadrado con 1 Falla Transversal Central. Modelo Temporal TDGL. Método LCNGM, 2D. Campo Aplicado $He=5$. a) Mallado del Dominio, b) $t=20$, c) $t=40$, d) $t=50$, e) $t=80$, f) $t=100$, g) $t=200$, h) $t=700$.

Para este caso particular, se observa que el movimiento de los vórtices se estabiliza cerca de $t=100$. Se debe notar además, que uno de los vórtices se origina en el vértice de la falla Fig.3.60 b). Esto último está de acuerdo al resultado obtenido por (Gao & Sun, An efficient fully linearized semi-implicit Garklekin-mixed FEM for the dynamical Ginzburg-Landau equations of superconductivity, 2015) para dominio circular donde los vórtices se originan desde el vértice del defecto. Por otra parte, en esta simulación, la presencia de la falla logró contener el movimiento de los vórtices en un tiempo corto cercano a $t=200$. Como característica particular, se debe observar que en el régimen estable los vórtices no se configuran de manera simétrica como ocurría en casos anteriores. Los vórtices inferiores se hallan más cercanos al perímetro lateral que los vórtices superiores.

CAPITULO IV

4 OBSERVACIONES Y CONCLUSION

4.1 Diagrama de frontera de fase H-T para muestras mesoscópicas.

En el capítulo anterior se realizaron varias observaciones netamente del tipo cualitativo y basado en lo que se observó directamente de las simulaciones. Sin embargo, ahora se presentaran algunas conclusiones cuantitativas sobre el comportamiento de varias de las simulaciones del capítulo III. Existe una propiedad interesante en el comportamiento de la curva que representa la variación de los autovalores con la magnitud del campo aplicado en el caso de los superconductores mesoscópicos, curva que representa la frontera de la fase H-T. Resulta pues, que al realizar la gráfica de dicha curva, esta muestra un comportamiento *cuasi* lineal en el incremento del autovalor conforme aumenta el campo. Sin embargo, existen puntos no diferenciables que aparecen como "crestas" en la gráfica de fase y que ocurren cada cierto intervalo del campo magnético(es decir son periódicos), tal que en cada rango entre crestas la vorticidad se mantiene. La vorticidad, que en la literatura se representa con la letra L , no hace más que cuantificar el número de cuantos de flujo magnético Φ_0 que cruzan a través del dominio en la muestra superconductora. Por ejemplo, una vorticidad $L=0$ significa que en la muestra no existen aún vórtices, $L=1$ que ha aparecido el primer vórtice y así sucesivamente. La vorticidad entre crestas por lo tanto se mantiene constante. Esto es análogo a lo que acontece en mecánica cuántica; los vórtices solo pueden aparecer en número entero. Esto implica que para producir un cambio en L se requiere una cantidad exacta y discreta de energía. Si esto acontece entonces se produce una variación en L y este valor en la vorticidad se mantendrá hasta que exista un incremento en la energía múltiplo del cuanto necesario para producir variación.

Para entender mejor de lo que se está hablando es conveniente observar la Fig. 4.1. Esta fue obtenida utilizando los datos de las simulaciones presentadas en el capítulo anterior para muestras mesoscópicas y basados en el modelo lineal GL aplicadas al aluminio. En la gráfica se ha representado la curva correspondiente al dominio triángulo equilátero, cuadrado y pentágono. El valor de H_c para los tres casos se asumió igual a 105Oe. Los valores del campo externo aplicado se tabularon como

factor del cuanto de flujo magnético Φ_0 . Es importante mencionar que la Fig. 4.1 puede ser considerada como la gráfica de la frontera de fase H-T de cada dominio simulado (Kim, Gunzburger, Peterson, & Hu., 2009). Para poder representar en la misma gráfica la curva H-T para diferentes dominios los autovalores deben ser escalados. Para ello varios estudios sugieren que la variable relacionada con T se defina como $\frac{S}{\xi^2} = \frac{\lambda^2}{\xi^2} \cdot \frac{S}{\lambda^2}$ donde S es la superficie de la muestra. ¿Por qué esta variable se relaciona con T ? Esto se debe a que la variable así definida involucra a ξ que, como se vio en el capítulo I, se relaciona directamente con la temperatura. De hecho, de acuerdo a Kim et al. (2009) y otros autores, esta variable es proporcional a $1 - \frac{T_c(H\theta)}{T_c(0)}$ y $\frac{\Phi}{\Phi_0} \propto He$. Es por esto último que la Fig.4.1 representa la frontera de fase H-T.

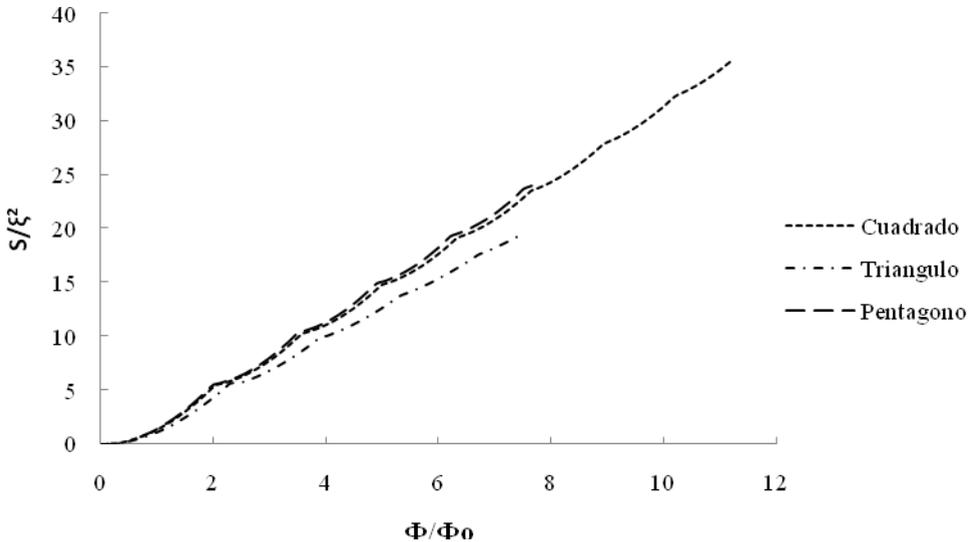


Fig. 4.1 Diagrama de la frontera de fase H-T para muestra cuadrada, triangular y pentagonal.

De la Fig. 4.1, es posible observar con total claridad el comportamiento aproximadamente lineal del autovalor. Adicionalmente, se observa las crestas que existen cada cierto rango de valores del campo aplicado. Es en estos puntos donde se produce el cambio de vorticidad. Otra característica a observarse es que, conforme el número de lados del dominio aumenta, las curvas respectivas parecen disminuir su distancia entre sí. Este comportamiento ha sido corroborado en trabajos similares tales como el de (Chibotaru, Ceulemans, Morelle, Teniers, Carballeira, & Moshchalkov, 2005) o (Kim, Gunzburger, Peterson, & Hu., 2009). De hecho, basado en estos

trabajos, se concluye además que las curvas se acercan a un límite conforme aumenta el número de lados del dominio. Este límite es el correspondiente a una geometría circular. Así mismo, de las experiencias realizadas se ha observado que las curvas de la Fig. 4.1 son independientes del tamaño de la muestra, por lo que se pueden considerar como características de determinada geometría y material.

Por otra parte, en el caso del dominio cuadrado con aberturas se obtuvieron las siguiente graficas H-T Fig. 4.2:

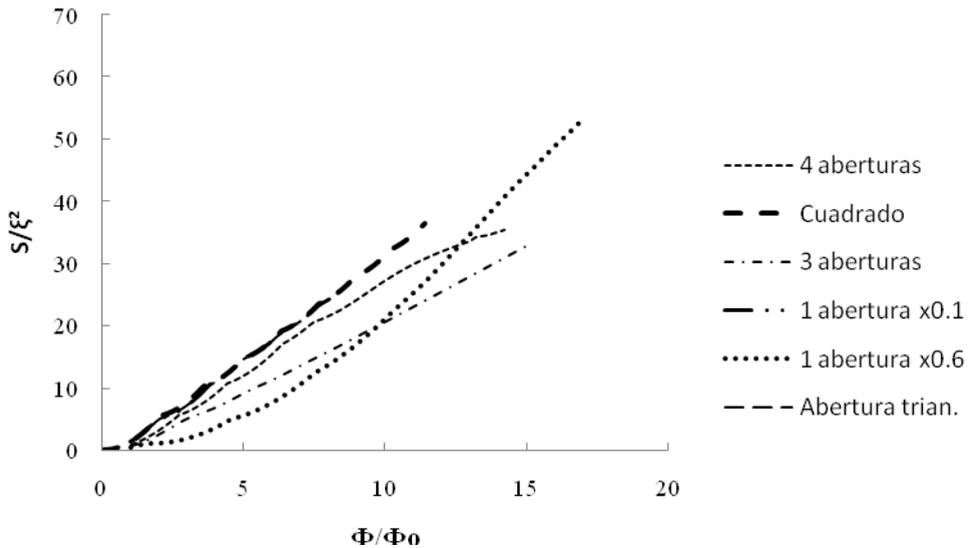


Fig. 4.2 Diagrama de la frontera de fase H-T para muestra cuadrada con aberturas.

De las curvas presentadas en la figura anterior se pueden extraer algunas conclusiones aplicables al caso del dominio cuadrado con aberturas. La curva más oscura representa el dominio sin aberturas. Al colocar una abertura central de 0.1 veces el lado del cuadrado, que es la unidad, la curva H-T correspondiente se ajusta prácticamente a la curva del dominio sin aberturas. Esto implica que el dominio con abertura central se comporta de manera similar al dominio continuo. Esto quiere decir que, mientras en este último existen en ciertos intervalos de la curva H-T la presencia de vórtices gigantes o anti vórtices centrales (obsérvese las simulaciones del cap. III), en el caso del dominio con abertura tales vórtices centrales no aparecen, sino que es la abertura misma la que actúa *posiblemente* como uno. Esta es la única forma de que la configuración de los vórtices adquiera la simetría correcta de acuerdo al dominio. Esto parece indicar que el flujo del campo externo a través de la abertura *posiblemente* también está cuantizado para ciertos valores de campo.

De las experiencias y datos recolectados la curva, para abertura central, se encuentra siempre ligeramente bajo la curva que representa el comportamiento del dominio sin abertura. El hecho de que una curva sea inferior implica que su energía fundamental (que es lo que las ordenas en cierta forma representan) para un mismo valor de campo es menor. Esto sugiere, que en ese caso, la temperatura crítica para un mismo valor de campo es mayor.

La siguiente curva que se ha representado en la Fig. 4.2 es la correspondiente a una abertura central cuadrada de 0.6 veces el lado unidad del dominio. Esta curva permite concluir que para el caso de la geometría estudiada, las dimensiones de la abertura si influyen en el comportamiento de la superconductividad en la muestra. Obsérvese como, mientras para el caso de abertura de 0.1 la curva se ajustaba prácticamente al cuadrado, para el caso de 0.6 la curva es completamente distinta. En la misma existen puntos donde oscila, es decir cambios de vorticidad, pero estos son mucho menos notorios. Además, la curva no parece seguir una tendencia lineal como ocurría en los casos anteriores. Adicionalmente, ciertos rangos de vorticidad son menos estables como por ejemplo el de vorticidad nula que es prácticamente imperceptible en la Fig. 4.2. Otros rangos son mucho más extensos y por ende estable, por ejemplo el caso de vorticidad uno es mayor que para cualquiera de los otros dominios.

Otra curva que se presenta en la Fig. 4.2, es la de una abertura central en forma de triángulo rectángulo. Los catetos son de 0.1 veces el lado del dominio. Esta curva, al igual que para el caso de una abertura, se halla bajo la curva principal, pero de manera prácticamente imperceptible, de modo que se puede concluir que la forma del orificio no influye en el comportamiento del dominio estudiado.

La curva que indica el comportamiento del dominio con presencia de tres aberturas cuadradas de 0.1 de lado distribuidas en forma de L en el dominio se puede observar en Fig.4.2. El comportamiento global de esta curva es prácticamente lineal. Sin embargo, se observó que las oscilaciones si existen pero son en detalle imperceptibles ya que se requiere un cambio de escala para ser observadas. La curva H-T correspondiente se encuentra siempre bajo la principal. Este comportamiento distinto en comparación con las otras curvas permite inferir que la distribución de las aberturas sobre el dominio influye en el comportamiento de la superconducción sobre la muestra.

El caso de dominio con cuatro aberturas cuadradas de lado 0.1 veces el dominio Fig.3.36 también se observa un comportamiento peculiar. La nucleación de los vórtices se presenta en valores de campo mayores a los del cuadrado continuo. Así

mismo, existen rangos de vorticidad de mayor amplitud, por lo que la vorticidad es más estable en esos casos, como por ejemplo en $L = \{2,4\}$. Interesante resulta observar en el comportamiento general de la curva que, para un mismo rango de valores de He , la vorticidad en el caso de cuatro aberturas es menor. Obsérvese que mientras el cuadrado continuo se halla en una $L=7$ en un rango $0 < He < 12$, el caso de cuatro aberturas se halla en $L=4$. En definitiva, este comportamiento de H-T parece indicar que aun que se coloquen de manera simétrica las aberturas, su número tiene notable influencia sobre el comportamiento de la muestra.

4.2 Comportamiento de vórtices en muestras mesoscópicas utilizando el modelo LGL.

Por otro lado las simulaciones realizadas en el capítulo anterior permiten concluir que, para los casos simulados en muestras mesoscópicas, la geometría del dominio influye definitivamente en el patrón de formación de la vorticidad tal como muchos trabajos similares lo corroboran. De hecho, es interesante que para los casos sin aberturas, la simetría de los vórtices adquiere la configuración correspondiente a la simetría del dominio. Una característica en común que comparten los dominios poligonales de las simulaciones realizadas es que, en adición a los vórtices, siempre existe un vórtice de mayor tamaño localizado en el centro del dominio. A este tipo de vórtices en muestras mesoscópicas se le denomina vórtices gigante y anti vórtice (Teniers, Moshchalkov, Chibotaru, & Ceulemans, 2003). El nombre de anti vórtice se debe a que la supercorriente gira en sentido contrario respecto al giro que se produce en los vórtices. Las simulaciones permiten inferir que conforme el campo aumenta, los vórtices nacen del cerca del centro de la muestra. Otra característica que presentan los vórtices, específicamente los primeros vórtices en aparecer, en muestras mesoscópicas es que en los casos perfectamente simétricos, estos se alinean siempre siguiendo la dirección de las diagonales.

