



**Aplicación del Método de Elementos de  
Contorno**

**En la Solución de Problemas de  
Elasticidad Bidimensional.**

# **Aplicación del Método de Elementos de Contorno en la Solución de Problemas de Elasticidad Bidimensional.**

**HERNAN ALFREDO GARCIA ERAZO**

Ingeniero Civil

Egresado de la Maestría de Métodos Numéricos

Para Diseño en Ingeniería

Universidad Politécnica Salesiana

*Dirigido por:*

**ING. JULVER PINO**

Ingeniero Civil

Docente del Programa de Maestría en Métodos Numéricos

Para Diseño en Ingeniería

Dirección de Post grados

Universidad Politécnica Salesiana



Cuenca – Ecuador

**GARCIA ERAZO HERNAN ALFREDO**

*Aplicación del Método de Elementos de Contorno en la Solución de Problemas de Elasticidad Bidimensional.*

Universidad Politécnica Salesiana, Cuenca – Ecuador, 2011

MAESTRIA EN METODOS NUMERICOS PARA  
DISEÑO EN INGENIERIA

Formato 170x240

Páginas: 154

*Breve reseña del autor e información de contacto:*



**García Erazo Hernán Alfredo**

*Ingeniero Civil*

*Egresado de la Maestría en Métodos  
Numéricos para Diseño en Ingeniería*

*Universidad Politécnica Salesiana*

*hernangarciaerazo@gmail.com*

*Dirigido por:*



**Ángel Julver Pino Velázquez**

*Ingeniero Civil, Máster en Estructuras*

*Docente de la Universidad de Cuenca*

*Maestría en Métodos Numéricos para Diseño en Ingeniería*

*ajulver02@yahoo.com*

Todos los derechos reservados.

Queda prohibida, salvo excepción prevista en la Ley, cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública, y transformación de esta obra para fines comerciales, sin contar con autorización de los titulares de propiedad intelectual. La infracción de los derechos mencionados puede ser constitutiva de delito contra la propiedad intelectual. Se permite la libre difusión de este texto con fines académicos o investigativos por cualquier medio, con la debida notificación a los autores.

DERECHOS RESERVADOS

©2011 Universidad Politécnica Salesiana.

CUENCA – ECUADOR – SUDAMERICA

GARCIA ERAZO HERNAN ALFREDO

*Aplicación del Método de Elementos de Contorno en la Solución de Problemas de Elasticidad Bidimensional.*

Edición y Producción:

Hernán Alfredo García Erazo.

Diseño de la portada:

Julver Pino

IMPRESO EN ECUADOR – PRINTED IN ECUADOR

# INDICE GENERAL

	<b>Pag.</b>	
1	CONCEPTOS BASICOS	1
1.1	Conceptos fundamentales	1
1.2	La Ecuación de Poisson	5
2.	DISCRETIZACION E INTERPOLACION	11
2.1	Introducción	11
2.2	Elementos Unidimensionales	11
2.3	Elementos Bidimensionales	17
2.4	Interpolación	23
2.4.1	Elementos Isoparamétricos	23
2.4.2	Elementos Discontinuos	25
3.	MODELACION Y SOLUCION FUNDAMENTAL	27
3.1	Introducción	27
3.2	El Problema de Elasticidad	28
3.3	Ecuaciones Constitutivas	34
3.4	Solución fundamental	40
3.5	Conclusiones del capítulo	45
4.	ECUACIONES INTEGRALES DE CONTORNO	46
4.1	Introducción	46
4.2	El Método de TREFFTZ	47
4.2.1	Solución aplicando el Método de TREFFTZ	48
4.3	Método Directo	51
4.3.1	Teorema de Betti y Ecuaciones Integrales	51
4.3.2	Limitando los valores integrales de $P$ coincidiendo con $Q$	55
4.3.3	Solución de las ecuaciones integrales	59
4.4	Obtención de resultados dentro del dominio	66
5.	IMPLEMENTACION NUMERICA	67
5.1	Introducción	67
5.2	Discretización con elementos isoparamétricos	67
5.3	Integración del producto de Funciones de Forma Kernel.	71
5.3.1	Integrales Singulares	71
5.3.2	Movimiento de cuerpo rígido	73
5.3.3	Integración Numérica	78
5.3.4	Implementación numérica sobre elementos unidimensionales	84
5.3.5	Subdivisión de la región de integración	91

5.3.6	Implementación para problemas planos	93
5.3.7	Integración numérica para elementos bidimensionales	103
5.3.8	Subdivisión de la región de integración	108
5.4	Conclusiones.	110
6.	ENSAMBLAJE Y SOLUCION	111
6.1	Introducción	111
6.2	Ensamblaje del Sistema de Ecuaciones	111
6.2.1	Simetría	118
6.2.2	Subrutina espejo	121
6.2.3	Subrutina ensamblaje	123
6.3	Solución del sistema de ecuaciones	125
6.3.1	Eliminación de Gauss	126
6.3.2	Escalado de los coeficientes en los términos que intervienen en elasticidad	129
7	UTILIZACION DEL PROGRAMA	132
7.1	Ingreso de datos	132
7.2	Salida de datos	132
7.3	Ejemplo	133

## INDICE DE FIGURAS

	<b>Pag.</b>
Figura 1.1	6
Figura 2.1	12
Figura 2.2	12
Figura 2.3	14
Figura 2.4	15
Figura 2.5	15
Figura 2.6	17
Figura 2.7	18
Figura 2.8	19
Figura 2.9	20
Figura 2.10	23
Figura 2.11	24
Figura 2.12	24
Figura 2.13	25
Figura 2.14	26
Figura 3.1	28
Figura 3.2	29
Figura 3.3	32
Figura 3.4	33
Figura 3.5	39
Figura 3.6	41
Figura 3.7	42
Figura 4.1	47
Figura 4.2	49
Figura 4.3	51
Figura 4.4	52
Figura 4.5	56
Figura 4.6	57

	dimensiones	
Figura 4.7	Límite de la integral cuando P se localiza en una esquina	58
Figura 4.8	Región exterior e interior obtenidas separando los dominios a través de la línea entrecortada.	59
Figura 4.9	Solución de ecuaciones integrales por segmentos rectos.	61
Figura 4.10	Discretización en elementos lineales para el problema de flujo sobre un cilindro.	62
Figura 4.11	Coordenadas polares utilizadas para evaluar analíticamente la integral $\Delta T_1^e$ .	64
Figura 4.12	Valor principal de la Integral de Cauchy cuando $P_i$ se acerca al centro del elemento e.	65
Figura 5.1	Discretización de un problema bidimensional en elementos de contorno lineales.	68
Figura 5.2	Variación de $T_{xy}$ sobre un contorno plano.	72
Figura 5.3	Traslación de un cuerpo rígido en dirección x de un dominio con radio R.	75
Figura 5.4	Cuerpo rígido para dominio tridimensional infinito.	76
Figura 5.5	Nodo de cuerpo rígido para dominios semi infinitos.	77
Figura 5.6	Integración sobre un elemento unidimensional.	79
Figura 5.7	Contornos indicando la localización de los puntos $P_i$ en la integración de Gauss con cuatro puntos dando un error de $10^{-3}$	80
Figura 5.8	Elemento unidimensional, integración cuando $P_i$ no es un nodo del elemento.	85
Figura 5.9	Integración cuando $P_i$ es un nodo de los elementos.	86
Figura 5.10	Integración cuando $P_i$ y n coinciden.	87
Figura 5.11	Subdivisión de la región de integración.	92
Figura 5.12	Elemento isoparamétrico bidimensional.	104
Figura 5.13	Subelemento para integración numérica cuando $P_i$ es un nodo de esquina del elemento	105
Figura 5.14	Subelementos para integración numérica cuando $P_i$ es un nodo intermedio del elemento.	106
Figura 5.15	Subdivisión de elementos bidimensionales.	109
Figura 6.1	Ensamblaje explicativo para malla 2-D para potencial.	113
Figura 6.2	Ensamblaje del ejemplo para problemas elásticos en 2-D.	115
Figura 6.3	Ejemplo bidimensional para problemas de potencial con condiciones de borde mezcladas.	116
Figura 6.4	Ejemplo de discontinuidad en elasticidad.	117
Figura 6.5	Ejemplo con un plano de simetría.	118
Figura 6.6	Ejemplo con dos planos de simetría.	120
Figura 7.1	Viga en cantiliver con carga transversal.	133

## INDICE DE TABLAS

	<b>Pag.</b>
Tabla 5.1	Número de puntos de Gauss. 80
Tabla 5.2	Número de nodo local $l(n)$ para los nodos de subelementos $P_i$ de nodos de esquina 107
Tabla 5.3	Número de nodo local $l(n)$ , para los nodos de subelementos cuando $P_i$ es un nodo intermedio. 108
Tabla 6.1	Indices de conectividad. 112
Tabla 6.2	Destinos. 114

## **DEDICATORIA**

*A mi familia por comprender y adaptarse a los cambios que fueron necesarios para cumplir la meta; pero especialmente a Patricia, mi esposa; por su fortaleza y dedicación.*

## **PREFACIO**

*El objetivo principal al desarrollar este tema de tesis “Aplicación del Método de Elementos de Contorno en la Solución de Problemas de Elasticidad Bidimensional”, era crear un programa que permita resolver sistemas elásticos bidimensionales. Para ello fue preciso partir desde el significado de la solución de la ecuación diferencial, explicar las diferencias principales que tiene con el Método de los Elementos Finitos, describir la explicación general del Método de Elementos de Contorno, realizar el desarrollo matemático para de ahí llegar al desarrollo numérico por partes, y finalmente la creación de las principales subrutinas que forman el programa.*

*El código final en fortran del programa y la corrida de varios ejemplos para indicar su funcionamiento.*

## PROLOGO

*Modelar la realidad es una tarea todavía inconclusa y que presenta desafíos cada vez mayores. Las herramientas disponibles en la actualidad nos han permitido esta evolución.*

*Del análisis estructural la modelación de sistemas discretos es de más fácil entendimiento debido a que descartamos algunos esfuerzos de los elementos dependiendo de cómo estos trabajen. En el análisis continuo bi y tridimensional se requiere de mejores habilidades para determinar los esfuerzos principales; este reto bastante desarrollado ha sido estudiado ya por algún tiempo con la utilización de elementos finitos, pero la intención era demostrar que existen otras maneras de enfocar el problema y de llegar a un resultado y que a veces estas soluciones son más efectivas.*

*Es por esto que escogí este tema la “Aplicación del Método de Elementos de Contorno en la Solución de Problemas de Elasticidad Bidimensional”, porque simplifica el entendimiento de un elemento bidimensional hasta llegar a resolverlo como un elemento unidimensional, basándose en muchos principios del Método de los Elementos Finitos, MEF; pero modelando de mejor manera los contornos.*

*Considero que es un aporte para continuar el desarrollo del Método y la investigación utilizándolo en temas de la ingeniería donde se adapta mejor.*

*En casos como el de la interacción suelo – estructura, modelos semi infinitos, presas, túneles, excavaciones; los dominios de estos ejemplos son resueltos más rápidamente obteniendo sistemas de ecuaciones reducidos comparados con el Método de los Elementos Finitos.*

## **AGRADECIMIENTO**

*A la Universidad Politécnica Salesiana por emprender una maestría diferente, aportando al desarrollo de la investigación.*

*A todos los profesores, de manera especial al Ing. Julver Pino; quien con sus conocimientos y consejos me facilitaron el camino; y*

*Especialmente a mi esposa, quien dedicó noches enteras para la terminación de este documento.*

# CONTENIDO

## 1. CONCEPTOS BASICOS

### 1.1 Conceptos Fundamentales

Considera una ecuación diferencial sencilla aplicada para un dominio unidimensional desde  $x=0$  hasta  $x=l$ .

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \lambda^2 u - b = 0 \quad \text{Ec. 1.1}$$

$u$ , es la función que gobierna la ecuación y usualmente la encontramos utilizando un Método Numérico obteniendo una solución aproximada.  $\lambda^2$  se conoce como una constante positiva y  $b$  como una función conocida de  $x$ .

La solución de la ecuación (1.1) se puede encontrar al asumir una variación de  $u$  con funciones conocidas multiplicadas por coeficientes desconocidos. Estos coeficientes se pueden hallar forzando la ecuación (1.1) a que satisfaga una serie de puntos. Esta es la base del método de colocación puntual y es lo que se hace cuando utilizamos el Método de Diferencias Finitas. En elementos finitos la solución se encuentra mediante el concepto de distribución del error en el dominio.

El concepto de distribuir una ecuación diferencial no es válido únicamente para soluciones aproximadas, por lo contrario es un concepto matemático fundamental, que se puede utilizar en muchas aplicaciones de la ingeniería.

Los ingenieros estamos muy familiarizados con el concepto de trabajo virtual que se formula generalmente en términos del trabajo realizado por fuerzas internas y externas. Estos conceptos son también esenciales para estudiar el comportamiento de las ecuaciones diferenciales y particularmente las condiciones de borde que requieren para su consistencia.

Para entender lo que significan estos conceptos antes de proponer cualquier aproximación, se puede considerar una función  $w$  arbitraria y continua en el dominio  $x$  y que sus derivadas son continuas hasta el grado requerido; ahora podemos multiplicar la ecuación (1.1) por esta función  $w$  e integrar en el dominio de  $x$  como se indica a continuación:

$$\int_0^1 \left( \frac{d^2 u}{dx^2} + \lambda^2 u - b \right) w dx = 0$$

Ec. 1.2

Este concepto utilizado en el Método de Elementos Finitos no es nuevo y se resuelve integrando por partes así:

$$\int_0^1 \left\{ -\frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} + (\lambda^2 u - b)w \right\} dx + \left[ \frac{du}{dx} w \right]_0^1 = 0$$

Ec. 1.3

Nótese que la integración por partes produce dos términos, uno en el dominio con las primeras derivadas de  $u$  y  $w$ , y otra en el contorno que para este caso son dos puntos  $x=0$  y  $x=1$ .

Si la función  $W$  tiene suficientes grados de continuidad se puede integrar por partes nuevamente obteniendo:

$$\int_0^1 \left\{ u \frac{d^2 w}{dx^2} + (\lambda^2 u - b)w \right\} dx + \left[ \frac{du}{dx} w \right]_0^1 - \left[ u \frac{dw}{dx} \right]_0^1 = 0$$

Ec. 1.4

La ecuación (1.4) es por supuesto equivalente a (1.3) pero se han pasado todas las derivadas a la función de peso  $w$  y los términos en  $x=0$  y  $x=l$  nos dan ingreso a las condiciones de borde requeridas para resolver el problema. En este caso:

$$u \text{ o } \frac{du}{dx} \text{ se requieren conocer en } x=0 \text{ y en } x=l$$

Ec. 1.5

Nótese que la función  $w$  que al principio era una función arbitraria, con cierto grado de continuidad puede hacerse para satisfacer ciertas condiciones de borde. En el principio de los desplazamientos virtuales funciones de este tipo se definen como *desplazamientos virtuales* pero son asumidas para satisfacer la versión homogénea de los desplazamientos de las condiciones de borde con valor igual a cero en cualquier punto donde los desplazamientos no son cero;  $w \equiv 0$  en los contornos donde  $u$  es conocida. Esto se hace para eliminar los términos de tipo  $\left[\frac{du}{dx} w\right]$ .

En forma general podemos asumir que  $w$  y  $dw/dx$  pueden tener valores diferentes de cero en los contornos y esto hace a la ecuación (1.4) más general.

El concepto de una función arbitraria  $w$  usada como una función de distribución se relaciona no solo con funciones virtuales y consecuentemente con trabajo virtual sino con la idea de los multiplicadores de Lagrangian. Estas son funciones de tipo  $w$  en orden a satisfacer ciertas ecuaciones que se definirán mejor en los siguientes capítulos.

Así mismo la ecuación (1.4) le da al usuario la facilidad de adiestrarse en reconocer el tipo de condición de frontera requerida para resolver el problema. Estas condiciones no han sido explícitamente incorporadas en el problema. Para poder incorporarlas se debe considerar que las condiciones de borde son:

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} && \text{en } x=0 \\ q &= \frac{du}{dx} = \bar{q} && \text{en } x=l \end{aligned}$$

Ec. 1.6

Donde las derivadas de  $u$  son definidas como  $q$ . Es usual llamar a la primera condición de (1.6) esencial y las que involucran a  $q$  derivadas naturales.

Sustituyendo esos valores en la ecuación (1.4) se obtiene:

$$\int_0^1 \left\{ u \frac{d^2 w}{dx^2} + (\lambda^2 u - b)w \right\} dx + \{ [\bar{q}w]_{x=1} - [\bar{q}w]_{x=0} \} - \left\{ \left[ u \frac{dw}{dx} \right]_{x=1} - \left[ \bar{u} \frac{dw}{dx} \right]_{x=0} \right\} = 0$$

Ec. 1.7

Es interesante tratar de regresar a la expresión original de (1.2) integrando por partes, pero esta vez pasando las derivadas de  $w$  a  $u$ , la primera integración da:

$$\int_0^1 \left\{ - \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} + (\lambda^2 u - b)w \right\} dx + \left[ u \frac{dw}{dx} \right]_{x=1} - \left[ u \frac{dw}{dx} \right]_{x=0} + [\bar{q}w]_{x=1} - [qw]_{x=0} - \left[ u \frac{dw}{dx} \right]_{x=1} + \left[ \bar{u} \frac{dw}{dx} \right]_{x=0} = 0$$

Ec. 1.8

Nótese que solo el término  $\left[ u \frac{dw}{dx} \right]_{x=1}$  desaparece, luego de integrar por segunda vez se tiene:

$$\int_0^1 \left\{ u \frac{d^2 w}{dx^2} + (\lambda^2 u - b)w \right\} dx - \left[ \frac{du}{dx} w \right]_{x=1} + \left[ \frac{du}{dx} w \right]_{x=0} - \left[ u \frac{dw}{dx} \right]_{x=0} + [\bar{q}w]_{x=1} - [qw]_{x=0} + \left[ \bar{u} \frac{dw}{dx} \right]_{x=0} = 0$$

Ec. 1.9

Nuevamente solo el término  $[qw]_{x=0}$  desaparece, nótese también que  $q=du/dx$  como se definió anteriormente. Agrupando los términos se llega a una expresión más interesante, diferente de la fórmula original (1.4).

$$\int_0^1 \left\{ \frac{d^2 u}{dx^2} w + (\lambda^2 u - b)w \right\} dx - [(q - \bar{q})w]_{x=1} + [(\bar{u} - u) \frac{dw}{dx}]_{x=0} = 0$$

Ec. 1.10

Esta expresión implica que se está tratando de forzar no solo la satisfacción de la ecuación diferencial sino también la condición de frontera, es aquí donde se separa el Método de los Elementos finitos con el Método de los Elementos de Contorno. Las funciones  $w$  y  $dw/dx$  pueden ser vistas como multiplicadores de Lagrange.

## 1.2 La Ecuación Poisson

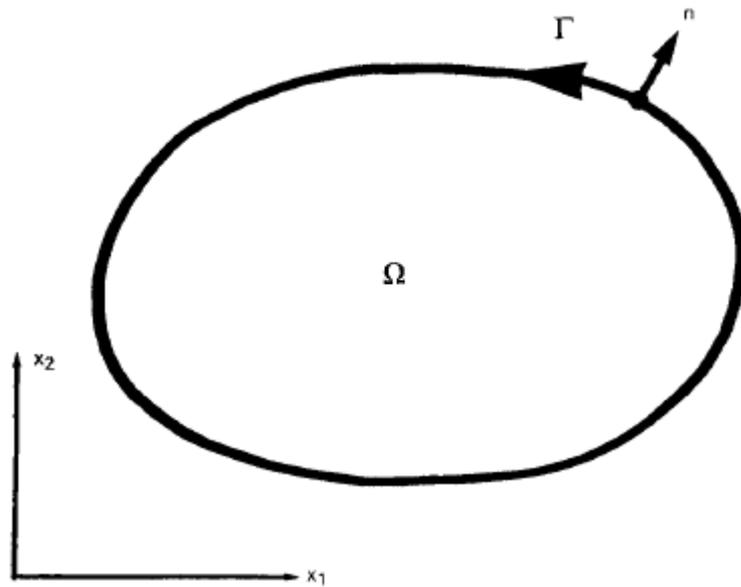
Una ecuación importante en el análisis ingenieril es la llamada Ecuación de Poisson, que para dos dimensiones se escribe como:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = b \quad \text{en } \Omega \quad \text{Ec. 1.11}$$

o

$$\nabla^2 u = b \quad \text{en } \Omega \quad \text{Ec. 1.12}$$

Donde  $\nabla^2(\ ) = \frac{\partial^2(\ )}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2(\ )}{\partial x_2^2}$  se conoce como Laplaciano,  $x_1$  y  $x_2$  son las dos coordenadas y  $b$  es la función conocida de  $x_1$  y  $x_2$ .  $\Omega$  es el dominio donde se aplica la ecuación y se asume que está cubierta por  $\square$ . La normal exterior al contorno se define como  $\mathbf{n}$ . Ver figura 1.1.



*Figura 1.1: Dominio considerando la ecuación de Poisson.*

Aquí también nace la idea de multiplicar la ecuación (1.12) por una función arbitraria  $w$ , derivando dos veces da:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u - b)w d\Omega = 0$$

Ec. 1.13

Integrando por partes en términos de  $x_1$  y  $x_2$  se tiene:

$$\int_{\Omega} \left( -\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} - bw \right) d\Omega + \int \frac{\partial u}{\partial n} w d = 0$$

Ec. 1.14

En este caso la integración por partes de los dos términos produce la derivada de  $u$  con respecto a la normal  $n$ ; que posteriormente llamaremos  $q$ ,  $q = \partial u / \partial n$ .

Integrando por partes se obtiene:

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} u + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} u - bw \right) d\Omega + \int \frac{\partial u}{\partial n} w d - \int u \frac{\partial w}{\partial n} d = 0$$

Ec. 1.15

o

$$\int_{\Omega} \{(\nabla^2 w)u - bw\} d\Omega + \int \frac{\partial u}{\partial n} w d - \int u \frac{\partial w}{\partial n} d = 0$$

Ec. 1.16

La expresión (1.16) es igual a (1.13) y se puede escribir:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) w d\Omega = \int_{\Omega} (\nabla^2 w) u d\Omega + \int \frac{\partial u}{\partial n} w d - \int u \frac{\partial w}{\partial n} d = 0$$

Ec. 1.17

Donde el término  $b$  ha sido eliminado. La ecuación (1.17) también se puede expresar en la forma conocida como el Teorema de Green's.

$$\int_{\Omega} \{(\nabla^2 u)w - (\nabla^2 w)u\} d\Omega = \int \left( \frac{\partial u}{\partial n} w - u \frac{\partial w}{\partial n} \right) d$$

Ec. 1.18

Este teorema en muchos casos se da como el punto de partida para muchas aplicaciones de la ingeniería, incluyendo la formulación del Método de Elementos de Contorno. Es mucho más claro utilizar el concepto de distribución que ilustra los grados de continuidad requeridos de las funciones y la importancia del tratamiento de las condiciones de frontera. En función de esto considerar que la frontera  $\Gamma$  del dominio  $\Omega$  es estudio se divide en dos partes  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  ( $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ ) tal que:

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} && \text{en } \Gamma_1 \\ q &= \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q} && \text{en } \Gamma_2 \end{aligned} \quad \text{Ec. 1.19}$$

La ecuación (1.16) se puede escribir como:

$$\int_{\Omega} \{(\nabla^2 w)u - bw\}d\Omega + \int_{\Gamma_1} qwd + \int_{\Gamma_2} \bar{q}wd - \int_{\Gamma_1} \bar{u} \frac{\partial w}{\partial n} d - \int_{\Gamma_2} u \frac{\partial w}{\partial n} d = 0$$

Ec. 1.20

También se pueden integrar por partes para llegar al Laplaciano original. Para ver la importancia de las condiciones de borde y cómo afecta la ecuación se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left\{ -\frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial w}{\partial x_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} - bw \right\} d\Omega + \int \frac{\partial w}{\partial n} u d + \int_{\Gamma_1} qwd + \int_{\Gamma_2} \bar{q}wd \\ - \int_{\Gamma_1} \bar{u} \frac{\partial w}{\partial n} d - \int_{\Gamma_2} u \frac{\partial w}{\partial n} d = 0 \end{aligned}$$

Ec. 1.21

Se puede dividir la integral de  $\Gamma$  en dos partes  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ , esto da:

$$\int_{\Omega} \left\{ -\frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial w}{\partial x_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} - bw \right\} d\Omega + \int_1 \frac{\partial w}{\partial n} u d + \int_1 q w d + \int_2 \bar{q} w d - \int_1 \bar{u} \frac{\partial w}{\partial n} d = 0$$

Ec. 1.22

Integrando nuevamente por partes se obtiene:

$$\int_{\Omega} \{(\nabla^2 u)w - bw\} d\Omega - \int w q d + \int_1 \bar{q} w d - \int_1 \frac{\partial w}{\partial n} u d + \int_1 q w d + \int_2 \bar{q} w d - \int_1 \bar{u} \frac{\partial w}{\partial n} d = 0$$

Ec. 1.23

La primera integral se  $\square$  se puede escribir nuevamente como la suma de dos integrales. La  $\square_1$  puede cancelarse con la integral  $\square_1$  de  $qw$  en la siguiente ecuación, esto da:

$$\int_{\Omega} \{(\nabla^2 u)w - bw\} d\Omega - \int_2 w q d + \int_1 \frac{\partial w}{\partial n} u d + \int_2 \bar{q} w d - \int_1 \bar{u} \frac{\partial w}{\partial n} d = 0$$

Ec. 1.24

Que puede ser escrita como:

$$\int_{\Omega} \{(\nabla^2 u - b)w\} d\Omega - \int_2 (q - \bar{q})w d + \int_1 (u - \bar{u}) \frac{\partial w}{\partial n} d = 0$$

Ec. 1.25

Nuevamente se muestra que se trata de satisfacer una ecuación diferencial en el dominio y dos tipos de condiciones de frontera, la esencial y la natural. Esto es lo que se mostró en la ecuación (1.10).

## 2. DISCRETIZACION E INTERPOLACION

### 2.1 Introducción

Uno de los requerimientos para la modelación numérica es la descripción del problema mediante el conocimiento de sus propiedades como las condiciones de contorno, las características del material, pero estas propiedades se deben expresar de manera matemática.

La definición exacta de un contorno requiere la información de la ubicación con respecto a un eje de los puntos que dan la geometría del problema, y un cantidad infinita de puntos nos indicará una geometría exacta. En nuestro caso solo una cantidad razonable de información será necesaria para describir la forma del elemento en estudio.

Los puntos ingresados serán los necesarios para que entre ellos mediante una función se acople a la forma del problema, este mecanismo se conoce como *Modelado de Sólidos*. Se utiliza para modelar en ingeniería mecánica la forma de un automóvil, en ingeniería civil para modelar la forma de una excavación en un túnel.

Existen elementos de contorno de uno y dos dimensiones. Los de una dimensión se utilizan para modelar en dos dimensiones de un espacio cartesiano y los de dos dimensiones para modelar en tres dimensiones de un espacio cartesiano. Se considerarán en la presente tesis la modelación de elementos cartesianos bidimensionales; es decir con elementos de contorno unidimensionales.

En este capítulo se considerarán los métodos de discretización para lo que se crearán librerías de subrutinas con estos procedimientos.

### 2.2 Elementos Unidimensionales

Los elementos unidimensionales se utilizan para describir contornos  $x - y$  en el plano.

El primer paso para la descripción de un contorno es dividir el contorno con un número razonable de puntos, como se observa en la figura 2.1. A continuación se debe aproximar mediante una función de interpolación, la función más simple entre dos puntos será una línea recta, esta línea conecta dos nodos  $i, j$  y sus posiciones están definidas por las coordenadas cartesianas. Para cada elemento es conveniente describir ejes locales de coordenadas; este procedimiento se mantiene del método de elementos finitos. A la coordenada local le llamaremos por la letra griega  $\xi$  que sigue la dirección del elemento y tiene los valores de  $-1$  en el extremo izquierdo,  $0$  en el centro y  $+1$  en el otro extremo.

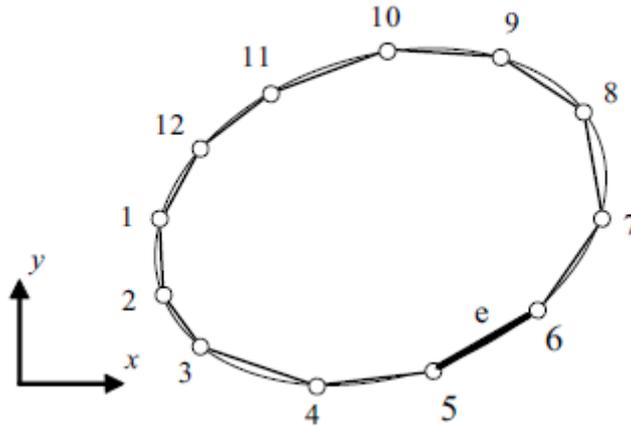


Figura 2.1: Dominio plano, contorno aproximado con elementos lineales

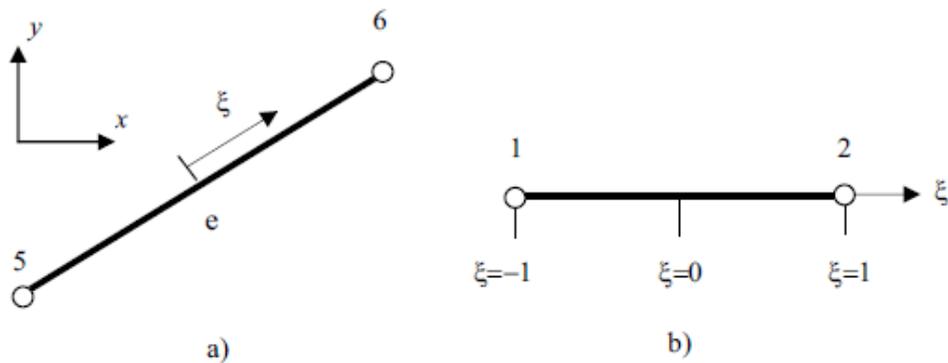


Figura 2.2: El elemento indicado en a) es global y en b) es local

Se puede comprobar que las coordenadas locales se representan en función de las coordenadas globales, así:

$$\begin{aligned}x(\xi) &= \frac{x_5 + x_6}{2} + \frac{x_6 - x_5}{2} \xi \\y(\xi) &= \frac{y_5 + y_6}{2} + \frac{y_6 - y_5}{2} \xi\end{aligned}$$

Ec. 2.1

Esta ecuación se puede verificar al reemplazar  $\xi = -1$  y  $\xi = +1$  para tener las coordenadas de los nodos **5** y **6**.

Es conveniente para la descripción de todo el problema describir a los nodos 5 y 6 de una manera global, así:

$$\left. \begin{aligned}x_5 &= x_1^e \\y_5 &= y_1^e\end{aligned} \right\} \text{Primer nodo del elemento } e$$
  

$$\left. \begin{aligned}x_6 &= x_2^e \\y_6 &= y_2^e\end{aligned} \right\} \text{Segundo nodo del elemento } e$$

De esta manera se establece un vínculo entre numeración local y global de nodos.

Se puede reescribir la ecuación anterior:

$$\begin{aligned}x(\xi) &= \frac{1}{2} (1 - \xi) x_1^e + \frac{1}{2} (1 + \xi) x_2^e \\y(\xi) &= \frac{1}{2} (1 - \xi) y_1^e + \frac{1}{2} (1 + \xi) y_2^e\end{aligned}$$

Ec. 2.2

De manera abreviada podemos escribir:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^L N_n(\xi) \begin{pmatrix} x_n^e \\ y_n^e \end{pmatrix}$$

Ec. 2.3

De donde  $L$  es el número de nodos del elemento y  $N_n$  son las funciones de forma. En forma matricial la ecuación anterior sería:

$$X = \sum N_n(\xi) x_n^e$$

Ec. 2.4

Donde  $x$  es el vector que contiene las coordenadas de un punto de un elemento  $e$  y  $x_n^e$  es un vector de coordenadas del nodo  $n$  del elemento  $e$ .

Para el sistema de dos nodos descrito las funciones de forma son como indica la figura 2.3.

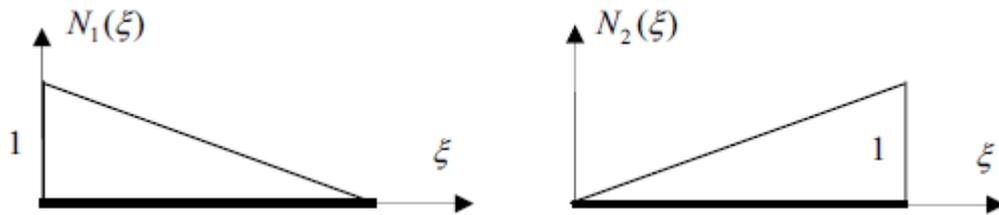


Figura 2.3: Funciones de forma lineal

$$N_1 = \frac{1}{2} (1 - \xi)$$

$$N_2 = \frac{1}{2} (1 + \xi)$$

Ec. 2.5

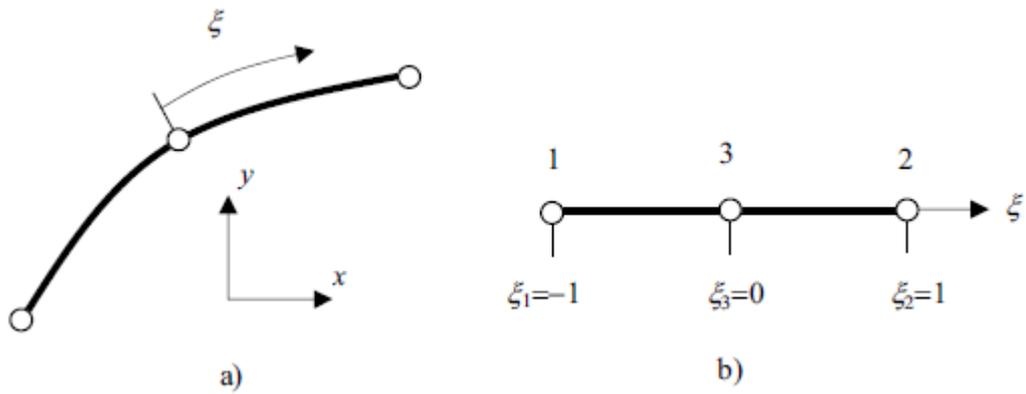
Las funciones de forma también se pueden expresar como:

$$N_n = \frac{1}{2} (1 + \xi_n \xi)$$

Ec. 2.6

De donde  $\xi = -1$  en el nodo 1 y  $\xi = 1$  en el nodo 2.

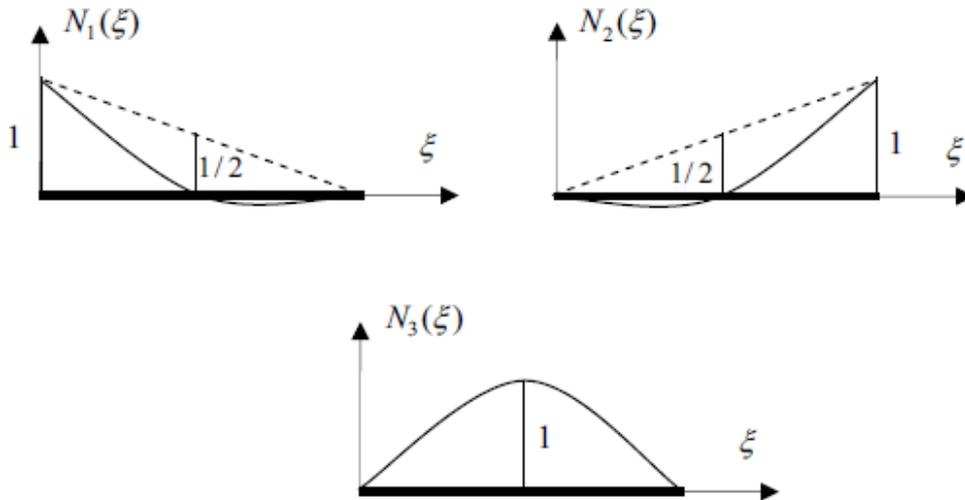
Se puede utilizar funciones de forma más complejas mediante el uso de 3 nodos y funciones de forma cuadráticas como su puede ver en la figura 2.4.



**Figura 2.4:** Elementos cuadráticos a) en forma global y b) en forma local

Las funciones de forma se expresarían por:

$$N_3(\xi) = 1 - \xi^2$$



**Figura 2.5:** Funciones de forma cuadráticas

Las funciones de forma externa se pueden obtener sustrayendo la mitad de la función de forma del centro de cada una de las funciones de forma lineal como se indica en la figura 2.5.

$$N_n = \frac{1}{2} (1 + \xi_n \xi) - \frac{1}{2} N_3 \quad n=1, 2 \quad \text{Ec. 2.7}$$

Las funciones de forma presentadas no han sido obtenidas matemáticamente sino de una manera intuitiva. A estas funciones de forma se las conoce como **Funciones de Forma Serendipitas** y se puede ver que tiene las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} N_n(\xi_n) &= 1 \\ N_n(\xi_i) &= 0 \quad \text{Para } i \neq n \\ \sum N_n(\xi) &= 1 \end{aligned} \quad \text{Ec. 2.8}$$

La obtención matemática para la obtención de las funciones de forma anteriores se logra utilizando los polinomios de **Lagrange**. Para elementos parabólicos las funciones de forma de **Lagrange** se definen como:

$$\mathcal{L}_i(\xi) = A_{i1} A_{i2} A_{i3} \quad \text{Ec. 2.9}$$

De donde:

$$\begin{aligned} A_{in} &= \frac{\xi - \xi_n}{\xi_i - \xi_n} \quad \text{Para } i \neq n \\ A_{in} &= 1 \quad \text{Para } i = n \end{aligned} \quad \text{Ec. 2.10}$$

## 2.3 Elementos Bidimensionales

Para poder describir el contorno de problemas tridimensionales se requieren elementos bidimensionales. Estos elementos también son utilizados para definir celdas para evaluar integrales de volumen en problemas del plano bidimensional. Su obtención es análoga a la de elementos unidimensionales con la diferencia que se utilizan dos coordenadas locales  $(\xi, \eta)$  como se puede ver en la figura 2.6

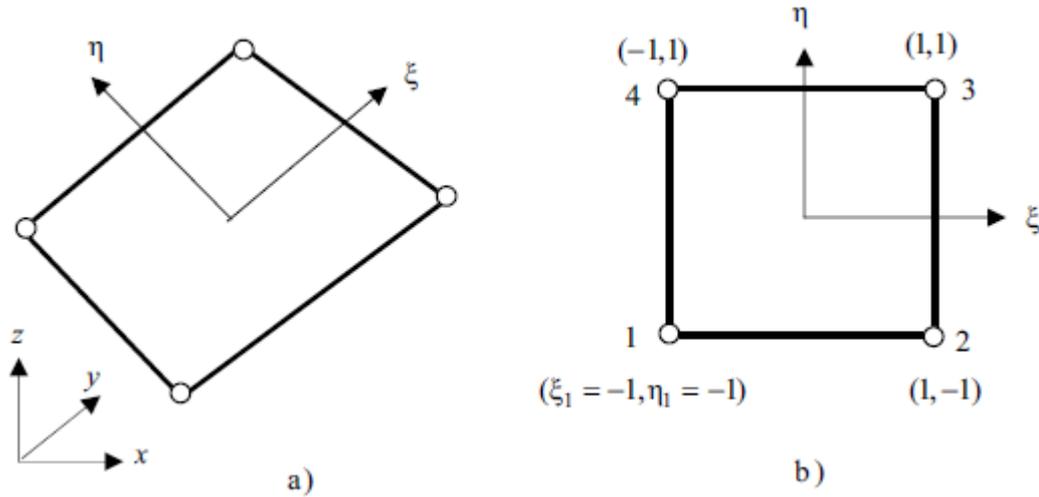


Figura 2.6: Elementos cuadriláteros a) en forma global b) en coordenadas locales

Las coordenadas cartesianas de un punto con coordenadas intrínsecas  $(\xi, \eta)$  se obtienen por:

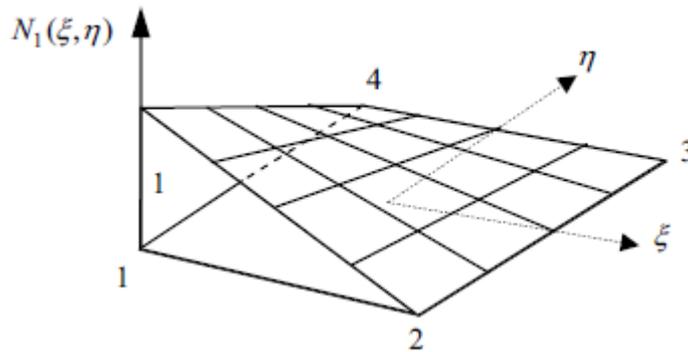
$$x = \sum_{n=1}^L N_n(\xi, \eta) x_n^e \quad \text{Ec. 2.11}$$

En donde para los elementos tenemos:

$$x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 2.12}$$

y para celdas:

$$x = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad \text{Ec. 2.13}$$



**Figura 2.7:** Función bilineal de las funciones de forma  $N_1$

Las funciones de forma bilineal se describen como:

$$N_n = \frac{1}{2}(1 + \xi_n \xi) \frac{1}{2}(1 + \eta_n \eta) \quad \text{Ec. 2.14}$$

Donde la función  $N_1$  se muestra en la figura 2.7 describe una superficie curva formada por líneas rectas en la dirección  $\xi, \eta$ .

<b>n</b>	<b><math>\xi_n</math></b>	<b><math>\eta_n</math></b>
1	-1.0	-1.0
2	1.0	-1.0
3	1.0	1.0
4	-1.0	1.0
5	0.0	-1.0
6	1.0	0.0
7	0.0	1.0
8	-1.0	0.0

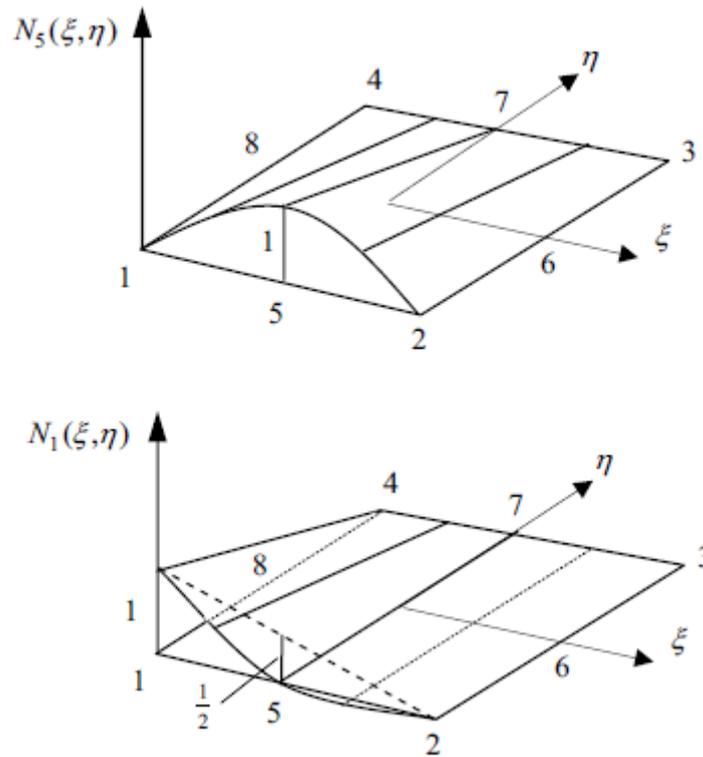


Figura 2.8: Funciones de forma para nodos centrales y de esquina

Como se ve en la figura 2.8, se pueden obtener elementos de mayor orden añadiendo nodos centrales en los lados. Las funciones de forma para nodos centrales se describen como:

$$N_n = \frac{1}{2} (1 + \xi^2) (1 + \eta_n \eta) \quad \text{para } n=5, 7 \quad \text{Ec. 2.15}$$

$$N_n = \frac{1}{2} (1 - \eta^2) (1 + \xi_n \xi) \quad \text{para } n=6, 8 \quad \text{Ec. 2.16}$$

Las funciones de forma de esquina se construyen de manera similar a elementos unidimensionales.

$$N_1 = \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 - \eta) - \frac{1}{2} N_5 - \frac{1}{2} N_8 \quad \text{Ec. 2.17}$$

$$N_2 = \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 - \eta) - \frac{1}{2} N_5 - \frac{1}{2} N_6 \quad \text{Ec. 2.18}$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) - \frac{1}{2}N_6 - \frac{1}{2}N_7 \quad \text{Ec. 2.19}$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) - \frac{1}{2}N_7 - \frac{1}{2}N_8 \quad \text{Ec. 2.20}$$

Escribiendo las funciones de forma de esta manera es posible obtener elementos con varios números de nodos eliminando los términos apropiados. Como ejemplo para un elemento sin nodo intermedio N.- 5, una función lineal es asumida entre los nodos 1 y 2 y las funciones de forma se obtienen simplemente haciendo a  $N_5 = 0$ .

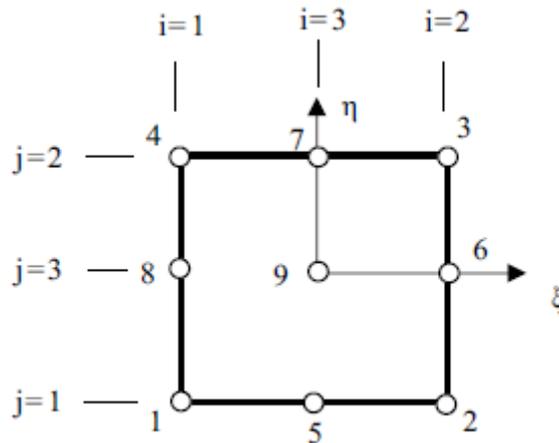


Figura 2.9: Elemento Lagrangiano cuadrático, ejes locales

Si el elemento de forma para el elemento cuadrático se obtiene de los polinomios de Lagrange entonces, existe un nodo adicional en el centro del elemento como se observó en la figura 2.9 y las funciones de forma vienen dadas por:

$$\mathcal{L}_n(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = A_{i1}A_{i2}A_{i3}B_{j1}B_{j2}B_{j3} \quad \text{Ec. 2.21}$$

Si  $A_{i1}$  ya definida como:

$$A_{in} = \frac{\xi - \xi_n}{\xi_i - \xi_n} \quad \text{Para } i \neq n \quad \text{Ec. 2.22}$$

$$A_{i1} = 1 \quad \text{Para } i = n \quad \text{Ec. 2.23}$$

Entonces

$$B_{jm} = \frac{\xi - \xi_n}{\xi_i - \xi_n} \quad \text{Para } j \neq m \quad \text{Ec. 2.24}$$

$$B_{jm} = 1 \quad \text{Para } j = m \quad \text{Ec. 2.25}$$

Donde  $i$  y  $j$  son las columnas y filas de los nodos esta numeración se describe en el gráfico anterior. (figura 2.9). Los nodos vienen dados por:

$$\begin{array}{lll} n(1, 1) = 1 & n(2, 1) = 2 & n(3, 1) = 5 \\ n(1, 2) = 4 & n(2, 2) = 3 & n(3, 2) = 7 \\ n(1, 3) = 8 & n(2, 3) = 6 & n(3, 3) = 9 \end{array} \quad \text{Ec. 2.26}$$

### SUBROUTINA PARA FUNCIONES DE FORMA UNIDIMENSIONALES

```
function [N]=f_forma(shi,eta,incidencia,nnodos,dimele)
%nnodos, numero de nodos por elemento
%dimele, dimensión del elemento
switch dimele %dimele, dimensión del elemnto de forma, puede ser
1 o 2
case 1 %elemento de forma unidimensional
if nnodos==2 %funciones de forma lineales
N(1)=0.5*(1.0-shi); %shi, variable de coordenadas intrinsicas
N(2)=0.5*(1.0+shi);
else
N(1)=0.5*(1.0-shi); %shi, variable de coordenadas intrinsicas
N(2)=0.5*(1.0+shi);
N(3)=1-shi*shi;
```

```

N(1)= N(1) - 0.5*N(3);
N(2)= N(2)+ 0.5*N(3);
end
case 2 %elemento de forma bidimensional
ms=1-shi;ps=1+shi;me=1-eta;pe=1+eta; %ms,ps,me,pe variables
temporales
%eta, variable principal intrinseca para el elemento de forma
bidimensional
ifnnodos==4 %funciones de forma lineales
N(1)=0.25*ms*me;N(2)=0.25*ps*me;
N(3)=0.25*ps*pe;N(4)=0.25*ms*pe;
else% para función de forma no lineal
N(1)=0.25*ms*me;N(2)=0.25*ps*me;
N(3)=0.25*ps*pe;N(4)=0.25*ms*pe;
if (incidencia(5)>0) %incidencia sirve para ver como se
comunican los nodos
N(5)=0.5*(1-shi*shi)*me;
N(1)=N(1)-0.5*N(5);
N(2)=N(2)-0.5*N(5);
end
if (incidencia(6)>0)
N(6)=0.5*(1-eta*eta)*ps;
N(2)=N(2)-0.5*N(6);
N(3)=N(3)-0.5*N(6);
end
if (incidencia(7)>0)
N(7)=0.5*(1-shi*shi)*pe;
N(3)=N(3)-0.5*N(7);
N(4)=N(4)-0.5*N(7);
end
if (incidencia(8)>0)
N(8)=0.5*(1-eta*eta)*ms;
N(4)=N(4)-0.5*N(8);
N(1)=N(1)-0.5*N(8);
end
end
otherwise%mensaje de error
mensaje=sprintf('LA DIMENSION INGRESADA DEL ELEMENTO ES
INCORRECTA DEBE SER 1 o 2 : %d ');
disp(mensaje)
end

```

## 2.4 Interpolación

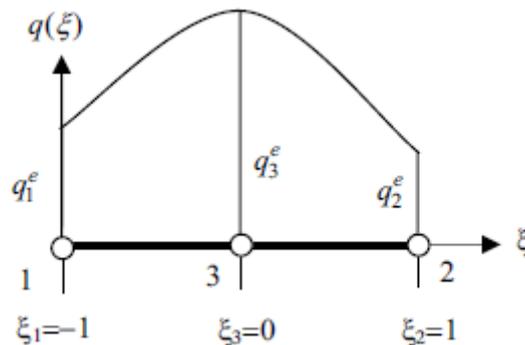
Además de definir la forma del elemento para modelar, es necesario definir la variación de las cantidades físicas (desplazamientos, temperatura, tracción, etc.) en un elemento. Estas se pueden interpolar de los valores a los puntos nodales.

### 2.4.1 Elementos Isoparamétricos

El valor de una cantidad  $q$  en un punto dentro del elemento  $e$  puede describirse como:

$$q = \sum \bar{N}_n q_n^e \quad \text{Ec. 2.27}$$

Donde  $q_n^e$  es el valor de la cantidad en el nodo  $n$  del elemento  $e$  y  $\bar{N}_n$  son las funciones de interpolación como se puede ver en la siguiente figura.



*Figura 2.10: Variación de  $q$  en un cuadrante de un elemento unidimensional en coordenadas locales.*

Para un elemento particular las mismas funciones son utilizadas para el contorno y para la interpolación de las cantidades físicas dentro del elemento, entonces el elemento es llamado **“Isométrico”**. (Igual número de parámetros).

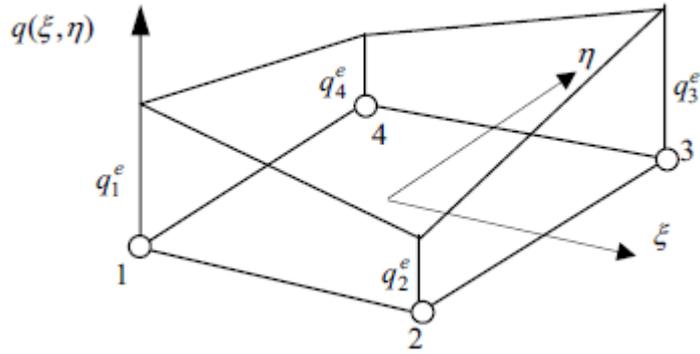


Figura 2.11: Interpolación de  $q$  sobre un elemento bidimensional lineal.

La variación de las cantidades físicas en la superficie de elementos bidimensionales o dentro de elementos planos se describe en la figura 2.11.

$$q(\xi, \eta) = \sum \bar{N}_n(\xi, \eta) q_n^e \quad \text{Ec. 2.28}$$

Las cantidades físicas son definidas para cada elemento separadamente, para que así puedan ser discontinuas en nodos compartidos por dos elementos como muestra la siguiente figura. Si las funciones de forma serendípitas o de Lagrange tienen continuidad  $C^0$ . Pueden ser forzadas entre elementos especificando el mismo valor de la función para cada elemento que comparte el nodo.

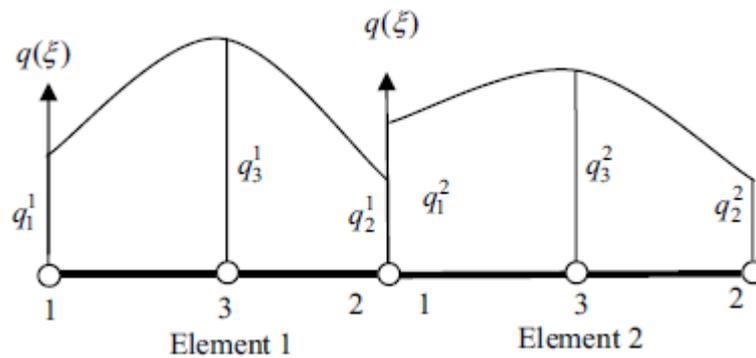
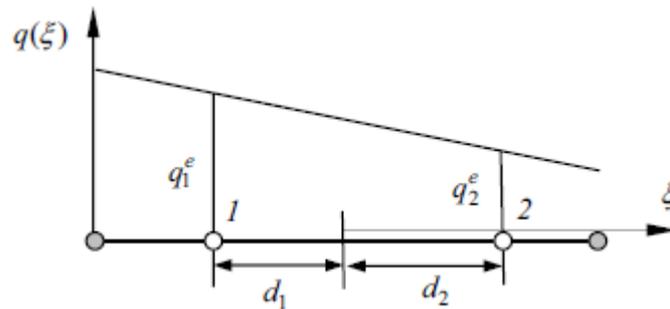


Figura 2.12: Variación de  $q$  con variación discontinua en nodos comunes.

## 2.4.2 Elementos Discontinuos

Posteriormente se verá la necesidad o conveniencia de interpolar  $q$ , no de los nodos que definen la geometría sino de otros nodos que son movidos dentro del elemento.



- Nodo geométrico
- Nodo interpolado

*Figura 2.13: Elemento discontinuo unidimensional*

Este tipo de elemento será utilizado en esquinas y bordes para evitar múltiples definiciones del vector de tracciones para elementos unidimensionales lineales como el indicado en la figura 2.13, tenemos:

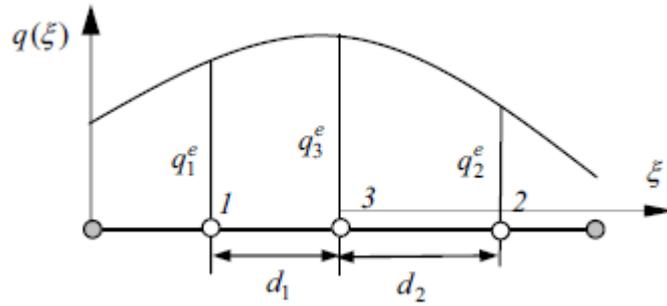
$$q(\xi) = \sum \bar{N}_n(\xi) q_n^{-e} \quad \text{Ec. 2.29}$$

Donde  $q_n^{-e}$  son los valores de  $q$  en los nodos de interpolación y las funciones de interpolación son:

$$\bar{N}_1(\xi) = \frac{1}{(d_1 + d_2)} (d_1 - \xi) \quad \text{Ec. 2.30}$$

$$\bar{N}_2(\xi) = \frac{1}{(d_1 + d_2)} (d_2 - \xi) \quad \text{Ec. 2.31}$$

Donde  $d_1$ ,  $d_2$  son los valores absolutos de las coordenadas intrínsecas de los nodos de interpolación.



**Figura 2.14:** Elementos cuadráticos discontinuos de una dimensión.

Fácilmente se puede verificar que para  $d_1 = d_2 = 1$  se obtienen las funciones de forma para elementos continuos.

Para elementos cuadráticos tenemos:

$$\bar{N}_1(\xi) = \frac{1}{(d_1 + d_2)} (d_1 - \xi) \left(-1 - \frac{\xi}{d_2}\right)$$

$$\bar{N}_2(\xi) = \frac{1}{(d_1 + d_2)} (d_2 - \xi) \left(-1 - \frac{\xi}{d_1}\right)$$

$$\bar{N}_3(\xi) = \frac{1}{(d_1 + d_2)} (d_1 - \xi) (d_2 + \xi)$$

Ec. 2.32

# 3. MODELACION Y SOLUCION FUNDAMENTAL

## 3.1 Introducción

Además de especificar la geometría del problema es necesario describir la respuesta física del material de una manera matemática. Esto se puede lograr analizando la respuesta de elementos diferenciales que representan una porción del cuerpo.

Las leyes constitutivas establecen una relación entre deformaciones y esfuerzos. Las constantes de esas relaciones representan las características de las propiedades del material.

Se pueden distinguir entre Materiales *Isotrópicos* y *Anisotrópicos* así como materiales *Homogéneos* y *No Homogéneos*.

En la respuesta del material se puede distinguir si su comportamiento ha sido lineal o no lineal.

Para los materiales con comportamiento lineal podemos establecer una función lineal entre esfuerzos y deformaciones. Para el caso de comportamiento no lineal esta relación dependerá del estado de carga del momento porque se puede escribir únicamente una función de incremento y dependen de la historia anterior de deformaciones.

Para el presente caso del Método de Elementos de Contorno debe existir una solución, esta solución se denomina *Solución Fundamental de la Función de Green*, por lo que se requiere un material homogéneo e isotrópico y con un comportamiento lineal.

La solución fundamental debe satisfacer tres condiciones:

- La Ley constitutiva.
- Equilibrio de la conservación de la energía.
- Compatibilidad o continuidad.

La última condición se satisface automáticamente para soluciones que son continuas en el dominio. A continuación se obtendrán las ecuaciones diferenciales que gobiernan

el problema y luego se presentarán las soluciones fundamentales para problemas de elasticidad, en dos y tres dimensiones.

### 3.2 El Problema de Elasticidad

En mecánica de sólidos la relación entre esfuerzo y deformación debe establecerse. Los esfuerzos son fuerzas por unidad de área dentro del sólido, estas se pueden ver al cortar un sólido en planos paralelos a los ejes y mostrando los vectores de tracción que actúan en estos planos. (ver figura 3.1) Los vectores que actúan en los tres planos se definen como:

$$t_1 = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} \quad t_2 = \begin{bmatrix} \tau_{yx} \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} \quad t_3 = \begin{bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \sigma_z \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 3.1}$$

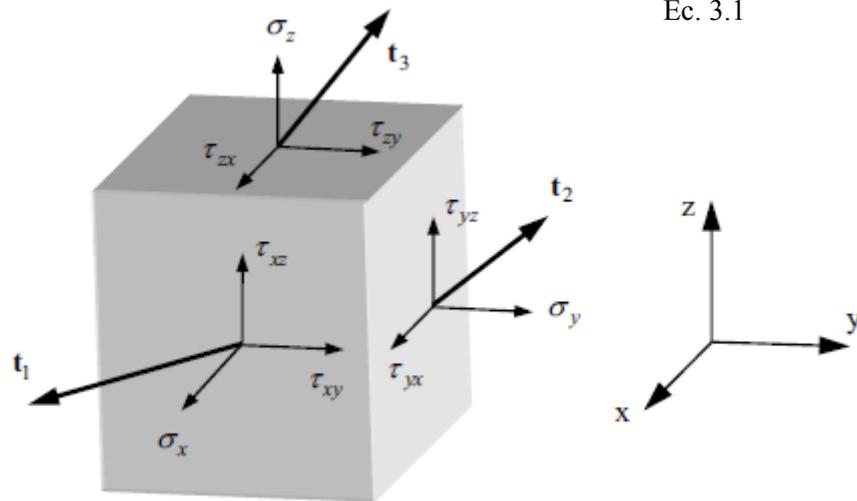


Figura 3.1: Esfuerzos actuando sobre las caras de un elemento infinitesimal.

Utilizando sumatorias de momentos igual a cero se obtiene que:  $\tau_{xy} = \tau_{yx}; \tau_{xz} = \tau_{zx}; \tau_{yz} = \tau_{zy}$ ; quedando únicamente las componentes distintas:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} \quad \text{Ec. 3.2}$$

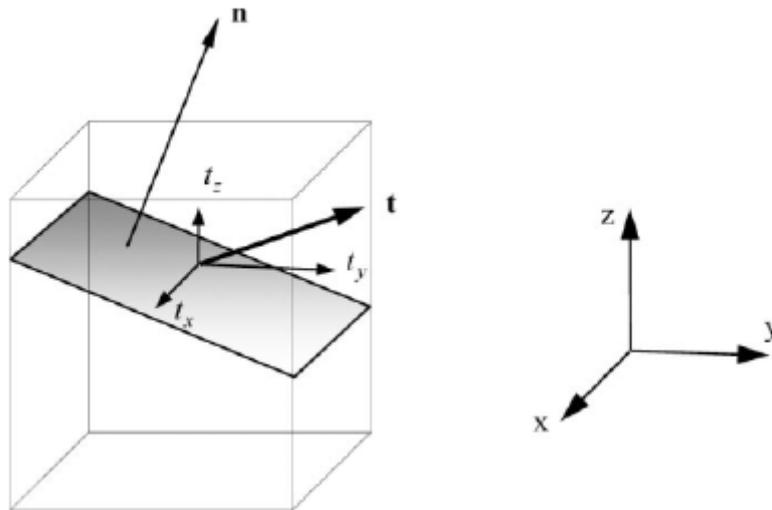
En problemas de esfuerzos en el plano, como es el caso de placas sujetas a cargas en el plano, todos los esfuerzos asociados con la dirección  $z$  se asumen como cero:  $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ .

Los componentes de un vector de tracción  $\mathbf{t}$  en plano general definido por un vector normal  $\mathbf{n} \{n_x, n_y, n_z\}$  que no es paralelo a uno de los ejes puede ser expresado en función de las componentes de sus esfuerzos; como se puede ver en la figura 3.2.

$$t_x = n_x \sigma_x + n_y \tau_{xy} + n_z \tau_{xz}$$

$$t_y = n_y \sigma_y + n_x \tau_{xy} + n_z \tau_{yz} \quad \text{Ec. 3.3}$$

$$t_z = n_z \sigma_z + n_x \tau_{zx} + n_y \tau_{zy}$$



**Figura 3.2:** Definición de vectores de tracción.

Esfuerzos infinitesimales se definen en términos de desplazamientos den las componentes  $x, y, z$  de las direcciones ( $u_x, u_y, u_z$ ) como:

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \epsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\end{aligned}\tag{Ec. 3.4}$$

Se puede colocar en un segundo vector como:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}\tag{Ec. 3.5}$$

De manera matricial se pueden escribir como:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B}\mathbf{U}\tag{Ec. 3.6}$$

Donde  $\mathbf{U}$  es el vector de desplazamientos.

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix}\tag{Ec. 3.7}$$

y  $\mathbf{B}$  es la matriz de diferenciales.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \quad \text{Ec. 3.8}$$

En ciertas circunstancias se pueden hacer simplificaciones en algunas componentes de esfuerzos haciéndolas igual a cero. Un estado de deformación plana se puede asumir si el sólido se extiende a lo largo del eje  $z$ , la carga es uniforme en esta dirección y  $u_z = 0$  en todo el dominio. Entonces se tiene  $\epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ . Otro caso especial es un estado de deformación total, en el cual las derivadas con respecto a la dirección  $z$  de pequeños desplazamientos se toman como cero, pero  $u_z$  no necesariamente es cero; esto da:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \epsilon_z &= 0 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} \end{aligned} \quad \text{Ec. 3.9}$$

Pudiéndose separa en dos casos:

1.- Deformación plana.

2.- Estado de antiplano o estado de torsión de StVenant, donde:

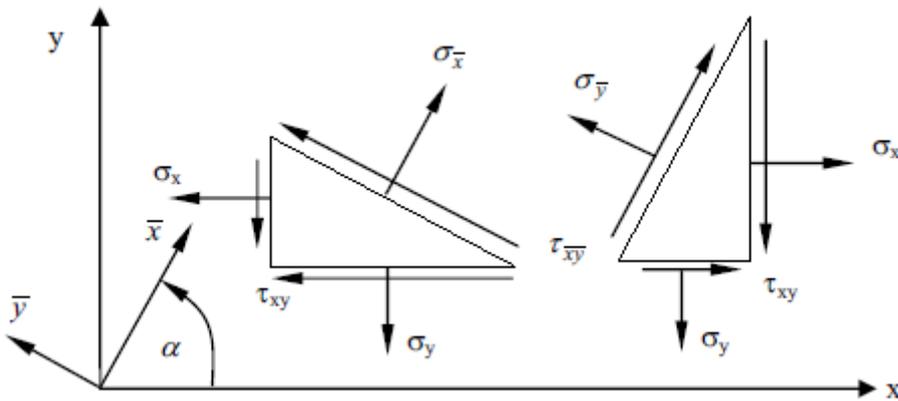
$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{xy} = 0 ; \quad y$$

$$\gamma_z = \frac{\partial u_z}{\partial y}$$

Ec. 3.10

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x}$$

En un estado de deformación plana total es posible tener esfuerzos cortantes como indica la figura 3.3.