A la pregunta del por qué en muestras mesoscópicas los vórtices se originan muy cerca del centro de la muestra, pues la respuesta de acuerdo a (Kim, Gunzburger, Peterson, & Hu., 2009) es resultado de lo que ellos llaman "efecto de repulsión de la superficie". De acuerdo a los autores, cerca de la frontera H-T el parámetro de orden es altamente no uniforme. Este parámetro adquiere valores altos cerca de la frontera del dominio y disminuye hacia el centro de la muestra en una longitud en escala de la longitud de coherencia. Esto implica que mientras más cerca se forma un vórtice de la frontera del dominio, más alto es el costo energético involucrado. Considerando el

principio de energía mínima resulta que los vórtices gustan estar lo más alejados de las fronteras del dominio.

Referente a la presencia de aberturas de tamaño comparable con las dimensiones del dominio se concluye que los tamaños, forma y localización de las aberturas si afectan la formación de vórtices. En cuanto a su comportamiento, de las simulaciones realizadas, se ha observado que en el caso de abertura central los vórtices se originan desde los vértices y lados de las aberturas. En el caso de abertura simétrica los vórtices se configuran de forma simétrica alrededor de esta; y en el caso de no ser simétrica, existe mayor concentración de vórtices en el lado mayor de la abertura. Variando el campo aplicado, los vórtices se alejan de la abertura. En los casos en los cuales la abertura se localiza en un punto distinto del centro del dominio, el comportamiento es diferente. En estos casos se observó que los vórtices se originaron desde el lado opuesto a donde se encuentra una mayor cantidad de aberturas. Además, el aumento del campo conlleva un movimiento hacia la zona donde existe mayor cantidad de aberturas. En los casos de aberturas asimétricas, los vórtices no se originan en el centro de la muestra y tampoco tienden a desplazarse hacia este punto conforme el campo aumenta.

Las simulaciones con aberturas sobre dominio cuadrado sugieren que la presencia de aberturas conlleva mayor permanencia, sobre el dominio, del estado superconductor. Esto se evidencia al comparar, cualitativamente, el área cubierta por un color rojo (estado superconductor) y el área azul (estado normal) en las simulaciones respectivas del capítulo III. Considerando que desde el punto de vista práctico es conveniente que la muestra se mantenga en estado superconductor para valores de campo altos, la presencia de aberturas en muestras mesoscópicas sugiere resultados positivos desde este punto de vista.

4.3 Comportamiento de vórtices utilizando el modelo TDGL.

Los resultados de las simulaciones utilizando el modelo TDGL difieren de aquellos obtenidos con el modelo lineal en muestras mesoscópicas. En el caso del dominio cuadrado, los vórtices aparecen alineados con los puntos medios de los lados del cuadrado; y de hecho, se originan en esos puntos mientras se estabilizan cerca del centro del dominio. Otra diferencia surge del hecho de que no existen anti vórtices y vórtices gigantes. En este caso en el centro se acumulan pares de Cooper.

Una diferencia sumamente importante entre las simulaciones del modelo lineal y TDGL aparte de las ya mencionadas, es que como se explicó en el capítulo II, el modelo lineal es válido cerca de la frontera H-T. Esto implica que se está simulando una muestra cercana a H_{c2} por lo que la muestra la densidad de pares de Cooper tiene que ser muy baja. Por el contrario, el modelo TDGL simulado no tiene esta restricción. De hecho, el valor del parámetro de orden inicial es de módulo 1, por lo que este representa un estado cercano a H_{c1} .

4.4 Comportamiento del vector potencial magnético.

Las simulaciones permitieron también concluir que el cumplimiento de las condiciones de contorno por parte del vector potencial magnético influye de manera directa sobre la calidad de la simulación respecto a la formación de los vórtices, y específicamente, sobre su configuración y simetría. Esto quiere decir que, para el caso mesoscópico en particular, que es donde para el cálculo del potencial magnético se utiliza métodos de optimización, la calidad del cálculo depende enormemente de los valores de so y co . Como se podrá observar de las simulaciones sobre el vector potencial \vec{A} obtenidas en el capítulo III, el potencial debe adquirir de la manera más exacta posible la configuración del dominio sobre el que se impone cumpliendo con las condiciones de frontera necesarias. Que esto se cumpla depende de los dos valores co y so , siendo el más relevante el primero. El factor co se relaciona en gran medida con el cumplimiento de la condición de componente normal nula en la frontera. Se ha observado que valores bajos de co se obtienen resultados incorrectos en la simulación; es por ello que se deben tomar valores altos de co , esto con el fin de aumentar el peso que tiene la restricción de cumplirse la nulidad de la componente normal en la frontera. Por otro lado, en el caso del modelo TDGL no existe este inconveniente ya que la segunda ecuación del modelo lleva consigo implícita el cumplimiento adecuado de las condiciones de frontera por parte de \vec{A} .

Siguiendo con el punto anterior respecto al vector potencial magnético, tanto para el modelo lineal como para en el TDGL la finura del mallado conlleva a mejores resultados en cuanto al comportamiento del campo \vec{A} . Sin embargo, mientras en el segundo caso no interesa si el mallado es estructurado o no, en el primer caso esto si influye sobre \vec{A} , específicamente para mallados no muy finos y ciertos tipos de dominios. Se ha observado en las simulaciones que, por ejemplo en el caso del dominio octagonal, un mallado no estructurado produce un comportamiento incorrecto de \vec{A} sobre el dominio, y que, dado que el comportamiento del vector potencial y el

mallado influyen directamente sobre el parámetro de orden Ψ , este último presenta un comportamiento no esperado y a la final incorrecto. Sin embargo, al utilizar un mallado estructurado, el comportamiento final del parámetro de orden se ajusta a lo esperado dada la simetría del dominio. Sobre las razones del por qué el mallado influye en el comportamiento de ciertos dominio mesoscópicos, una posibilidad radica en que se ha utilizado elementos de interpolación lineales en todas las simulaciones. Si bien el vector potencial puede cumplir las condiciones impuestas, la irregularidad del mallado y el ajuste con elementos lineales, implica que puntos simétricos del dominio que deberían presentar valores idénticos del vector potencial no lo hagan. En el caso de un mallado estructurado esto no se presenta dada la simetría del propio mallado. Como se había mencionado, para que utilizando el código desarrollado, mallados no estructurados brinden datos adecuados se requiere que sean muy finos; sin embargo esto se realiza a expensas de un mayor costo computacional por lo que se recomienda en el caso lineal utilizar mallados estructurados cuando sea posible.

4.5 Efecto de fallas presentes en el dominio de muestra superconductor.

Las simulaciones en las cuales se han considerado fallas en el material a través de pequeñas aberturas, permiten concluir que la presencia de las aberturas genera un cambio en el comportamiento de los vórtices respecto al dominio continuo. Las aberturas tienden a concentrar a su alrededor a los vórtices. Esto parece estar acorde con lo esperado, ya que las aberturas deben actuar como *atractores* de vórtices. Esto es importante debido a que se disminuye el movimiento de la vorticidad en la muestra y se evita así la aparición de resistencia que es un fenómeno práctico poco deseado. Resulto interesante también observar el efecto de estas fallas al utilizar el modelo TDGL por medio del método LCNGM. En estas simulaciones se pudo apreciar como el movimiento de los vórtices evoluciona con el tiempo y son guiados por la presencia de los defectos introducidos. Si bien sería interesante conocer el comportamiento de estas fallas utilizando mallados más finos mediante el método LCNGM, los resultados obtenidos, que son valiosos desde un punto de vista cualitativo, confirman el efecto estudiado en trabajos tales como el de Lee et al. (1999).

4.6 Comportamiento entre método LCNG y LCNGM.

Es definitivo que el método LCNGM es mucho más eficiente que el método LCNG donde se presentó una disminución en tiempo computacional aproximado de 90%, lo que permitió conocer el comportamiento del modelo GL en tiempos más altos. Por ejemplo, con el método LCNG requirió un tiempo aproximado de 1 hora computadora para modelar un $t=40$ en la muestra. Por otro lado, el método LCNGM en la misma hora permitió llegar a tiempos $t=1200$.

En cuanto al uso de un tipo particular de gauge, el método LCNGL como se había ya comentado utiliza el gauge de Lorentz mientras que el método LCNG de Mu utiliza el gauge de potencial eléctrico nulo. Para las variables de interés en esta investigación, que es el parámetro de orden y el vector potencial, los dos gauges y métodos producen los mismos resultados, mismo que ha sido verificado con los obtenidos por los autores correspondientes en simulaciones semejantes. Sin embargo, la eficacia LCNGM en cuanto a tiempos de computo si depende en parte del gauge escogido, ya que el gauge de Lorentz, por ejemplo, requiere menos iteraciones para resolver el sistema de ecuaciones para el vector potencial corroborando lo indicado en (Gao, Efficient Numerical Solution of Dynamical Ginzburg-Landau Equations under the Lorentz Gauge, 2017). Sin embargo, la mayor ventaja del método LCNGL radica en el armado de las matrices de rigidez y en el número de términos que se requiere considerar para ensamblarla. En el LCNGM está matriz se ensambla una sola vez y posee menos términos en su desarrollo. Esto último permite que los tiempos de cómputo se reduzcan considerablemente.

4.7 Resumen y Conclusión

En la presente obra se abordó el tema de la superconductividad. Específicamente el objetivo principal consistió en la simulación numérica de los vórtices de Abrikosov en muestras superconductores utilizando MEF aplicados al modelo Ginzburg-Landau (GL). Para este fin se utilizó el software libre Gmsh y Matlab R2012a. El fin primordial de estudiar la superconductividad y conocer sus propiedades radica en que es un tema de la física que reviste importantes implicaciones prácticas en la actualidad y en el futuro. Los resultados obtenidos de las simulaciones realizadas sobre varios tipos de geometrías concuerdan con los resultados de simulaciones en obras similares tanto 2D como en 3D por lo que se han desarrollado códigos informáticos que sirven como punto de partida para ser utilizados en futuras investigaciones sobre el tema. Los datos observados durante todas las

simulaciones sugieren que en conclusión: la geometría, y aún más, la simetría de la misma, influye de forma directa en la formación de vórtices en superconductores mesoscópicos. El comportamiento entre el modelo lineal en muestras mesoscópicas en la fronteras superior del diagrama de fase H-T y el modelo TDGL cerca del estado Meissner muestran comportamientos distintos de los vórtices en la muestra. La variación del campo aplicado y del parámetro k también demuestra que de su magnitud depende el comportamiento de los vórtices dentro del núcleo de la muestra. Y, en el caso particular de muestra cuadrada mesoscópica, la presencia de discontinuidades, forma, ubicación, tamaño y número influyen de manera notable en el comportamiento de la vorticidad.

Por otro lado se deben comentar las limitaciones de los códigos desarrollados para esta investigación: En primer lugar el método de optimización para hallar el vector potencial siguiendo el modelo propuesto por Kim et al. (2009) requiere de la calibración, a través de una comparación "visual" con geometría simétricas, de los parámetros de peso so y co . Es necesario por lo tanto contar con un método analítico que permita calcular de manera precisa estos valores. Los autores Kim et al. (2009) sugieren en su trabajo otros posibles métodos que pueden ser utilizados para optimizar el campo vectorial por lo que su aplicación para modelar el vector potencial bajo las condiciones frontera adecuadas pueden ser temas a ser estudiados en futuras investigaciones. Por otro lado, el algoritmo desarrollado en esta obra sobre el modelo lineal se puede aplicar exitosamente para cualquier figura de lados rectos 2D. Sin embargo, la generalización a casos de geometrías curvas es un tema pendiente que igualmente puede ser abordado en futuros trabajos. En cuanto a costo computacional, el modelo lineal es adecuado.

Los códigos desarrollados para aplicar el método LCNG de Mu (1997) y LCNGM de Gao (2017) al modelo TDGL tanto en 2D y 3D deben ser optimizados ya que los costos computacionales que actualmente requieren para simular los vórtices con intervalos de tiempo cortos y mallas finas limitan la investigación sobre su comportamiento. Se había mencionado que los tiempos de cómputo del método LCNGM son 30 veces menores a los de LCNG. Sin embargo, a pesar de todo esto, aun los tiempos de cómputo siguen siendo altos. La razón de que aún se tenga problemas en velocidad de cálculo se relaciona con los términos no lineales del modelo GL y presentes tanto en el LCNGM como LCNG los cuales producen matrices que deben ser calculadas y ensambladas para cada elemento y en cada intervalo de tiempo. Para resolver este problema de la no linealidad y dada la naturaleza del ensamblaje puede resultar muy factible utilizar técnicas de cálculo en

paralelo para optimizar tiempos. Se debe aclarar que los métodos LCNG Y LCNGM son lineales en el sentido de que la variable a determinarse se calcula como la inversa de una matriz por un vector. Sin embargo el vector contiene aun término no lineales. A eso me refiero cuando hablo de que se deben solventar las no linealidades.

5 ANEXO

5.1 Diagrama de flujo del código para resolver el modelo GL por MEF.

En el capítulo II se presentaron las expresiones discretas del modelo lineal GL y TDGL respectivamente. Con ellas es posible implementar de manera directa el MEF en cualquier software. En este trabajo se optó por codificar el algoritmo en Matlab R2012a. Este software presenta la ventaja de que su librería de funciones es completamente versátil. Por ejemplo, para el caso lineal donde se requiere buscar autovalores y autovectores, Matlab utiliza la función $\text{eig}(A)$ que al utilizarla permite obtener los datos necesarios. De igual manera funciones tales como $B \setminus A$ o $\text{pcg}(A,B)$ como método pre condicionado para resolver sistemas de ecuaciones lineales permiten ahorrar tiempo al no tener que ser programadas por el usuario. Desde el punto de vista de gráficas, Matlab resulta ser una herramienta potente para casos 2D. La función $\text{trisurf}(TRI,x,y)$ resulta sumamente útil para obtener las gráficas en cualquier dominio 2D. Otra gran ventaja de Matlab es la posibilidad que brinda de vincularse con otros softwares. En este trabajo, por ejemplo, se utilizó el vínculo con Gmsh para realizar los mallados del dominio. Adicionalmente, Matlab permite que el programador tenga un mejor control durante el desarrollo del código, ya que permite visualizar de manera directa cada paso del proceso si es necesario. Como única desventaja, que a criterio del autor se encontró al utilizar Matlab en el desarrollo de este trabajo, es que no cuenta aún con una función análoga a triplot para el caso 3D. Para usar las funciones que Matlab posee para la visualización de datos volumétricos es primero necesario realizar un arreglo de los datos en cierta forma tal que las funciones puedan ser aplicadas correctamente. Esto limita el tipo de dominio en el cual se requiere realizar la simulación. A pesar de ello, en general, Matlab es una herramienta adecuada para realizar simulaciones por el MEF.

En cuanto a Gmsh, se puede decir que es un software para mallado que en primer lugar es de acceso libre y del cual existe variada información y manuales en la red. En segundo lugar, es intuitivo en su aplicación por lo que realmente su aplicación es sencilla. Cuenta además con varias posibilidades y algoritmos para mallados de cualquier tipo de dominio, ya sea 2D o 3D. Como Gmsh realiza únicamente el mallado, su vinculación con otro software para desarrollar el MEF requiere que los datos de cada nodo y elementos se ordenen de una manera lógica de tal forma que el acceso sea más simple. Gmsh logra este objetivo, ya que el archivo de datos presenta un orden sumamente coherente de cada dato, por lo que su lectura es relativamente

simple y se requieren pocas líneas de código para hacerlo, tal como se puede corroborar al revisar los códigos desarrollados en este trabajo.

Habiendo aclarado por qué se escogió Matlab y Gmsh para desarrollar las simulaciones, el siguiente punto es presentar un diagrama de flujo que represente como se armó cada código de manera general. Tal diagrama se presenta a continuación:

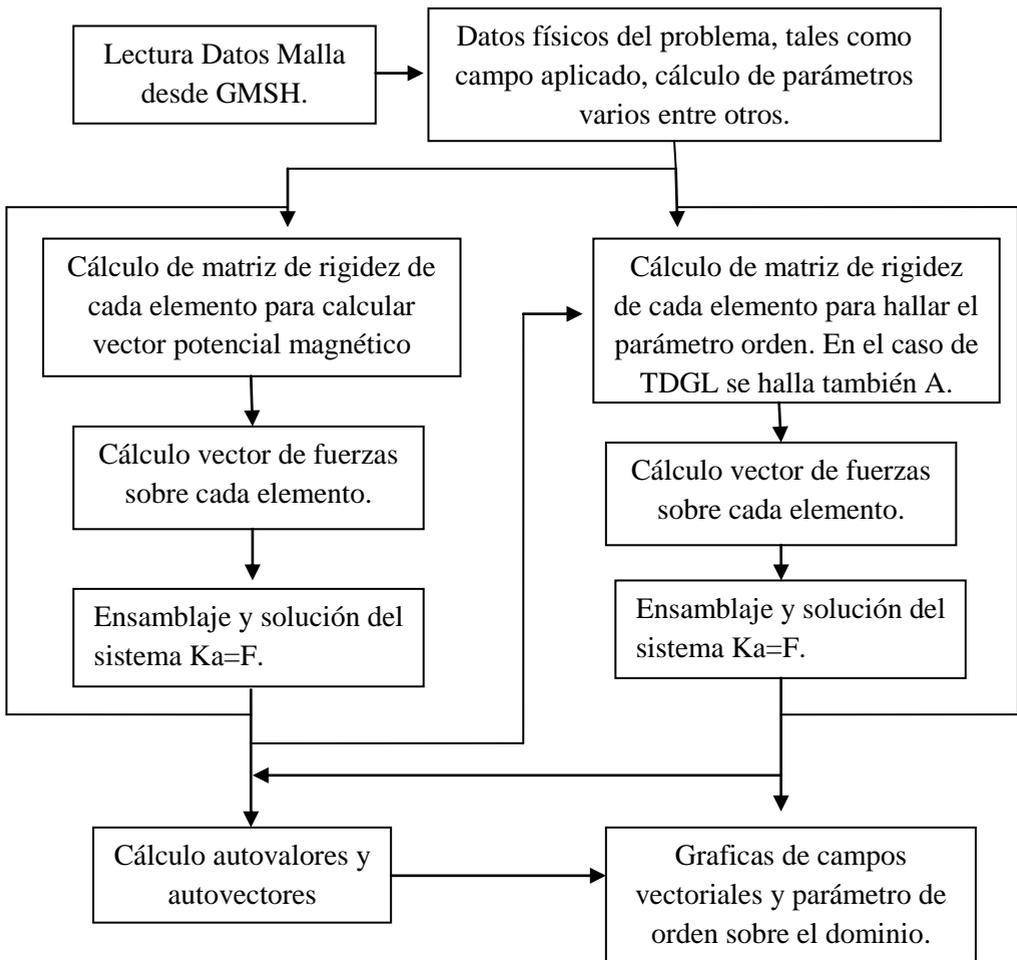


Fig. 5.1 Diagrama de flujo general para resolver el modelo GL por el MEF.

Como se aprecia en el diagrama de flujo, la estructura general de cada código no se diferencia de la estructura que normalmente se sigue en la programación del MEF. Se inicia el pre proceso con la lectura de los datos del mallado del dominio. Posteriormente se ingresan todos los valores de los parámetros que el modelo GL requiere para iniciar el cálculo, tales como los valores s_0 y c_0 , K , H_e entre otros. En el proceso, el diagrama diferencia en su lado derecho lo correspondiente para el caso lineal del modelo GL y en su lado izquierdo para el modelo TDGL. En el lado lineal, es necesario calcular el vector potencial que cumpla con las condiciones de frontera. Todo ello ocurre dentro de un bucle que recorre cada elemento finito. En el lado del modelo TDGL se ingresa directamente a la etapa del armado de la matriz de rigidez para hallar el parámetro de orden. Una vez más ello ocurre dentro de un bucle. Al finalizar este último, para el caso lineal se requiere calcular los autovalores y autovectores. Por último se realiza el pos proceso donde se visualizan los datos necesarios tales como el vector potencial magnético y el parámetro de orden.

Por otro lado, existen algunos pasos previos que se deben ejecutar antes de ingresar a cada bucle. Estos pasos previos son de suma utilidad para disminuir el tiempo de cálculo. Estos consisten en realizar previamente todas las operaciones que no varían en cada iteración dentro del bucle. No tiene sentido calcular siempre la misma matriz en cada iteración si es que sus componentes son siempre las mismas ya que esto conllevaría un alto costo computacional. Como se podrá observar en los códigos, no existen integrales dentro de los bucles de armados de las matrices de rigidez, todo ello se lleva a cabo fuera. La clave para lograr aquello es utilizar las funciones de forma isoparamétricas tal como se puede encontrar de manera sumamente clara y didáctica en (Oñate, 1995). También se puede observar que se calculan varias matrices previamente, tales como las G 's, J 's entre otras. Estas han sido deducidas al desarrollar las expresiones discretas del capítulo II. Al agrupar ciertos términos en determinada forma se llega a las matrices anteriormente mencionadas. Estas matrices involucran integrales que son invariantes durante todo el cálculo.

5.2 Pasos generales para correr el código en Matlab.

Para que el usuario interesado pueda utilizar de manera exitosa los códigos que se presentan en el numeral siguiente es importante indicar ciertas acciones que se deben tomar para lograrlo. En primer lugar, una vez copiado el código en Matlab, el archivo generado se debe guardar en una dirección específica del ordenador. Luego, se construye la geometría en el programa Gmsh y se realiza el mallado correspondiente.

Todos los archivos generados por Gmsh deben ser guardados en la misma dirección en donde se encuentra el archivo del código en Matlab. El archivo .msh que genera Gmsh puede ser cambiado a una extensión .txt con un nombre que el usuario elija. En el caso del modelo TDGL no se requiere realizar ninguna modificación interna en el archivo .msh. En el caso del modelo lineal, se debe abrir el archivo .msh cambiando previamente su extensión a .txt. Hecho esto es indispensable que las primeras cuatro filas del archivo solo cuenten con la siguiente información Fig. 5.2:

```
$MeshFormat
2.2 0 8
$EndMeshFormat
$Nodes
8321
1 0 0 0
```

Fig. 5.2 Ejemplo de formato que debe cumplir el archivo .msh para correr el modelo lineal.

Si se encuentra cualquier otro tipo de datos entre estas filas, todos esos datos extras deben ser borrados. Si no se hace esto, cuando Matlab lee el archivo genera errores. Este es el único cambio que se debe realizar para correr el código del modelo lineal. Hecho esto se guarda los cambios en el archivo. Si todo lo anterior se ha llevado a cabo correctamente, entonces se ingresa a Matlab y se abre el archivo que contiene el código respectivo. En la parte pertinente se coloca el nombre del archivo que contiene los datos del mallado de Gmsh. Por ejemplo, "cuadrado.txt". Los pasos siguientes involucran ingresar los datos necesarios del problema. Con todas estas indicaciones el código se debe ejecutar sin mayor inconveniente.

5.3 Códigos en Matlab r2012a

A continuación se culmina esta sección presentando los 3 códigos utilizados en este trabajo, el primero corresponde al modelo lineal GL, el segundo al modelo TDGL 2D. Para el caso 3D se generaliza fácilmente el caso 2D. Se sugiere tomar en cuenta que su correcta ejecución en versiones más recientes de Matlab puede que requiera realizar ciertas modificaciones de ser necesario. Se aclara que la variable K del modelo lineal y el coeficiente de Ginzburg Landau en el código se presentan como Ks y ks respectivamente.

```

%-----%
%--SIMULACION MODELO LINEAL GINZBURG LANDAU-----%
%-----%

clc
clf
close all
clear N D2 V2 Ki Kd C C0 C1 C2 M1 A d Mo1 Mo K f
clearall

%-----
%----- INGRESO DE DATOS INICIALES-----
%-----

so=1;
co=10000000000;
Ks=180.3;
He=0.3;                                % Campo externo aplicado

%-----%
%-----LECTURA ARCHIVO DE MALLADO GMSH-----
%-----%
file = ( ' ');

N_n   = dlmread(file,"[5-1 1-1 5-1 1-1]");
N_e   = dlmread(file,"[7+N_n 0 7+N_n 0]");

node_id   = dlmread(file,"[5 0 4+N_n 0]");
nodes     = dlmread(file,"[5 1 4+N_n 3]");
elements  = dlmread(file,"[8+N_n 0 7+N_n+N_e 7]");

%----- Geometria 2D-----

two_d_nodes = nodes(:,1:2);
elem_type   = elements(:,2);

%--- Halla el indice inicial de los elementos 2D-----
two_ind = 1;

```

126

```
fori = 1:N_e
if(elem_type(i) ~= 2)
two_ind = two_ind+1;
end
end
%-----

two_d_elements(1:N_e-two_ind,1:3) = 0;
k = 1;
fori = two_ind:N_e
two_d_elements(k,1:3) = elements(i,6:8);
k = k+1;
end

%-----Asignacion de codigo a elementos de frontera-----

one_d_elements=two_ind-1;
Bound=zeros(one_d_elements,3);
fori=1:1:one_d_elements
Bound(i,1)=elements(i,4);
Bound(i,2)=elements(i,6);
Bound(i,3)=elements(i,7);
end

%-----Calculo de pendientes en frontera-----

N_bound=0;
n=1;
s=0;
i=1;
whilei~=one_d_elements+1
    j=n;
while elements(i,4)-elements(j,4)==0
    n=n+1;
    j=j+1;
end
i=n;
N_bound=N_bound+1; %-----Calculanumero de fronteras
```

```

end

Pend=zeros(N_bound,1);
Codigo=zeros(N_bound,1);
Vec=zeros(N_bound,2);
k=1;
i=1;
n=1;
while i~=one_d_elements+1
    j=n;
    while elements(i,4)-elements(j,4)==0
        n=n+1;
        j=j+1;
    end
    Codigo(k,1)=elements(j-1,4);
    Pend(k,1)=(nodes(Bound(i,3),2)-nodes(Bound(i,2),2))/(nodes(Bound(i,3),1)-
nodes(Bound(i,2),1));
    Vec(k,1)=nodes(Bound(i,3),1)-nodes(Bound(i,2),1); %---Normal comp x
    Vec(k,2)=nodes(Bound(i,3),2)-nodes(Bound(i,2),2); %---Normal comp y
    k=k+1;
    i=n;
end
%-----Vector Normal Unitario en Frontera-----
Nor_u=zeros(N_bound,2);

for i=1:1:N_bound
    if Vec(i,2)==0
        Nor_u(i,1)=0;
        Nor_u(i,2)=1;
    else
        Nor_u(i,1)=1;
        Nor_u(i,2)=-Vec(i,1)/Vec(i,2);
    end
    Nor_u(i,:)=Nor_u(i,:)/(Nor_u(i,1).^2+Nor_u(i,2).^2).^0.5;
end

Matriz=zeros(N_bound,4);
Matriz(:,1)=Codigo;