**Figura 3.3:** Transformación de esfuerzos en el caso bidimensional.

A veces se requiere determinar las magnitudes de esfuerzos y deformaciones en direcciones que no coinciden con los ejes globales. Para estos casos la transformación de esfuerzos y deformaciones es necesaria. La transformación de esfuerzos locales  $\bar{\sigma}$  actuando en planos paralelos da los ejes  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  a esfuerzos  $\sigma$  actuando en planos perpendiculares a los ejes  $x, y, z$ ; se puede expresar como:

Ec. 3.11

$$\bar{\sigma} = T_{\sigma} \sigma$$

Que para el caso bidimensional  $T_{\sigma}$  se obtiene de:

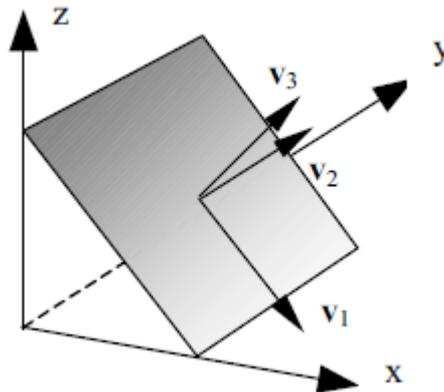
$$T_{\sigma} = \begin{matrix} \cos^2 \alpha \\ \sin^2 \alpha \\ \cos \alpha \sin \alpha \end{matrix} \left[ \begin{matrix} \sin^2 \alpha & -2 \cos \alpha \sin \alpha \\ \cos^2 \alpha & 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ -\cos \alpha \sin \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{matrix} \right]$$

Ec. 3.12

Para la transformación en el caso tridimensional es conveniente referirse a las componentes de vectores unitarios en la dirección de los ejes locales como se indica en la siguiente figura; como ejemplo denotemos:

$$\begin{matrix} v_1 x \\ v_1 y \\ v_1 z \end{matrix} \left[ \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right] \quad \text{Ec. 3.13}$$

Como vectores unitarios en la dirección  $\bar{x}$



**Figura 3.4:** Definición de vectores unitarios para la transformación de esfuerzos en 3-D.

De la misma manera  $v_2$  y  $v_3$  son vectores unitarios en los ejes  $\bar{y}$  y  $\bar{z}$ , en términos de estos vectores la matriz  $T_{\sigma}$  se escribe como:

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} T_{\sigma 11} & T_{\sigma 12} \\ T_{\sigma 21} & T_{\sigma 22} \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 3.14}$$

Donde:

$$T_{\sigma 11} = \begin{bmatrix} v_{1x}^2 & v_{2x}^2 & v_{3x}^2 \\ v_{1y}^2 & v_{2y}^2 & v_{3y}^2 \\ v_{1z}^2 & v_{2z}^2 & v_{3z}^2 \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 3.15}$$

$$T_{\sigma 12} = \begin{bmatrix} 2v_{1x}v_{2x} & 2v_{2x}v_{3x} & 2v_{1x}v_{3x} \\ 2v_{1y}v_{2y} & 2v_{2y}v_{3y} & 2v_{1y}v_{3y} \\ 2v_{1z}v_{2z} & 2v_{2z}v_{3z} & 2v_{1z}v_{3z} \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 3.16}$$

$$T_{\sigma 21} = \begin{bmatrix} v_{1x}v_{1y} & v_{2x}v_{2y} & v_{3y}v_{3x} \\ v_{1y}v_{1z} & v_{2y}v_{2z} & v_{3y}v_{3z} \\ v_{1x}v_{1z} & v_{2x}v_{2z} & v_{3x}v_{3z} \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 3.17}$$

$$T_{\sigma 22} = \begin{bmatrix} v_{1x}v_{2y} + v_{1y}v_{2x} & v_{2x}v_{3y} + v_{2y}v_{3x} & v_{1x}v_{3y} + v_{1y}v_{3x} \\ v_{1y}v_{2z} + v_{1z}v_{2y} & v_{2y}v_{3z} + v_{2z}v_{3y} & v_{1y}v_{3z} + v_{1z}v_{3y} \\ v_{1x}v_{2z} + v_{1z}v_{2x} & v_{2x}v_{3z} + v_{2z}v_{3x} & v_{1x}v_{3z} + v_{1z}v_{3x} \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 3.18}$$

### 3.3 Ecuaciones Constitutivas

La respuesta en materiales elásticos está dada por la Ley de Hooke, para materiales isotrópicos en tres dimensiones tenemos:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

Ec. 3.19

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \quad , \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz} \quad , \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx}$$

De donde **E** es el módulo elástico,  $\nu$  es el módulo de Poisson y **G** es el módulo de cortante y se relacionan por:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{Ec. 3.20}$$

Esta ecuación matricialmente se puede escribir como:

$$\mathbf{E} = \mathbf{C}\boldsymbol{\sigma} \quad \text{Ec. 3.21}$$

De donde **C** se define como:

$$\mathbf{C} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E}{G} \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 3.22}$$

Una relación inversa se puede definir como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{Ec. 3.23}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}_1 \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & C_2 & C_2 & 0 & 0 & 0 \\ & C_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & C_2 & C_2 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \frac{G}{C_1} & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{G}{C_1} \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c}{c_1} \end{bmatrix}$$

Ec. 3.22

De donde:

$$C_1 = E \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} ; \quad C_2 = \frac{\nu}{(1-\nu)} \quad \text{Ec. 3.23}$$

La subrutina para formar la matriz  $\mathbf{D}$  se describe a continuación:

```

SUBROUTINE GHMATEQ(X,Y,G,H,FI,DFI,KODE,NX,NX1)
!
! ESTA SUBROUTINA OBTIENE LAS MATRICES G Y H Y FORMA
! EL SISTEMA A X = F PARA RESOLVER
! H ES UNA MATRIZ CUADRADA(4*NE,4*NE); G ES RECTANGULAR
(4*NE,6*NE)
!
  DIMENSION X(51),Y(51),G(NX,NX1),H(NX,NX),HW(2,6),GW(2,6)
  DIMENSION FI(100),DFI(150),KODE(150)
  COMMON N,L,GE,XNU,INP,IPR
  NN=2*N
  NE=N/2
  DO 20 I=1,NN
    DO 11 J=1,NN
      11 H(I,J)=0.
    DO 12 J=1,3*N

```

```

12 G(I,J)=0.
20 CONTINUE
X(N+1)=X(1)
Y(N+1)=Y(1)
!
! OBTIENE LAS MATRICES GW Y HW PARA CADA PUNTO DE
COLOCACIÓN
! Y ELEMENTO DE BORDE
!
DO 40 LL=1,N
DO 40 I=1,N-1,2
IF((LL-I)*(LL-I-1)*(LL-I-2)*(LL-I+N-2)) 22,21,22
21 NODO=LL-I+1
IF((LL.EQ.1).AND.(I.EQ.N-1)) NODO=NODO+N
CALL EXTINEQ(X(LL),Y(LL),X(I),Y(I),X(I+1),Y(I+1),X(I+2),Y(I+2),HW,GW)

CALL LOCINEQ(X(I),Y(I),X(I+1),Y(I+1),X(I+2),Y(I+2),GW,NODO)
GO TO 34
22 CALL
EXTINEQ(X(LL),Y(LL),X(I),Y(I),X(I+1),Y(I+1),X(I+2),Y(I+2),HW,GW)

!
! CONECTA A LAS MATRICES GW Y HW, EN MATRICES GENERALES G Y
H.
!
34 DO 39 K=1,2
DO 38 J=1,6
G(2*LL-2+K,3*I-3+J)=G(2*LL-2+K,3*I-3+J)+GW(K,J)
IF(I-N+1) 37,35,37
35 IF(J-5) 37,36,36
36 H(2*LL-2+K,J-4)=H(2*LL-2+K,J-4)+HW(K,J)
GO TO 38
37 H(2*LL-2+K,2*I-2+J)=H(2*LL-2+K,2*I-2+J)+HW(K,J)
38 CONTINUE
39 CONTINUE
40 CONTINUE

!
! OBTIENE LOS COEFICIENTES DIAGONALES DE LA MATRIZ H
!
DO 70 I=1,N
H(2*I-1,2*I-1)=0.
H(2*I,2*I-1)=0.
H(2*I-1,2*I)=0.
H(2*I,2*I)=0.

```

```

DO 60 J=1,N
IF(I.EQ.J) GO TO 60
H(2*I-1,2*I-1)=H(2*I-1,2*I-1)-H(2*I-1,2*J-1)
H(2*I,2*I-1)=H(2*I,2*I-1)-H(2*I,2*J-1)
H(2*I-1,2*I)=H(2*I-1,2*I)-H(2*I-1,2*J)
H(2*I,2*I)=H(2*I,2*I)-H(2*I,2*J)
60 CONTINUE
!
! ADICIONA UNO DE LOS COEFICIENTES DIAGONALES PARA
! PROBLEMAS EXTERNOS.
!
IF(H(2*I-1,2*I-1)) 65,70,70
  65 H(2*I-1,2*I-1)=1.+H(2*I-1,2*I-1)
H(2*I,2*I)=1.+H(2*I,2*I)
70 CONTINUE
!
! REORDENA LAS COLUMNAS DEL SISTEMA DE ECUACIONES DE
ACUERDO
! A LAS CONDICIONES DE BORDE Y FORMA LA MATRIZ A QUE SE
! GUARDA EN H
!
  DO 180 I=1,NE
    DO 170 J=1,6
IF(KODE(6*I-6+J)) 110,110,170
  110 IF((I-NE).NE.0 .OR. J.LT.5) GO TO 125
IF(KODE(J-4)) 115,115,113
  113 DO 114 K=1,NN
    CH=H(K,J-4)
H(K,J-4)=-G(K,6*I-6+J)*GE
  114 G(K,6*I-6+J)=-CH
    GO TO 170
  115 DO 116 K=1,NN
H(K,J-4)=H(K,J-4)-G(K,6*I-6+J)*GE
  116 G(K,6*I-6+J)=0.
    GO TO 170
125 IF(I.EQ.1 .OR. J.GT.2 .OR.KODE(6*I-8+J).EQ.1) GO TO 130
  DO 129 K=1,NN
H(K,4*I-4+J)=H(K,4*I-4+J)-G(K,6*I-6+J)*GE
  129 G(K,6*I-6+J)=0.
    GO TO 170
130 DO 132 K=1,NN
  CH=H(K,4*I-4+J)
H(K,4*I-4+J)=-G(K,6*I-6+J)*GE
  132 G(K,6*I-6+J)=-CH

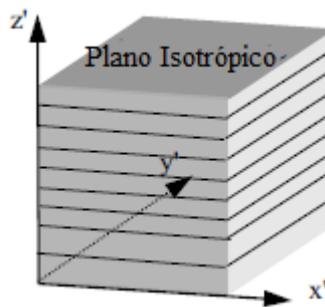
```

```

170 CONTINUE
180 CONTINUE
!
! FORMA EL VECTOR LADO DERECHO Y SE GUARDA EN FI
!
  DO 190 I=1,NN
FI(I)= 0.
  DO 185 J=1,6*NE
  185 FI(I)=FI(I)+G(I,J)*DFI(J)
190 CONTINUE
  RETURN
  END

```

En general para un material anisotrópico se requieren de 21 propiedades que generalmente no son posibles de obtener o determinar; sin embargo casos especiales de anisotropía pueden existir para casos en donde las propiedades son diferentes en direcciones ortogonales. Se puede definir como un material formado por láminas en donde la primera y la segunda lámina tienen iguales propiedades pero la tercera difiere como se puede ver en la siguiente figura



*Figura 3.5: Definición de un material estratificado por capas.*

Ejemplos de estos pueden ser rocas estratificadas o fibras reforzadas de plásticos, para materiales estratificados las propiedades se definen como:

$$E_1 = \frac{\sigma_{x'}}{\varepsilon_{x'}} = \frac{\sigma_{y'}}{\varepsilon_{y'}} \quad ; \quad E_2 = \frac{\sigma_{z'}}{\varepsilon_{z'}}$$

$$G_1 = \frac{\tau_{x'y'}}{\gamma_{x'y'}}, \quad G_2 = \frac{\tau_{z'y'}}{\gamma_{z'y'}} = \frac{\tau_{z'x'}}{\gamma_{z'x'}}$$

$$\nu_1 = -\frac{\varepsilon_{y'}}{\varepsilon_{x'}} \quad ; \quad \nu_2 = -\frac{\varepsilon_{x'}}{\varepsilon_{z'}} = -\frac{\varepsilon_{y'}}{\varepsilon_{z'}} \quad \text{Ec. 3.24}$$

Para el caso de la presente tesis se realizará la modelación únicamente de materiales isotrópicos.

### 3.4 Solución fundamental

Las ecuaciones que gobiernan el problema se obtienen de la condición de equilibrio, para el caso bidimensional tenemos:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + b_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + b_y = 0 \quad \text{Ec. 3.25}$$

Donde  $b_x$  y  $b_y$  son componentes de fuerzas del cuerpo en las direcciones  $x$  y  $y$ .

Sustituyendo en las ecuaciones 3.13 y con la Ley de Hooke para tensión plana se tiene:

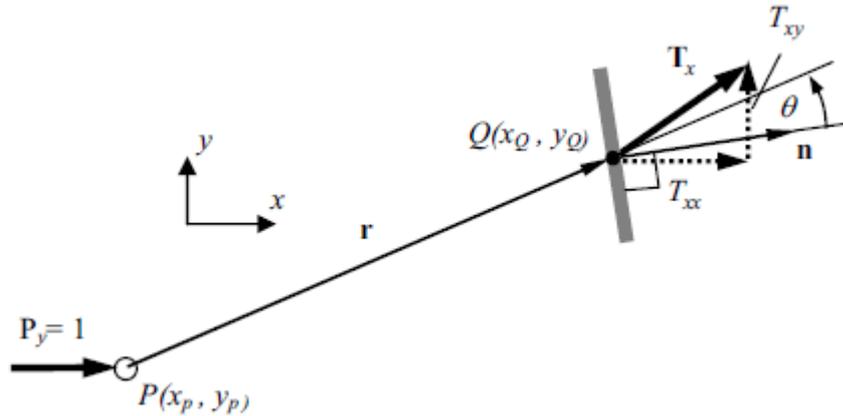
$$G \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) + (\lambda + G) \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} \right) + b_x = 0$$

$$(\lambda + G) \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} \right) + G \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) + b_y = 0 \quad \text{Ec. 3.26}$$

Donde

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{Ec. 3.27}$$

Para problemas de tensión plana la solución fundamental se obtiene para cargas puntuales en las direcciones  $x$  y  $y$  de magnitud  $I$ , que son distribuidas infinitamente en las direcciones  $+z$  y  $-z$ . La solución fue obtenida por primera vez por Lord Kelvin.



**Figura 3.6:** Notación para la solución bidimensional de Kelvin cargada en la dirección  $x$ .

La solución para los desplazamientos en las direcciones  $x$  y  $y$  aplicando una carga unitaria en la dirección de  $x$  se puede escribir como:

$$U_{xx}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = C \left( C_1 \ln\left(\frac{1}{r}\right) + r_x^2 \right)$$

$$U_{xy}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = Cr_x r_y \tag{Ec. 3.28}$$

Con

$$C = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} ; C_1 = 3-4\nu \tag{Ec. 3.29}$$

Nótese que el primer índice de  $U$  se refiere a la dirección de la carga unitaria, mientras el segundo índice se refiere a la dirección del desplazamiento.

Se puede observar que mientras la distancia entre el punto  $P$  y  $Q$  se acerca infinitamente, debido a que la fuente se distribuye a lo largo de una línea infinita y su resultado es infinito. Como se verá esto no presenta ninguna dificultad puesto que se introduce una escala para las coordenadas, que limita la escala máxima a la unidad. La solución fundamental tiene una singularidad positiva cuando  $P$  y  $Q$  coinciden.

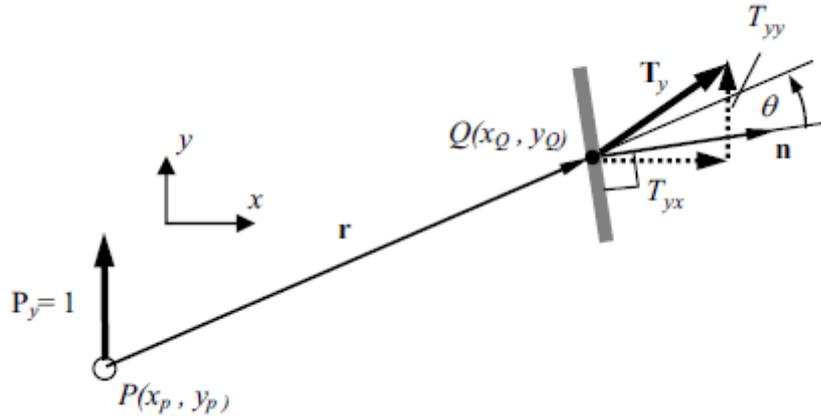


Figura 3.7: Notación para la solución bidimensional de Kelvin cargada en la dirección  $y$ .

Para la carga unitaria en la dirección  $y$  se tiene:

$$U_{yy}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = C \left( C_1 \ln \left( \frac{1}{r} \right) + r_y^2 \right)$$

$$U_{yx}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = U_{xy}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \quad \text{Ec. 3.30}$$

La segunda ecuación indica la simetría de la solución.

Las ecuaciones anteriores se pueden escribir como:

$$U_{ij}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = C \left( C_1 \ln \left( \frac{1}{r} \right) \delta_{ij} + r_i r_j \right) \quad \text{Ec. 3.31}$$

Donde  $x$  y  $y$  son sustituidas por  $i$  y  $j$ .

$$\delta_{ij} = 1 \quad \text{si } i=j$$

$$\delta_{ij} = 0 \quad \text{si } i \neq j \quad \text{Ec. 3.32}$$

Que es el Delta de Kronecker.

Para la solución por el Método de Elementos de Contorno se requiere que actúen en la superficie con una dirección opuesta normal a  $\mathbf{n}$  (esfuerzos de tracción).

La solución fundamental se obtiene primero calculando la solución fundamental para las tensiones y luego aplicando la Ley de Hooke. La solución de las tensiones se obtiene derivando la solución de los desplazamientos.

Las tracciones al punto  $\mathbf{Q}$  por la carga unitaria en  $\mathbf{P}$  en la dirección  $\mathbf{x}$  se denotan por:

$$\begin{aligned} T_{xx}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) &= \frac{C_2}{r} (C_3 + 2r_x^2) \cos \theta \\ T_{xy}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) &= \frac{C_2}{r} [2r_x r_y \cos \theta + C_3 [n_y r_y - n_x r_x]] \\ C_2 &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)} ; C_3 = 1-2\nu ; \cos \theta = \frac{1}{r} \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} \end{aligned} \quad \text{Ec. 3.33}$$

Donde  $\mathbf{Q}$  se define como se observa en las figuras anteriores.

Para la carga unitaria aplicada en  $\mathbf{y}$  tenemos:

$$\begin{aligned} T_{yy}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) &= \frac{C_2}{r} (C_3 + 2r_y^2) \cos \theta \\ T_{yx}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) &= \frac{C_2}{r} [2r_x r_y \cos \theta + C_3 [n_y r_x - n_x r_y]] \end{aligned} \quad \text{Ec. 3.34}$$

Pudiéndose escribir ambas expresiones como:

$$T_{ij}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \frac{C_2}{r^2} [C_3 \delta_{ij} + 2r_i r_j \cos \theta - C_3 (1 - \delta_{ij}) (n_j r_i - n_i r_j)] \quad \text{Ec. 3.35}$$

Se puede ver que la primera parte de la solución es simétrica (la primera parte de  $T_{xy}$  a la primera parte de  $T_{yx}$  pero la segunda parte no lo es.

SUBROUTINE INTEREQ(FI,DFI,KODE,CX,CY,X,Y,SSOL,DSOL)

! ESTA SUBRUTINA OBTIENE LOS VALORES DE LAS TENSIONES Y  
DESPLAZAMIENTOS

! EN LOS PUNTOS INTERNOS.

!

COMMON N,L,GE,XNU,INP,IPR

DIMENSION FI(100),DFI(150),KODE(150),CX(20),CY(20)

    DIMENSION X(51),Y(51),SSOL(60),DSOL(40)

DIMENSION HW(2,6),GW(2,6)

    DIMENSION D11(6),D12(6),D22(6),S11(6),S12(6),S22(6)

!

! REORDENA LAS VARIABLES FI Y DFI PARA GUARDAR TODOS LOS  
VALORES DE LOS DESPLAZAMIENTOS

! EN FI Y TODOS LOS VALORES DE LAS TRACCIONES EN DFI

!

    NE=N/2

    DO 180 I=1,NE

        DO 170 J=1,6

IF(KODE(6\*I-6+J)) 110,110,170

    110 IF((I-NE).NE.0 .OR. J.LT.5) GO TO 125

IF(KODE(J-4)) 114,114,113

    113 CH=FI(J-4)\*GE

FI(J-4)=DFI(6\*I-6+J)

DFI(6\*I-6+J)=CH

    GO TO 170

    114 DFI(6\*I-6+J)=DFI(J-4)

    GO TO 170

    125 IF(IEQ.1 .OR. J.GT.2 .OR.KODE(6\*I-8+J).EQ.1) GO TO 130

DFI(6\*I-6+J)=DFI(6\*I-8+J)

GO TO 170

130 CH=FI(4\*I-4+J)\*GE

FI(4\*I-4+J)=DFI(6\*I-6+J)

DFI(6\*I-6+J)=CH

170 CONTINUE

    180 CONTINUE

!

! OBTIENE LOS VALORES DE LAS TENSIONES Y DESPLAZAMIENTOS EN  
LOS PUNTOS INTERNOS

!

IF(L.EQ.0) GO TO 50

    DO 240 K=1,L

SSOL(3\*K-2)=0.

SSOL(3\*K-1)=0.

```

SSOL(3*K)=0.
DSOL(2*K-1)=0.
DSOL(2*K)=0.
  DO 230 I=1,NE
    CALL EXTINEQ(CX(K),CY(K),X(2*I-1),Y(2*I-
1),X(2*I),Y(2*I),X(2*I+1),Y(2*I+1),HW,GW)
    CALL SIGMAEQ(CX(K),CY(K),X(2*I-1),Y(2*I-
1),X(2*I),Y(2*I),X(2*I+1),Y(2*I+1),D11,D12,D22,S11,S12,S22)
  DO 220 J=1,6
    IJ4=4*I-4+J
  IF(IJ4.GT.(4*NE)) IJ4=J-4
  SSOL(3*K-2)=SSOL(3*K-2)+D11(J)*DFI(6*I-6+J)-S11(J)*FI(IJ4)
  SSOL(3*K-1)=SSOL(3*K-1)+D12(J)*DFI(6*I-6+J)-S12(J)*FI(IJ4)
  SSOL(3*K)=SSOL(3*K)+D22(J)*DFI(6*I-6+J)-S22(J)*FI(IJ4)
    DSOL(2*K-1)=DSOL(2*K-1)+GW(1,J)*DFI(6*I-6+J)-HW(1,J)*FI(IJ4)
  220 DSOL(2*K)=DSOL(2*K)+GW(2,J)*DFI(6*I-6+J)-HW(2,J)*FI(IJ4)
  230 CONTINUE
  240 CONTINUE
  50 RETURN
  END

```

### 3.5 Conclusiones del capítulo

En este capítulo se ha realizado la descripción de la respuesta del material de una manera matemática y hemos obtenido las soluciones de las ecuaciones de gobierno para cargas simples. Las soluciones son para cargas puntuales en dominio infinitas. Se ve que la implementación de estas soluciones ha sido posible expresarla numéricamente creando funciones.

La solución de Kelvin no es la única que se puede utilizar para un análisis de contorno. Se puede utilizar cualquier solución incluso algunas que satisfacen algunas condiciones de borde de manera explícita. Por ejemplo se puede incluir la condición de tracción cero en los bordes en la superficie de contacto; las soluciones obtenidas formarán las bases para los métodos que se discutirán en el siguiente capítulo.

# 4. ECUACIONES INTEGRALES DE CONTORNO

## 4.1 Introducción

Al inicio se explicó la manera de como enfrenta el problema el Método de los Elementos de Contorno que utiliza el procedimiento implementado de TREFFTZ, que utiliza funciones que satisfagan exactamente a la ecuación diferencial dentro del dominio teniendo este método algunas ventajas, entre las cuales citaremos las siguientes:

- La solución obtenida dentro del dominio satisface exactamente a la ecuación diferencial.
- Como las funciones son definidas globalmente, no es necesario subdividir el dominio en elementos.
- La solución también satisface condiciones de dominios infinitos.

La desventaja es que requerimos soluciones de las ecuaciones diferenciales lo más simples posibles, si queremos reducir el tiempo computacional. Las soluciones más recomendables son aquellas que involucran concentración de fuentes o cargas en dominios infinitos, como se pudo ver el capítulo anterior estas soluciones tienen algunas propiedades complejas como son las singularidades. La integración de estas funciones requiere de especial consideración.

El método original propuesto por TREFFTZ no sustituye la escritura de programas de manera general, debido a que sus resultados pueden ser no satisfactorios y no se asegura su convergencia.

Pero debido a la simplicidad del método, sirve para explicar los principios básicos del MEC, por lo que se describirá. Sin embargo, hemos desarrollado nuestros programas con el Método Directo que obtiene su nombre del hecho de que no requiere fuentes ficticias en el cómo en el MÉTODO DE TREFFTZ. Puesto que las incógnitas en el contorno se obtienen directamente en el desarrollo de las ecuaciones integrales. Utilizaremos el TEOREMA DE BETTI que es más conocido para los ingenieros que el TEOREMA DE GREEN.

## 4.2 El Método de TREFFTZ

Para introducir el Método de Trefftz recordemos un problema simple bidimensional de flujo de calor, considérese un dominio infinito homogéneo con un coeficiente de conductividad  $k$ , donde el calor ( $q_0$ ) fluye únicamente en la dirección vertical ( $y$ ) como se ve en la figura 4.1.

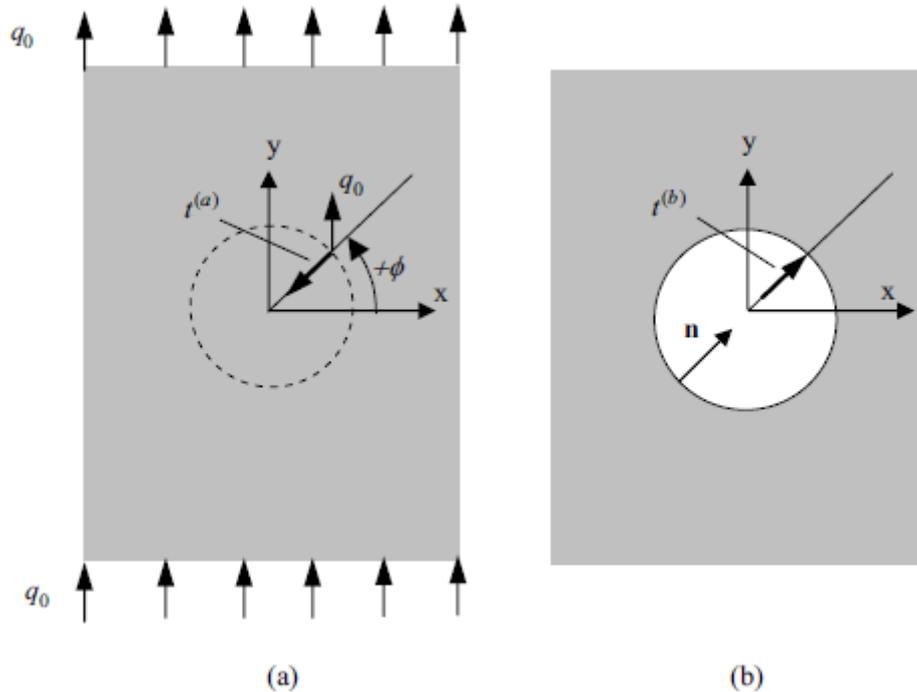


Figura 4.1: Flujo de calor en un dominio infinito caso (a) y (b)

De acuerdo a la Ley de Fourier podemos escribir:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{q_0}{k} \quad \text{Ec. 4.1}$$

Si resolvemos analíticamente para  $u$ , la temperatura en un punto  $Q$  con coordenadas  $x$ ,  $y$  se obtiene lo siguiente:

$$u^{(a)}(Q) = -\frac{q_0}{k}y + C \quad \text{Ec. 4.2}$$

Si asumimos que la temperatura en el centro del círculo es cero, entonces  $C=0$ .

Ahora se coloca un aislante de flujo y se ve como la distribución del flujo y temperatura cambian, este aislante previene que el flujo ocurra en una dirección perpendicular a su contorno y se obtiene por:

$$t = -k \frac{\partial u}{\partial n} = -k \left( n_x \frac{\partial u}{\partial x} + n_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \quad \text{Ec. 4.3}$$

Donde  $\mathbf{n} \{n_x, n_y\}$  es el vector normal al contorno del aislante. Nótese que la dirección positiva de este vector apunta desde el dominio infinito hacia el aislante. Para la solución obtenida en la ecuación 4.2, vemos que esta condición no se satisface, porque el flujo en la dirección normal al contorno del aislante marcado con puntos en la figura 4.1 se define como:

$$t^{(a)} = n_y q_0 = -q_0 \sin \phi \quad \text{Ec. 4.4}$$

Si queremos ver como el aislante cambia la distribución flujo temperatura, tenemos que dividir al problema en dos partes. La primera con la solución trivial ya obtenida, y la segunda donde al solución se obtiene de la siguiente condición de contorno:

$$t^{(b)} = -t^{(a)} = q_0 \sin \phi \quad \text{Ec. 4.5}$$

Por lo que si sumamos las dos soluciones para un flujo normal al contorno del aislante, obtenemos:

$$t = t^{(b)} + t^{(a)} = 0 \quad \text{Ec. 4.6}$$

Ahora si la condición de que el flujo no ocurre en la dirección normal al aislante es satisfecha, por lo que la solución final para la temperatura es:

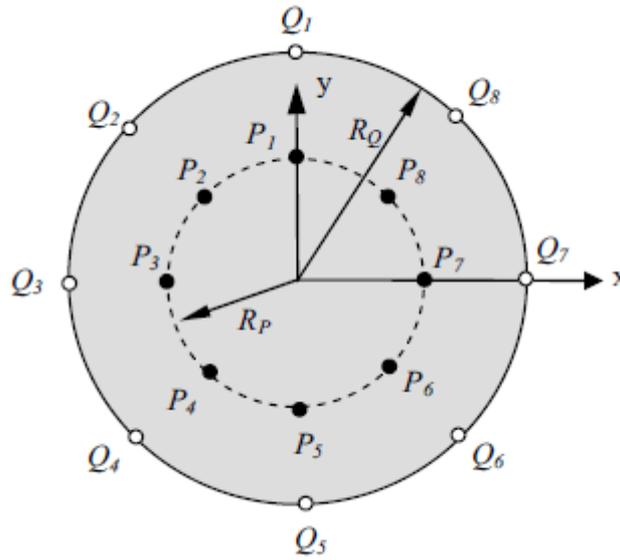
$$u(Q) = u^{(a)}(Q) + u^{(b)}(Q) \quad \text{Ec. 4.7}$$

### 4.2.1 Solución aplicando el Método de TREFFTZ

Se selecciona arbitrariamente  $N$  puntos en el contorno del aislante, donde queremos que se satisfagan las condiciones de frontera, ecuación 4.5, y otro grupo de puntos

donde se aplican fuentes “ficticias”. La razón por la que se llaman “ficticias” es debido a que en realidad no existen pero se toman como parámetros de las funciones de aproximaciones globales. Se debe tener cuidado de donde ubican estos puntos y este será la mayor desventaja del método. Deben ubicarse de tal manera que no influyan en los resultados.

En nuestro caso, el mejor sitio es dentro del aislante. Tampoco se deben colocar puntos  $P$ , cerca de puntos  $Q$ , puesto que como se dijo antes esto produce soluciones singulares. En la figura 4.2 se indica cómo se ubican los puntos ficticios  $P_i$  y los puntos de contorno  $Q_i$ .



**Figura 4.2:** Puntos  $P$  para cargas ficticias,  $Q$  donde se deben satisfacer las condiciones de contorno.

En el método de TREFFTZ se intenta satisfacer las condiciones de frontera dadas, ajustando la magnitud de las fuentes ficticias  $F_i$  aplicadas en los puntos  $P_i$ , tomando en cuenta que la solución fundamental para el flujo en dirección  $n$ , que se obtuvo en el capítulo anterior.  $T(P, Q)$ , la condición de frontera en el punto  $Q_j$  se puede satisfacer por:

$$t^{(b)}(Q_1) = \sum_{i=1}^8 (P_i Q_i) F_i \quad \text{Ec. 4.8}$$

Donde  $T(P_i, Q_j)$  es el flujo en la dirección  $n(Q_j)$  con la fuente  $P_i$ , esto también se le denomina como *Coefficientes de Influencia*. Se puede también escribir una ecuación similar para cada punto de frontera  $Q_i$ , un total de 8 ecuaciones para este ejemplo.

Ec. 4.9

$$t^{(b)}(Q_1) = \sum_{i=1}^8 (P_i Q_1) F_i; \quad t^{(b)}(Q_2) = \sum_{i=1}^8 (P_i Q_2) F_i; \text{ etc.}$$

Obteniendo un sistema de ecuaciones que se resuelven para las fuentes ficticias. Obviamente el número de fuentes ficticias depende del número de ecuaciones y al número de los puntos de frontera  $Q$ . Es conveniente tener igual número de fuentes que de puntos de frontera.

Una vez resuelto el sistema y obtenido las fuentes ficticias  $F_i$ , la temperatura en cualquier punto  $Q$  en la frontera del aislante y en el dominio están dadas por:

$$u(Q) = u^{(a)}(Q) + u^{(b)}(Q)$$

Ec. 4.10

Donde

$$u^{(b)}(Q) = \sum_{i=1}^8 U(P_i, Q) F_i$$

El flujo para un punto  $Q$  en las direcciones  $x$  y  $y$  se obtienen por:

$$q_x = q_x^{(b)} \quad ; \quad q_y = q_0 + q_y^{(b)}$$

Donde:

$$q_x^{(b)} = -k \frac{\partial u^{(b)}(Q)}{\partial x} = -k \sum_{i=1}^8 \frac{\partial U(P_i, Q)}{\partial x} F_i$$

$$q_y^{(b)} = -k \frac{\partial u^{(b)}(Q)}{\partial y} = -k \sum_{i=1}^8 \frac{\partial U(P_i, Q)}{\partial y} F_i$$

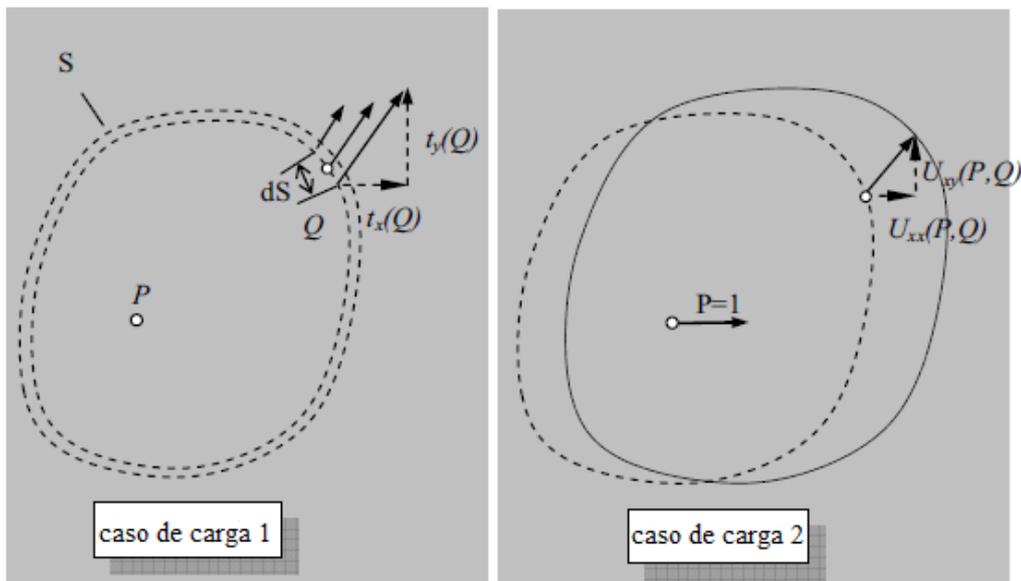
Ec. 4.11

### 4.3 Método Directo

Como se puede ver en el ejemplo anterior, el Método de TREFFTZ no es válido para propósitos generales, no es un método amigable; porque además de tener que especificar puntos en donde las condiciones de frontera se deben satisfacer se deben especificar puntos, un segundo grupo de puntos donde fuerzas ficticias se deben aplicar. Esto es una condición que hace al método *no acceptable*; especialmente para casos de problemas tridimensionales. Adicionalmente no se puede garantizar la convergencia del método en caso de aumentar el número de puntos  $Q$  y  $P$ .

#### 4.3.1 Teorema de Betti y Ecuaciones Integrales

Una alternativa al Método de TREFFTZ es el Método Directo, donde se utiliza el Teorema de BETTI; de esta manera nos libramos de tener que introducir fuentes o fuerzas ficticias. También se elimina la necesidad de incrementar puntos  $P$ , puesto que ahora los puntos  $P$  coinciden con los puntos  $Q$ .



**Figura 4.3:** Aplicación del Teorema de BETTI, tracciones para el caso de carga 1 y desplazamientos para el caso de carga 2 para obtener  $W_{12}$ .

Esto significa que el método se volverá más complicado que el Método de TREFFTZ porque ahora tenemos que resolver un conjunto de ecuaciones integrales y sobrellevar las integrales que son singulares.

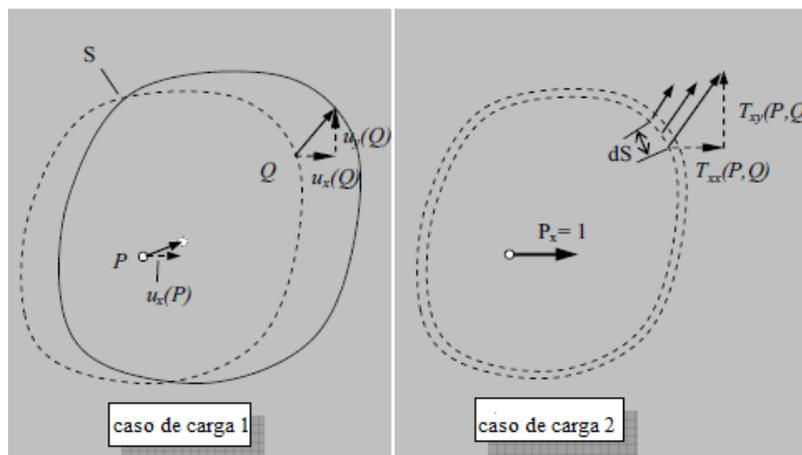
Sin embargo el Método Directo es mucho más amigable que el Método de TREFFTZ y tiene la ventaja que se puede asegurar la convergencia.

Se explicará el Método Directo con ejemplo de elasticidad ya que como ingenieros asociamos el Teorema de BETTI con ese tipo de problemas. Se podrá ver luego que las ecuaciones integrales se pueden derivar para problemas potenciales de la misma manera.

Consideremos un dominio semi infinito con dos tipos de cargas, **caso 1**; que asumimos es el caso que queremos resolver y **caso 2**, donde solo una carga unitaria en la dirección  $x$  se especifica para el punto  $P$  como se observa en la figura 4.3. A lo largo de la línea punteada se muestra para el caso de **carga 1** las tensiones definidas como fuerzas por unidad de longitud de la línea  $dS$ , estas son las tracciones en el punto  $Q$  con las componentes  $tx(Q)$  y  $ty(Q)$ . Para el caso de **carga 2** se muestran los desplazamientos en el punto  $Q$  de  $S$ , que son las soluciones fundamentales  $U_{xx}(P, Q)$  y  $U_{xy}(P, Q)$ .

Debemos cortar a través del continuo para mostrar las tensiones. Aquí hemos cortado por la línea punteada, que forma un contorno cerrado y que ha sido seleccionada arbitrariamente; pero este corte se divide en dos partes; el dominio interior y exterior.

Nótese que para la derivación siguiente no importa qué dominio se considere por lo que las ecuaciones integrales son válidas para dominios infinitos tanto como para dominios finitos.



**Figura 4.4:** Aplicación del Teorema de BETTI, desplazamientos de la aplicación de carga caso1 y tracciones para el caso de Carga 2 para obtener  $W_{21}$ .

El Teorema de BETTI especifica que el trabajo realizado por el caso de carga 1 a lo largo de los desplazamientos del caso 2 debe ser igual al trabajo de las cargas del caso 2 a lo largo de los desplazamientos del caso 1.

Si asumimos que no existen fuerzas de cuerpo actuado en el dominio (que se introducirán posteriormente), el trabajo realizado por el primer grupo de tracciones y desplazamientos (Figura 4.3) es:

$$W_{12} = \int_S [t_x(Q)U_{xx}(P, Q) + t_y(Q)U_{xy}(P, Q)]dS \quad \text{Ec. 4.12}$$

El trabajo realizado por el segundo grupo de tracciones y desplazamientos (figura 4.4) es:

$$W_{21} = \int_S [U_x(Q)T_{xx}(P, Q) + U_y(Q)T_{xy}(P, Q)]dS + 1u_x(P) \quad \text{Ec. 4.13}$$

El Teorema de BETTI indica que  $W_{12} = W_{21}$  y nos da la primera ecuación integral.

$$u_x(P) = \int_S [u_x(Q)U_{xx}(P, Q) + t_y(Q)U_{xy}(P, Q)]dS \quad \text{Ec. 4.14}$$

$$- \int_S [u_x(Q)T_{xx}(P, Q) + U_y(Q)T_{xy}(P, Q)]dS$$

Una segunda ecuación integral se puede obtener al colocar la fuerza unitaria en la dirección  $y$ .

$$u_y(P) = \int_S [t_x(Q)U_{yx}(P, Q) + t_y(Q)U_{yy}(P, Q)]dS \quad \text{Ec. 4.15}$$

$$- \int_S [u_x(Q)T_{yx}(P, Q) + U_y(Q)T_{yy}(P, Q)]dS$$

Utilizamos álgebra matricial podemos combinar las ecuaciones 4.14 y 4.15.

$$u(P) = \int_S U(P, Q)t(Q)dS - \int_S T(P, Q)u(Q)dS \quad \text{Ec. 4.16}$$

Donde

$$u(Q) = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix}, \quad U(P, Q) = \begin{bmatrix} U_{xx} & U_{xy} \\ U_{yx} & U_{yy} \end{bmatrix}$$

Ec. 4.17

$$t(Q) = \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix}, \quad T(P, Q) = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} \\ T_{yx} & T_{yy} \end{bmatrix}$$

La ecuación (4.16) representa para el problema bidimensional en la discusión un sistema de ecuaciones integrales que relaciona tracciones  $t$  y desplazamientos  $u$  en el contorno, eliminando la necesidad de introducir fuerzas ficticias.

Para problemas tridimensionales se obtienen tres ecuaciones integrales de 4.15 donde  $S$  es la superficie, y

$$u(Q) = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix}, \quad U(P, Q) = \begin{bmatrix} U_{xx} & U_{xy} & U_{xz} \\ U_{yx} & U_{yy} & U_{yz} \\ U_{zx} & U_{zy} & U_{zz} \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 4.18}$$

$$t(Q) = \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix}, \quad T(P, Q) = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 4.19}$$

Se puede mostrar que el Teorema de BETTI también se puede deducir de manera matemática utilizando el Teorema de Divergencia o Identidad Simétrica de GREEN'S. Utilizando este método matemático más general se puede ver que los problemas potenciales tienen la siguiente ecuación integral

$$u(P) = \int_S t(Q)U(P, Q)dS(Q) - \int_S u(Q)T(P, Q)dS(Q) \quad \text{Ec. 4.20}$$

Donde  $u(Q)$  y  $t(Q)$  son las temperatura/potencial y la derivada normal con respecto al punto  $Q$  en  $S$  y  $U(P, Q)$  y  $T(P, Q)$  son las soluciones fundamentales en  $Q$  para una fuente en el punto  $P$ . La integración se da a lo largo de una línea  $S$  para problemas bidimensionales o una superficie  $S$  para problemas tridimensionales.

### 4.3.2 Limitando los valores integrales de $P$ coincidiendo con $Q$

Hemos logrado evadir la creación de fuerzas ficticias pero todavía no se ha logrado que el método sea más amigable, aún tenemos dos grupos de puntos; los puntos  $P$  en donde se aplican las cargas y los puntos  $Q$  donde debemos satisfacer las condiciones de frontera. Lo ideal es tener un solo grupo de puntos en la línea donde los puntos  $Q$  se especifican. El problema se da puesto que ciertas integrales en (4.16) o (4.20) solo existen en el sentido de limitar los valores de  $P$  cuando se aproxima a  $Q$ .

Esto se explica en la figura 4.5 para problemas bidimensionales de potencia, aquí examinamos qué pasa cuando puntos  $P$  y  $Q$  coinciden. Definimos una región de exclusión alrededor del punto  $P$ , con radio  $\epsilon$ , e integrando a su alrededor. Las integrales en la ecuación (4.20) se pueden dividir en integrales sobre  $S$  y  $S_\epsilon$ , que es la parte de la exclusión circular. Mientras  $\epsilon$  se haga cero no importa si integramos sobre  $s_\epsilon$  o  $S_\epsilon$ . La parte derecha de la ecuación 4.20 se escribe como:

$$\int_S t \cdot U \cdot dS - \int_S u \cdot T \cdot dS = \int_{S-S_\epsilon} t \cdot U \cdot dS - \int_{S-S_\epsilon} u \cdot T \cdot dS + \int_{S_\epsilon} t \cdot U \cdot dS - \int_{S_\epsilon} u \cdot T \cdot dS \quad \text{Ec. 4.21}$$

Examinaremos las integrales sobre  $S_\epsilon$  posteriormente. Para una superficie lisa en  $P$  se utilizan coordenadas polares como se indica. Cambiando los límites de integración de la primera integral de  $\theta$  a  $\pi$  y la sustituimos por la solución fundamental  $U$ . Asimismo en el límite de  $P$  coincidiremos con  $Q$ , asumiendo  $t(Q) = t(P)$  y  $u(Q) = u(P)$ , luego tenemos:

$$\int_{S_\epsilon} t(Q)U(P, Q)dS(Q) = t(P) \int_0^\pi \frac{1}{2\pi k} \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \epsilon d\phi = t(P)\pi \frac{1}{k} \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \epsilon \quad \text{Ec. 4.22}$$

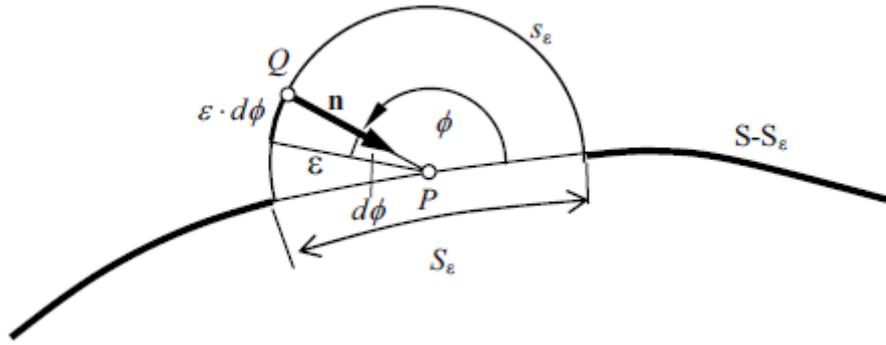


Figura 4.5: Diagrama explicativo del valor límite de las integrales para problemas de potencial bidimensional

La integral se acerca a cero a medida que  $\epsilon$  se acerca a cero, así:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} t(Q)U(P, Q)dS(Q) = 0 \quad \text{Ec. 4.23}$$

La segunda integral se transforma en:

Ec. 4.23

$$\int_{S_\epsilon} u(Q)T(P, Q)dS(Q) = u(P) \int_0^\pi \frac{\cos\theta}{2\pi\epsilon} \epsilon d\phi = u(P) \int_0^\pi \frac{-1}{2\pi} d\phi = -\frac{1}{2}u(P)$$

Ec. 4.24

Al cancelarse  $\epsilon$  no es entonces necesario obtener el límite de esta integral. La ecuación integral que deber ser utilizada para el caso en que los  $t$  puntos fuentes sean cocados en la línea continua  $S$ , está dada por:

$$\frac{1}{2}u(P) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \int_{S-S_\epsilon} t(Q)U(P, Q)dS(Q) - \int_{S-S_\epsilon} u(Q)T(P, Q)dS(Q) \right] \quad \text{Ec. 4.25}$$

Para el caso tridimensional se toma como zona de exclusión una esfera como se indica en la figura

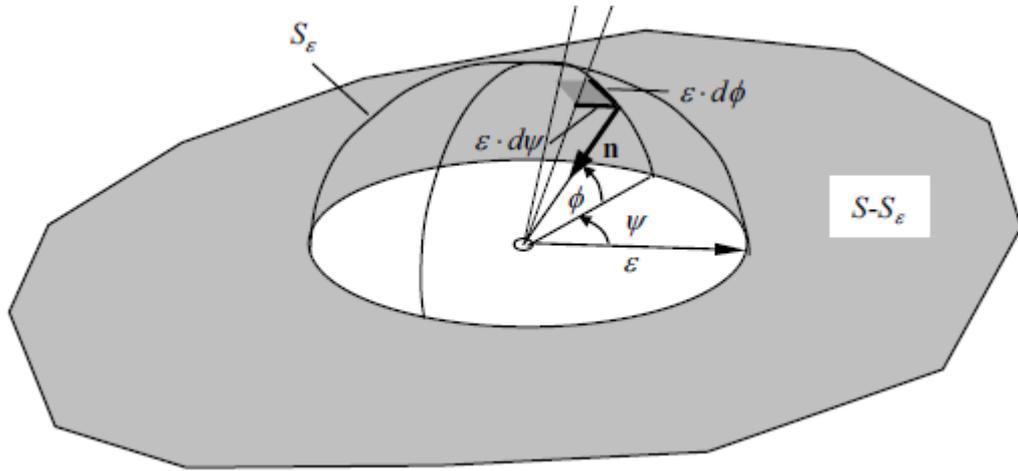


Figura 4.6: Obtención de integrales para el caso  $P=Q$  para tres dimensiones

En ese caso la primera integral también se acerca a cero cuando  $\epsilon$  se acerca a cero. La segunda integral se obtiene de:

$$\int_{S_\epsilon} u(Q)T(P, Q)dS(Q) = u(P) \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos\theta}{4\pi\epsilon^2} \epsilon d\phi \epsilon d\psi = -\frac{1}{2}u(P)$$

Ec. 4.26

Que para superficies lisas da el mismo resultado anterior. Obviamente se puede el mismo procedimiento para problemas de elasticidad. Si  $P=Q$  la ecuación integral 4.16 se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\frac{1}{2}u(P) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{S-S_\epsilon} U(P, Q)t(Q)dS(Q) - \int_{S-S_\epsilon} T(P, Q)u(Q)dS(Q) \right]$$

Ec. 4.27

Si los bordes no son lisos y tienen aristas como se indica en la figura 4.7 entonces la ecuación 5.24 se debe modificar. Los límites de integración se cambian y ahora dependen del ángulo  $\gamma$ :

$$\int_{S_\epsilon} u(Q)T(P, Q)dS(Q) = u(P) \int_0^\gamma \frac{\cos\theta}{2\pi\epsilon} \epsilon d\phi = u(P) \int_0^\gamma -\frac{1}{2\pi} d\phi = -\frac{\gamma}{2\pi} u(P)$$

Ec. 4.28

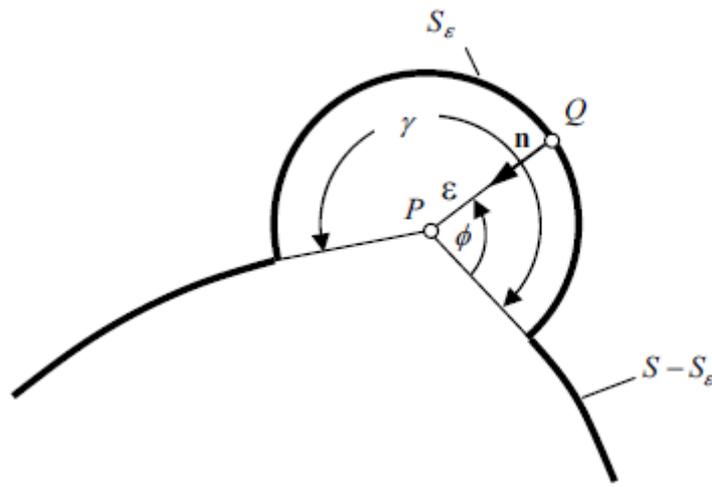
Una ecuación integral general para problemas potenciales se puede escribir así:

$$cu(P) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \oint_{S-S_\varepsilon} t(Q)U(P, Q)dS(Q) - \oint_{S-S_\varepsilon} u(Q)T(P, Q)dS(Q) \right] \quad \text{Ec. 4.29}$$

Se verifica que:

$$c = 1 - \frac{\gamma}{2\pi} \text{ para 2-D}$$

$$c = 1 - \frac{\gamma}{4\pi} \text{ para 3-D} \quad \text{Ec. 4.30}$$



**Figura 4.7:** Límite de la integral cuando P se localiza en una esquina.

Para problemas de elasticidad bi y tridimensionales la ecuación general de la ecuación 4.25 es:

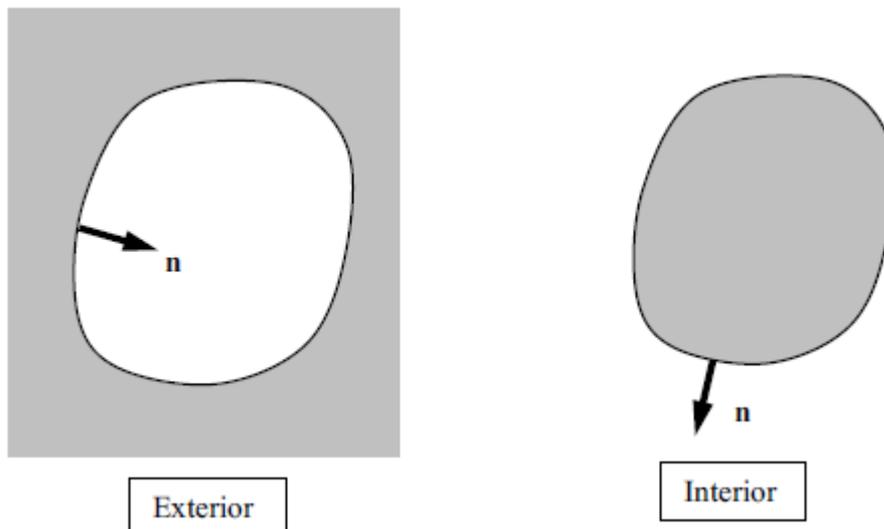
$$cIu(P) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{S-S_\varepsilon} U(P, Q)t(Q)dS(Q) - \int_{S-S_\varepsilon} T(P, Q)u(Q)dS(Q) \right] \quad \text{Ec. 4.31}$$

Donde  $c$  es la matriz definida anteriormente y  $I$  es una matriz identidad de 2x2 o 3x3.

### 4.3.3 Solución de las ecuaciones integrales

Utilizando el Método Directo, se han producido un conjunto de ecuaciones integrales que relacionan temperatura/potencial con un gradiente, o desplazamientos y tracciones en cualquier punto  $Q$  de la frontera. Como ahora ya es posible ubicar los puntos fuentes o fuerzas coincidentes con los puntos de borde o frontera donde se deben satisfacer las condiciones; por lo que ya no debemos preocuparnos por estos puntos; es más en el Método Directo los puntos ficticios ya no juegan ningún papel.

Al utilizar las ecuaciones integrales para resolver el problema de frontera, nosotros consideramos solo una de las dos regiones definidas alrededor de la zona creada por los puntos cortados en la figura 4.4. La región interior o la exterior mostrada en la figura 4.8 con respecto a las ecuaciones integrales, la única diferencia entre ellas es la dirección de la normal exterior  $n$ , que asumimos apunta fuera del sólido. La región interior es finita, la exterior es infinita.



*Figura 4.8: Región exterior e interior obtenidas separando los dominios a través de la línea entrecortada.*

Para problemas de potencial, obtenemos una ecuación integral por cada punto fuente  $P$ . Para problemas de elasticidad obtenemos dos o tres ecuaciones de integral por cada punto de fuente  $P$ . Dependiendo de la dimensión del problema.

Técnicamente si queremos satisfacer exactamente las condiciones de borde en todos los puntos, necesitamos un número infinito de puntos  $P=Q$ . En la práctica resolveremos la ecuación integral numéricamente y trataremos de satisfacer ya sean las condiciones de frontera con un número limitado de puntos  $Q$ , o especificar que la norma del error al satisfacer las condiciones de frontera es mínima.

Para un problema de valor de frontera, ya sea  $u$  o  $t$  está dado, y lo otro es una incógnita que se determinará al resolver la ecuación integral.

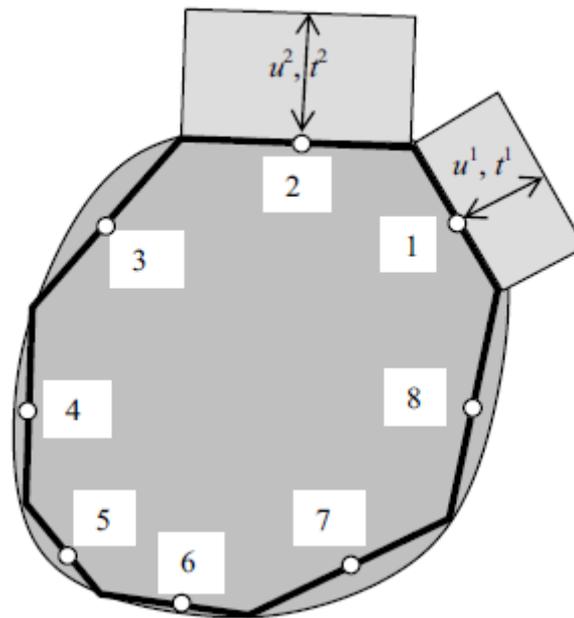
La condición de borde donde el potencial o el desplazamiento debe especificarse es también conocido como condiciones de *Dirichlet*, y cuando se especifica flujo o tracciones se conoce como condiciones de *Neuman* de contorno.

Antes de trabajar con una solución numérica de ecuaciones integrales, se debe conocer algo más sobre estas integrales. Como se ha visto, limitando los valores de las integrales de modo que la región de exclusión alrededor del punto  $P$  se reduzca a cero.

La solución fundamental de las integrales o *Kernels*  $T$  y  $U$  tienen diferentes tipos de singularidades, que afecta la solución. El *Kernel*  $U$  varía de acuerdo a  $\ln r$  en dos dimensiones y con  $1/r$  en tres dimensiones y es conocida como **singularidad débil**. Como veremos posteriormente la integración de estas funciones no presenta problemas. El *Kernel*  $T$  tiene a  $1/r$  singularidades en dos dimensiones y a  $1/r^2$  singularidades en tres dimensiones. Esta condición se conoce como **singularidades fuertes**. Las integrales de esta función solo existen en el sentido de *valor principal de Cauchy*.

Para el caso más sencillo, debemos resolver las ecuaciones integrales dividiendo el contorno de bidimensional para elementos bidimensionales en una línea recta en donde los valores de  $u$  y  $t$  se asumen como constantes.

Se asumen puntos  $P$  localizados al centro de cada segmento.



**Figura 4.9:** Solución de ecuaciones integrales por segmentos rectos.

En el ejemplo mostrado en la figura 4.9 asumimos la solución de un problema potencial bidimensional con ocho segmentos, donde ya sea  $u$  o  $t$  se especifican en el borde.

Se puede ver que esta discretización simple de elementos viola la continuidad entre elementos; sin embargo con experimentos numéricos que el método converge, es decir se obtienen resultados exactos al incrementarse el número de elementos. Las integrales ahora pueden ser evaluadas para cada elemento separadamente con las contribuciones correspondientes, es decir la ecuación 4.25 puede reescribirse como ocho ecuaciones.

$$\frac{1}{2}u^e + \sum_{e=1}^8 \Delta T_i^e u^e = \sum_{e=1}^8 \Delta U_i^e t^e \text{ para } i=1, 2 \dots 8 \quad \text{Ec. 4.32}$$

Donde  $u^e$  y  $t^e$  es la temperatura y el flujo en el centro del elemento  $e$ . Nótese que al existir superficies curvas en los centros de los elementos (Puntos  $P_i$ ) el valor de  $c$  es asignado como  $l/2$ , las integrales sobre los segmentos se definen como:

$$\Delta T_i^e = \int_{S_e} T(P_i, Q) dS_e(Q) \quad , \quad \Delta U_i^e = \int_{S_e} U(P_i, Q) dS_e(Q) \quad \text{Ec. 4.33}$$

Si se utiliza notación matricial se puede escribir la ecuación 4.32 como:

$$[\Delta T]\{u\} = [\Delta U]\{t\} \quad \text{Ec. 4.34}$$

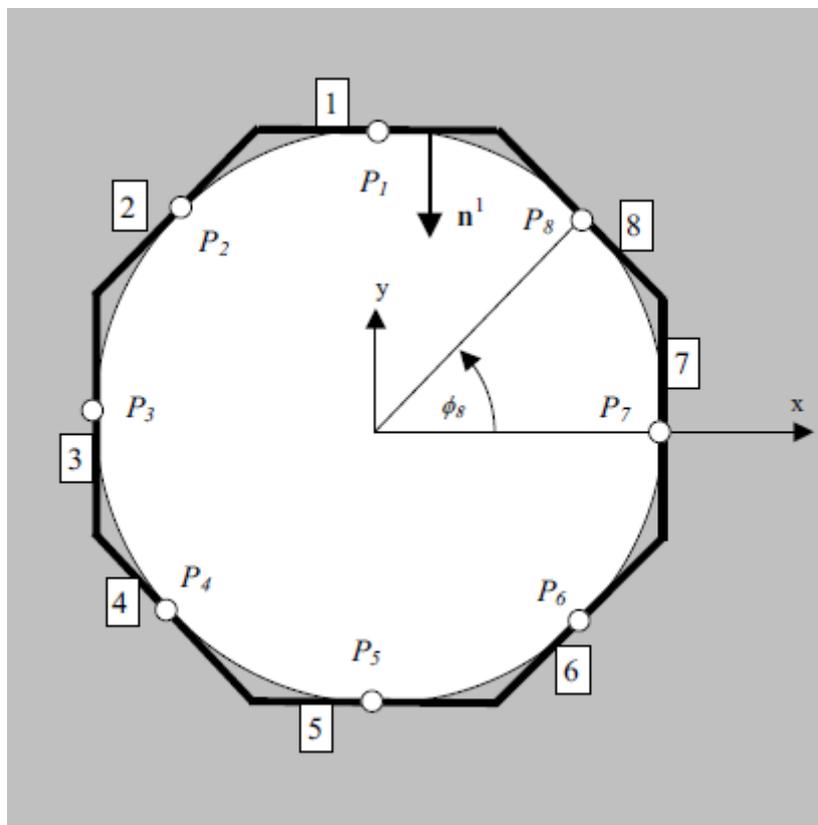
Donde:

$$[\Delta T] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \Delta T_1^1 & \Delta T_1^2 & \dots \\ \Delta T_2^1 & \frac{1}{2} + \Delta T_2^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}, \quad [\Delta U] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \Delta U_1^1 & \Delta U_1^2 & \dots \\ \Delta U_2^1 & \frac{1}{2} + \Delta U_2^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Ec. 4.35

y

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \end{Bmatrix}, \quad \{t\} = \begin{Bmatrix} t^1 \\ t^2 \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad \text{Ec. 4.36}$$



**Figura 4.10:** Discretización en elementos lineales para el problema de flujo sobre un cilindro.

Si consideramos la solución del problema de flujo de calor, que se resolvió utilizando el método de *Trefftz*. Entonces tenemos un problema donde el flujo  $\{t\}_0$  es dado en las condiciones de frontera y las temperaturas son las desconocidas de la figura 4.10.

Esto significa que el sistema de ecuaciones se pueden escribir como:

$$[\Delta T]\{u\} = \{F\} \text{con} \{F\} = [\Delta U]\{t\}_0 \quad \text{Ec. 4.37}$$

Donde el vector  $\{t\}_0$  es:

$$\{t\}_0 = q_0 \begin{Bmatrix} -n_y^1 \\ -n_y^2 \\ . \end{Bmatrix} = q_0 \begin{Bmatrix} \sin\phi_1 \\ \sin\phi_2 \\ . \end{Bmatrix} \quad \text{Ec. 4.38}$$

Las integrales a evaluar analíticamente son:

$$\Delta T_i^e = \int_{S_e} T(P_i, Q) dS_e(Q) = \int_{S_e} \frac{\cos\theta}{2\pi r} dS_e$$

$$\Delta U_i^e = \int_{S_e} U(P_i, Q) dS_e(Q) = \int_{S_e} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} dS_e \quad \text{Ec. 4.39}$$

Las integrales se pueden evaluar utilizando coordenadas locales  $\bar{x}, \bar{y}$ ; a través del punto  $P$ , y coordenadas polares como se indica en la figura 4.11 donde  $Q$  se define anti horario sobre una línea perpendicular al elemento  $e$  con nodo inicial  $A$  y nodo final  $B$ .