```

```

Matriz(:,2)=Pend;
Matriz(:,3)=Nor_u(:,1);
Matriz(:,4)=Nor_u(:,2);
%---- Grafica de Mallado-----

%figure(1)
%triplot(two_d_elements(:,1:3),two_d_nodes(:,1),two_d_nodes(:,2),'k')
%xlabel('X',fontSize,14)
%ylabel('Y',fontSize,14)
%title('Mallado de Dominio','fontSize',14)
%fh = figure(1);
%set(fh, 'color', 'white');
%hold on
%x=nodes(34,1);
%y=nodes(34,2);
%plot(x,y,'*');

%-----
%-----DETERMINACION VECTOR POTENCIAL MAGNETICO-----
-----
%-----
d = ones(3,3);
C0=zeros(6,1);
C1=zeros(6,1);
B=zeros(6,6);
Div=zeros(6,6);
K=sparse(2*N_n,2*N_n);
F=sparse(2*N_n,1);
tic
fori = 1:1:N_e-one_d_elements
    n1 = two_d_elements(i,1);
    n2 = two_d_elements(i,2);
    n3 = two_d_elements(i,3);
d(1,2) = nodes(n1,1); d(1,3) = nodes(n1,2);
d(2,2) = nodes(n2,1); d(2,3) = nodes(n2,2);
d(3,2) = nodes(n3,1); d(3,3) = nodes(n3,2);
J =det(d);    %-----Jacobiano por elemento-----

```

%-----Calculo de Matriz B y Div-----

C0(1,1)=-((nodes(n3,1)-nodes(n2,1))/J);

C0(2,1)=-((nodes(n1,1)-nodes(n3,1))/J);

C0(3,1)=-((nodes(n2,1)-nodes(n1,1))/J);

C0(4,1)=(nodes(n2,2)-nodes(n3,2))/J;

C0(5,1)=(nodes(n3,2)-nodes(n1,2))/J;

C0(6,1)=(nodes(n1,2)-nodes(n2,2))/J;

B=2*C0*transpose(C0)*J*0.5;

f=2*He*C0*J*0.5;

C1(1,1)=(nodes(n2,2)-nodes(n3,2))/J;

C1(2,1)=(nodes(n3,2)-nodes(n1,2))/J;

C1(3,1)=(nodes(n1,2)-nodes(n2,2))/J;

C1(4,1)=(nodes(n3,1)-nodes(n2,1))/J;

C1(5,1)=(nodes(n1,1)-nodes(n3,1))/J;

C1(6,1)=(nodes(n2,1)-nodes(n1,1))/J;

Div=2*so*C1*transpose(C1)*J*0.5;

%-----Ensamblaje Matriz de Rigidez-----

A=B+Div;

K(n1,n1)=K(n1,n1)+A(1,1);

K(n1,n2)=K(n1,n2)+A(1,2);

K(n1,n3)=K(n1,n3)+A(1,3);

K(n1,n1+N_n)=K(n1,n1+N_n)+A(1,4);

K(n1,n2+N_n)=K(n1,n2+N_n)+A(1,5);

K(n1,n3+N_n)=K(n1,n3+N_n)+A(1,6);

K(n2,n1)=K(n2,n1)+A(2,1);

K(n2,n2)=K(n2,n2)+A(2,2);

K(n2,n3)=K(n2,n3)+A(2,3);

K(n2,n1+N_n)=K(n2,n1+N_n)+A(2,4);

K(n2,n2+N_n)=K(n2,n2+N_n)+A(2,5);

K(n2,n3+N_n)=K(n2,n3+N_n)+A(2,6);

K(n3,n1)=K(n3,n1)+A(3,1);

K(n3,n2)=K(n3,n2)+A(3,2);

K(n3,n3)=K(n3,n3)+A(3,3);

K(n3,n1+N_n)=K(n3,n1+N_n)+A(3,4);

$K(n3,n2+N_n)=K(n3,n2+N_n)+A(3,5);$
 $K(n3,n3+N_n)=K(n3,n3+N_n)+A(3,6);$

$K(n1+N_n,n1)=K(n1+N_n,n1)+A(4,1);$
 $K(n1+N_n,n2)=K(n1+N_n,n2)+A(4,2);$
 $K(n1+N_n,n3)=K(n1+N_n,n3)+A(4,3);$
 $K(n1+N_n,n1+N_n)=K(n1+N_n,n1+N_n)+A(4,4);$
 $K(n1+N_n,n2+N_n)=K(n1+N_n,n2+N_n)+A(4,5);$
 $K(n1+N_n,n3+N_n)=K(n1+N_n,n3+N_n)+A(4,6);$

$K(n2+N_n,n1)=K(n2+N_n,n1)+A(5,1);$
 $K(n2+N_n,n2)=K(n2+N_n,n2)+A(5,2);$
 $K(n2+N_n,n3)=K(n2+N_n,n3)+A(5,3);$
 $K(n2+N_n,n1+N_n)=K(n2+N_n,n1+N_n)+A(5,4);$
 $K(n2+N_n,n2+N_n)=K(n2+N_n,n2+N_n)+A(5,5);$
 $K(n2+N_n,n3+N_n)=K(n2+N_n,n3+N_n)+A(5,6);$

$K(n3+N_n,n1)=K(n3+N_n,n1)+A(6,1);$
 $K(n3+N_n,n2)=K(n3+N_n,n2)+A(6,2);$
 $K(n3+N_n,n3)=K(n3+N_n,n3)+A(6,3);$
 $K(n3+N_n,n1+N_n)=K(n3+N_n,n1+N_n)+A(6,4);$
 $K(n3+N_n,n2+N_n)=K(n3+N_n,n2+N_n)+A(6,5);$
 $K(n3+N_n,n3+N_n)=K(n3+N_n,n3+N_n)+A(6,6);$

$F(n1,1)=F(n1,1)+f(1,1);$
 $F(n2,1)=F(n2,1)+f(2,1);$
 $F(n3,1)=F(n3,1)+f(3,1);$
 $F(n1+N_n,1)=F(n1+N_n,1)+f(4,1);$
 $F(n2+N_n,1)=F(n2+N_n,1)+f(5,1);$
 $F(n3+N_n,1)=F(n3+N_n,1)+f(6,1);$

end

%-----Ensamblaje Matriz Rigidez Elementos de Borde-----

syms x

Iso=zeros(6,6); %-----Matriz en Coordenadas Isoparametricas-----

Iso(1,1)=double(int((1-x).^2,x,0,1));

Iso(1,2)=double(int((1-x)*x,x,0,1));

Iso(1,3)=0;

Iso(2,1)=double(Iso(1,2));

```

Iso(2,2)=double(int(x.^2,x,0,1));
Iso(2,3)=0;
Iso(3,1:3)=0;
Iso(1:3,4:6)=Iso(1:3,1:3);
Iso(4:6,1:3)=Iso(1:3,1:3);
Iso(4:6,4:6)=Iso(1:3,1:3);
j=1;
B1=zeros(6,6);
tic
fori=1:1:N_bound

ifMatriz(i,2)==Inf || Matriz(i,2)==-Inf %--Cond. Elementos verticales-
Matriz(i,2)=0;
    f=2;
else
    f=1;
end
whileMatriz(i,1)==elements(j,4)
    n1=elements(j,6);
    n2=elements(j,7);

%-----Ensamblaje Matriz Rigidez por Elementos de Borde en cada Elemento--

B1(1,1)=2*co*((nodes(n2,f)-
nodes(n1,f))*Matriz(i,3)*Matriz(i,3)*(1+Matriz(i,2).^2).^0.5)*Iso(1,1);
    B1(1,2)=2*co*((nodes(n2,f)-
nodes(n1,f))*Matriz(i,3)*Matriz(i,3)*(1+Matriz(i,2).^2).^0.5)*Iso(1,2);
B1(1,3)=Iso(1,3);
    B1(1,4)=2*co*((nodes(n2,f)-
nodes(n1,f))*Matriz(i,3)*Matriz(i,4)*(1+Matriz(i,2).^2).^0.5)*Iso(1,4);
    B1(1,5)=2*co*((nodes(n2,f)-
nodes(n1,f))*Matriz(i,3)*Matriz(i,4)*(1+Matriz(i,2).^2).^0.5)*Iso(1,5);
B1(1,6)=0;

    B1(2,1)=2*co*((nodes(n2,f)-
nodes(n1,f))*Matriz(i,3)*Matriz(i,3)*(1+Matriz(i,2).^2).^0.5)*Iso(2,1);
    B1(2,2)=2*co*((nodes(n2,f)-
nodes(n1,f))*Matriz(i,3)*Matriz(i,3)*(1+Matriz(i,2).^2).^0.5)*Iso(2,2);

```

B1(2,3)=Iso(1,3);

B1(2,4)=2*co*((nodes(n2,f)-
nodes(n1,f))*Matriz(i,3)*Matriz(i,4)*(1+Matriz(i,2).^2).^0.5)*Iso(2,4);

B1(2,5)=2*co*((nodes(n2,f)-
nodes(n1,f))*Matriz(i,3)*Matriz(i,4)*(1+Matriz(i,2).^2).^0.5)*Iso(2,5);

B1(2,6)=0;

B1(3,1:6)=0;

B1(4,1)=2*co*((nodes(n2,f)-
nodes(n1,f))*Matriz(i,3)*Matriz(i,4)*(1+Matriz(i,2).^2).^0.5)*Iso(4,1);

B1(4,2)=2*co*((nodes(n2,f)-
nodes(n1,f))*Matriz(i,3)*Matriz(i,4)*(1+Matriz(i,2).^2).^0.5)*Iso(4,2);

B1(4,3)=Iso(1,3);

B1(4,4)=2*co*((nodes(n2,f)-
nodes(n1,f))*Matriz(i,4)*Matriz(i,4)*(1+Matriz(i,2).^2).^0.5)*Iso(4,4);

B1(4,5)=2*co*((nodes(n2,f)-
nodes(n1,f))*Matriz(i,4)*Matriz(i,4)*(1+Matriz(i,2).^2).^0.5)*Iso(4,5);

B1(4,6)=0;

B1(5,1)=2*co*((nodes(n2,f)-
nodes(n1,f))*Matriz(i,3)*Matriz(i,4)*(1+Matriz(i,2).^2).^0.5)*Iso(5,1);

B1(5,2)=2*co*((nodes(n2,f)-
nodes(n1,f))*Matriz(i,3)*Matriz(i,4)*(1+Matriz(i,2).^2).^0.5)*Iso(5,2);

B1(5,3)=Iso(1,3);

B1(5,4)=2*co*((nodes(n2,f)-
nodes(n1,f))*Matriz(i,4)*Matriz(i,4)*(1+Matriz(i,2).^2).^0.5)*Iso(5,4);

B1(5,5)=2*co*((nodes(n2,f)-
nodes(n1,f))*Matriz(i,4)*Matriz(i,4)*(1+Matriz(i,2).^2).^0.5)*Iso(5,5);

B1(5,6)=0;

B1(6,1:6)=0;

%if n1==6 && n2==84

% B1

%end

%-----Ensamblaje Matriz de Rigidez Global-----

```

K(n1,n1)=K(n1,n1)+B1(1,1);
K(n1,n2)=K(n1,n2)+B1(1,2);
K(n1,n1+N_n)=K(n1,n1+N_n)+B1(1,4);
K(n1,n2+N_n)=K(n1,n2+N_n)+B1(1,5);

```

```

K(n2,n1)=K(n2,n1)+B1(2,1);
K(n2,n2)=K(n2,n2)+B1(2,2);
K(n2,n1+N_n)=K(n2,n1+N_n)+B1(2,4);
K(n2,n2+N_n)=K(n2,n2+N_n)+B1(2,5);

```

```

K(n1+N_n,n1)=K(n1+N_n,n1)+B1(4,1);
K(n1+N_n,n2)=K(n1+N_n,n2)+B1(4,2);
K(n1+N_n,n1+N_n)=K(n1+N_n,n1+N_n)+B1(4,4);
K(n1+N_n,n2+N_n)=K(n1+N_n,n2+N_n)+B1(4,5);

```

```

K(n2+N_n,n1)=K(n2+N_n,n1)+B1(5,1);
K(n2+N_n,n2)=K(n2+N_n,n2)+B1(5,2);
K(n2+N_n,n1+N_n)=K(n2+N_n,n1+N_n)+B1(5,4);
K(n2+N_n,n2+N_n)=K(n2+N_n,n2+N_n)+B1(5,5);

```

```

j=j+1;
end
end
clear A B1

```

```

%-----
%-----% VECTOR POTENCIAL MAGNETICO (U)-----
%-----

```

```

U=sparse(K)\sparse(F);
Ux=U(1:N_n);
Uy=U(N_n+1:2*N_n);

```

```

%-----
%-----GRAFICA FUNCION VECTOR POTENCIAL-----
%-----

```

```

figure(2)
%title('Vector PotencialMagnetico A')

```

```

quiver(two_d_nodes(:,1),two_d_nodes(:,2),Ux,Uy);
%x=[nodes(3,1) nodes(4,1) nodes(9,1)];
%y=[nodes(3,2) nodes(4,2) nodes(9,2)];
%plot(x,y);
U=zeros(N_n,2);
U(1:N_n,1)=Ux;
U(1:N_n,2)=Uy;

clear X Y F1 F2 TF GF g G1 G2 f
%-----
%-----PARAMETRO DE ORDEN-----
%-----

%-----Ensamblaje matrices de rigidez por elemento normalizado-----
symsalf bet
M1=zeros(3,3);
N(1,1)=1-alf-bet;
N(1,2)=bet;
N(1,3)=alf;

fori=1:1:3
for j=1:1:3
    M1(i,j)=int(int(N(1,i)*N(1,j),alf,0,1-bet),bet,0,1);
end
end

G11=Ks*Ks*double(int(int(transpose(N(1,:))*N(1,:)*N(1,1)*N(1,1),alf,0,1-
bet),bet,0,1));
G12=Ks*Ks*2*double(int(int(transpose(N(1,:))*N(1,:)*N(1,1)*N(1,2),alf,0,1-
bet),bet,0,1));
G13=Ks*Ks*2*double(int(int(transpose(N(1,:))*N(1,:)*N(1,1)*N(1,3),alf,0,1-
bet),bet,0,1));
G14=Ks*Ks*double(int(int(transpose(N(1,:))*N(1,:)*N(1,3)*N(1,3),alf,0,1-
bet),bet,0,1));
G15=Ks*Ks*double(int(int(transpose(N(1,:))*N(1,:)*N(1,2)*N(1,2),alf,0,1-
bet),bet,0,1));
G16=Ks*Ks*2*double(int(int(transpose(N(1,:))*N(1,:)*N(1,2)*N(1,3),alf,0,1-
bet),bet,0,1));