El ángulo  $Q$  se determina como un vector unitario de A hasta B.

$$\mathbf{v}_{AB} = \frac{1}{L} \begin{Bmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \end{Bmatrix} \quad \text{Ec. 4.40}$$

El vector normal al elemento  $n$  se obtiene mediante el vector  $x$  producto de  $\mathbf{v}_{AB}$  con el eje  $z$ , esto da:

$$\mathbf{n} = \frac{1}{L} \begin{Bmatrix} y_A - y_B \\ -(x_A - x_B) \end{Bmatrix} \quad \text{Ec. 4.41}$$

El coseno y seno se obtienen por:

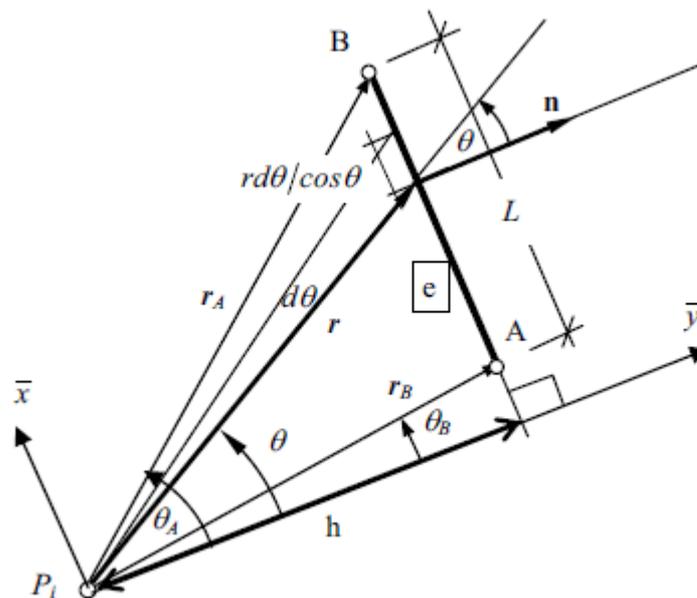
$$\begin{aligned}\cos \theta &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} \frac{1}{r} \\ \sin \theta &= \mathbf{v}_{AB} \cdot \mathbf{r} \frac{1}{r}\end{aligned}\quad \text{Ec. 4.43}$$

y  $\theta$  se obtiene por:

$$\theta = \cos^{-1} \left( \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} \frac{1}{r} \right) \text{SIGN}(\sin \theta) \quad \text{Ec. 4.44}$$

La primera integral es evaluada como:

$$\Delta T_1^e = \int_{\theta_A}^{\theta_B} \frac{\cos \theta}{2\pi r} \frac{rd\theta}{\cos \theta} = \int_{\theta_A}^{\theta_B} \frac{1}{2\pi} d\theta = \frac{\theta}{2\pi} \Big|_{\theta_A}^{\theta_B} = \frac{1}{2\pi} (\theta_B - \theta_A) \quad \text{Ec. 4.45}$$



**Figura 4.11:** Coordenadas polares utilizadas para evaluar analíticamente la integral  $\Delta T_1^e$ .

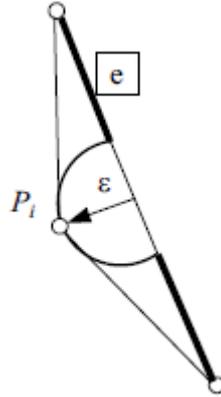
Si  $P_i$  es el centro del elemento  $e$  entonces debemos utilizar el principio de la Integral de Cauchy. Como se ve en la figura 4.12, la integración se retira de la región de exclusión. Se puede verificar esto por la antisimetría de  $T$ .

La segunda integral se obtiene por:

$$\Delta U_i^e = \int_{\theta_A}^{\theta_B} \frac{1}{2\pi k} \ln \frac{1}{r \cos \theta} r d\theta = - \int_{\theta_A}^{\theta_B} \frac{1}{2\pi k} \ln \frac{1}{\left(\frac{h}{\cos \theta}\right)} \frac{hd\theta}{\cos^2 \theta} =$$

$$-\frac{h}{2\pi k} \left[ \tan \theta \left( \ln \left( \frac{h}{\cos \theta} \right) - 1 \right) + \theta \right]_{\theta_B}^{\theta_A} \quad \text{Ec. 4.46}$$

Donde se ha sustituido  $r=h/\cos\theta$



**Figura 4.12:** Valor principal de la Integral de Cauchy cuando  $P_i$  se acerca al centro del elemento  $e$ .

Para propósitos de programar, es conveniente escribir esta expresión en términos de  $r$  y  $\theta$ .

$$\Delta U_i^e = -\frac{1}{2\pi k} [r \sin \theta (\ln r - 1) + \theta r \cos \theta]_{\theta_B, r_B}^{\theta_A, r_A} \quad \text{Ec. 4.47}$$

Si  $P_i$  está en el centro del elemento  $e$  de longitud  $L$ , entonces tenemos:

$$h \rightarrow 0 \quad , \quad \theta_B = -\theta_A \rightarrow \pi/2 \quad , \quad r_B = r_A = L/2 \quad \text{Ec. 4.48}$$

y el coeficiente diagonal se obtiene como:

$$\Delta U_2^2 = -\frac{L}{2\pi k} \left( \ln \left( \frac{L}{2} \right) - 1 \right) \quad \text{Ec. 4.49}$$

#### 4.4 Obtención de resultados dentro del dominio

La solución de la ecuación integral solo provee valores de  $u$  y  $t$  en la frontera del dominio. Al haber definido funciones de forma globales para obtener la solución fundamental, los resultados de cualquier punto dentro del dominio se encuentran listas para obtenerse, a diferencia del MEF donde los resultados de todos los nodos son obtenidos como parte de la solución. Aquí se obtienen los resultados internos como un ejercicio de post proceso. Por ejemplo para obtener el flujo de temperatura en un punto  $P_a$  dentro del dominio, simplemente reescribimos la ecuación 4.20.

$$u(P_a) = \int_S t(Q)U(P_a, Q)dS(Q) - \int_S u(Q)T(P_a, Q)dS(Q) \quad \text{Ec. 4.50}$$

O utilizando la discretización lineal:

$$u(P_a) = \sum_{e=1}^8 \Delta T^e(P_a)u^e - \sum_{e=1}^8 \Delta U^e(P_a)t^e \quad \text{Ec. 4.51}$$

Donde:

$$\Delta T^e = \int_{S_e} T(P_a, Q)dS_e(Q) \quad , \quad \Delta U^e = \int_{S_e} U(P_a, Q)dS_e(Q) \quad \text{Ec. 4.52}$$

El flujo  $P_a$  en las direcciones  $x, y$  se obtienen derivando la ecuación 4.50

$$\begin{aligned} q_x(P_a) &= -k \frac{\partial u}{\partial x}(P_a) = -k \left( \int_S t(Q) \frac{\partial u}{\partial x}(P_a, Q)dS(Q) - \int_S u(Q) \frac{\partial T}{\partial x}(P_a, Q)dS(Q) \right) \\ q_y(P_a) &= -k \frac{\partial u}{\partial y}(P_a) = \\ &-k \left( \int_S t(Q) \frac{\partial u}{\partial y}(P_a, Q)dS(Q) - \int_S u(Q) \frac{\partial T}{\partial y}(P_a, Q)dS(Q) \right) \end{aligned} \quad \text{Ec. 4.53}$$

Donde las derivadas de  $U$  ya se vieron anteriormente y, las derivadas de  $T$  para problemas bidimensionales son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ n_x \frac{\partial U}{\partial x} + n_y \frac{\partial U}{\partial y} \right] \\ \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ n_x \frac{\partial U}{\partial x} + n_y \frac{\partial U}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad \text{Ec. 4.54}$$

# 5. IMPLEMENTACION NUMERICA

## 5.1 Introducción

En el capítulo anterior obtuvimos las ecuaciones integrales de frontera relacionando las condiciones de frontera conocidas con las incógnitas. En problemas prácticos estas ecuaciones integrales solo pueden ser resueltas de manera numérica.

La forma más simple de implementar una solución numérica es utilizando elementos lineales, en donde las variables conocidas y desconocidas se asumen como constantes dentro del elemento. En este caso las ecuaciones integrales se pueden escribir como la suma de integrales sobre elementos. Entonces las integrales sobre los elementos se pueden evaluar analíticamente.

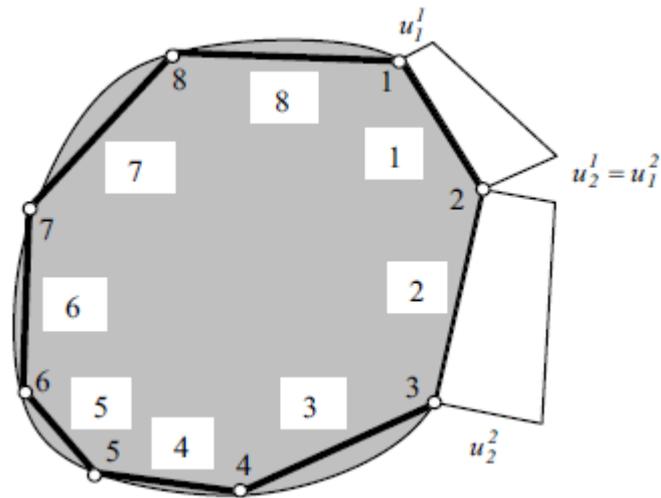
Utilizaremos elementos isoparamétricos para la integración numérica con los conceptos ya establecidos en otros capítulos.

## 5.2 Discretización con elementos isoparamétricos

Consideremos la solución numérica de las ecuaciones integrales de contorno con elementos isoparamétricos donde se asumen funciones lineales o cuadráticas para la variación de los valores conocidos y desconocidos.

$$\begin{aligned} x(\xi) &= \sum N_n(\xi)x_n^e && \text{Geometría.} \\ u(\xi) &= \sum N_n(\xi)u_n^e && \text{Temperatura / Potencial} \\ t(\xi) &= \sum N_n(\xi)t_n^e && \text{Flujo} \end{aligned} \tag{Ec. 5.1}$$

Considere el ejemplo de la figura 5.1 donde el contorno de un problema bidimensional se divide en elementos lineales isoparamétricos.



**Figura 5.1:** Discretización de un problema bidimensional en elementos de contorno lineales.

La ecuación 5.1 se basa en una numeración local explicada en el capítulo 2 (Discretización e Interpolación). En razón de dar continuidad, también se define una numeración global de los nodos; esto es definimos un vector global que contienen potenciales / temperaturas en todos los nodos.

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad \text{Ec. 5.2}$$

La relación entre numeración local y global se conoce como la *conexión entre elementos* o *incidencias*. Como ejemplo el elemento 1 tiene un vector de conexión  $\{1,2\}$ , que significa que los valores de  $\mathbf{u}$  para los dos nodos del elemento aparecen en la primera y segunda posición en el vector global  $\{u\}$ . También es necesario obligar la continuidad de  $\mathbf{u}$  que no necesariamente da continuidad a  $\mathbf{t}$ , que podría ser discontinua.

Consideremos el tratamiento numérico de la ecuación integral:

$$cu(P) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{S-S_\epsilon} t(Q)U(P,Q)dS(Q) - \int_{S-S_\epsilon} u(Q)T(P,Q)dS(Q) \right] \quad \text{Ec. 5.3}$$

Sustituyendo las ecuaciones (5.1) por  $t(Q)$  y  $u(Q)$  y separando las integrales en una suma de integrales sobre los elementos, tenemos:

$$cu(P) = \sum_{e=1}^E \int_{S_e} (\sum_{n=1}^N N_n t_n^e) U(P, \xi) dS(\xi) - \sum_{e=1}^E \int_{S_e} (\sum_{n=1}^N N_n u_n^e) T(P, \xi) dS(\xi)$$

Ec. 5.4

Donde  $E$  es el número total de elementos y  $N$  es el número de nodos por elemento. El proceso es conocido como *discretización de la ecuación integral*. Dado que  $t_n^e$  y  $u_n^e$  son valores nodales constantes con respecto a la integral, pueden salir y la ecuación 5.4 se escribe como:

$$cu(P) = \sum_{e=1}^E \sum_{n=1}^N t_n^e \int_{S_e} N_n(\xi) U(P, \xi) dS(\xi) - \sum_{e=1}^E \sum_{n=1}^N u_n^e \int_{S_e} N_n(\xi) T(P, \xi) dS(\xi)$$

Ec. 5.5

La integración se ha cambiado a una suma de integrales llamadas *Funciones de Integración de Kernel* sobre elementos que se verá luego.

Teóricamente el Teorema de Betti's es válido para cualquier ubicación del punto  $P$ , por lo que podemos escribir la ecuación 5.5 para un número infinito de puntos  $P_i$ . En la práctica seleccionamos un número limitado de puntos. Dado que en problemas potenciales se debe conocer  $\mathbf{t}$  o  $\mathbf{u}$  en el contorno, existirán igual número de incógnitas como de nudos. En el método numérico más simple conocido como *Colocación Puntual*, nosotros obtenemos el número de ecuaciones integrales colocando los puntos  $P_i$  en todos los puntos de la malla.

$$cu(P_i) = \sum_{e=1}^E \sum_{n=1}^N t_n^e \int_{S_e} N_n(\xi) U(P_i, \xi) dS(\xi) - \sum_{e=1}^E \sum_{n=1}^N u_n^e \int_{S_e} N_n(\xi) T(P_i, \xi) dS(\xi)$$

$i=1, 2 \dots I$

Ec. 5.6

Donde  $I$  es el número total de nodos, que tiene que se igual al número de incógnitas.

Esto significa entonces que el *Teorema de Betti* se cumple en ciertas ubicaciones de  $P$ . En una aproximación alternativa tratamos de minimizar el error al cumplir con el *Teorema de Betti*. Esta aproximación es conocida como el *Método de los Pesos Residuales* dado que funciones de peso se utilizan para minimizar los errores residuales. El método más conocido, *Método de Galerkin*, las funciones de interpolación son utilizadas como *Funciones de Peso*.

La ecuación 5.6 se puede reescribir como:

$$cu(P_i) + \sum_{e=1}^E \sum_{n=1}^N \Delta T_{ni}^e u_n^e = \sum_{e=1}^E \sum_{n=1}^N \Delta U_{ni}^e t_n^e \quad i=1, 2 \dots I$$

Donde:

Ec. 5.7

$$\Delta U_{ni}^e = \int_{S_e} N_n(\xi) U(P_i, \xi) dS(\xi) \quad , \quad \Delta T_{ni}^e = \int_{S_e} N_n(\xi) T(P_i, \xi) dS(\xi)$$

Ec. 5.8

Donde  $S_e$  es la longitud del elemento y  $\xi$  es la coordenada intríntrica.

Para problemas de elasticidad que son nuestro mayor objetivo, su ecuación integral se representa por:

$$cIu(P) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{S-S_e} U(P, Q) t(Q) dS(Q) - \int_{S-S_e} T(P, Q) u(Q) dS(Q) \right]$$

Ec. 5.9

y su discretización:

$$cu(P_i) + \sum_{e=1}^E \sum_{n=1}^N \Delta T_{ni}^e u_n^e = \sum_{e=1}^E \sum_{n=1}^N \Delta U_{ni}^e t_n^e$$

Ec. 5.10

La implementación numérica para problemas bidimensionales es:

$$\Delta U_{ni}^e = \int_{S_e} N_n(\xi) U(P_i, \xi) dS(\xi) \quad , \quad \Delta T_{ni}^e = \int_{S_e} N_n(\xi) T(P_i, \xi) dS(\xi)$$

Ec. 5.11

Para problemas tridimensionales:

$$\Delta U_{ni}^e = \int_{S_e} N_n(\xi, \eta) U(P_i, \xi, \eta) dS(\xi, \eta)$$

$$\Delta T_{ni}^e = \int_{S_e} N_n(\xi, \eta) T(P_i, \xi, \eta) dS(\xi, \eta)$$

Ec. 5.12

En donde  $S_e$  es el área del elemento y  $\xi, \eta$  son las coordenadas intríntricas.

Dado que hay dos o tres ecuaciones integrales por punto  $P_i$ , se obtienen 2I o 3I ecuaciones dependiendo de la dimensión cartesiana. Como veremos posteriormente en el ensamblaje, la ecuación 5.10 se puede escribir matricialmente donde los coeficientes se ensamblan de una manera similar al MEF. Por lo que es conveniente guardar los coeficientes por elemento en variables  $[\Delta U]^e$  y  $[\Delta T]^e$ . Para problemas potenciales se tiene:

→ nodos de elementos

$$[\Delta U]^e = \begin{bmatrix} \Delta U_{11} & \Delta U_{21} & \dots \\ \Delta U_{12} & \Delta U_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix} \downarrow \text{puntos colocación} \quad \text{Ec. 5.13}$$

Las variables son de tamaño  $N \times I$ , donde N es el número de nodos del elemento y I es el número de puntos de colocación. Para problemas de elasticidad las variables son de  $2N \times 2I$  para problemas bidimensionales y de  $3N \times 3I$  en tres dimensiones.

### 5.3 Integración del producto de Funciones de Forma Kernel.

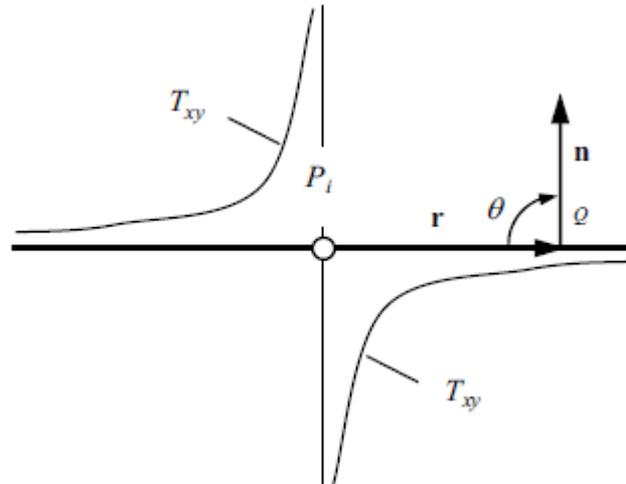
La evaluación de las integrales (5.8) o (5.12) sobre elementos isoparamétricos es probablemente el aspecto más crucial de la implementación numérica del MEC y es más importante que en el MEF. El problema radica en que las funciones que se deben integrar tienen singularidades en ciertos puntos de los elementos. Se discutirá primeramente el tratamiento de integrales “*impropias*” que existen como valores principales de Cauchy y luego discutiremos el tratamiento numérico de las otras integrales.

#### 5.3.1 Integrales Singulares

Como una integral se pueda evaluar depende del tipo de singularidad. En forma general podemos decir que las integrales singulares débiles (Funciones de orden  $l/r$  para 2-D y  $l/r$  para 3-D) se pueden evaluar mediante integración numérica utilizando las *Cuadraturas de Gauss*.

Teóricamente la integración de funciones singularmente fuertes (Funciones de orden  $l/r$  para 2 – D y  $l/r^2$  para 3-D) son integrales impropias y solo existen como los valores principales de Cauchy; sin embargo se puede indicar que para integrar una superficie

plana aproximando los puntos de colocación la parte simétrica de Kernel es cero y la antisimétrica se aproxima a  $+\infty$  al un lado y  $-\infty$  al otro lado del punto. Si asumimos una integración plana extendiéndose de igual forma a la izquierda y derecha del punto  $P_i$ , la integral de la parte antisimétrica también se vuelve cero.



**Figura 5.2:** Variación de  $T_{xy}$  sobre un contorno plano.

Para explicar esto consideremos un problema elástico en 2-D con una superficie plana en el punto  $P_i$  como se ve en la figura 5.2. Para este problema el ángulo entre el vector  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{n}$  es  $90^\circ$  y el coseno de  $\theta$  es cero.

De acuerdo a la ecuación

$$\begin{aligned}
 T_{xx}(P, Q) &= \frac{C_2}{r^2} (C_3 + 3r_x^2) \cos \theta \\
 T_{xy}(P, Q) &= \frac{C_2}{r^2} [3r_x r_y \cos \theta + C_3 [n_x r_y - n_y r_x]] \\
 T_{xz}(P, Q) &= \frac{C_2}{r^2} [3r_x r_z \cos \theta + C_3 [n_x r_z - n_z r_x]]
 \end{aligned}$$

Ec. 5.14

Se tiene:

$$T_{xx} = \frac{C_2}{r}(C_3 + 2r_{,x}^2) \cos \theta = 0$$

$$T_{xy} = \frac{C_2}{r}[2r_{,x}r_{,y} \cos \theta + C_3[n_{,x}r_{,y} - n_{,y}r_{,x}]] = \frac{C}{r}(n_{,x}r_{,y} - n_{,y}r_{,x})$$

Ec. 5.15

De la discretización de la parte antisimétrica de  $T_{xy}$  indicado en las figura 5.2 se puede observar que las restricciones dadas sobre la integral de  $T_{xy}$  harán que de un resultado igual a cero. Como consecuencia los coeficientes diagonales solo contienen el “*término libre*”  $c$ . Uno podría divisar una proyección a través de colocar un borde plano muy cercano a la colocación de los puntos, extendiendo de forma igual en ambas direcciones y utilizar la forma normal de la integración por partes de Gauss, que excluye esta región plana, para así no tener que preocuparnos de obtener los valores principales de la integral de Cauchy; sin embargo la implementación de esto no es trivial y todavía tendríamos el problema del “*término libre*” que para bordes de esquina en un análisis 3-D no es sencillo.

Existen dos aproximaciones para la determinación de los valores principales de la integral de Cauchy. Uno es la aproximación matemática por Guiggiani y Casalini, y la otra se basa en una simple consideración ingenieril. Al ser la segunda más sencilla, es pues; la que utilizaremos.

### 5.3.2 Movimiento de cuerpo rígido

El concepto se basa en el precepto de que no necesitamos resolver las integrales por los coeficientes, estos se determinan del hecho que un cuerpo rígido es indeformable; por lo que las tracciones deben ser cero. Se puede ver que las integrales singulares fuertes se crean para el kernel  $T$ , y solo si los puntos de colocación  $P_i$  coinciden con uno de los nodos del elemento. Así podemos reescribir la ecuación 5.10 de la siguiente manera:

$$c\mathbf{u}(P_i) + \sum_{e=1}^E \sum_{n=1}^N \Delta T_{ni}^e \mathbf{u}_n^e + \sum_{e=1}^E \sum_{n=1}^N \Delta T_{ni}^e \mathbf{u}_n^e = \sum_{e=1}^E \sum_{n=1}^N \Delta U_{ni}^e \mathbf{t}_n^e$$

$g(n) = i$   $g(n) \neq i$

Ec. 5.16

Donde  $g(n)$  representa el número del nodo global con el número del nudo local  $n$ , así separando de la primera suma todos los términos que incluyen una integración singular fuerte. Para generar una traslación de cuerpo rígido para un campo bidimensional finito sustituimos  $u_x=1$  y  $u_y=0$  (traslación en la dirección  $x$ ) y  $u_x=0$  y  $u_y=1$  (traslación en la dirección  $y$ ) para todos los nodos y hacemos todas las tracciones a cero. Para un problema plano podemos escribir dos ecuaciones:

$$c(P_i) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{e=1}^E \sum_{n=1}^N \Delta T_{ni}^e \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{g(n)=i} + \sum_{e=1}^E \sum_{n=1}^N \Delta T_{ni}^e \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{g(n) \neq i} = 0$$

y

Ec. 5.17

$$c(P_i) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{e=1}^E \sum_{n=1}^N \Delta T_{ni}^e \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{g(n)=i} + \sum_{e=1}^E \sum_{n=1}^N \Delta T_{ni}^e \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{g(n) \neq i} = 0$$

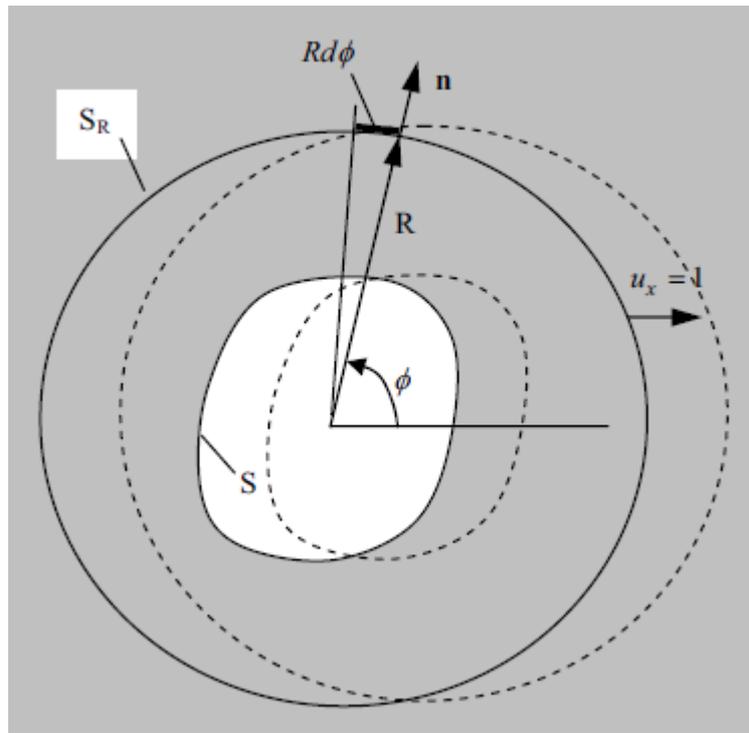
Ec. 5.18

Las ecuaciones se pueden ahora resolver para los términos de singularidad fuerte incluyendo el término libre. Para el primer grupo de ecuaciones tenemos:

$$c(P_i) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{e=1}^E \sum_{n=1}^N \Delta T_{ni}^e \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{g(n)=i} = - \sum_{e=1}^E \sum_{n=1}^N \Delta T_{ni}^e \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{g(n) \neq i}$$

Ec. 5.19

La consecuencia de la ecuación 5.19 es que los términos singulares fuertes incluyendo el término libre se determinan por simplemente sumar todos los coeficientes a excepción de los términos que se evalúan y cambiando el signo de la suma. La ventaja de este proceso es que no solamente evadimos la integración de singularidades fuertes sino que también obtenemos el término libre sin otro trabajo.



**Figura 5.3:** Traslación de un cuerpo rígido en dirección  $x$  de un dominio con radio  $R$ .

Para un dominio infinito no podemos aplicar una traslación de cuerpo rígido, sin embargo si consideramos un dominio bidimensional que se une a una superficie adicional, un círculo de radio  $R$  (Fig. 5.3) donde  $R$  se aproxima infinitamente, luego aplicamos una traslación rígida.

Ahora debemos considerar adicionalmente de las integrales que se extienden sobre el contorno de  $S$ , también aquellas sobre el contorno  $S_R$ , que es la superficie auxiliar. Esto es:

$$c(P_i) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{e=1}^E \sum_{n=1}^N \Delta T_{ni}^e \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{g(n)=i} = - \left( \sum_{e=1}^E \sum_{n=1}^N \Delta T_{ni}^e \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{g(n) \neq i} + \int_{S_R} T(P_i, Q) dS \right)$$

Ec. 5.20

La integral sobre  $S_R$  es conocida como la integral azimut. Sustituyendo  $\cos \theta = -1$  y  $r_{,x} = \cos \theta$  para problemas de elasticidad bidimensional las integrales están dadas por:

$$\int_{S_R} T_{xx}(P, Q) dS = \int_0^{2\pi} \frac{C_2}{R} (C_3 + 2 \cos \phi^2) (-1) R d\phi = -1$$

Ec. 5.21

y

$$\int_{S_R} T_{xx}(P, Q) dS = \int_0^{2\pi} \frac{C_2}{R} [2 \cos \phi \sin \phi (-1) - C_3 (\sin \phi \cos \phi - \cos \phi \sin \phi)] R d\phi = 0$$

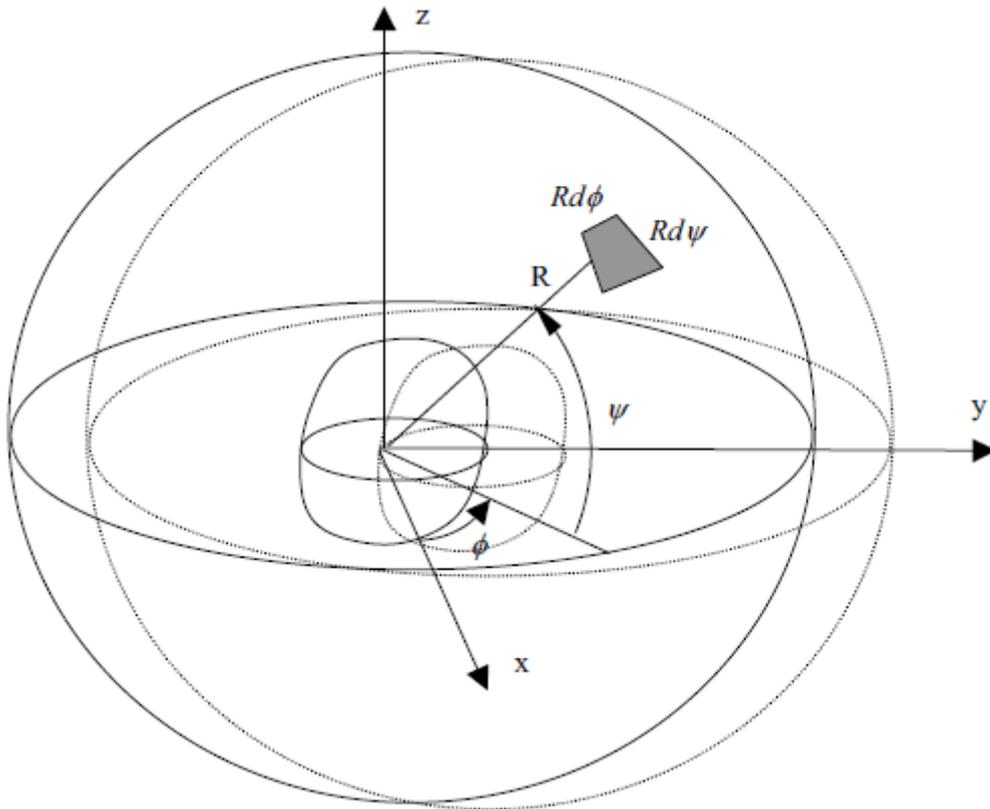
Ec. 5.22

La integral azimut de la matriz  $\mathbf{T}$  puede ser escrita como:

$$\int_{S_R} \mathbf{T}(P, Q) dS = -\mathbf{I}$$

Donde  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad de 2x2.

Ec. 5.23



**Figura 5.4:** Cuerpo rígido para dominio tridimensional infinito.

Vemos que mientras  $R$  se cancela, las integrales son válidas para cualquier radio del círculo, incluyendo un radio infinito; por lo que el método de obtener los términos de singularidad fuerte por la traslación de un cuerpo rígido es también válido para dominios infinitos para problemas tridimensionales elásticos. El dominio infinito se asume como una esfera de radio  $R$ . Los valores típicos de la integral azimut son:

$$\int_{S_R} T_{xx}(P, Q)dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{C_2}{R^2} (C_3 + 3\cos^2\phi)(-1)Rd\psi Rd\phi = -1$$

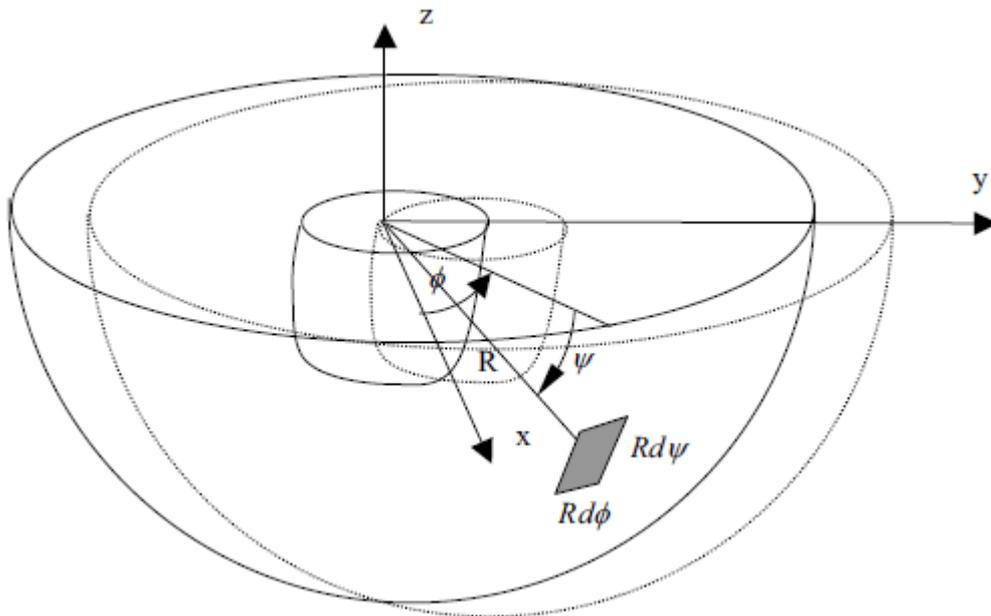
y

Ec. 5.24

$$\int_{S_R} T_{xy}(P, Q)dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{C_2}{R^2} [3\cos\phi\sin\phi(-1) - C_3(\cos\phi\sin\phi - \sin\phi\cos\phi)]Rd\psi Rd\phi = 0$$

Ec. 5.25

Por lo que la ecuación 5.23 es también válida para problemas tridimensionales, con  $I = 3 \times 3$ .



*Figura 5.5: Nodo de cuerpo rígido para dominios semi infinitos.*

Para el caso de dominios semi infinitos, los límites de integración son de 0 a  $\pi$ , y tenemos:

$$\int_{S_R} T_{xx}(P, Q) dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{C_2}{R^2} (C_3 + 3\cos^2\phi)(-1) R d\psi R d\phi = -\frac{1}{2}$$

Ec. 5.26

$$\int_{S_R} \mathbf{T}(P, Q) dS = -\frac{1}{2} \mathbf{I}$$

Ec. 5.27

### 5.3.3 Integración Numérica

Es muy importante mantener una correcta relación con la integración numérica. Si esto no se da, se pueden generar errores importantes en la solución. En el capítulo de integración numérica se vio la integración numérica de Gauss, en donde la función de integración se aproxima por polinomios.

Ahora se trata de encontrar el error por la integración de funciones tipo  $(1/r)$ ,  $(1/r^2)$  y  $(1/r^3)$ , que no son polinómicos dependiendo del número de puntos de Gauss.

Obviamente cuando el punto  $P_i$  está muy cerca de la región de integración, las funciones varían rápidamente y se requieren polinomios de grados cada vez mayores para aproximar la función y el número de puntos de integración tiene que incrementarse.

El error estimado que se introduce nos asegura que el error que se produce por integración numérica es cercanamente constante, al contrario de la aproximidad de  $P_i$ .

La fórmula de integración de Gauss en una dimensión es:

$$\int_{-1}^1 f(\xi) = \sum_{n=1}^N W_n f(\xi_n)$$

Ec. 5.28

Donde  $N$  es el número de puntos de integración.

Stround y Secrest consiguieron una fórmula para el error cerca de los bordes  $\varepsilon$ .

$$\varepsilon \leq 2 \frac{4}{(2)^{2N} (2N)!} \left| \frac{\partial^{2N}}{\partial \xi^{2N}} f(\xi) \right|$$

Ec. 5.29

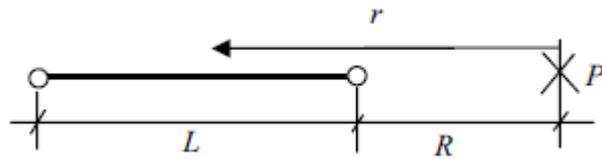
Considerando la integración sobre el elemento de longitud  $L$  con punto  $P_i$  localizado a una distancia  $R$  a un lado (fig. 5.6) y tomando  $f(\xi)=l/r$  se obtiene:

$$\left| \frac{\partial^{2N}}{\partial \xi^{2N}} f(\xi) \right| = 2 \frac{(2N)! L^{2N}}{(2)^{2N} r^{2N+1}} \quad \text{Ec. 5.30}$$

y para el error de integración:

$$\varepsilon \leq \frac{4}{(4r/L)^{2N}} \quad \text{Ec. 5.31}$$

Así el error de integración es función de la distancia  $r$  desde el punto  $P_i$  hasta la región de integración.



**Figura 5.6:** Integración sobre un elemento unidimensional.

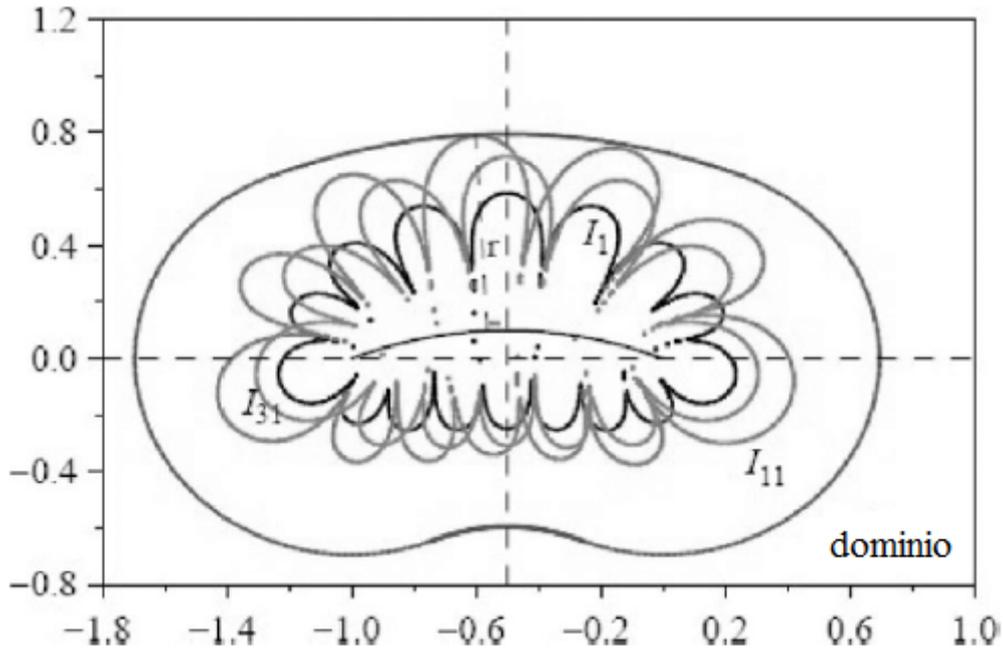
Sin embargo las funciones a integrarse son más complicadas de lo que se han asumido, porque incluyen productos de la solución fundamental con las funciones de forma y el Jacobiano. En adición se hace diferencia si  $P_i$  se localiza al borde del elemento como se ve en la figura 5.6 o si se localiza al interior. Finalmente la forma del elemento (curvo o recto) también tendrá influencia. Para problemas bidimensionales las integrales a evaluarse se pueden simplificar a:

$$I_{ni} = \int_{-1}^1 N_n(\xi) \frac{1}{r^i(\xi)} |J(\xi)| d\xi \quad \text{Ec. 5.32}$$

La idea es determinar el error de la integración como una función de localizar el punto  $P_i$ . Si se integra con una gran cantidad de números de Gauss para ir determinando primero el valor actual de la integral y luego disminuimos el número de puntos de Gauss.

Si hacemos esto para un número grande de posibles posiciones de puntos  $P_i$ , entonces podemos hallar contornos de error para un número de puntos dados de Gauss. La figura 5.7 indica los contornos de error de integración  $10^{-3}$  para un elemento isoparamétrico curvo, para diferentes integrales y para cuatro puntos de Gauss. Los

contornos pueden ser interpretados de tal manera que si el punto  $P_i$  cae en el contorno entonces el error es exactamente  $10^{-3}$ , si es afuera es menor y si es adentro es mayor. Se puede observar que mientras más cercanos se pueden colocar los puntos de Gauss,  $P_i$  puede colocarse más cerca al elemento. Para divisar una tabla con puntos de Gauss se puede crear un dominio que asegure que para todos los puntos dentro del dominio la ocurrencia de la integración es segura, esto fue propuesto por Eberwien.



**Figura 5.7:** Contornos indicando la localización de los puntos  $P_i$  en la integración de Gauss con cuatro puntos dando un error de  $10^{-3}$

N	R/L		
	$O(l/r)$	$O(l/r^2)$	$O(l/r^3)$
3	1.4025	2.3187	3.4170
4	0.6736	0.9709	1.2908

**Tabla 5.1:** Número de puntos de Gauss.

El resultado es expresado en la tabla 5.1, limitando los valores de R/L para grados de integración de 4 y 5. La experiencia indica que el menor número de puntos de

integración no deber ser inferior a 3 y que es más eficiente mantener la integración máxima por debajo. Esto significa que tenemos que los radios  $R/L$  de la tabla 5.1 sean cumplidos.

Casos donde el punto está muy cerca al elemento ocurren cuando existe un cambio drástico en el tamaño del elemento, o los contornos de la superficie están muy cerca las unas de las otras. Como ejemplo en el caso de una viga delgada se debe tener cuidado de no ir a los extremos con los valores de  $R/L$ , puesto que debemos evitar los casos cuando los puntos  $P_i$  están distribuidos de manera poco equitativa ya que el teorema recíproco de Betti's se cumple solo en esos puntos.

Para convertir la tabla 5.1 en una función de Gauss, que da como salida el número de puntos Gauss de acuerdo al valor de  $R/L$ .

```
SUBROUTINE LOCINEQ(XG1,YG1,XG2,YG2,XG3,YG3,GW,NODO)
```

```
! ESTA SUBROUTINA OBTIENE LA MATRIZ GW CUANDO LOS PUNTOS DE  
COLOCACION  
! ES UNO DE LOS NODOS DE LA INTEGRACION DEL ELEMENTO.  
! LOS COEFICIENTES SE OBTIENEN POR INTEGRACION NUMERICA:  
! LA PARTE NO SINGULAR UTILIZANDO LAS CUADRATURAS NORMALES  
DE GAUSS,  
! Y LA PARTE LOGARITMICA UTILIZANDO LA FORMULA DE LA  
CUADRATURA ESPECIAL.
```

```
!  
COMMON N,L,GE,XNU,INP,IPR  
DIMENSION GI(10),OME(10),GIL(10),OMEL(10),GW(2,6),R(2)
```

```
!  
! DATOS PARA LA CUADRATURA DE GAUSS
```

```
!  
DATA GI/0.9739065285,-0.9739065285,0.8650633666,-  
0.8650633666,0.6794095682,-0.6794095682,0.4333953941,-  
0.4333953941,0.1488743389,-0.1488743389/  
DATA
```

```
OME/0.0666713443,0.0666713443,0.1494513491,0.1494513491,0.2190863625,0.219  
0863625,0.2692667193,0.2692667193,0.2955242247,0.2955242247/  
!  
! DATOS PARA LA CUADRATURA ESPECIAL
```

```
!  
!
```

```

DATA
GIL/0.0090426309,0.0539712662,0.1353118246,0.2470524162,0.3802125396,0.5237
923179,0.6657752055,0.7941904160,0.8981610912,0.9688479887/
DATA
OMEL/0.1209551319,0.1863635425,0.1956608732,0.1735771421,0.1356956729,0.0
936467585,0.0557877273,0.0271598109,0.0095151826,0.0016381576/
!
! POSICIONA SISTEMA DE COORDENADAS LOCALES
!
GOTO(1,2,3),NODO
1 X3=XG3-XG1
  Y3=YG3-YG1
  X2=XG2-XG1
  Y2=YG2-YG1
  A1=(X3-2*X2)*0.5
  B1=X2
  A2=(Y3-2*Y2)*0.5
  B2=Y2
GO TO 4
2 X3=XG3-XG2
  Y3=YG3-YG2
X1=XG1-XG2
  Y1=YG1-YG2
  A1=X1+X3
  B1=X3-X1
  A2=Y1+Y3
  B2=Y3-Y1
GO TO 4
3 X2=XG2-XG3
  Y2=YG2-YG3
X1=XG1-XG3
  Y1=YG1-YG3
  A1=(X1-2*X2)*0.5
  B1=-X2
  A2=(Y1-2*Y2)*0.5
  B2=-Y2
4 CONTINUE
!
DO 10 I=1,2
DO 10 J=1,6
10 GW(I,J)=0.
  A=A1**2 + A2**2
  B=2*(A1*B1 + A2*B2)
  C=B1**2 + B2**2

```

```

CONT1=(3-4*XNU)/(8.*3.1415926*GE*(1-XNU))
CONT2=CONT1/(3-4*XNU)
DO 250 I=1,10
T1=((A1*GI(I)+B1)**2)/((A2*GI(I)+B2)**2 + (A1*GI(I)+B1)**2)
T2=((A2*GI(I)+B2)**2)/((A2*GI(I)+B2)**2 + (A1*GI(I)+B1)**2)
T3=(A1*GI(I)+B1)*(A2*GI(I)+B2)/((A1*GI(I)+B1)**2+(A2*GI(I)+B2)**2)
!
! OBTIENE FUNCIONES DE FORMA PARA INTEGRACION NUMERICA
!
F3=0.5*GI(I)*(GI(I)+1.)
F2=1.-GI(I)**2
F1=0.5*GI(I)*(GI(I)-1.)
FL3=GIL(I)*(2.*GIL(I)-1.)
FL2=4.*GIL(I)*(1.-GIL(I))
FL1=(GIL(I)-1.)*(2.*GIL(I)-1.)
FLN3=0.5*GIL(I)*(GIL(I)+1.)
FLN2=1.-GIL(I)**2
FLN1=0.5*GIL(I)*(GIL(I)-1.)
!
! OBTIENE LOS COEFICIENTES GW
!
GO TO(50,60,70) NODO
50 XJA1=SQRT((4*A1*GIL(I)-2*A1+0.5*X3)**2+(4*A2*GIL(I)-
2*A2+0.5*Y3)**2)*2
XJA2=SQRT((A1*GI(I)*2+0.5*X3)**2+(A2*GI(I)*2+0.5*Y3)**2)
XLO=-ALOG(2*SQRT((GI(I)*A1+B1)**2+(GI(I)*A2+B2)**2))
S3=CONT1*(FL3*XJA1*OMEL(I)+F3*XJA2*XLO*OME(I))
S2=CONT1*(FL2*XJA1*OMEL(I)+F2*XJA2*XLO*OME(I))
S1=CONT1*(FL1*XJA1*OMEL(I)+F1*XJA2*XLO*OME(I))
GO TO 200
60 XJA1=SQRT((0.5*B1-A1*GIL(I))**2+(0.5*B2-A2*GIL(I))**2)
XJA11=SQRT((0.5*B1+A1*GIL(I))**2+(0.5*B2+A2*GIL(I))**2)
XJA2=SQRT((0.5*B1+A1*GI(I))**2+(0.5*B2+A2*GI(I))**2)
XLO=-0.5*ALOG((GI(I)*A1*0.5+B1*0.5)**2+(GI(I)*A2*0.5+B2*0.5)**2)
S3=CONT1*((FLN1*XJA1+FLN3*XJA11)*OMEL(I)+F3*XJA2*XLO*OME(I))
S2=CONT1*(FLN2*(XJA1+XJA11)*OMEL(I)+F2*XJA2*XLO*OME(I))
S1=CONT1*((FLN3*XJA1+FLN1*XJA11)*OMEL(I)+F1*XJA2*XLO*OME(I))
GO TO 200
70 XJA1=SQRT((2*A1-4*A1*GIL(I)-0.5*X1)**2+(2*A2-4*A2*GIL(I)-
0.5*Y1)**2)*2
XJA2=SQRT((2*A1*GI(I)-0.5*X1)**2+(2*A2*GI(I)-0.5*Y1)**2)
XLO=-ALOG(2*SQRT((A1*GI(I)+B1)**2+(A2*GI(I)+B2)**2))
S3=CONT1*(FL1*XJA1*OMEL(I)+F3*XJA2*XLO*OME(I))
S2=CONT1*(FL2*XJA1*OMEL(I)+F2*XJA2*XLO*OME(I))

```

```

S1=CONT1*(FL3*XJA1*OMEL(I)+F1*XJA2*XLO*OME(I))
200 GW(1,5)= GW(1,5)+S3+CONT2*F3*T1*XJA2*OME(I)
GW(1,3)= GW(1,3)+S2+CONT2*F2*T1*XJA2*OME(I)
GW(1,1)= GW(1,1)+S1+CONT2*F1*T1*XJA2*OME(I)
GW(1,6)= GW(1,6)+ CONT2*T3*XJA2*F3*OME(I)
GW(1,4)= GW(1,4)+ CONT2*T3*XJA2*F2*OME(I)
GW(1,2)= GW(1,2)+ CONT2*T3*XJA2*F1*OME(I)
GW(2,5)= GW(1,6)
GW(2,3)= GW(1,4)
GW(2,1)=GW(1,2)
GW(2,6)= GW(2,6)+ S3+CONT2*T2*XJA2*F3*OME(I)
GW(2,4)=GW(2,4)+S2+CONT2*T2*XJA2*F2*OME(I)
GW(2,2)= GW(2,2)+ S1+CONT2*T2*XJA2*F1*OME(I)
!
250 CONTINUE
!
RETURN
END

```

### 5.3.4 Implementación numérica sobre elementos unidimensionales

En la integración de funciones de forma tipo Kernel, el producto de funciones debe tener un cuidado especial debido a las discontinuidades por singularidad sobre el elemento, dependiendo de la ubicación punto  $P_i$ ; por lo que es necesario distinguir entre las integraciones para el caso donde  $P_i$  es uno de los nodos del elemento y cuando no lo es.

Las integrales que se deberán evaluar sobre los elementos isoparamétricos indicados en la figura 5.8 y para el caso de problemas potenciales.

$$\Delta U_{ni}^e = \int_{-1}^1 N_n(\xi) U(P_i, \xi) J(\xi) d\xi \quad , \quad \Delta T_{ni}^e = \int_{-1}^1 N_n(\xi) T(P_i, \xi) J(\xi) d\xi$$

Ec. 5.33

Donde  $U(P_i, \xi)$  y  $T(P_i, \xi)$  son las soluciones fundamentales en  $Q(\xi)$  para un punto  $P_i$ ,  $J(\xi)$  es el Jacobiano y  $N_n(\xi)$  son las funciones de forma lineal o cuadráticas.

Cuando el punto  $P_i$  no es un nodo del elemento, ambas integrales pueden ser evaluadas con las cuadraturas de Gauss. Las integrales de la ecuación 5.33 pueden ser reemplazadas por las dos sumas que se indican a continuación:

$$\Delta T_{ni}^e \approx \sum_{m=1}^M N_n(\xi_m) T(P_i, \xi_m) J(\xi_m) W_m$$

$$\Delta U_{ni}^e \approx \sum_{m=1}^M N_n(\xi_m) U(P_i, \xi_m) J(\xi_m) W_m$$

Ec. 5.34

Donde el número de puntos de integración  $M$  es determinado con una función de aproximación de  $P_i$  a la región de integración. Si  $P_i$  está cerca de la región de integración se requerirá una subdivisión.

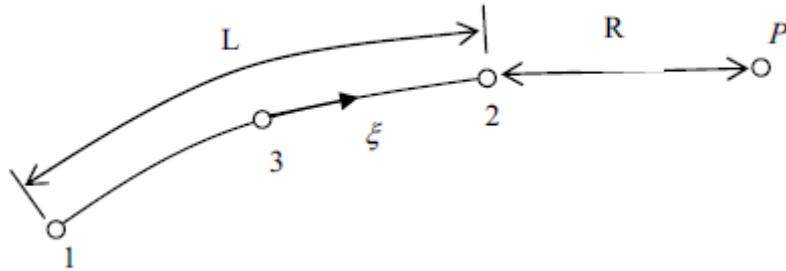


Figura 5.8: Elemento unidimensional, integración cuando  $P_i$  no es un nodo del elemento.

Cuando  $P_i$  es un nodo del elemento, las funciones  $U$  y  $T$  tienden al infinito en la región de integración. Considérense los dos casos en la figura 6.9.

- (a)  $P_i$  se localiza en el punto 1 y  $n$  en la ecuación 5.33 es 2:

Esto significa que a pesar que  $T$  y  $U$  tienden al infinito, cuando se acercan al punto  $a$ , las funciones de forma tienden a cero, por lo que el producto de la integral  $N_n(\xi)U(P_i, \xi)$  y  $N_n(\xi)T(P_i, \xi)$  tiende a un valor finito. Para el caso donde  $P_i$  no es un nodo  $n$  del elemento, la integral puede ser evaluada con la fórmula 5.34.

- (b)  $P_i$  se localiza en el punto 2 y  $n$  en la ecuación 5.33 es 2:

En este caso,  $T$  y  $U$  tienden al infinito y las funciones de forma tienen a la unidad y los productos  $N_n(\xi)U(P_i, \xi)$  con  $N_n(\xi)T(P_i, \xi)$  también tienden al infinito, dado que  $U$  tiene singularidad de orden  $\ln(l/r)$ . El primer producto

no puede ser integrado utilizando las cuadraturas de Gauss. La integral del segundo producto existe únicamente para los valores principales de Cauchy. Sin embargo estos son los términos de la diagonal de los coeficientes de la matriz que se evalúan utilizando las ecuaciones 6.19 y 6.20.

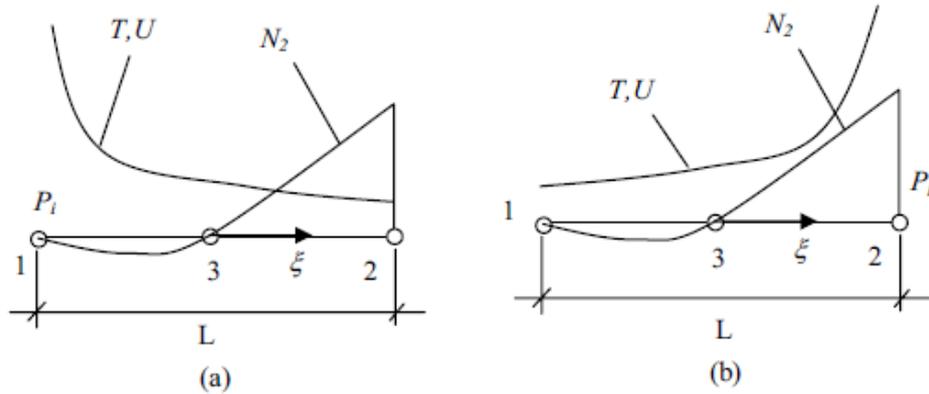


Figura 5.9: Integración cuando  $P_i$  es un nodo de los elementos.

Para la integración del producto con  $\ln(l/r)$ , podemos utilizar una cuadratura de Gauss modificada denominada *Gauss-Laguerre*.

$$\int_0^1 f(\bar{\xi}) \ln\left(\frac{l}{\bar{\xi}}\right) d\bar{\xi} \approx \sum_{m=1}^M W_m f(\bar{\xi}_m) \quad \text{Ec. 5.35}$$

Donde M es el número de puntos de integración. Los pesos y coordenadas se obtienen de la subrutina Gauss-Laguerre que se detalla a continuación. Nótese que para esta integración  $\bar{\xi} = 0$  en el punto singular y los límites son de 0 a 1, por lo que un cambio de coordenadas es necesario antes de aplicar la ecuación (5.35).

Este cambio de coordenadas se da por (ver figura 5.10)

$$\xi = 2\bar{\xi} - 1 \text{ cuando } P_i \text{ está cerca del nodo 1.} \quad \text{Ec. 5.36}$$

$$\xi = 1 - 2\bar{\xi} \text{ cuando } P_i \text{ está cerca del nodo 2.}$$

Para el caso que se integra sobre un elemento cuadrático, el integrando es discontinuo si el punto  $P_i$  se localiza en el nodo intermedio. La integración se debe separar en dos regiones, la una  $-1 < \xi < 0$ ; y la otra sobre  $0 < \xi < 1$ . Para la obtención del producto

$N_n(\xi)U(P_i, \xi)$  las coordenadas intrínsecas para las dos subregiones se obtienen. (ver figura 5.10).

$$\xi = -\bar{\xi} \text{ para subregión 1.}$$

Ec. 5.37

$$\xi = \bar{\xi} \text{ para subregión 2.}$$

Para evaluar la primera integral de la ecuación (5.8) se debe sustituir  $r$  como una función de  $\xi$ . Para un elemento lineal se puede simplificar escribiendo  $r = J\xi$  y obtenemos.

$$\Delta U_{nl}^e = \int_0^1 N_n(\xi) \frac{1}{2\pi k} \ln\left(\frac{1}{J\xi}\right) J \left|\frac{d\xi}{d\bar{\xi}}\right| d\bar{\xi} = \int_0^1 N_n(\xi) \frac{1}{2\pi k} \ln\left(\frac{1}{\xi}\right) J \left|\frac{d\xi}{d\bar{\xi}}\right| d\bar{\xi} + \int_0^1 N_n(\xi) \frac{1}{2\pi k} \ln\left(\frac{1}{J}\right) J \left|\frac{d\xi}{d\bar{\xi}}\right| d\bar{\xi}$$

Ec. 5.38

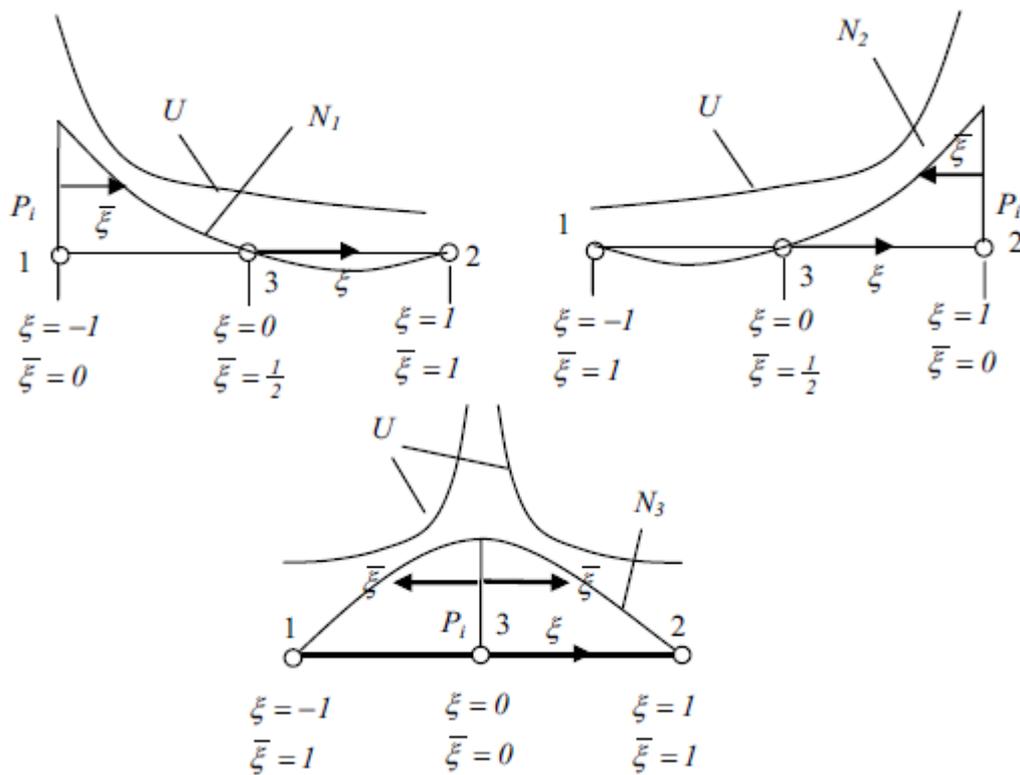


Figura 5.10: Integración cuando  $P_i$  y  $n$  coinciden.

La primera integral se evaluará mediante Gauss – Laguerre:

$$\Delta U_{ni}^e = \int_0^1 N_n(\xi) \frac{1}{2\pi k} \ln\left(\frac{1}{\xi}\right) J(\xi) \frac{d\xi}{d\bar{\xi}} d\bar{\xi} =$$

$$\approx \sum_{m=1}^M N_n(\xi_m) \frac{1}{2\pi k} J(\xi_m) W_m \frac{d\xi}{d\bar{\xi}} \quad \text{Ec. 5.39}$$

De donde la segunda parte es integrada con la cuadratura de Gauss normal. El Jacobiano  $\frac{d\xi}{d\bar{\xi}}$  puede ser fácilmente encontrado derivando las ecuaciones 5.36 y 5.37. La segunda integral en 5.38 se evalúa utilizando la cuadratura normal de Gauss. Para elementos cuadráticos la sustitución de  $r$  en términos de  $\xi$  es más complicada. La una alternativa sería sustituir  $r = a \xi$ , donde  $a$  es la longitud lineal recta entre los nodos finales del elemento, Esto producirá un pequeño error.

Una mejor obtención de  $r$  como función de  $\xi$  se obtiene utilizando lo que da Eberwien. La subrutina que provee las coordenadas y pesos para la integración de Gauss – Laguerre se indica a continuación

```

SUBROUTINE SIGMAEQ(XP,YP,X1,Y1,X2,Y2,X3,Y3,D11,D12,D22,S11,S12,S22)
!
! ESTA SUBRITINA OBTIENE LOS VALORES DE LAS MATRICES S Y D
! UTILIZANDO LA CUADRATURA DE GAUSS PARA OBTENERLAS
TENSIONES
! EN CUALQUIER PUNTO INTERIOR.
! RA      = RADIO
! RD1,RD2,RDN = DERIVADAS DEL RADIO
! ETA1,ETA2 = COMPONENTES DE LA NORMAL UNITARIA DEL
ELEMENTO
! XCO,YCO  = PUNTO DE INTEGRACION A LO LARGO DEL ELEMENTO
! XJA      = JACOBIANO
!
COMMON N,L,GE,XNU,INP,IPR
DIMENSION D11(6),D12(6),D22(6),S11(6),S12(6),S22(6)
      DIMENSION GI(10),OME(10)
      DATA GI/0.9739065285,-0.9739065285,0.8650633666,-
0.8650633666,0.6794095683,-0.6794095682,0.4333953941,-
0.4333953941,0.1488743389,-0.1488743389/

```

```

DATA
OME/0.0666713443,0.0666713443,0.1494513491,0.1494513491,0.2190863625,0.219
0863625,0.2692667193,0.2692667193,0.2955242247,0.2955242247/
DO 20 J=1,6
D11(J)=0.
D12(J)=0.
D22(J)=0.
S11(J)=0.
S12(J)=0.
20 S22(J)=0.
!
FA=1-4*XNU
AL=1-2*XNU
A=X3-2*X2+X1
B=(X3-X1)/2
C=Y3-2*Y2+Y1
D=(Y3-Y1)/2
DE=4*3.141592*(1-XNU)
DO 40 I=1,10
!
! OBTIENE LOS VALORES DE LAS FUNCIONES DE FORMA EN LOS
PUNTOS DE INTEGRACION
!
F1=GI(I)*(GI(I)-1)*0.5
F2=1.-GI(I)**2
F3=GI(I)*(GI(I)+1)*0.5
!
! OBTIENE LOS PARAMETROS GEOMETRICOS
!
XCO=X1*F1+X2*F2+X3*F3
YCO=Y1*F1+Y2*F2+Y3*F3
XJA=SQRT((GI(I)*A+B)**2+(GI(I)*C+D)**2)
ETA1=(GI(I)*C+D)/XJA
ETA2=-((GI(I)*A+B)/XJA)
RA=SQRT((XP-XCO)**2+(YP-YCO)**2)
RD1=(XCO-XP)/RA
RD2=(YCO-YP)/RA
RDN=RD1*ETA1+RD2*ETA2
!
! OBTIENE LOS COEFICIENTES D Y S
!
D11(1)=D11(1)+(AL*RD1+2*RD1**3)*OME(I)*XJA*F1/(DE*RA)
D11(2)=D11(2)+(2*RD1**2*RD2-AL*RD2)*OME(I)*XJA*F1/(DE*RA)
D11(3)=D11(3)+(AL*RD1+2*RD1**3)*OME(I)*XJA*F2/(DE*RA)

```

$D11(4)=D11(4)+(2*RD1**2*RD2-AL*RD2)*OME(I)*XJA*F2/(DE*RA)$   
 $D11(5)=D11(5)+(AL*RD1+2*RD1**3)*OME(I)*XJA*F3/(DE*RA)$   
 $D11(6)=D11(6)+(2*RD1**2*RD2-AL*RD2)*OME(I)*XJA*F3/(DE*RA)$   
 $D12(1)=D12(1)+(AL*RD2+2*RD1**2*RD2)*F1/(DE*RA)*OME(I)*XJA$   
 $D12(2)=D12(2)+(AL*RD1+2*RD1*RD2**2)*F1/(DE*RA)*OME(I)*XJA$   
 $D12(3)=D12(3)+(AL*RD2+2*RD1**2*RD2)*F2/(DE*RA)*OME(I)*XJA$   
 $D12(4)=D12(4)+(AL*RD1+2*RD1*RD2**2)*F2/(DE*RA)*OME(I)*XJA$   
 $D12(5)=D12(5)+(AL*RD2+2*RD1**2*RD2)*F3/(DE*RA)*OME(I)*XJA$   
 $D12(6)=D12(6)+(AL*RD1+2*RD1*RD2**2)*F3/(DE*RA)*OME(I)*XJA$   
 $D22(1)=D22(1)+(2*RD1*RD2**2-AL*RD1)*F1/(DE*RA)*OME(I)*XJA$   
 $D22(2)=D22(2)+(AL*RD2+2*RD2**3)*F1/(DE*RA)*OME(I)*XJA$   
 $D22(3)=D22(3)+(2*RD1*RD2**2-AL*RD1)*F2/(DE*RA)*OME(I)*XJA$   
 $D22(4)=D22(4)+(AL*RD2+2*RD2**3)*F2/(DE*RA)*OME(I)*XJA$   
 $D22(5)=D22(5)+(2*RD1*RD2**2-AL*RD1)*F3/(DE*RA)*OME(I)*XJA$   
 $D22(6)=D22(6)+(AL*RD2+2*RD2**3)*F3/(DE*RA)*OME(I)*XJA$   
 $S11(1)=S11(1)+(2*RDN*(AL*RD1+XNU*2*RD1-4*RD1**3)+4*XNU*ETA1*RD1**2+AL*(2*ETA1*RD1**2+2*ETA1)-FA*ETA1)*2*GE*F1/(DE*RA**2)*OME(I)*XJA$   
 $S11(2)=S11(2)+(2*RDN*(AL*RD2-4*RD1**2*RD2)+4*XNU*ETA1*RD1*RD2+AL*2*ETA2*RD1**2-FA*ETA2)*2*GE*F1/(DE*RA**2)*OME(I)*XJA$   
 $S11(3)=S11(3)+(2*RDN*(AL*RD1+XNU*2*RD1-4*RD1**3)+4*XNU*ETA1*RD1**2+AL*(2*ETA1*RD1**2+2*ETA1)-FA*ETA1)*2*GE*F2/(DE*RA**2)*OME(I)*XJA$   
 $S11(4)=S11(4)+(2*RDN*(AL*RD2-4*RD1**2*RD2)+4*XNU*ETA1*RD1*RD2+AL*2*ETA2*RD1**2-FA*ETA2)*2*GE*F2/(DE*RA**2)*OME(I)*XJA$   
 $S11(5)=S11(5)+(2*RDN*(AL*RD1+XNU*2*RD1-4*RD1**3)+4*XNU*ETA1*RD1**2+AL*(2*ETA1*RD1**2+2*ETA1)-FA*ETA1)*2*GE*F3/(DE*RA**2)*OME(I)*XJA$   
 $S11(6)=S11(6)+(2*RDN*(AL*RD2-4*RD1**2*RD2)+4*XNU*ETA1*RD1*RD2+AL*2*ETA2*RD1**2-FA*ETA2)*2*GE*F3/(DE*RA**2)*OME(I)*XJA$   
 $S12(1)=S12(1)+(2*RDN*(XNU*RD2-4*RD1**2*RD2)+2*XNU*(ETA1*RD2*RD1+ETA2*RD1**2)+AL*(2*ETA1*RD1*RD2+ETA2))*2*GE*F1/(DE*RA**2)*OME(I)*XJA$   
 $S12(2)=S12(2)+(2*RDN*(XNU*RD1-4*RD1*RD2**2)+2*XNU*(ETA1*RD2**2+ETA2*RD1*RD2)+AL*(2*ETA2*RD1*RD2+ETA1))*2*GE*F1/(DE*RA**2)*OME(I)*XJA$   
 $S12(3)=S12(3)+(2*RDN*(XNU*RD2-4*RD1**2*RD2)+2*XNU*(ETA1*RD2*RD1+ETA2*RD1**2)+AL*(2*ETA1*RD1*RD2+ETA2))*2*GE*F2/(DE*RA**2)*OME(I)*XJA$

```

S12(4)=S12(4)+(2*RDN*(XNU*RD1-
4*RD1*RD2**2)+2*XNU*(ETA1*RD2**2+ETA2*RD1*RD2)+AL*(2*ETA2*RD1
*RD2+ETA1))*2*GE*F2/(DE*RA**2)*OME(I)*XJA
S12(5)=S12(5)+(2*RDN*(XNU*RD2-
4*RD1**2*RD2)+2*XNU*(ETA1*RD2*RD1+ETA2*RD1**2)+AL*(2*ETA1*RD1
*RD2+ETA2))*2*GE*F3/(DE*RA**2)*OME(I)*XJA
S12(6)=S12(6)+(2*RDN*(XNU*RD1-
4*RD1*RD2**2)+2*XNU*(ETA1*RD2**2+ETA2*RD1*RD2)+AL*(2*ETA2*RD1
*RD2+ETA1))*2*GE*F3/(DE*RA**2)*OME(I)*XJA
S22(1)=S22(1)+(2*RDN*(AL*RD1-
4*RD1*RD2**2)+4*XNU*ETA2*RD1*RD2+AL*2*ETA1*RD2**2-
FA*ETA1)*2*GE*F1/(DE*RA**2)*OME(I)*XJA
S22(2)=S22(2)+(2*RDN*(AL*RD2+2*XNU*RD2-
4*RD2**3)+4*XNU*ETA2*RD2**2+AL*(2*ETA2*RD2**2+2*ETA2)-
FA*ETA2)*2*GE*F1/(DE*RA**2)*OME(I)*XJA
S22(3)=S22(3)+(2*RDN*(AL*RD1-
4*RD1*RD2**2)+4*XNU*ETA2*RD1*RD2+AL*2*ETA1*RD2**2-
FA*ETA1)*2*GE*F2/(DE*RA**2)*OME(I)*XJA
S22(4)=S22(4)+(2*RDN*(AL*RD2+2*XNU*RD2-
4*RD2**3)+4*XNU*ETA2*RD2**2+AL*(2*ETA2*RD2**2+2*ETA2)-
FA*ETA2)*2*GE*F2/(DE*RA**2)*OME(I)*XJA
S22(5)=S22(5)+(2*RDN*(AL*RD1-
4*RD1*RD2**2)+4*XNU*ETA2*RD1*RD2+AL*2*ETA1*RD2**2-
FA*ETA1)*2*GE*F3/(DE*RA**2)*OME(I)*XJA
40 S22(6)=S22(6)+(2*RDN*(AL*RD2+2*XNU*RD2-
4*RD2**3)+4*XNU*ETA2*RD2**2+AL*(2*ETA2*RD2**2+2*ETA2)-
FA*ETA2)*2*GE*F3/(DE*RA**2)*OME(I)*XJA
RETURN
END

```

### 5.3.5 Subdivisión de la región de integración

En algunos casos cuando el punto  $P_i$  está cerca del elemento, el número de puntos de Gauss requeridos excederá de cuatro de la tabla 5.1. Para ese caso es necesario subdividir el elemento en subdivisiones iguales a  $R/L$ . El máximo número de puntos de gauss requeridos es sobrepasado, el elemento es subdividido en  $K$  regiones donde

$$K = INT[(R/L)_{min}/(R/L)]$$

Ec. 5.40

Donde INT significa redondear el resultado y  $(R/L)_{min}$  es el mínimo valor de  $(R/L)$  para cuatro puntos de Gauss de la tabla 5.1.