```

```

F11=zeros(1,3);
F12=zeros(1,3);
F13=zeros(1,3);
F14=zeros(3,1);
F15=zeros(3,1);
F16=zeros(3,1);
fori=1:1:1
for j=1:1:3
    F11(i,j)=Ks*int(int(N(1,1)*N(1,j),alf,0,1-bet),bet,0,1);
    F12(i,j)=Ks*int(int(N(1,2)*N(1,j),alf,0,1-bet),bet,0,1);
    F13(i,j)=Ks*int(int(N(1,3)*N(1,j),alf,0,1-bet),bet,0,1);
    F14(j,1)=Ks*int(int(N(1,1)*N(1,j),alf,0,1-bet),bet,0,1);
    F15(j,1)=Ks*int(int(N(1,2)*N(1,j),alf,0,1-bet),bet,0,1);
    F16(j,1)=Ks*int(int(N(1,3)*N(1,j),alf,0,1-bet),bet,0,1);
end
end
%-----Ensamblaje Matriz de rigidez global-----
clear C0 C1 C C2 A d

d = ones(3,3);
C0=zeros(3,2);
C1=zeros(3,3);
C2=zeros(3,3);
C=zeros(3,3);
A=zeros(6,6);
Kd=sparse(N_n*2,N_n*2);
Ki=sparse(N_n*2,N_n*2);

fori = 1:1:N_e-one_d_elements
    n1 = two_d_elements(i,1); n2 = two_d_elements(i,2); n3 = two_d_elements(i,3);
    d(1,2) = nodes(n1,1); d(1,3) = nodes(n1,2);
    d(2,2) = nodes(n2,1); d(2,3) = nodes(n2,2);
    d(3,2) = nodes(n3,1); d(3,3) = nodes(n3,2);
    J =(det(d));      %-----Jacobiano por elemento-----

%-----Ensamblaje matriz A-----

C0(1,1)=(nodes(n2,2)-nodes(n3,2))/J;

```

```

C0(1,2)=(nodes(n3,1)-nodes(n2,1))/J;
C0(2,1)=(nodes(n3,2)-nodes(n1,2))/J;
C0(2,2)=(nodes(n1,1)-nodes(n3,1))/J;
C0(3,1)=(nodes(n1,2)-nodes(n2,2))/J;
C0(3,2)=(nodes(n2,1)-nodes(n1,1))/J;
C1=C0*transpose(C0)*J*0.5;

```

```

C2(1:3,1:3)=G11*(U(n1,1).^2+U(n1,2).^2)+G12*(U(n1,1)*U(n2,1)+U(n1,2)*U(n2,2))
)+G13*(U(n1,1)*U(n3,1)+U(n1,2)*U(n3,2))+G14*(U(n3,1).^2+U(n3,2).^2)+G16*(U
(n2,1)*U(n3,1)+U(n2,2)*U(n3,2))+G15*(U(n2,1).^2+U(n2,2).^2);
C=C1+C2*J;
A(1:3,1:3)=C;
A(4:6,4:6)=C;

```

```

A(1:3,4:6)=U(n1,1)*C0(:,1)*F11*J+U(n1,2)*C0(:,2)*F11*J+U(n2,1)*C0(:,1)*F12*J+
U(n2,2)*C0(:,2)*F12*J+U(n3,1)*C0(:,1)*F13*J+U(n3,2)*C0(:,2)*F13*J-
U(n1,1)*F14*transpose(C0(:,1))*J-U(n1,2)*F14*transpose(C0(:,2))*J-
U(n2,1)*F15*transpose(C0(:,1))*J-U(n2,2)*F15*transpose(C0(:,2))*J-
U(n3,1)*F16*transpose(C0(:,1))*J-U(n3,2)*F16*transpose(C0(:,2))*J;
A(4:6,1:3)=transpose(A(1:3,4:6));

```

```

%-----Ensamblaje matriz Ki y Kd-----

```

```

nump=N_n;

```

```

Ki(n1,n1)=Ki(n1,n1)+A(1,1);
Ki(n1,n2)=Ki(n1,n2)+A(1,2);
Ki(n1,n3)=Ki(n1,n3)+A(1,3);

```

```

Ki(n2,n1)=Ki(n2,n1)+A(2,1);
Ki(n2,n2)=Ki(n2,n2)+A(2,2);
Ki(n2,n3)=Ki(n2,n3)+A(2,3);

```

```

Ki(n3,n1)=Ki(n3,n1)+A(3,1);
Ki(n3,n2)=Ki(n3,n2)+A(3,2);
Ki(n3,n3)=Ki(n3,n3)+A(3,3);

```

```

Ki(n1,n1+N_n)= Ki(n1,n1+N_n)+A(1,4);
Ki(n1,n2+N_n)= Ki(n1,n2+N_n)+A(1,5);
Ki(n1,n3+N_n)= Ki(n1,n3+N_n)+A(1,6);

```

$$\begin{aligned} \text{Ki}(n2,n1+N_n) &= \text{Ki}(n2,n1+N_n)+A(2,4); \\ \text{Ki}(n2,n2+N_n) &= \text{Ki}(n2,n2+N_n)+A(2,5); \\ \text{Ki}(n2,n3+N_n) &= \text{Ki}(n2,n3+N_n)+A(2,6); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ki}(n3,n1+N_n) &= \text{Ki}(n3,n1+N_n)+A(3,4); \\ \text{Ki}(n3,n2+N_n) &= \text{Ki}(n3,n2+N_n)+A(3,5); \\ \text{Ki}(n3,n3+N_n) &= \text{Ki}(n3,n3+N_n)+A(3,6); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ki}(n1+nump,n1) &= \text{Ki}(n1+nump,n1)+A(4,1); \\ \text{Ki}(n1+nump,n2) &= \text{Ki}(n1+nump,n2)+A(4,2); \\ \text{Ki}(n1+nump,n3) &= \text{Ki}(n1+nump,n3)+A(4,3); \\ \text{Ki}(n1+nump,n1+nump) &= \text{Ki}(n1+nump,n1+nump)+A(4,4); \\ \text{Ki}(n1+nump,n2+nump) &= \text{Ki}(n1+nump,n2+nump)+A(4,5); \\ \text{Ki}(n1+nump,n3+nump) &= \text{Ki}(n1+nump,n3+nump)+A(4,6); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ki}(n2+nump,n1) &= \text{Ki}(n2+nump,n1)+A(5,1); \\ \text{Ki}(n2+nump,n2) &= \text{Ki}(n2+nump,n2)+A(5,2); \\ \text{Ki}(n2+nump,n3) &= \text{Ki}(n2+nump,n3)+A(5,3); \\ \text{Ki}(n2+nump,n1+nump) &= \text{Ki}(n2+nump,n1+nump)+A(5,4); \\ \text{Ki}(n2+nump,n2+nump) &= \text{Ki}(n2+nump,n2+nump)+A(5,5); \\ \text{Ki}(n2+nump,n3+nump) &= \text{Ki}(n2+nump,n3+nump)+A(5,6); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ki}(n3+nump,n1) &= \text{Ki}(n3+nump,n1)+A(6,1); \\ \text{Ki}(n3+nump,n2) &= \text{Ki}(n3+nump,n2)+A(6,2); \\ \text{Ki}(n3+nump,n3) &= \text{Ki}(n3+nump,n3)+A(6,3); \\ \text{Ki}(n3+nump,n1+nump) &= \text{Ki}(n3+nump,n1+nump)+A(6,4); \\ \text{Ki}(n3+nump,n2+nump) &= \text{Ki}(n3+nump,n2+nump)+A(6,5); \\ \text{Ki}(n3+nump,n3+nump) &= \text{Ki}(n3+nump,n3+nump)+A(6,6); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Kd}(n1,n1) &= \text{Kd}(n1,n1)+J*M1(1,1); \\ \text{Kd}(n1,n2) &= \text{Kd}(n1,n2)+J*M1(1,2); \\ \text{Kd}(n1,n3) &= \text{Kd}(n1,n3)+J*M1(1,3); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Kd}(n2,n1) &= \text{Kd}(n2,n1)+J*M1(2,1); \\ \text{Kd}(n2,n2) &= \text{Kd}(n2,n2)+J*M1(2,2); \\ \text{Kd}(n2,n3) &= \text{Kd}(n2,n3)+J*M1(2,3); \end{aligned}$$

$$\text{Kd}(n3,n1) = \text{Kd}(n3,n1)+J*M1(3,1);$$

```
Kd(n3,n2)=Kd(n3,n2)+J*M1(3,2);
Kd(n3,n3)=Kd(n3,n3)+J*M1(3,3);
```

```
Kd(n1,n1+nump)= Kd(n1,n1+nump);
Kd(n1,n2+nump)= Kd(n1,n2+nump);
Kd(n1,n3+nump)= Kd(n1,n3+nump);
```

```
Kd(n2,n1+nump)= Kd(n2,n1+nump);
Kd(n2,n2+nump)= Kd(n2,n2+nump);
Kd(n2,n3+nump)= Kd(n2,n3+nump);
```

```
Kd(n3,n1+nump)= Kd(n3,n1+nump);
Kd(n3,n2+nump)= Kd(n3,n2+nump);
Kd(n3,n3+nump)= Kd(n3,n3+nump);
```

```
Kd(n1+nump,n1)= Kd(n1+nump,n1);
Kd(n1+nump,n2)= Kd(n1+nump,n2);
Kd(n1+nump,n3)= Kd(n1+nump,n3);
Kd(n1+nump,n1+nump)= Kd(n1+nump,n1+nump)+J*M1(1,1);
Kd(n1+nump,n2+nump)= Kd(n1+nump,n2+nump)+J*M1(1,2);
Kd(n1+nump,n3+nump)= Kd(n1+nump,n3+nump)+J*M1(1,3);
```

```
Kd(n2+nump,n1)= Kd(n2+nump,n1);
Kd(n2+nump,n2)= Kd(n2+nump,n2);
Kd(n2+nump,n3)= Kd(n2+nump,n3);
Kd(n2+nump,n1+nump)= Kd(n2+nump,n1+nump)+J*M1(2,1);
Kd(n2+nump,n2+nump)= Kd(n2+nump,n2+nump)+J*M1(2,2);
Kd(n2+nump,n3+nump)= Kd(n2+nump,n3+nump)+J*M1(2,3);
```

```
Kd(n3+nump,n1)= Kd(n3+nump,n1);
Kd(n3+nump,n2)= Kd(n3+nump,n2);
Kd(n3+nump,n3)= Kd(n3+nump,n3);
Kd(n3+nump,n1+nump)= Kd(n3+nump,n1+nump)+J*M1(3,1);
Kd(n3+nump,n2+nump)= Kd(n3+nump,n2+nump)+J*M1(3,2);
Kd(n3+nump,n3+nump)= Kd(n3+nump,n3+nump)+J*M1(3,3);
```

```
%clear A
end
```

```

%-----
%-----CALCULO DE EIGENVALORES Y EIGENVECTORES-----
----
%-----
[V2,D2]=eigs(Ki,Kd,10,0);
D3=zeros(1,10);
fori=1:1:10
D3(1,i)=D2(i,i);
end
a11=min(D3);

fori=1:1:10
if D2(i,i)==a11
    a12=i;
end
end
a11=a12;
toc
%-----
%-----GRAFICA DEL PARAMETRO DE ORDEN-----
%-----

Mo1=sparse(nump,2*nump);
fori=1:1:nump
Mo1(i,i)=V2(i,a11);
Mo1(i,i+nump)=V2(i+nump,a11);
end

Mo=Mo1*V2(:,a11);

%-----Grafica parametro de orden. Superficie-----
figure(3)
trisurf(two_d_elements,two_d_nodes(:,1),two_d_nodes(:,2),Mo.^0.5,'Edgecolor','none'
)
shadinginterp
title('Parametro de Orden GL','fontsize',14)
%-----
%-----FINAL CODIGO-----

```

```
%-----%
%----- SIMULACION MODELO TDGL 2D GINZBURG LANDAU-----%
%-----%
```

```
clc
clf
close all
clear N D2 V2 Ki Kd C C0 C1 C2 M1 A d Mo1 Mo K f
clearall
```

```
%-----%
%-----LECTURA ARCHIVO DE MALLADO GMSH-----%
%-----%
```

```
file = ( ' ');
```

```
N_n = dlmread(file,"[5-1 1-1 5-1 1-1]");
N_e = dlmread(file,"[7+N_n 0 7+N_n 0]");
```

```
node_id = dlmread(file,"[5 0 4+N_n 0]");
nodes = dlmread(file,"[5 1 4+N_n 3]");
elements = dlmread(file,"[8+N_n 0 7+N_n+N_e 7]");
```

```
%-----%
%----- INGRESO DE DATOS INICIALES-----%
%-----%
```

```
ks=10; % Coeficiente de GL
He=3.5; % Campo externo aplicado
T=0.4; % Tiempo Total(s)
Phi=zeros(N_n,2);
A=zeros(N_n,2); % Vector Potencial inicial
for i=1:1:N_n
Phi(i,1)=0.8; % Parametro de orden parte real inicial
Phi(i,2)=0.6; % Parametro de orden parte imaginaria inicial
end
dt=0.05; % Intervalo de tiempo
%----- Geometria 2D-----%
```

```
two_d_nodes = nodes(:,1:2);
```

```

elem_type = elements(:,2);

%--- Halla el indice inicial de los elementos 2D-----
two_ind = 1;
fori = 1:N_e
if(elem_type(i) ~= 2)
two_ind = two_ind+1;
end
end
%-----

two_d_elements(1:N_e-two_ind,1:3) = 0;
k = 1;
fori = two_ind:N_e
two_d_elements(k,1:3) = elements(i,6:8);
k = k+1;
end

%---- Grafica de Mallado-----

%figure(1)
%triplot(two_d_elements(:,1:3),two_d_nodes(:,1),two_d_nodes(:,2),'k')
%xlabel('X','fontsize',14)
%ylabel('Y','fontsize',14)
%title('Mallado de Dominio','fontsize',14)
%fh = figure(1);
%set(fh, 'color', 'white');
%hold on
%x=nodes(34,1);
%y=nodes(34,2);
%plot(x,y,'*');

%-----
%-----PARAMETRO DE ORDEN-----
%-----

tic
%-----Ensamblaje matrices de rigidez por elemento normalizado-----
symsalf bet

```

```

Co=zeros(3,3);
N(1,1)=1-alf-bet;
N(1,2)=bet;
N(1,3)=alf;
%-----Matriz Co para para temporal de modelo GL-----
fori=1:1:3
for j=1:1:3
    Co(i,j)=int(int(N(1,i)*N(1,j),alf,0,1-bet),bet,0,1);
end
end
Z2=-Co*0.5;
%Elementos para terminos de integral de modulo Vector Potencial y Parametro---
G11=double(int(int(transpose(N(1,:))*N(1,:)*N(1,1)*N(1,1),alf,0,1-bet),bet,0,1));
G12=double(int(int(transpose(N(1,:))*N(1,:)*N(1,1)*N(1,2),alf,0,1-bet),bet,0,1));
G13=double(int(int(transpose(N(1,:))*N(1,:)*N(1,1)*N(1,3),alf,0,1-bet),bet,0,1));
G14=double(int(int(transpose(N(1,:))*N(1,:)*N(1,3)*N(1,3),alf,0,1-bet),bet,0,1));
G15=double(int(int(transpose(N(1,:))*N(1,:)*N(1,2)*N(1,2),alf,0,1-bet),bet,0,1));
G16=double(int(int(transpose(N(1,:))*N(1,:)*N(1,2)*N(1,3),alf,0,1-bet),bet,0,1));
%---Elementos para terminos de parte imaginaria-----
F11=zeros(1,3);
F12=zeros(1,3);
F13=zeros(1,3);
F14=zeros(3,1);
F15=zeros(3,1);
F16=zeros(3,1);
fori=1:1:1
for j=1:1:3
    F11(i,j)=(1/(2*ks))*int(int(N(1,1)*N(1,j),alf,0,1-bet),bet,0,1);
    F12(i,j)=(1/(2*ks))*int(int(N(1,2)*N(1,j),alf,0,1-bet),bet,0,1);
    F13(i,j)=(1/(2*ks))*int(int(N(1,3)*N(1,j),alf,0,1-bet),bet,0,1);
    F14(j,1)=(1/(2*ks))*int(int(N(1,1)*N(1,j),alf,0,1-bet),bet,0,1);
    F15(j,1)=(1/(2*ks))*int(int(N(1,2)*N(1,j),alf,0,1-bet),bet,0,1);
    F16(j,1)=(1/(2*ks))*int(int(N(1,3)*N(1,j),alf,0,1-bet),bet,0,1);
end
end
%-----Matriz Temporal para Vector Potencial-----
S11=double(int(int(transpose([N(1,1) N(1,2) N(1,3) 0 0 0;0 0 0 N(1,1) N(1,2)
N(1,3)])*[N(1,1) N(1,2) N(1,3) 0 0 0;0 0 0 N(1,1) N(1,2) N(1,3)],alf,0,1-bet),bet,0,1));

```

```

%-----Coeficientes para A13-----
H11=double(int(int([N(1,1).^4;N(1,2).^2*N(1,1).^2;N(1,1).^2*N(1,3).^2;2*N(1,1).^3
*N(1,2);2*N(1,1).^3*N(1,3);2*N(1,1).^2*N(1,2)*N(1,3)],alf,0,1-bet),bet,0,1));
H12=double(int(int([N(1,1).^3*N(1,2);N(1,2).^3*N(1,1).^1;N(1,1).^1*N(1,2)*N(1,3).
^2;2*N(1,1).^2*N(1,2).^2;2*N(1,3).^1*N(1,2)*N(1,1).^2;2*N(1,1).^1*N(1,2).^2*N(1
,3)],alf,0,1-bet),bet,0,1));
H13=double(int(int([N(1,1).^3*N(1,3);N(1,2).^2*N(1,1).^1*N(1,3);N(1,1).^1*N(1,3).
^3;2*N(1,1).^2*N(1,2).^1*N(1,3);2*N(1,3).^2*N(1,1).^2;2*N(1,1).^1*N(1,2).^1*N(1
,3).^2],alf,0,1-bet),bet,0,1));
H14=double(int(int([N(1,1).^2*N(1,2).^2;N(1,2).^4;N(1,2).^2*N(1,3).^2;2*N(1,1).^1
*N(1,2).^3;2*N(1,3).^1*N(1,1).^1*N(1,2).^2;2*N(1,2).^3*N(1,3).^1],alf,0,1-
bet),bet,0,1));
H15=double(int(int([N(1,1).^2*N(1,2).^1*N(1,3);N(1,2).^3*N(1,3);N(1,2).^1*N(1,3).
^3;2*N(1,1).^1*N(1,2).^2*N(1,3);2*N(1,3).^2*N(1,1).^1*N(1,2).^1;2*N(1,2).^2*N(1
,3).^2],alf,0,1-bet),bet,0,1));
H16=double(int(int([N(1,1).^2*N(1,3).^2;N(1,2).^2*N(1,3).^2;N(1,3).^4;2*N(1,1).^1
*N(1,2).^1*N(1,3).^2;2*N(1,3).^3*N(1,1).^1;2*N(1,2).^1*N(1,3).^3],alf,0,1-
bet),bet,0,1));
%-----Coeficientes para A15-----
J11=double(int(int(N(1,1)*N(1,2),alf,0,1-bet),bet,0,1));
J12=-double(int(int(N(1,1)*N(1,1),alf,0,1-bet),bet,0,1));
J13=double(int(int(N(1,3)*N(1,1),alf,0,1-bet),bet,0,1));
J14=J12;
J15=J13;
J16=-J11;
J17=double(int(int(N(1,2)*N(1,2),alf,0,1-bet),bet,0,1));
J18=-J11;
J19=double(int(int(N(1,2)*N(1,3),alf,0,1-bet),bet,0,1));
J110=-J11;
J111=J19;
J112=-J17;
J113=J19;
J114=-J13;
J115=double(int(int(N(1,3)*N(1,3),alf,0,1-bet),bet,0,1));
J116=-J15;
J117=J115;
J118=-J19;
%-----

```

```

toc
%-----
%-----Ensamblaje Matriz de rigidez global-----
%-----
%-----Definicion de Matrices-----

K=sparse(N_n*2,N_n*2);
K1=sparse(N_n*2,N_n*2);
F=sparse(2*N_n,1);
F1=sparse(2*N_n,1);
t=0;
n=1;
Phit=zeros(2*N_n,1);
Phit(1:N_n,1)=Phi(:,1);
Phit(N_n+1:2*N_n,1)=Phi(:,2);
At(1:N_n,1)=A(:,1);
At(N_n+1:2*N_n,1)=A(:,2);
Phio=Phit;
Phi0=Phit;
Ao=zeros(2*N_n,1);
A0=Ao;
C=Co/dt;
A11=S11/dt;
A13=zeros(6,6);
%-----
tic
nn=size(two_d_elements);
while t<=T
t
if n==2
    Phi(:,1)=(Phio(1:N_n,1)+Phit(1:N_n,1))*0.5;
    Phi(:,2)=(Phio(N_n+1:2*N_n,1)+Phit(N_n+1:2*N_n,1))*0.5;
    A(:,1)=(Ao(1:N_n,1)+At(1:N_n,1))*0.5;
    A(:,2)=(Ao(N_n+1:2*N_n,1)+At(N_n+1:2*N_n,1))*0.5;
end
if n>2
Phi(:,1)=1.5*Phit(1:N_n,1)-0.5*Phi0(1:N_n,1);
Phi(:,2)=1.5*Phit(N_n+1:2*N_n,1)-0.5*Phi0(N_n+1:2*N_n,1);

```

```

A(:,1)=1.5*At(1:N_n,1)-0.5*A0(1:N_n,1);
A(:,2)=1.5*At(N_n+1:2*N_n,1)-0.5*A0(N_n+1:2*N_n,1);
end
fori = 1:1:nn(1,1)
    n1 = two_d_elements(i,1); n2 = two_d_elements(i,2); n3 = two_d_elements(i,3);
d = ones(3,3);
    C1=zeros(3,2);
d(1,2) = nodes(n1,1);
d(1,3) = nodes(n1,2);
d(2,2) = nodes(n2,1);
d(2,3) = nodes(n2,2);
d(3,2) = nodes(n3,1);
d(3,3) = nodes(n3,2);
    J =(det(d)); %-----Jacobiano por elemento-----

%-----Ensamblaje matriz M y MO. Coeficientes para Parametro de Orden-----
C1(1,1)=(nodes(n2,2)-nodes(n3,2))/J;
C1(1,2)=(nodes(n3,1)-nodes(n2,1))/J;
C1(2,1)=(nodes(n3,2)-nodes(n1,2))/J;
C1(2,2)=(nodes(n1,1)-nodes(n3,1))/J;
C1(3,1)=(nodes(n1,2)-nodes(n2,2))/J;
C1(3,2)=(nodes(n2,1)-nodes(n1,1))/J;
    Z1=(1/(2*ks*ks))*C1*transpose(C1)*J*0.5;

Z3=G11*(A(n1,1).^2+A(n1,2).^2)+2*G12*(A(n1,1)*A(n2,1)+A(n1,2)*A(n2,2))+2*G
13*(A(n1,1)*A(n3,1)+A(n1,2)*A(n3,2))+G14*(A(n3,1).^2+A(n3,2).^2)+2*G16*(A(n
2,1)*A(n3,1)+A(n2,2)*A(n3,2))+G15*(A(n2,1).^2+A(n2,2).^2);

Z4=G11*(Phi(n1,1).^2+Phi(n1,2).^2)+2*G12*(Phi(n1,1)*Phi(n2,1)+Phi(n1,2)*Phi(n2
,2))+2*G13*(Phi(n1,1)*Phi(n3,1)+Phi(n1,2)*Phi(n3,2))+G14*(Phi(n3,1).^2+Phi(n3,2
).^2)+2*G16*(Phi(n2,1)*Phi(n3,1)+Phi(n2,2)*Phi(n3,2))+G15*(Phi(n2,1).^2+Phi(n2,
2).^2);
BR=Z1+0.5*Z3*J+0.5*Z4*J;
    %Z2*J
    %Z4*0.5*J;
    %C*J

BI=J*(A(n1,1)*C1(:,1)*F11+A(n1,2)*C1(:,2)*F11+A(n2,1)*C1(:,1)*F12+A(n2,2)*C

```

```

1(:,2)*F12+A(n3,1)*C1(:,1)*F13+A(n3,2)*C1(:,2)*F13-
A(n1,1)*F14*transpose(C1(:,1))-A(n1,2)*F14*transpose(C1(:,2))-
A(n2,1)*F15*transpose(C1(:,1))-A(n2,2)*F15*transpose(C1(:,2))-
A(n3,1)*F16*transpose(C1(:,1))-A(n3,2)*F16*transpose(C1(:,2)));
M(1:3,1:3)=C*J+BR+Z2*J;
M(4:6,4:6)=M(1:3,1:3);
M(1:3,4:6)=-BI;
M(4:6,1:3)=BI;
M1(1:3,1:3)=C*J-BR-Z2*J;
M1(4:6,4:6)=M1(1:3,1:3);
M1(1:3,4:6)=BI;
M1(4:6,1:3)=-BI;
Poo(1,1)=Phit(n1,1);
Poo(2,1)=Phit(n2,1);
Poo(3,1)=Phit(n3,1);
Poo(4,1)=Phit(n1+N_n,1);
Poo(5,1)=Phit(n2+N_n,1);
Poo(6,1)=Phit(n3+N_n,1);
MO=M1*Poo;
    M-transpose(M);
%-----Ensamblaje matriz MA y FA. Coeficientes para Vector Potencial---
    C0=zeros(6,1);
C0(1,1)=-(nodes(n3,1)-nodes(n2,1))/J;
C0(2,1)=-(nodes(n1,1)-nodes(n3,1))/J;
C0(3,1)=-(nodes(n2,1)-nodes(n1,1))/J;
C0(4,1)=(nodes(n2,2)-nodes(n3,2))/J;
C0(5,1)=(nodes(n3,2)-nodes(n1,2))/J;
C0(6,1)=(nodes(n1,2)-nodes(n2,2))/J;
    A12=0.5*C0*transpose(C0)*J*0.5;
    %a=Phi(n1,1).^2+Phi(n1,2).^2;
    %b=Phi(n2,1).^2+Phi(n2,2).^2;
    %c=Phi(n3,1).^2+Phi(n3,2).^2;
    %d=Phi(n1,1)*Phi(n2,1)+Phi(n1,2)*Phi(n2,2);
    %e=Phi(n1,1)*Phi(n3,1)+Phi(n1,2)*Phi(n3,2);
    %f=Phi(n2,1)*Phi(n3,1)+Phi(n2,2)*Phi(n3,2);
    %fact=[a b c d e f];

A13(1:3,1:3)=G11*(Phi(n1,1).^2+Phi(n1,2).^2)+2*G12*(Phi(n1,1)*Phi(n2,1)+Phi(n1,

```

2)*Phi(n2,2))+2*G13*(Phi(n1,1)*Phi(n3,1)+Phi(n1,2)*Phi(n3,2))+G14*(Phi(n3,1).^2+Phi(n3,2).^2)+2*G16*(Phi(n2,1)*Phi(n3,1)+Phi(n2,2)*Phi(n3,2))+G15*(Phi(n2,1).^2+Phi(n2,2).^2);;

% A13(1,2)=fact*H12;

% A13(1,3)=fact*H13;

% A13(2,1)=A13(1,2);

% A13(2,2)=fact*H14;

% A13(2,3)=fact*H15;

% A13(3,1)=A13(1,3);

% A13(3,2)=A13(2,3);

% A13(3,3)=fact*H16;

A13(4:6,4:6)=A13(1:3,1:3);