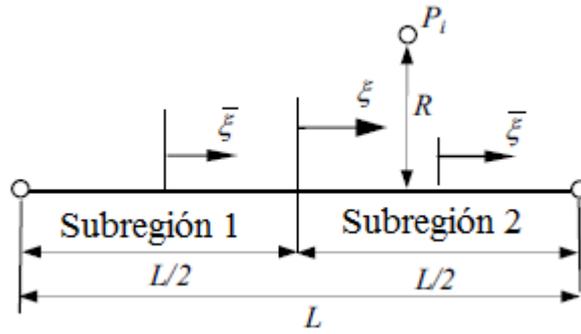


Figura 5.11: Subdivisión de la región de integración.

Nótese que para cada subregión de integración las coordenadas de los puntos de Gauss se definirán en el sistema de coordenadas locales  $\xi$ , donde las funciones de forma son funciones de  $\xi$ . Para elementos de contorno unidimensionales la fórmula de Gauss 6.35 se reemplaza por:

$$\Delta T_{ni}^e \approx \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^{M(k)} N_n(\xi_m) T(P_i, \xi_m) J(\xi_m) \cdot \bar{J} W_m$$

$$\Delta U_{ni}^e \approx \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^{M(k)} N_n(\xi_m) U(P_i, \xi_m) J(\xi_m) \cdot \bar{J} W_m \quad \text{Ec. 5.41}$$

Donde  $K$  es el número de subregiones y  $M(k)$  es el número de puntos de Gauss para la subregión  $k$ . La relación entre  $\xi$  y  $\bar{\xi}$  está dada por:

$$\xi = \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2) + \frac{\bar{\xi}}{K} \quad \text{Ec. 5.42}$$

Donde  $\xi_1$  y  $\xi_2$  son las coordenadas iniciales y finales de la subregión. Si se asume una subdivisión uniforme el Jacobiano  $\bar{J}$  para la transformación de  $\xi$  en  $\bar{\xi}$  para todas las regiones está dada por:

$$\bar{J} = \frac{\partial \xi}{\partial \bar{\xi}} = \frac{1}{K} \quad \text{Ec. 5.43}$$

### 5.3.6 Implementación para problemas planos

La subrutina a continuación integra el producto de las funciones de forma Kernel sobre elementos isoparamétricos unidimensionales para problemas potenciales.

```
SUBROUTINE EXTINEQ(XP,YP,X1,Y1,X2,Y2,X3,Y3,HW,GW)
!
! ESTA SUBRUTINA OBTIENE LAS MATRICES HW Y GW
! QUE RELACIONAN UN NODO (XP,YP) CON UN ELEMENTO
! DE CONTORNO UTILIZANDO LAS CUADRATURAS DE GAUSS.
!
! RA      = RADIUS
! RD1,RD2,RDN = RADIUS DERIVATIVES
! ETA1,ETA2 = COMPONENTS OF THE UNIT NORMAL TO THE ELEMENT
! XCO,YCO  = INTEGRATION POINT ALONG THE ELEMENT
! XJA     = JACOBIAN
!
COMMON N,L,GE,XNU,INP,IPR
  DIMENSION GW(2,6),HW(2,6)
  DIMENSION GI(10),OME(10)
  DATA GI/0.9739065285,-0.9739065285,0.8650633666,-
0.8650633666,0.6794095683,-0.6794095682,0.4333953941,-
0.4333953941,0.1488743389,-0.1488743389/
  DATA
OME/0.0666713443,0.0666713443,0.1494513491,0.1494513491,0.2190863625,0.219
0863625,0.2692667193,0.2692667193,0.2955242247,0.2955242247/
  DO 30 I=1,2
  DO 20 J=1,6
HW(I,J)=0.
  20 GW(I,J)=0.
  30 CONTINUE
A=X3-2*X2+X1
B=(X3-X1)/2
C=Y3-2*Y2+Y1
  D=(Y3-Y1)/2
  DE=4*3.141592*(1-XNU)
  DO 40 I=1,10
!
! OBTIENE LOS VALORES DE LAS FUNCIONES DE FORMA
! EN LOS PUNTOS DE INTEGRACION
!
F1=GI(I)*(GI(I)-1)*0.5
```

```

F2=1.-GI(I)**2
F3=GI(I)*(GI(I)+1)*0.5
!
! OBTINEN LAS PROPIEDADES GEOMETRICAS EN LOS PUNTOS DE
INTEGRACION
!
XCO=X1*F1+X2*F2+X3*F3
YCO=Y1*F1+Y2*F2+Y3*F3
XJA=SQRT((GI(I)*A+B)**2+(GI(I)*C+D)**2)
ETA1=(GI(I)*C+D)/XJA
ETA2=-(GI(I)*A+B)/XJA
RA=SQRT((XP-XCO)**2+(YP-YCO)**2)
RD1=(XCO-XP)/RA
RD2=(YCO-YP)/RA
RDN=RD1*ETA1+RD2*ETA2
!
! OBTIENE LAS MATRICES GW Y HW
!
GW(1,1)=GW(1,1)+((3-
4*XNU)*ALOG(1./RA)+RD1**2)*OME(I)*XJA*F1/(2*DE*GE)

GW(1,2)=GW(1,2)+RD1*RD2*OME(I)*XJA*F1/(2*DE*GE)
GW(2,1)=GW(1,2)
GW(2,2)=GW(2,2)+((3-
4*XNU)*ALOG(1./RA)+RD2**2)*OME(I)*XJA*F1/(2*DE*GE)

HW(1,1)=HW(1,1)-RDN*((1-2*XNU)+2*RD1**2)/(RA*DE)*OME(I)*XJA*F1
HW(1,2)=HW(1,2)-(RDN*2*RD1*RD2+(1-2*XNU)*(ETA1*RD2-
ETA2*RD1))*OME(I)*XJA*F1/(RA*DE)

HW(2,1)=HW(2,1)-(RDN*2*RD1*RD2+(1-2*XNU)*(ETA2*RD1-
ETA1*RD2))*OME(I)*XJA*F1/(RA*DE)

HW(2,2)=HW(2,2)-RDN*((1-2*XNU)+2*RD2**2)*OME(I)*XJA*F1/(RA*DE)
GW(1,3)=GW(1,3)+((3-
4*XNU)*ALOG(1./RA)+RD1**2)*OME(I)*XJA*F2/(2*DE*GE)

GW(1,4)=GW(1,4)+RD1*RD2*OME(I)*XJA*F2/(2*DE*GE)
GW(2,3)=GW(1,4)
GW(2,4)=GW(2,4)+((3-
4*XNU)*ALOG(1./RA)+RD2**2)*OME(I)*XJA*F2/(2*DE*GE)

HW(1,3)=HW(1,3)-RDN*((1-2*XNU)+2*RD1**2)/(RA*DE)*OME(I)*XJA*F2

```

```

HW(1,4)=HW(1,4)-(RDN*2*RD1*RD2+(1-2*XNU)*(ETA1*RD2-
ETA2*RD1))*OME(I)*XJA*F2/(RA*DE)

HW(2,3)=HW(2,3)-(RDN*2*RD1*RD2+(1-2*XNU)*(ETA2*RD1-
ETA1*RD2))*OME(I)*XJA*F2/(RA*DE)

HW(2,4)=HW(2,4)-RDN*((1-2*XNU)+2*RD2**2)*OME(I)*XJA*F2/(RA*DE)
  GW(1,5)=GW(1,5)+((3-
4*XNU)*ALOG(1./RA)+RD1**2)*OME(I)*XJA*F3/(2*DE*GE)

GW(1,6)=GW(1,6)+RD1*RD2*OME(I)*XJA*F3/(2*DE*GE)
GW(2,5)=GW(1,6)
  GW(2,6)=GW(2,6)+((3-
4*XNU)*ALOG(1./RA)+RD2**2)*OME(I)*XJA*F3/(2*DE*GE)

HW(1,5)=HW(1,5)-RDN*((1-2*XNU)+2*RD1**2)/(RA*DE)*OME(I)*XJA*F3
HW(1,6)=HW(1,6)-(RDN*2*RD1*RD2+(1-2*XNU)*(ETA1*RD2-
ETA2*RD1))*OME(I)*XJA*F3/(RA*DE)

HW(2,5)=HW(2,5)-(RDN*2*RD1*RD2+(1-2*XNU)*(ETA2*RD1-
ETA1*RD2))*OME(I)*XJA*F3/(RA*DE)

40 HW(2,6)=HW(2,6)-RDN*((1-2*XNU)+2*RD2**2)*OME(I)*XJA*F3/(RA*DE)
  RETURN
END

```

Esta subrutina también se puede aplicar a problemas de elasticidad, tomando en cuenta que al integrar funciones kernel  $U$  cuando  $P_i$  es uno de los nodos del elemento debemos considerar que solo  $U_{xx}$  y  $U_{yy}$  tienen logaritmos y partes no logarítmicas. Las partes logarítmicas se integran con Gauss-Laguerre como ejemplo:

$$\Delta U_{xxni}^e = \int_0^1 N_n(\xi) \frac{(1-\nu)(3-4\nu)}{4\pi E(1-\nu)} \ln\left(\frac{1}{\xi}\right) (P_i, \xi) J(\xi) \left| \frac{d\xi}{d\bar{\xi}} \right| d\bar{\xi}$$

$$\approx \sum_{m=1}^M N_n(\xi) \frac{(1-\nu)(3-4\nu)}{4\pi E(1-\nu)} J(\xi) W_m \left| \frac{d\xi}{d\bar{\xi}} \right|$$

Ec. 5.44

La parte no logarítmica se integra utilizando las cuadraturas de Gauss.



```

REAL :: Eleng,Rmin,RonL,Glcor(8),Wi(8),Ni(Nodel),Vnorm(2),GCcor(2)
REAL :: UP,Jac,dxr(2),TP,r,pi,c1,c2,xsi,eta,dxdxb,Rlim(2),Xsi1,Xsi2,RJacB
INTEGER :: i,m,n,Mi,nr,ldim,cdim,nreg,id,NDIV,NDIVS,MAXDIVS
pi=3.14159265359
ldim= 1
cdim=ldim+1
CALL Elength(Eleng,Elcor,nodel,ldim) ! LONGITUD DEL ELEMENTO
dUe= 0.0 ; dTe= 0.0
!-----
!  CUADRATURA DE GAUSS
!-----
dUe= 0.0 ; dTe= 0.0          ! LIMPIA LAS VARIABLES
MAXDIVS=1
Colloc_points: DO i=1,Ncol
Rmin= Min_dist1(Elcor,xP(:,i),Nodel,inci,Eleng,Eleng,ldim) ! Distance coll. point
and element
RonL= Rmin/Eleng          ! R/L
Mi= Ngauss(RonL,1,Rlim)    ! NUMERO DE PUNTOS GAUSS PAREA L/R
Gauss points for (1/r) singularity
NDIVS= 1
RJacB=1.0
IF(Mi == 5) THEN
IF(RonL>epsi) NDIVS= INT(RLim(2)/RonL) + 1 ! NUEMRO DE
SUBDIVISIONES
IF(NDIVS > MAXDIVS) MAXDIVS= NDIVS
RJacB= 1.0/NDIVS
Mi=4
    END IF
Call Gauss_coor(Glcor,Wi,Mi)    ! ASIGNA COORDENADAS DE PESO
    Xsi1=-1
Subdivisions: DO NDIV=1,NDIVS
    Xsi2= Xsi1 + 2.0/NDIVS
Gauss_points: DO m=1,Mi
xsi= Glcor(m)
IF(NDIVS > 1) xsi= 0.5*(Xsi1+Xsi2)+xsi/NDIVS
CALL Serendip_func(Ni,xsi,eta,ldim,nodel,inci) ! FUNCIONES DE FORMA
CallNormal_Jac(Vnorm,Jac,xsi,eta,ldim,nodel,inci,elcor) ! JACOBIANO Y
NORMAL
CALL Cartesian(GCcor,Ni,ldim,elcor)
r= Dist(GCcor,xP(:,i),cdim)      ! Dist. P,Q
dxr= (GCcor-xP(:,i))/r          ! RX/R,RY/Rr
    UP= U(r,k,cdim) ; TP= T(r,dxr,Vnorm,cdim)    !KERNELS
Node_points: DO n=1,Nodel
IF(Isym == 0)THEN

```

```

iD= i
      ELSE
iD= Ndest(i,1)
      END IF
      IF (id == 0) CYCLE
      IF(Dist(Elcor(:,n),xP(:,i),cdim) >epsi) THEN
dUe(id,n)= dUe(id,n) + Ni(n)*UP*Jac*Wi(m)*RJAcB
dTe(id,n)= dTe(id,n) + Ni(n)*TP*Jac*Wi(m)*RJAcB
      END IF
      END DO Node_points
      END DO Gauss_points
      Xsi1= Xsi2
      END DO Subdivisions
      END DO Colloc_points
!-----
!  TERMINOS DE LA DIAGONAL
!-----
c1= 1/(2.0*pi*k)
Colloc_points1: DO i=1,Ncol
  Node_points1: DO n=1,Nodel
  IF(Isym == 0)THEN
  iD= i
      ELSE
iD= Ndest(i,1)
      END IF
      IF (id == 0) CYCLE
      IF(Dist(Elcor(:,n),xP(:,i),cdim) >Epsi) CYCLE
  Nreg=1
  IF(n == 3) nreg= 2
  Subregions: DO nr=1,Nreg
  Mi= 4
      Call Gauss_Laguerre_coor(Glcor,Wi,Mi)
      Gauss_points1: DO m=1,Mi
      SELECT CASE (n)
      CASE (1)
xsi= 2.0*Glcor(m)-1.0
dxdx= 2.0
      CASE (2)
xsi= 1.0 -2.0*Glcor(m)
dxdx= 2.0
      CASE (3)
dxdx= 1.0
      IF(nr == 1) THEN
xsi= -Glcor(m)

```

```

        ELSE
xsi= Gldor(m)
        END IF
CASE DEFAULT
        END SELECT
CALL Serendip_func(Ni,xsi,eta,ldim,nodel,Inci)
Call Normal_Jac(Vnorm,Jac,xsi,eta,ldim,nodel,Inci,elcor)
dUe(id,n)= dUe(id,n) + Ni(n)*c1*Jac*dxdx*Wi(m)
        END DO Gauss_points1
        END DO Subregions
Mi= 2
Call Gauss_coor(Gldor,Wi,Mi)
Gauss_points2: DO m=1,Mi
        SELECT CASE (n)
        CASE (1)
                c2=-LOG(Eleng)*c1
        CASE (2)
                c2=-LOG(Eleng)*c1
        CASE (3)
                c2=LOG(2/Eleng)*c1
        CASE DEFAULT
        END SELECT
xsi= Gldor(m)
CALL Serendip_func(Ni,xsi,eta,ldim,nodel,Inci)
Call Normal_Jac(Vnorm,Jac,xsi,eta,ldim,nodel,Inci,elcor)
dUe(id,n)= dUe(id,n) + Ni(n)*c2*Jac*Wi(m)
        END DO Gauss_points2
        END DO Node_points1
        END DO Colloc_points1
RETURN
END SUBROUTINE Integ2P

SUBROUTINE Integ2E(Elcor,Inci,Nodel,Ncol,xP,E,ny,dUe,dTe,Ndest,Isym)
!-----
! OBTIENE LOS VALORES PARA PROBLEMAS DE ELASTICIDAD
BIDIMENSIONAL
! POR INTEGRACION NUMERICA
!-----
IMPLICIT NONE
REAL, INTENT(IN) ::Elcor(:,) ! COORDENADAS DE LOS ELEMENTOS
INTEGER, INTENT(IN) ::Ndest(:,) ! VECTOR DESTINO
INTEGER, INTENT(IN) ::Inci(:) ! ELEMENTOS DE INCIDENCIA
INTEGER, INTENT(IN) ::Nodel ! NUMERO DE ELEMENTOS
INTEGER , INTENT(IN)::Ncol ! NUMERO DE PUNTOS

```

```

INTEGER , INTENT(IN)::Isym
REAL, INTENT(IN) :: E,ny      ! CONSTANTES ELASTICAS
REAL, INTENT(IN) :: xP(:,:)  REAL(KIND=8), INTENT(OUT) ::
dUe(:,:),dTe(:,:) ! arrays for storing element coefficients
REAL      ::epsi= 1.0E-10 ! Small value for comparing coords
REAL      :: Eleng,Rmin,RonL,Glcor(8),Wi(8),Ni(Nodel),Vnorm(2),GCcor(2)
REAL      :: Jac,dxr(2),UP(2,2),TP(2,2), xsi, eta, r,
dxdx,xb,Pi,C,C1,Rlim(2),Xsi1,Xsi2,RJacB
INTEGER    :: i,j,k,m,n,Mi,nr,ldim,cdim,iD,nD,Nreg,NDIV,NDIVS,MAXDIVS
Pi=3.14159265359
C=(1.0+ny)/(4*Pi*E*(1.0-ny))
ldim= 1          ! DIMENSION DEL ELEMNTTO
cdim=ldim+1
MAXDIVS=1
CALL Elengh(Eleng,Elcor,nodel,ldim) ! LONGITUD DEL ELEMNTTO
dUe= 0.0 ; dTe= 0.0
Colloc_points: DO i=1,Ncol
Rmin= Min_dist1(Elcor,xP(:,i),Nodel,inci,Eleng,Eleng,ldim)
RonL= Rmin/Eleng          ! R/L
Mi= Ngaus(RonL,1,Rlim)
NDIVS= 1
RJacB=1.0
IF(Mi == 5) THEN
IF(RonL>epsi) NDIVS= INT(RLim(2)/RonL) + 1
IF(NDIVS > MAXDIVS) MAXDIVS= NDIVS
RJacB= 1.0/NDIVS
Mi=4
END IF
Call Gauss_coor(Glcor,Wi,Mi)      Xsi1=-1
Subdivisions: DO NDIV=1,NDIVS
Xsi2= Xsi1 + 2.0/NDIVS
Gauss_points: DO m=1,Mi
xsi= Glcor(m)
IF(NDIVS > 1) xsi= 0.5*(Xsi1+Xsi2)+xsi/NDIVS
CALL Serendip_func(Ni,xsi,eta,ldim,nodel,inci)
Call Normal_Jac(Vnorm,Jac,xsi,eta,ldim,nodel,inci,elcor)
CALL Cartesian(GCcor,Ni,ldim,elcor)
r= Dist(GCcor,xP(:,i),cdim)      ! Dist. P,Q
dxr= (GCcor-xP(:,i))/r          ! rx/r ,ry/r
UP= UK(dxr,r,E,ny,Cdim) ; TP= TK(dxr,r,Vnorm,ny,Cdim)
Node_points: DO n=1,Nodel
Direction_P: DO j=1,2
IF(Isym == 0)THEN
iD= 2*(i-1) + j

```

```

        ELSE
        iD= Ndest(i,j)
        END IF
        IF (id == 0) CYCLE
        Direction_Q: DO k= 1,2
        nD= 2*(n-1) + k
        IF(Dist(Elcor(:,n),xP(:,i),cdim) >epsi) THEN
        dUe(iD,nD)= dUe(iD,nD) + Ni(n)*UP(j,k)*Jac*Wi(m)*RJacB
        dTe(iD,nD)= dTe(iD,nD) + Ni(n)*TP(j,k)*Jac*Wi(m)*RJacB
        ELSE
        dUe(iD,nD)= dUe(iD,nD) + Ni(n)*C*dxr(j)*dxr(k)*Jac*Wi(m)*RJacB
        END IF
        END DO Direction_Q
        END DO Direction_P
        END DO Node_points
        END DO Gauss_points
        Xsi1= Xsi2
        END DO Subdivisions
        END DO Colloc_points

C= C*(3.0-4.0*ny)
Colloc_points1: DO i=1,Ncol
  Node_points1: DO n=1,Nodel
    IF(Dist(Elcor(:,n),xP(:,i),cdim) >Epsi) CYCLE
  Nreg=1
    IF (n == 3) nreg= 2
  Subregions: DO nr=1,Nreg
  Mi= 4
    Call Gauss_Laguerre_coar(Glcor,Wi,Mi)
    Gauss_points1: DO m=1,Mi
    SELECT CASE (n)
    CASE (1)
    xsi= 2.0*Glcor(m)-1.0
    dxdx= 2.0
    CASE (2)
    xsi= 1.0 -2.0*Glcor(m)
    dxdx= 2.0
    CASE (3)
    dxdx= 1.0
    IF(nr == 1) THEN
    xsi= -Glcor(m)
    ELSE
    xsi= Glcor(m)
    END IF

```

```

CASE DEFAULT
  END SELECT
CALL Serendip_func(Ni,xsi,eta,ldim,nodel,Inci)
Call Normal_Jac(Vnorm,Jac,xsi,eta,ldim,nodel,Inci,elcor)
Direction1: DO j=1,2
IF(Isym == 0)THEN
iD= 2*(i-1) + j
  ELSE
iD= Ndest(i,j)
  END IF
  IF (id == 0) CYCLE
nD= 2*(n-1) + j
dUe(iD,nD)= dUe(iD,nD) + Ni(n)*C*Jac*dxdx*Wi(m)
  END DO Direction1
  END DO Gauss_points1
END DO Subregions
Mi= 2
Call Gauss_coor(Glcor,Wi,Mi)
  Gauss_points2: DO m=1,Mi
    SELECT CASE (n)
      CASE (1)
        C1=-LOG(Eleng)*C
      CASE (2)
        C1=-LOG(Eleng)*C
      CASE (3)
        C1=LOG(2/Eleng)*C
      CASE DEFAULT
    END SELECT
xsi= Glcor(m)
CALL Serendip_func(Ni,xsi,eta,ldim,nodel,Inci)
Call Normal_Jac(Vnorm,Jac,xsi,eta,ldim,nodel,Inci,elcor)
Direction2: DO j=1,2
IF(Isym == 0)THEN
iD= 2*(i-1) + j
  ELSE
iD= Ndest(i,j)
  END IF
  IF (id == 0) CYCLE
nD= 2*(n-1) + j
dUe(iD,nD)= dUe(iD,nD) + Ni(n)*C1*Jac*Wi(m)
  END DO Direction2
  END DO Gauss_points2
  END DO Node_points1
  END DO Colloc_points1

```

RETURN  
 END SUBROUTINE Integ2E

### 5.3.7 Integración numérica para elementos bidimensionales

Veremos la integración sobre elementos isoparámetros bidimensionales con contornos finitos. Se ve que los principios básicos son muy similares a los de elementos unidimensionales, en donde separamos los casos cuando  $P_i$  no es un nodo del elemento y cuando sí lo es.

Empezando por problemas potenciales las integrales a evaluarse son:

$$\begin{aligned} \Delta U_{ni}^e &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_n(\xi, \eta) U(P_i, Q(\xi, \eta)) J(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ \Delta T_{ni}^e &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_n(\xi, \eta) T(P_i, Q(\xi, \eta)) J(\xi, \eta) d\xi d\eta \end{aligned} \quad \text{Ec. 5.46}$$

Cuando  $P_i$  no es un nodo del elemento, las integrales se pueden evaluar usando las cuadraturas de Gauss en las direcciones  $\xi$  y  $\eta$ . Esto da;

$$\begin{aligned} \Delta U_{ni}^e &\approx \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K N_n(\xi_m, \eta_k) U(P_i, Q(\xi_m, \eta_k)) J(\xi_m, \eta_k) W_m W_k \\ \Delta T_{ni}^e &\approx \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K N_n(\xi_m, \eta_k) T(P_i, Q(\xi_m, \eta_k)) J(\xi_m, \eta_k) W_m W_k \end{aligned}$$

Ec. 5.47

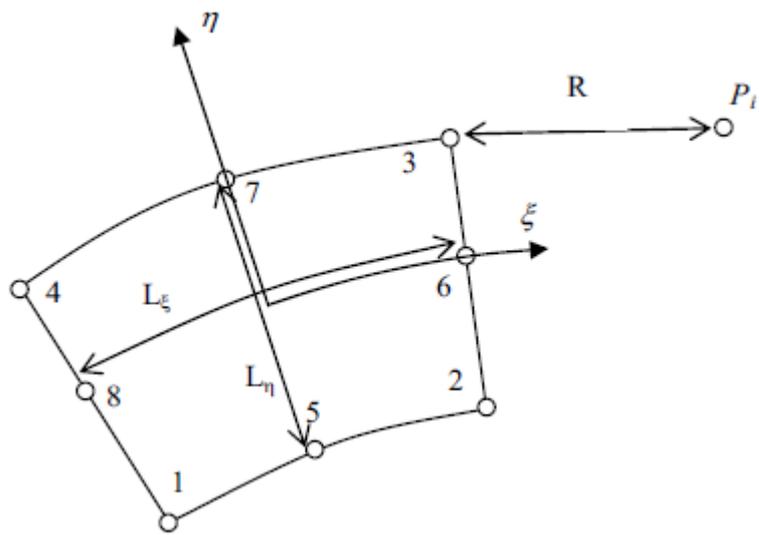
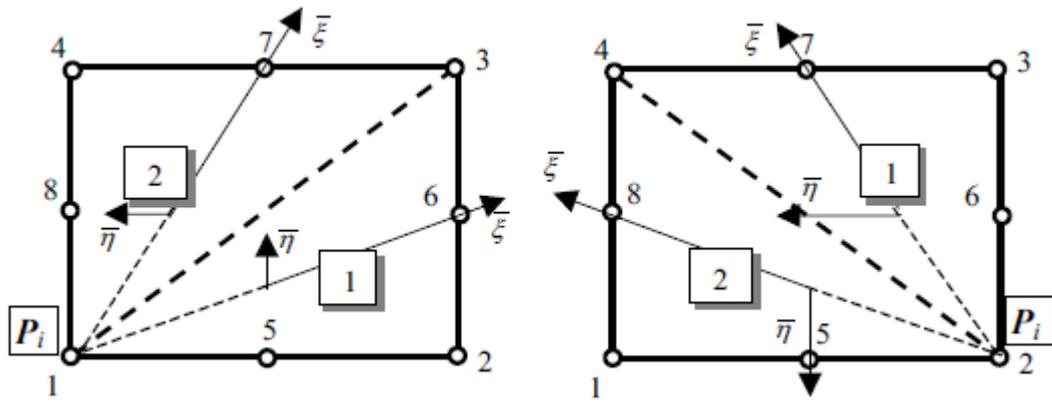


Figura 5.12: Elemento isoparamétrico bidimensional.



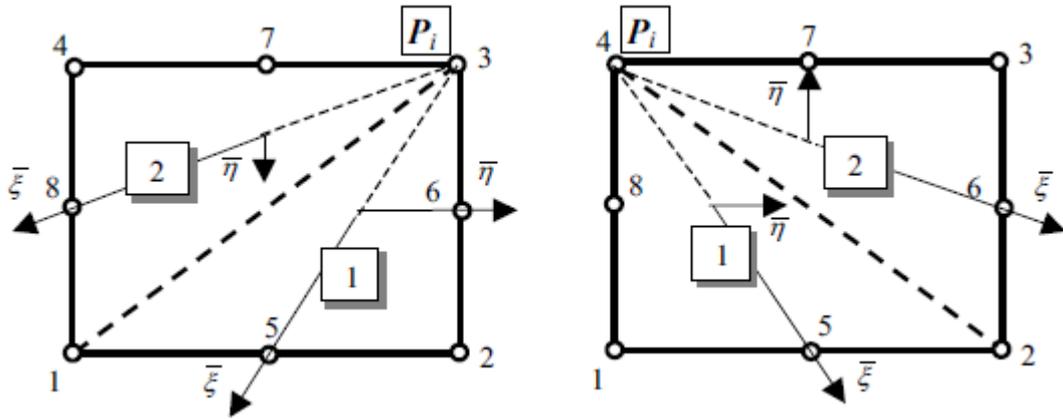
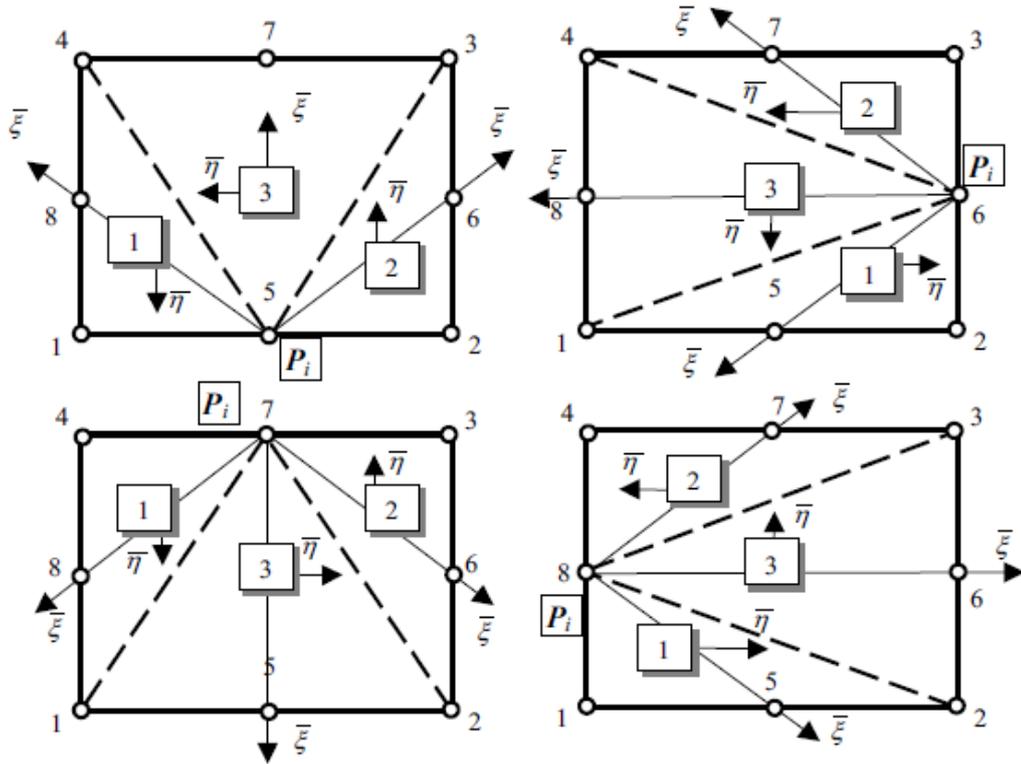


Figura 5.13: Subelemento para integración numérica cuando  $P_i$  es un nodo de esquina del elemento.