A14=He*0.5*J*C0;

a1=Phi(n1,1)*Phi(n2,2)-Phi(n2,1)*Phi(n1,2);

b1=Phi(n1,1)*Phi(n3,2)-Phi(n3,1)*Phi(n1,2);

c1=Phi(n2,1)*Phi(n3,2)-Phi(n3,1)*Phi(n2,2);

A15(1,1)=-a1*(J11*C0(1,1)+J12*C0(2,1))-b1*(J13*C0(1,1)+J14*C0(3,1))-c1*(J15*C0(2,1)+J16*C0(3,1));

A15(2,1)=-a1*(J17*C0(1,1)+J18*C0(2,1))-b1*(J19*C0(1,1)+J110*C0(3,1))-c1*(J111*C0(2,1)+J112*C0(3,1));

A15(3,1)=-a1*(J113*C0(1,1)+J114*C0(2,1))-b1*(J115*C0(1,1)+J116*C0(3,1))-c1*(J117*C0(2,1)+J118*C0(3,1));

A15(4,1)=a1*(-J12*C0(5,1)-J11*C0(4,1))+b1*(-J14*C0(6,1)-J13*C0(4,1))+c1*(-J16*C0(6,1)-J15*C0(5,1));

A15(5,1)=a1*(-J18*C0(5,1)-J17*C0(4,1))+b1*(-J110*C0(6,1)-J19*C0(4,1))+c1*(-J112*C0(6,1)-J111*C0(5,1));

A15(6,1)=a1*(-J114*C0(5,1)-J113*C0(4,1))+b1*(-J116*C0(6,1)-J115*C0(4,1))+c1*(-J118*C0(6,1)-J117*C0(5,1));

% A15

MA=A11*J+A12+0.5*A13*J;

Aoo(1,1)=At(n1,1);

Aoo(2,1)=At(n2,1);

Aoo(3,1)=At(n3,1);

Aoo(4,1)=At(n1+N_n,1);

Aoo(5,1)=At(n2+N_n,1);

Aoo(6,1)=At(n3+N_n,1);

FA=(A11*J-A12-0.5*A13*J)*Aoo+A14-A15*J*(1/ks);

%-----

%-----Ensamblaje matriz K par Parametro de Orden-----

%-----

nump=N_n;

$K(n1,n1)=K(n1,n1)+M(1,1);$

$K(n1,n2)=K(n1,n2)+M(1,2);$

$K(n1,n3)=K(n1,n3)+M(1,3);$

$K(n2,n1)=K(n2,n1)+M(2,1);$

$K(n2,n2)=K(n2,n2)+M(2,2);$

$K(n2,n3)=K(n2,n3)+M(2,3);$

$K(n3,n1)=K(n3,n1)+M(3,1);$

$K(n3,n2)=K(n3,n2)+M(3,2);$

$K(n3,n3)=K(n3,n3)+M(3,3);$

$K(n1,n1+N_n)= K(n1,n1+N_n)+M(1,4);$

$K(n1,n2+N_n)= K(n1,n2+N_n)+M(1,5);$

$K(n1,n3+N_n)= K(n1,n3+N_n)+M(1,6);$

$K(n2,n1+N_n)= K(n2,n1+N_n)+M(2,4);$

$K(n2,n2+N_n)= K(n2,n2+N_n)+M(2,5);$

$K(n2,n3+N_n)= K(n2,n3+N_n)+M(2,6);$

$K(n3,n1+N_n)= K(n3,n1+N_n)+M(3,4);$

$K(n3,n2+N_n)= K(n3,n2+N_n)+M(3,5);$

$K(n3,n3+N_n)= K(n3,n3+N_n)+M(3,6);$

$K(n1+nump,n1)= K(n1+nump,n1)+M(4,1);$

$K(n1+nump,n2)= K(n1+nump,n2)+M(4,2);$

$K(n1+nump,n3)= K(n1+nump,n3)+M(4,3);$

$K(n1+nump,n1+nump)= K(n1+nump,n1+nump)+M(4,4);$

$K(n1+nump,n2+nump)= K(n1+nump,n2+nump)+M(4,5);$

$K(n1+nump,n3+nump)= K(n1+nump,n3+nump)+M(4,6);$

$K(n2+nump,n1)= K(n2+nump,n1)+M(5,1);$

$K(n2+nump,n2)= K(n2+nump,n2)+M(5,2);$

$K(n2+nump,n3)= K(n2+nump,n3)+M(5,3);$

$K(n2+nump,n1+nump)= K(n2+nump,n1+nump)+M(5,4);$

$K(n2+nump,n2+nump)= K(n2+nump,n2+nump)+M(5,5);$
 $K(n2+nump,n3+nump)= K(n2+nump,n3+nump)+M(5,6);$

$K(n3+nump,n1)= K(n3+nump,n1)+M(6,1);$
 $K(n3+nump,n2)= K(n3+nump,n2)+M(6,2);$
 $K(n3+nump,n3)= K(n3+nump,n3)+M(6,3);$
 $K(n3+nump,n1+nump)= K(n3+nump,n1+nump)+M(6,4);$
 $K(n3+nump,n2+nump)= K(n3+nump,n2+nump)+M(6,5);$
 $K(n3+nump,n3+nump)= K(n3+nump,n3+nump)+M(6,6);$

$F(n1,1)=F(n1,1)+MO(1,1);$
 $F(n2,1)=F(n2,1)+MO(2,1);$
 $F(n3,1)=F(n3,1)+MO(3,1);$
 $F(n1+N_n,1)=F(n1+N_n,1)+MO(4,1);$
 $F(n2+N_n,1)=F(n2+N_n,1)+MO(5,1);$
 $F(n3+N_n,1)=F(n3+N_n,1)+MO(6,1);$
 %-----
 %-----Ensamblaje Matriz de Rigidez Vector Potencial-----
 %-----

$K1(n1,n1)=K1(n1,n1)+MA(1,1);$
 $K1(n1,n2)=K1(n1,n2)+MA(1,2);$
 $K1(n1,n3)=K1(n1,n3)+MA(1,3);$

$K1(n2,n1)=K1(n2,n1)+MA(2,1);$
 $K1(n2,n2)=K1(n2,n2)+MA(2,2);$
 $K1(n2,n3)=K1(n2,n3)+MA(2,3);$

$K1(n3,n1)=K1(n3,n1)+MA(3,1);$
 $K1(n3,n2)=K1(n3,n2)+MA(3,2);$
 $K1(n3,n3)=K1(n3,n3)+MA(3,3);$

$K1(n1,n1+N_n)= K1(n1,n1+N_n)+MA(1,4);$
 $K1(n1,n2+N_n)= K1(n1,n2+N_n)+MA(1,5);$
 $K1(n1,n3+N_n)= K1(n1,n3+N_n)+MA(1,6);$

$K1(n2,n1+N_n)= K1(n2,n1+N_n)+MA(2,4);$
 $K1(n2,n2+N_n)= K1(n2,n2+N_n)+MA(2,5);$

$$K1(n2,n3+N_n)= K1(n2,n3+N_n)+MA(2,6);$$

$$K1(n3,n1+N_n)= K1(n3,n1+N_n)+MA(3,4);$$

$$K1(n3,n2+N_n)= K1(n3,n2+N_n)+MA(3,5);$$

$$K1(n3,n3+N_n)= K1(n3,n3+N_n)+MA(3,6);$$

$$K1(n1+nump,n1)= K1(n1+nump,n1)+MA(4,1);$$

$$K1(n1+nump,n2)= K1(n1+nump,n2)+MA(4,2);$$

$$K1(n1+nump,n3)= K1(n1+nump,n3)+MA(4,3);$$

$$K1(n1+nump,n1+nump)= K1(n1+nump,n1+nump)+MA(4,4);$$

$$K1(n1+nump,n2+nump)= K1(n1+nump,n2+nump)+MA(4,5);$$

$$K1(n1+nump,n3+nump)= K1(n1+nump,n3+nump)+MA(4,6);$$

$$K1(n2+nump,n1)= K1(n2+nump,n1)+MA(5,1);$$

$$K1(n2+nump,n2)= K1(n2+nump,n2)+MA(5,2);$$

$$K1(n2+nump,n3)= K1(n2+nump,n3)+MA(5,3);$$

$$K1(n2+nump,n1+nump)= K1(n2+nump,n1+nump)+MA(5,4);$$

$$K1(n2+nump,n2+nump)= K1(n2+nump,n2+nump)+MA(5,5);$$

$$K1(n2+nump,n3+nump)= K1(n2+nump,n3+nump)+MA(5,6);$$

$$K1(n3+nump,n1)= K1(n3+nump,n1)+MA(6,1);$$

$$K1(n3+nump,n2)= K1(n3+nump,n2)+MA(6,2);$$

$$K1(n3+nump,n3)= K1(n3+nump,n3)+MA(6,3);$$

$$K1(n3+nump,n1+nump)= K1(n3+nump,n1+nump)+MA(6,4);$$

$$K1(n3+nump,n2+nump)= K1(n3+nump,n2+nump)+MA(6,5);$$

$$K1(n3+nump,n3+nump)= K1(n3+nump,n3+nump)+MA(6,6);$$

$$F1(n1,1)=F1(n1,1)+FA(1,1);$$

$$F1(n2,1)=F1(n2,1)+FA(2,1);$$

$$F1(n3,1)=F1(n3,1)+FA(3,1);$$

$$F1(n1+N_n,1)=F1(n1+N_n,1)+FA(4,1);$$

$$F1(n2+N_n,1)=F1(n2+N_n,1)+FA(5,1);$$

$$F1(n3+N_n,1)=F1(n3+N_n,1)+FA(6,1);$$

end

%---Calculo de Parametro de Orden y Vector Potencial-----

if n>3

 Phi0=Phit;

```

A0=At;
end
Phit=K\F;
if n==1
    K\F;
end
    At=K1\F1;
    %At=pcg(K1,F1);
%-----Grafica parametro de orden. Superficie-----
if t==0.4 %|| t==8 || t==10 || t==40
    Mo1=sparse(num,2*num);
fori=1:1:num
    Mo1(i,i)=Phit(i,1);
    Mo1(i,i+num)=Phit(i+num,1);
end
    Mo=Mo1*Phit(:,1);
figure(n)

trisurf(two_d_elements,two_d_nodes(:,1),two_d_nodes(:,2),Mo)% 'Edgecolor','none')
shadinginterp
title('Parametro de Orden GL','fontsize',14);
end
%-----
    %figure(n)
    %Ux=At(1:N_n);
    %Uy=At(N_n+1:2*N_n);
    %quiver(two_d_nodes(:,1),two_d_nodes(:,2),Ux,Uy);
%-----
    n=n+1;
    t=n*dt;
clear K K1 F F1
    K=sparse(N_n*2,N_n*2);
    K1=sparse(N_n*2,N_n*2);
    F=sparse(2*N_n,1);
    F1=sparse(2*N_n,1);
end
toc
%-----FINAL CODIGO-----

```

GLOSARIO

C

Campo Magnético Crítico

Campo aplicado por encima del cual la muestra superconductora retorna a su estado normal conductor. · 24

D

Densidad de corriente crítica

Valor de la densidad de corriente eléctrica por encima de la cual el material pierde la propiedad de superconductor. · 23, 25, 26, 36

Diagrama de fase magnético H-T.

Curva en el plano que representa la variación del campo magnético en función de la temperatura. · 25

E

Efecto Meissner

Propiedad particular de la superconductividad en la cual el material presenta repulsión casi total del campo magnético aplicado en su interior. · 22

L

Longitud de coherencia

Longitud que mide la variación del parámetro de orden desde la superficie hacia el interior de la

muestra superconductora. · 16, 35, 49, 58, 114

Longitud de Penetración

Longitud en la cual el campo magnético externo ingresa al volumen de la muestra superconductora. · 23

M

Modelo Estacionario

Modelo GL en el cual no se considera la variable temporal. · 47, 58

Modelo GL

Modelo matemático basado en las propiedades termodinámicas del estado superconductor. Fue desarrollado por Landau y Ginzburg para explicar el fenómeno desde un punto de vista macroscópico. · 11, 12, 17, 32, 33, 34, 35, 37, 38, 45, 46, 47, 48, 49, 52, 58, 60, 121, 122, 123, 142

Modelo lineal

Modelo GL que consiste en una aproximación para valores del parámetro de orden cercanos a cero, es decir cerca de la frontera del diagrama H-T. · 12, 49, 50, 51, 52, 58, 59, 60, 62, 74, 87, 89, 90, 110, 115, 116, 119, 121, 124

Modelo TDGL

Modelo GL que considera al tiempo dentro de sus variables. · 12, 37,

53, 64, 87, 88, 92, 99, 115, 116,
119, 123, 124

P

Par de Cooper

Par apareado de electrones que explican el origen de la superconductividad desde la mecánica cuántica. · 34, 36

Parámetro de orden

Variable del modelo GL que representa la densidad de pares de Cooper dentro de la muestra superconductora. · 14, 16, 17, 32, 33, 34, 35, 40, 42, 43, 46, 48, 49, 50, 52, 53, 60, 61, 67, 68, 69, 71, 73, 76, 77, 79, 80, 87, 88, 89, 91, 93, 114, 116, 117, 123

S

Superconductividad

Fenómeno electromagnético de la materia, considerado como un estado estable de la misma, y que se caracteriza por presentar resistencia eléctrica nula y diamagnetismo perfecto · 11, 13, 14, 18, 19, 20, 21, 24, 25, 26, 28, 32, 33, 34, 36, 113, 118

Superconductores tipo I

Aquellos superconductores donde la relación entre la longitud de penetración y la de coherencia es menor a la raíz de $1/2$ · 14, 30, 32, 38, 42, 58, 61

Superconductores tipo II

Aquellos superconductores donde la relación entre la longitud de penetración y la de coherencia es mayor o igual a la raíz de $1/2$ · 14, 15, 28, 31, 38, 39, 40, 42, 58, 88

Superelectrones

Electrones en estado superconductor, o pares de Cooper. · 25, 71, 79, 86, 87

T

Temperatura crítica

Temperatura por debajo la cual el fenómeno de la superconductividad es estable · 16, 20, 22, 28, 33, 41

Teoría BCS

Teoría cuántica de la superconductividad. · 11, 28, 33, 37

V

Vórtices de Abrikosov

Efecto que se presenta en los superconductores tipo II cuando en ellos se sobrepasa el primer campo crítico. A través de los vórtices el flujo del campo magnético penetra por cuantos de flujo · 38, 39, 59, 61, 65, 66, 67, 72, 74, 75, 76, 77, 78, 80, 81, 88, 90, 93, 95, 97, 100

ACRÓNIMOS

Modelo GL: Modelo de Ginzburg-Landau

MEF: Método de los Elementos Finitos

Modelo BCS: Modelo Bardeen-Cooper-Schrieffer

Modelo TDGL: Time Dependent Ginzburg-Landau Model (Modelo Temporal de Ginzburg-Landau)

CERN: Conseil European pour la Recherche Nucleaire (Consejo Europeo para la Investigación Nuclear)

SQUID: Superconducting Quantum Interference Devices (Dispositivos Superconductores de Interferencia Cuántica)

Técnica μ SR: Muon Spin Rotation Technique (Técnica de Rotación del Spin del Muón)

HTSC: High-Temperature Superconductors (Superconductores de Alta Temperatura)

CBE: Condensado Bose-Einstein

Método LCNG: Linear Crank-Nicolson-Garlekin Method (Método Lineal de Crank-Nicolson-Garlekin)

MRPG: Método de los Residuos Ponderados de Garlekin

Modelo LGL: Lineal Ginzburg-Landau Model (Modelo Lineal de Ginzburg-Landau)

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abrikosov, A. (1957). On the magnetic properties of superconductors of the second group. *Soviet Physics JETP*, 5(6), 1442-1452.
- Abrikosov, A. A. (1957). Magnetic Properties of Superconducting Alloys. *Journal of Physics and Chemistry of Solids*, 2(3), 199-208.
- Annett, J. F. (2004). *Superconductivity, Superfluids and Condensates*. Oxford: Oxford University Press.
- Annett, J. F. (2004). *Superconductivity, Superfluids and Condensates*. New York: Oxford University Press.
- Barba-Ortega, J., Sardella, E., & Albino Aguiar, J. (2015). Superconducting properties of a parallelepiped mesoscopic superconductor: A comparative study between the 2D and 3D Ginzburg-Landau models. *Physics Letters A*.
- Bardeen, J., Cooper, L., & Schrieffer, J. (1957). Microscopic theory of superconductivity. *Physical Review*, 106(1), 162-164.
- Callen, H. B. (1985). *Thermodynamics and a introduction to thermostatistics* (II ed.). Singapore: John Wiley & Sons.
- CERN. (2017). *home.cern*. Recuperado el 28 de Abril de 2017, de <https://home.cern>
- Chen, Z., Elliott, C. M., & Tang, Q. (1998). Justification of a two dimensional evolutionary Ginzburg-Landau superconductivity model. *RAIRO-Modelisation Mathematique Et Analyse Numerique*, 32(1), 25-50.
- Chibotaru, L. F., Ceulemans, A., Morelle, M., Teniers, G., Carballeira, C., & Moshchalkov, V. V. (2005). Ginzburg-Landau description of confinement and quantization effects in mesoscopic superconductors. *Journal of Mathematical Physics*(46), 095108.
- Civale, L. (1997). Vortex pinning and creep in high-temperature superconductors with columnar defects. *Superconductor Science Technology*, 10, A11-A28.
- Comercio, E. (6 de Octubre de 2013). Investigadores Ecuatorianos Promueven Proyectos Teoricos. *El Comercio*.

- Cooper, L. (1956). Bound electrons in pairs in a degenerate Fermi gas. *Physical Review*, 1189.
- Daryl, L. (2007). *A first Course in the Finite Element Method* (IV ed.). Toronto, Canada: Thomson Canada Limited.
- Deang, J. (1997). *Electronic Theses and Dissertations at VT*. Recuperado el Septiembre de 2017, de <https://theses.lib.vt.edu/theses/index.html>
- Dew-Hughes, D. (2001). The Critical Current of Superconductors: an historical review. *Low Temperature Physics*, 27(9-10), 967-979.
- Donnelly, R. J. (1995). The Discoverey of Superfluidity. *Physics Today*, 48(7), 30-36.
- Du, Q., & Ju, L. (2004). Numerical simulations of the quantized vortices on a thin superconducting hollow sphere. *Journal of Computational physics*, 201, 511-530.
- Du, Q., Gunzburger, M., & Peterson, J. (1992). Analysis and Approxiation of the Ginzburg-Landau Model of Superconductivity. *SIAM*, 34(1), 54-81.
- Fetter, A., & Hohenberg, P. (1967). The mixed state of thin superconducting films in perpendicular fields. *Physical review*, 159(2), 330-343.
- Fleckinger-Pelle, J., & Kaper, H. G. (1995). Gauges for the Ginzburg-Landau equations of superconductivity. *International Congress on Industrial and Applied Mathematics*, 3-7.
- Gao, H. (2017). Efficient Numerical Solution of Dynamical Ginzburg-Landau Equations under the Lorentz Gauge. *Communications in Computational Physics*, 22(1), 182-201.
- Gao, H., & Sun, W. (2015). An efficient fully linearized semi-implicit Galerkin-mixed FEM for the dynamical Ginzburg-Landau equations of superconductivity. *Journal of Computational Physics*(294), 329-345.
- Gao, H., & Sun, W. (2016). A new mixed formulation and efficient numerical solution of Ginzburg-Landau equations under the temporal gauge. (SIAM, Ed.) *SIAM J. Sci. Comput*, 38(3), A1339-A1357.
- Geim, A. K., Dubonos, S. V., Lok, J., Heinini, M., & Maan, J. (1998). Paramagnetic Meissner effect in small superconductors. *Nature*, 396, 3.

- Ginzburg, V. (1955). On the theory of superconductivity. *Il nuovo cimento*, 2(6), 1234-1250.
- Golibjon. (2007). *Vortex Structure and Critical Parameters in Superconducting Thin Films with Arrays of Pinning Centers*. Amberes, Belgica: Universidad de Amberes (Belgica).
- Gor'kov, L. P. (Diciembre de 1959). Microscopic derivation of the Ginzburg-Landau equations in the theory of superconductivity. *Soviet Physics JETP*, 36(6), 9.
- Grant, P., Starr, C., & Overbye, T. (2006). A power grid for the hydrogen economy. *Scientific American*, 295(1), 76-83.
- Griffiths, D. (1995). *Introduction to quantum mechanics*. New Jersey: Prentice Hall.
- Griffiths, D. (1999). *Introduction to Electrodynamics*. New Jersey: Prentice Hall.
- Hammond, P. (1986). *Electromagnetism for Engineers* (III ed.). Oxford: Pergamon Press.
- Harada, K., Kamimura, O., Kasai, H., Matsuda, T., Tonomura, A., & Moshchalkov, V. (1996). Direct observation of vortex dynamics in superconducting films with regular arrays of defects. *Science*, 274, 1167-1170.
- ICMM-CSIC. (2017). *ICMM-CSIC*. Recuperado el 1 de Mayo de 2017, de <http://www3.icmm.csic.es>
- Kim, S., Gunzburger, M., Peterson, J., & Hu., C.-R. (2009). Computational Investigation of the Effects of Sample Geometry on the Superconducting-Normal Phase Boundary and Vortex-Antivortex States in Mesoscopic Superconductors. *Communications in Computational Physics*, 6(4), 673-698.
- Kittel, C. (1997). *Introduccion a la fisica del estado solido*. Barcelona: Reverte S.A.
- Kumar Saxena, A. (2012). *High-Temperature Superconductors* (Segunda Edicion ed.). Rewa: Springer.
- Lee, C., Janko, B., Derenyi, I., & Barabasi, A. (1999). Reducing vortex density in superconductors using the "ratchet effect". *Nature*, 400, 337-339.
- Li, B., & Zhang, Z. (2015). A new approach for numerical simulation of the time-dependent Ginzburg-Landau equations. *Journal of Computational Physics*.

- Ma, Z., Wang, X., & Zhou, Y. (2016). Vortex Dynamics and Characteristics of Prestrained Type-II Deformable Superconductors Under Magnetic Fields. *Physica C: Superconductivity and its applications*.
- Maximenko, E. (2017). *egormaximenko*. Recuperado el Julio de 2017, de <http://esfm.egormaximenko.com/>
- Moschchalkov, V., Dhalle, M., & Bruynseraede, Y. (1993). Numerical simulation of a periodic vortex states in superconductors. *Physica C*, 207(3-4), 307-3017.
- Mu, M. (1997). A Linearized Crank-Nicolson-Garlekin Method for the Ginzburg-Landau Model. *SIAM J. SCI.COMPUT.*, 18(4), 1028-1039.
- Mu, M. (1997). A Linearized Crank-Nicolson-Garlekin Method for the Ginzburg-Landau Model. *SIAM J. SCI. COMPUT.*, 18(4), 1028-1039.
- Olivares, G., Gonzales, B., Rosado, I., Garcia, H., & Moran, C. (2005). *mty.items*. Recuperado el 28 de Abril de 2017, de <http://www.mty.itesm.mx>
- Oñate, E. (1995). *Calculo de Estructuras por el Metodo de los Elementos Finitos* (II ed.). Barcelona: Centro Internacional de Metodos Numericos en Ingenieria.
- Owolabi, T. O., Akande, K. O., & Olatunji, S. O. (2016). Application of computational intelligence technique for estimating superconducting transition temperature of YCBO superconductors. *Applied Soft Computing Journal*.
- Puri, R. K., & Babbar, V. K. (1997). *Solid State Physics* (I ed.). Nueva Delhi: S.Chand & Company LTD.
- Ramirez-Piscina, L., Sancho, J. M., & Hernandez-Machado, A. (1 de Julio de 1993). Numerical algorithm for Ginzburg-Landau equations with multiplicative noise: Application to domain growth. *Physical review. B, Condensed matter.*, 48(1), 7.
- Reefman, D., & Brom, H. (1991). Numerical simulation on two dimensional vortex lattices. *Physica C*, 183(4-6), 1459-1460.
- Rice, T. (2011). The future of superconductivity viewed through a cloudy crystal ball. *Contemporary Concepts of Condensed Matter Science*, 4, 235-251.
- Rose-Innes, A. C., & Rhoderick, E. H. (1978). *Introduction to Superconductivity* (Segunda Edicion ed.). Elsevier.

- Sehra, A. (2006). *arxiv.org/abs/0704.3240*. Recuperado el Julio de 2017, de <https://arxiv.org/pdf/0704.3240.pdf>
- Shubnikov, L., Khotkevich, V., Shepelev, Y., & Ryabinin, Y. (1937). Magnetic properties of superconducting metals and alloys. *Ukranian journal of physics*, 42-52.
- Sorensen, M., Pedersen, N., & Ogren, M. (2016). The dynamics of magnetic vortices in type II superconductors with pinning sites studied by the time dependent Ginzburg-Landau model. *Physica C: Superconductivity and its applications*.
- Tang, Q., & Wang, S. (1995). Time Dependent Ginzburg-Landau equations of superconductivity. *Physica D*(88), 139-166.
- Teniers, G., Moshchalkov, V., Chibotaru, L., & Ceulemans, A. (2003). Vortex-Antivortex patterns in mesoscopic superconductors. *Physica B*, 1340-1343.
- Timmermans, M., Serrier-Garcia, L., Perini, M., Van de Vondel, J., & Moshchalkov, V. (2016). Direct observation of condensate and vortex confinement in nanostructured superconductors. *Physical review B*.
- Tinkham, M. (1996). *Introduction to Superconductivity* (II ed.). Nueva York: McGraw-Hill, Inc.
- Tinkham, M., Beasley, M., Larbalestier, D., Clark, A., & Finnemore, D. (1988). Research opportunities in superconductivity. *Cryogenics*, 28(11), 711-723.
- UFRN. (2017). *Vortex2017*. Recuperado el 28 de Abril de 2017, de vortex2017.org
- Van Delft, D. (2011). Heike Kamerlingh Onnes and the Road to Liquid Helium. *100 Years of Superconductivity*, 14.
- Velez, M., Martin, J., Villegas, J., Hoffmann, A., Gonzales, E., Vincent, J., y otros. (2008). Superconducting vortex pinning with artificial magnetic nanostructures. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 320, 2547-2562.
- Vodolazov, D., Maksimov, I., & Brandt, E. (2003). Vortex entry conditions in type-II superconductors. Effect of surface defects. *Physica C*, 384, 211-226.
- Yu, X. (2012). *guava.physics.uiuc.edu*. Recuperado el 28 de Abril de 2017, de guava.physics.uiuc.edu

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA SALESIANA
UNIDAD DE POSGRADOS

**MAESTRÍA EN MÉTODOS MATEMÁTICOS
Y SIMULACIÓN NUMÉRICA EN INGENIERÍA**

Autor:
Ing. Pablo Jara P.

Director:
José Aller Castro, P.h.D.

**SIMULACIÓN DE LOS VÓRTICES DE
ABRIKOSOV EN MATERIALES
SUPERCONDUCTORES UTILIZANDO
ELEMENTOS FINITOS APLICADO AL MODELO
GL**

La superconductividad es uno de los fenómenos más estudiados por la física actual dada las importantes aplicaciones prácticas que conlleva. Para comprender este fenómeno existen diversos modelos, entre los cuales el modelo Ginzburg-Landau (GL) es básico para el estudio de la superconductividad y del fenómeno de los vórtices de Abrikosov. Como muchos otros modelos matemáticos de la física, el modelo GL requiere la aplicación de técnicas numéricas para su resolución, en donde el Método de los Elementos Finitos (MEF) destaca por su versatilidad.

En el presente trabajo se simula el fenómeno los vórtices de Abrikosov sobre diversas geometrías, especialmente 2D, a través del desarrollo de códigos computacionales aplicados en Matlab y utilizando MEF para resolver el modelo GL estacionario y no estacionario con el fin de comprender el comportamiento de la vorticidad en materiales superconductores.