El número de puntos de integración en la dirección  $\xi, \eta$  se determina de la tabla 5.1, donde  $L$  es el tamaño del elemento en la dirección  $\xi$ ,  $L_\xi$  y el número de puntos en la dirección  $\eta$ ,  $K$  es determinada sustituyendo por  $L$  el tamaño del elemento en la dirección  $\eta$  ( $L_\eta$ ) en la figura 5.12.

Cuando  $P_i$  es un nodo del elemento pero no el nodo  $n$ , entonces el Kernel  $U$  se aproxima infinitamente como  $(1/r)$  pero la función de forma se acerca a cero, así el producto  $N_n U$  se determina utilizando la cuadratura de Gauss. El Kernel  $T$  se aproxima al infinito como  $(1/r^2)$  y no puede obtenerse con Gauss Laguerre. Cuando  $P_i$  es el nodo  $n$  del elemento, entonces el producto  $N_n U$  solo existe como el valor principal de Cauchy que puede evaluarse utilizando las ecuaciones 5.18 y 5.19.

Para evaluar la segunda integral de la ecuación 5.46 cuando  $P_i$  es un nodo del elemento pero no el nodo  $n$ , tenemos que separar en subelementos triangulares como se ve la figura 5.14 y 5.15. Para cada subelemento introducimos coordenadas locales que se escogen de tal manera que el Jacobiano de transformación se acerca a cero en el nodo  $P_i$ , la integración numérica formulada se aplica sobre dos o tres subelementos dependiendo si  $P_i$  es una esquina o un nodo intermedio.



**Figura 5.14:** Subelementos para integración numérica cuando \$P\_i\$ es un nodo intermedio del elemento.

Utilizando el esquema la primera integral de la ecuación 5.46 se re escribe como se indica a continuación:

$$\Delta U_{ni}^e = \sum_{s=1}^{2(3)} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_n(\xi, \eta) U(P_i, Q(\xi, \eta)) J(\xi, \eta) \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(\bar{\xi}, \bar{\eta})} d\bar{\xi} d\bar{\eta} \quad \text{Ec. 5.48}$$

La ecuación para la evaluación numérica de la integral utilizando la cuadratura de Gauss se escribe como:

$$\Delta U_{ni}^e \approx \sum_{s=1}^{2(3)} \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K N_n(\bar{\xi}_m, \bar{\eta}_k) U(P_i, Q(\bar{\xi}_m, \bar{\eta}_k)) J(\bar{\xi}_m, \bar{\eta}_k) \bar{J}(\bar{\xi}_m, \bar{\eta}_k) W_m W_k \quad \text{Ec. 5.49}$$

Donde \$\bar{J}(\bar{\xi}, \bar{\eta})\$ es el Jacobiano de transformación de \$\bar{\xi}, \bar{\eta}\$, a \$\xi, \eta\$.

La transformación de elementos de coordenadas locales a subelementos está dada por:

$$\xi = \sum_{n=1}^3 \bar{N}_n(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \xi_{l(n)} \quad , \quad \eta = \sum_{n=1}^3 \bar{N}_n(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \eta_{l(n)}$$

Ec. 5.50

Donde  $l(n)$  es el número local del nodo  $n$  del subelemento y las funciones de forma se escriben por:

$$\bar{N}_1 = \frac{1}{4}(1 + \bar{\xi})(1 - \bar{\eta}) \quad , \quad \bar{N}_2 = \frac{1}{4}(1 + \bar{\xi})(1 + \bar{\eta}) \quad , \quad \bar{N}_3 = \frac{1}{2}(1 - \bar{\xi})$$

Ec. 5.51

Las tablas 5.2 y 5.3 dan los números locales de los nodos  $l(n)$  en la ecuación 5.50 dependiendo del número de subelementos y de la posición de  $P_i$ .

$P_i$ al nudo	Subelemento 1			Subelemento 2		
	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
1	2	3	1	3	4	1
2	3	4	2	4	1	2
3	1	2	3	4	1	3
4	1	2	4	2	3	4

**Tabla 5.2:** Número de nodo local  $l(n)$  para los nodos de subelementos  $P_i$  de nodos de esquina

La matriz Jacobiana para la transformación (5.50) se da por:

$$\bar{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial \bar{\xi}} & \frac{\partial \eta}{\partial \bar{\xi}} \\ \frac{\partial \xi}{\partial \bar{\eta}} & \frac{\partial \eta}{\partial \bar{\eta}} \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 5.52}$$

Donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial \bar{\xi}} &= \sum_{n=1}^3 \frac{\partial \bar{N}_n}{\partial \bar{\xi}}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \xi_n \quad , \quad \frac{\partial \xi}{\partial \bar{\eta}} = \sum_{n=1}^3 \frac{\partial \bar{N}_n}{\partial \bar{\eta}}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \xi_n \\ \frac{\partial \eta}{\partial \bar{\xi}} &= \sum_{n=1}^3 \frac{\partial \bar{N}_n}{\partial \bar{\xi}}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \eta_n \quad , \quad \frac{\partial \eta}{\partial \bar{\eta}} = \sum_{n=1}^3 \frac{\partial \bar{N}_n}{\partial \bar{\eta}}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \eta_n \end{aligned} \quad \text{Ec. 5.53}$$

$P_i$ al nudo	Subelemento 1			Subelemento 2			Subelemento 3		
	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
5	4	1	5	2	3	5	3	4	5
6	1	2	6	3	4	6	4	1	6
7	4	1	7	2	3	7	1	2	7
8	1	2	8	3	4	8	2	3	8

**Tabla 5.3:** Número de nodo local  $l(n)$ , para los nodos de subelementos cuando  $P_i$  es un nodo intermedio.

El Jacobiano se representa por:

$$\bar{J} = \det|\bar{J}| = \frac{\partial \xi}{\partial \bar{\xi}} \frac{\partial \eta}{\partial \bar{\eta}} - \frac{\partial \eta}{\partial \bar{\xi}} \frac{\partial \xi}{\partial \bar{\eta}} \quad \text{Ec. 5.54}$$

Se puede comprobar que para  $\bar{\xi} = -1$  el Jacobiano es cero. Sin modificación se puede aplicar a problemas de elasticidad reemplazando en la ecuación 5.46 los escalares  $U$  y  $T$  por las matrices  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{T}$ .

### 5.3.8 Subdivisión de la región de integración

Así como para los problemas lineales es necesario implementar un esquema de subdivisión para la integración en la implementación más sencilla subdividimos los elementos en subregiones como se indica en la figura 5.16. El número de subregiones  $N_\xi$  en  $\xi$  y  $N_\eta$  en  $\eta$  se determina por:

$$N_\xi = \text{INT}[(R/L)_{\min}/(R/L_\xi)] \quad ; \quad N_\eta = \text{INT}[(R/L)_{\min}/(R/L_\eta)]$$

Ec. 5.55

La ecuación 5.47 se reemplaza por:

$$\Delta U_{ni}^e \approx \sum_{l=1}^{N_\xi} \sum_{j=1}^{N_\eta} \sum_{m=1}^{M(l)} \sum_{k=1}^{K(j)} N_n(\bar{\xi}_m, \bar{\eta}_k) U(P_i, Q(\bar{\xi}_m, \bar{\eta}_k)) J \cdot \bar{J} W_m W_k$$

$$\Delta T_{ni}^e \approx \sum_{l=1}^{N_\xi} \sum_{j=1}^{N_\eta} \sum_{m=1}^{M(l)} \sum_{k=1}^{K(j)} N_n(\bar{\xi}_m, \bar{\eta}_k) T(P_i, Q(\bar{\xi}_m, \bar{\eta}_k)) J \cdot \bar{J} W_m W_k$$

Ec. 5.56

Donde  $M(l)$  y  $K(j)$  son los números de puntos de Gauss en las direcciones  $\xi$  y  $\eta$  para la subregión.

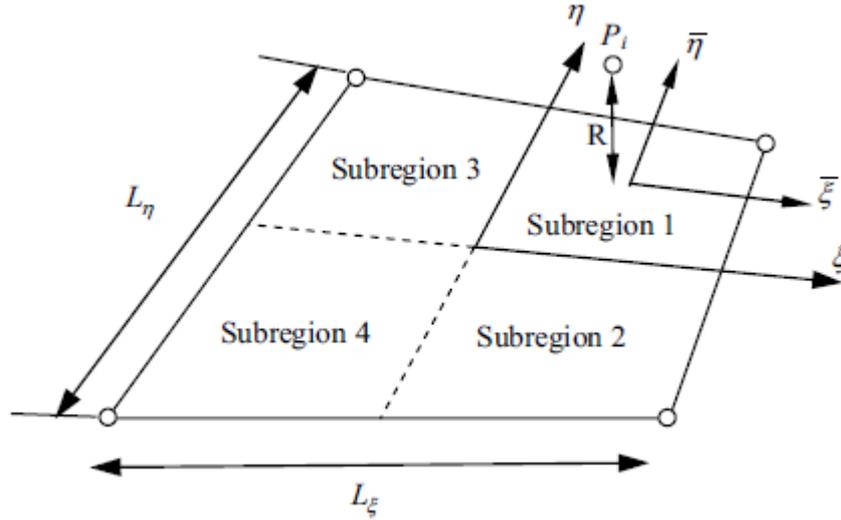


Figura 5.15: Subdivisión de elementos bidimensionales.

La relación entre las coordenadas locales y globales se define como:

$$\xi = \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2) + \frac{\bar{\xi}}{N_\xi} \quad \text{Ec. 5.57}$$

$$\eta = \frac{1}{2}(\eta_1 + \eta_2) + \frac{\bar{\eta}}{N_\eta}$$

Donde  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  y  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  definen la subregión, el Jacobiano está dado por:

$$\bar{J} = \frac{\partial \xi}{\partial \bar{\xi}} \frac{\partial \eta}{\partial \bar{\eta}} = \frac{1}{N_\xi \cdot N_\eta} \quad \text{Ec. 5.58}$$

## 5.4 Conclusiones.

Se ha discutido en detalle los métodos numéricos que se pueden utilizar para la integración del producto de funciones de forma Kernel sobre el contorno de elementos. Debido a la naturaleza de estas funciones se ha requerido de esquemas de integración especiales, para que la precisión de integración sea similar a la localización de los  $P_i$  relativos al contorno del elemento.

El número de puntos de integración que se requiere para obtener una precisión aproximada no es de fácil determinación, se tienen ya un conjunto de subrutinas que servirán para escribir un programa para el propósito principal. Lo que se requiere es el ensamblaje de las matrices de coeficientes para especificar las condiciones de borde y resolver el sistema de ecuaciones.

## 6. ENSAMBLAJE Y SOLUCION

### 6.1 Introducción

En el capítulo anterior, con la integración numérica de los productos de las funciones de forma Kernel; se llegó probablemente al aspecto más importante del Método de los Elementos de Contorno.

A continuación, se descubrirán los pasos que deben seguirse para resolver la ecuación integral que son similares a los que se siguen para la solución de MEF, especialmente en lo que se refiere a la contribución de los elementos en la matriz general.

Para la solución se utilizarán Métodos Iterativos.

El sistema de ecuaciones es diferente al MEF, puesto que tendremos que tratar con sistemas no simétricos y matrices totalmente pobladas que determinan la principal desventaja del método; pero al obtener sistemas siempre más pequeños se compensa este problema, incluso la solución en tiempo computacional es generalmente menor al MEF.

Al final de este capítulo, se conocerán los procedimientos generales para un programa con un propósito específico. El programa sin embargo nos dará los resultados en los contornos. Sin embargo, una fortaleza del método es hallar con relativa facilidad los valores en el interior del contorno. Esto se realizará en la etapa de post proceso que trataremos en el siguiente capítulo.

### 6.2 Ensamblaje del Sistema de Ecuaciones

Iniciando con problemas de potencial, revisando la ecuación 5.7 que era:

$$cu(P_i) + \sum_{e=1}^E \sum_{n=1}^N \Delta T_{ni}^e u_n^e = \sum_{e=1}^E \sum_{n=1}^N \Delta U_{ni}^e t_n^e \quad \text{Ec. 6.1}$$

Y recordamos

$$\begin{array}{c}
\downarrow \text{Número de elementos} \\
\Delta T_{ni}^e \leftarrow \text{Punto del contador} \\
\uparrow \text{Número de nodo}
\end{array}
\quad \text{Ec. 6.2}$$

Para la solución del sistema de ecuaciones es conveniente reemplazar las dobles sumas por una matriz multiplicación así:

$$[\Delta T]\{u\} = [\Delta U]\{t\} \quad \text{Ec. 6.3}$$

Donde los vectores  $\{u\}$  ,  $\{t\}$  contienen potencial / temperatura y flujos respectivamente para todos los nodos en un sistema de numeración global.

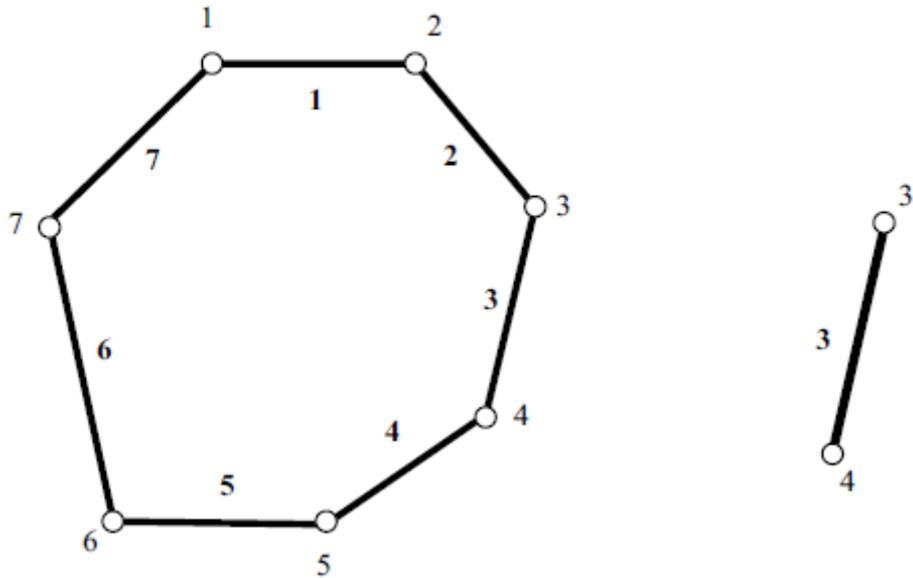
$$\{u\} = \{u_1, u_2, \dots\}^T \quad \text{Ec. 6.4}$$

y  $[\Delta T]$  y  $[\Delta U]$  son coeficientes globales de la matriz ensamblada por recolección de contribución de elementos. En la matriz de coeficientes globales las filas corresponden a la colocación de putnos  $P_i$  y las columnas a la numeración nodal global. El proceso de recolección es muy similar al proceso de ensamblaje en el MEF, a excepción que todas las columnas se agregan de una vez. Para el proceso de recolección necesitamos la *conectividad o índices* de los elementos  $e$ , que se refiere a la numeración global de los nodos del elementos.

Si nos referimos a una malla simple en 2D con elementos lineales como se ve en la figura 6.1 las incidencias se dan en la tabla 6.1.

Elemento	Nudo 1	Nudo 2
1	1	2
2	2	3
3	3	4
4	4	5
5	5	6
6	6	7
7	7	1

**Tabla 6.1:** Indices de conectividad.



**Figura 6.1:** Ensamblaje explicativo para malla 2-D para potencial.

Como ejemplo, para ensamblar las contribuciones del elemento con conectividad (3,4/), las columnas de la matriz de coeficientes  $[\Delta T]^3$  se añaden a la matriz global  $[\Delta T]$ .

→ Número de nodos

$$[\Delta T] = \begin{matrix} & \begin{matrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \cdot & \cdot & \Delta T_{11}^3 & \Delta T_{21}^3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \Delta T_{12}^3 & \Delta T_{22}^3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \Delta T_{13}^3 & \Delta T_{23}^3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \Delta T_{14}^3 & \Delta T_{24}^3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \Delta T_{15}^3 & \Delta T_{25}^3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \Delta T_{16}^3 & \Delta T_{26}^3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \Delta T_{17}^3 & \Delta T_{27}^3 & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} & \begin{matrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{6} \\ \mathbf{7} \end{matrix} \\ \downarrow P_i & \end{matrix} \quad \text{Ec. 6.5}$$

Para problemas de elasticidad existe más de una incógnita por nodo, por lo que las columnas se enumeran de acuerdo al grado de libertad en vez de al número de nodo. Para problemas bidimensionales elásticos, cada nodo tiene dos grados de libertad y las incidencias del elemento 3 se expanden a sus destinos como se indica en la tabla 7.2

Elemento	Nodo 1		Nodo 2	
	x	y	x	y
1	1	2	3	4
2	3	4	5	6
3	5	6	7	8
4	7	8	9	10
5	9	10	11	12
6	11	12	13	14
7	13	14	1	2

Tabla 6.2: Destinos.

Para el elemento 3 el vector de destino es (5,6,7,8) y el ensamblaje es:

→Números de destino

$$[\Delta T] = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \Delta T_{xx11}^3 & \Delta T_{yx11}^3 & \Delta T_{xx21}^3 & \Delta T_{yx21}^3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \Delta T_{xy11}^3 & \Delta T_{yy11}^3 & \Delta T_{xy21}^3 & \Delta T_{yy21}^3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \Delta T_{xx12}^3 & \Delta T_{yx12}^3 & \Delta T_{xx22}^3 & \Delta T_{yx22}^3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \Delta T_{xy12}^3 & \Delta T_{yy12}^3 & \Delta T_{xy22}^3 & \Delta T_{yy22}^3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Ec. 6.6

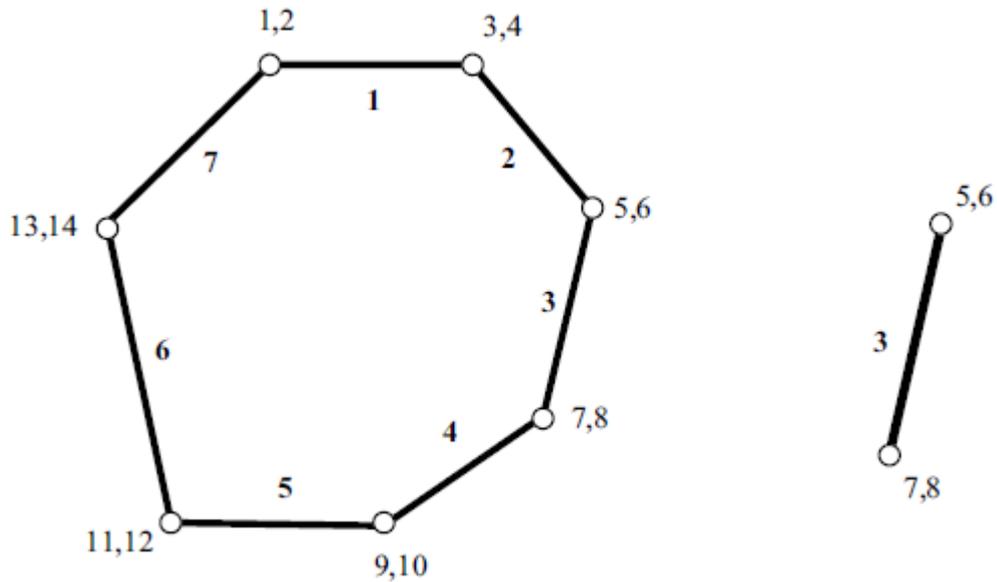
Nótese que los números de destino se utilizan ahora para enumerar las columnas.

Regresando al problema del potencial y asumiendo que es un ejemplo introductorio resuelto por el Método de Trefftz, el flujo  $t$  es conocido en todos los nodos de contorno y la solución  $u$  es requerida, ensamblamos el lado izquierdo realizamos la multiplicación matricial al derecho y resolvemos el sistema de ecuaciones. Para el ejemplo de la figura 6.1, la ecuación 6.1 se puede reemplazar por:

$$[\Delta T]\{u\} = \{F\} \quad \text{Ec. 6.7}$$

Donde los coeficientes del vector del lado derecho  $\{F\}$  se obtienen por:

$$F_i = \sum_{e=1}^7 \sum_{n=1}^N \Delta U_{ni}^e t_n^e \quad \text{Ec. 6.8}$$



**Figura 6.2:** Ensamblaje del ejemplo para problemas elásticos en 2-D.

Con frecuencia se obtienen problemas de contorno mezclados con  $u$  y  $t$ , donde  $u$  se prescribe en una porción del contorno y  $t$  en el otro. Por lo que se deberá cambiar columnas para que los coeficientes que al multiplicarse con valores conocidos estén a la derecha, y con valores desconocidos a la izquierda. Consideramos el ejemplo simple de la figura 6.3, donde las temperaturas  $u$  están prescritas a lo largo del elemento 4 y el flujo está prescrito en los elementos 1, 2 y 3. Nótese que dado que las normales exteriores son distintas en los nodos de esquina los flujos son discontinuos allí; diferente al lado izquierdo y derecho del nodo del elemento, teniendo que haber una sola temperatura en ese nodo. Escribiendo la ecuación 6.1 se obtiene:

$$cu(P_i) + \Delta T_{1i}^1 u_1^1 + \Delta T_{2i}^1 u_2^1 + \Delta T_{1i}^2 u_1^2 + \Delta T_{2i}^2 u_2^2 + \Delta T_{1i}^3 u_1^3 + \Delta T_{2i}^3 u_2^3 + \Delta T_{1i}^4 u_1^4 + \Delta T_{2i}^4 u_2^4 =$$

$$\Delta U_{1i}^1 u_1^1 + \Delta U_{2i}^1 u_2^1 + \Delta U_{1i}^2 u_1^2 + \Delta U_{2i}^2 u_2^2 + \Delta U_{1i}^3 u_1^3 + \Delta U_{2i}^3 u_2^3 + \Delta U_{1i}^4 u_1^4 + \Delta U_{2i}^4 u_2^4$$

Ec. 6.9

El procedimiento de ensamblaje debe ser modificado, para que a todos los valores conocidos se encuentren a la derecha y los desconocidos a la izquierda. Los valores conocidos son:

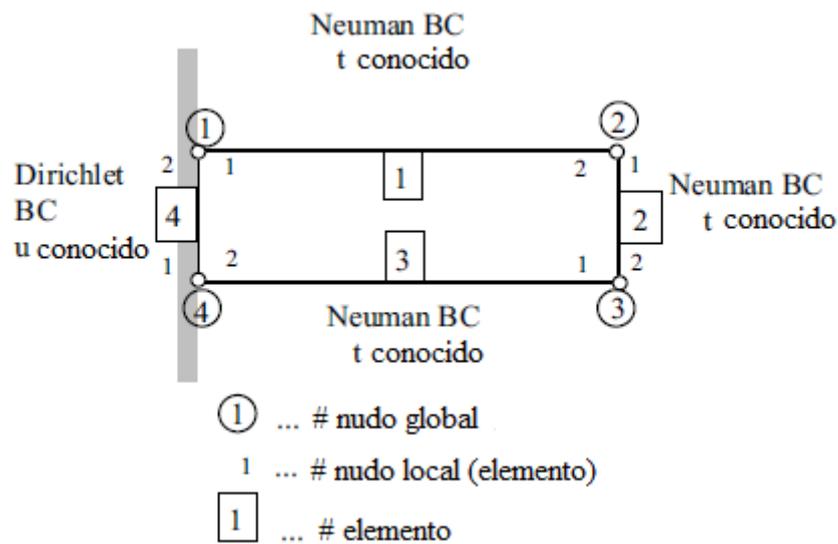
$$t_1^1 ; t_2^1 ; t_1^2 ; t_2^2 ; t_1^3 ; t_2^3 \quad \text{Ec. 6.10}$$

$$u_1 ; u_4$$

Los valores desconocidos son:

$$u_1^1 ; u_2^1 ; u_2 ; u_2^2 ; u_1^3 ; u_3 \quad \text{Ec. 6.11}$$

$$t_1^4 ; t_2^4$$



**Figura 6.3:** Ejemplo bidimensional para problemas de potencial con condiciones de borde mezcladas.

Luego de ubicar los valores desconocidos a la izquierda y los conocidos a la derecha la ecuación 6.9 se escribe como:

$$cu(P_i) + (\Delta T_{2i}^1 + \Delta T_{1i}^2)u_2 + (\Delta T_{2i}^2 + \Delta T_{1i}^3)u_3 - \Delta U_{1i}^4 t_1^4 - \Delta U_{2i}^4 t_2^4 =$$

$$\Delta U_{1i}^1 t_1^1 + \Delta U_{2i}^1 t_2^1 + \Delta U_{1i}^2 t_1^2 + \Delta U_{2i}^2 t_2^2 + \Delta U_{1i}^3 t_1^3 + \Delta U_{2i}^3 t_2^3 - \Delta U_{1i}^4 u_1 - \Delta U_{2i}^4 u_4$$

Ec. 6.12

En la ecuación 6.12 la numeración global para los nodos ha sido implementada. Esta ecuación puede ahora ser leída para los puntos  $P_i$  localizados en los nodos 1, 2, 3, y 4 como una ecuación matricial (6.13). Los elementos diagonal envolventes  $\Delta T$  se realizan por corchetes como se explicó anteriormente.

$$\begin{matrix} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \begin{bmatrix} -\Delta U_{11}^4 & \Delta T_{21}^1 + \Delta T_{11}^1 & \Delta T_{21}^2 + \Delta T_{11}^3 & -\Delta U_{21}^4 \\ -\Delta U_{12}^4 & [\Delta T_{22}^1 + \Delta T_{12}^2] & \Delta T_{22}^2 + \Delta T_{12}^3 & -\Delta U_{22}^4 \\ -\Delta U_{13}^4 & \Delta T_{23}^1 + \Delta T_{13}^2 & [\Delta T_{23}^2 + \Delta T_{13}^3] & -\Delta U_{23}^4 \\ -\Delta U_{14}^4 & \Delta T_{24}^1 + \Delta T_{14}^2 & \Delta T_{24}^2 + \Delta T_{14}^3 & -\Delta U_{24}^4 \end{bmatrix} & \begin{Bmatrix} t_1^4 \\ u_2 \\ u_3 \\ t_2^4 \end{Bmatrix} & = & \{F\} \end{matrix}$$

Ec. 6.13

Los coeficientes  $F_i$  al lado derecho de  $\{F\}$  se obtienen como:

$$F_i = \Delta U_{1i}^1 t_1^1 + \Delta U_{2i}^1 t_2^1 + \Delta U_{1i}^2 t_1^2 + \Delta U_{2i}^2 t_2^2 + \Delta U_{1i}^3 t_1^3 + \Delta U_{2i}^3 t_2^3 - \Delta T_{1i}^4 u_1 - \Delta T_{2i}^4 u_4$$

Ec. 6.14

Para problemas en elasticidad, el proceso de ensamblaje para problemas de contornos mixtos es similar pero como el ensamblaje se da por el grado de libertad y no por el número del nodo, por las condiciones de borde también dependerán en la dirección. El ejemplo de la figura 6.1 ayuda a comprender.

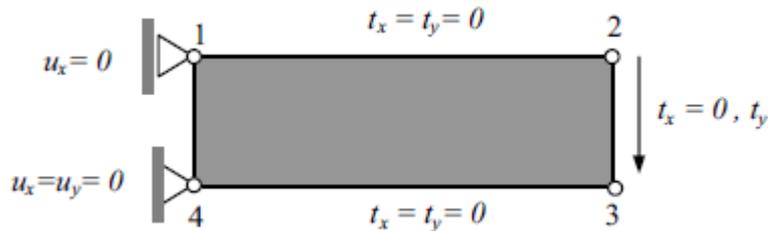


Figura6.4: Ejemplo de discontinuidad en elasticidad.

Para resumir el proceso de ensamblaje se puede ver que la contribución de los elementos se ensambla en la matriz global por recolección de los coeficientes de acuerdo a incidencias o destinos (en caso elástico). Dependiendo de los códigos definido en un nodo particular, los coeficientes  $\Delta T_{ni}^e$  y  $\Delta U_{ni}^e$  son ensamblados ya sea al lado derecho o izquierdo, por lo que la información que se requiere para el ensamblaje es la del vector de conectividad o destino y el código de cada elemento. Nótese que el código es definido localmente para cada elemento y puede tener dos valores en un nodo cualquiera.

### 6.2.1 Simetría

En muchos casos es posible considerar la simetría de un problema y reducir el trabajo. En el MEF se implementa generando solo una parte de la malla indicando las correctas condiciones de contorno de la simetría. En el MEC se puede tomar otra aproximación aliviando la necesidad de tener elementos en l parte simétrica. Como ejemplo para el problema indicado en la figura 6.5, para una excavación circular en un dominio infinito, no existen nodos en el plano de la simetría.

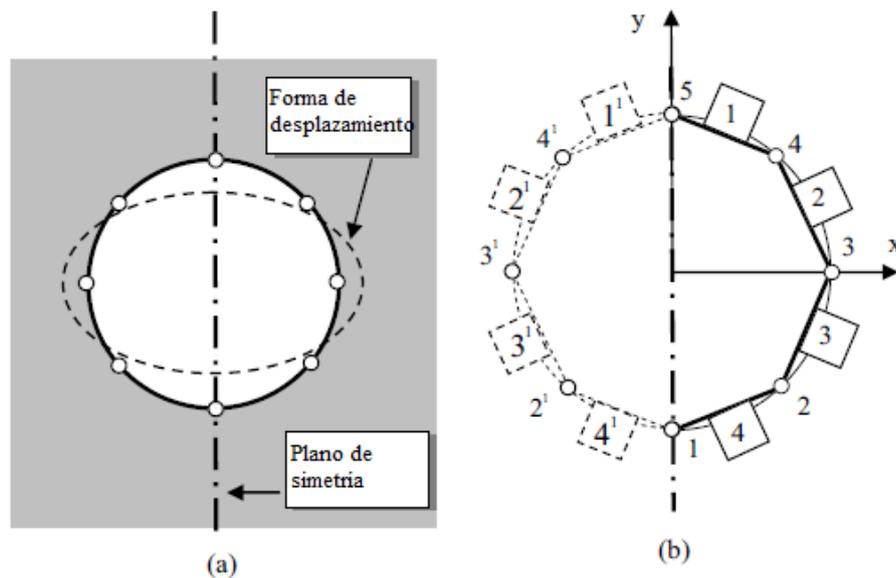


Figura 6.5: Ejemplo con una plano de simetría.

Se explicará la aproximación en el manejo de las condiciones de simetría utilizando el MEC

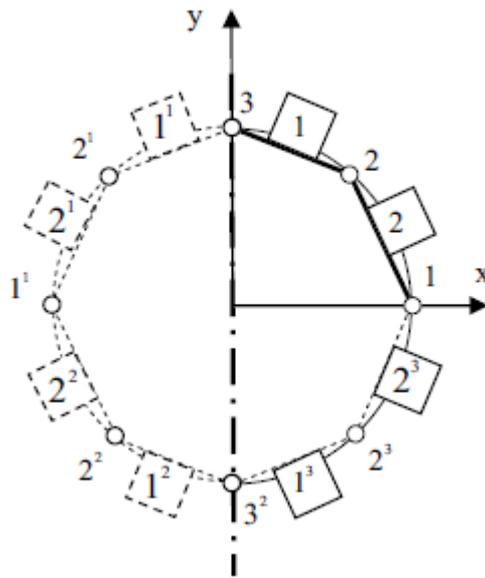
Considérese la malla simple para el análisis de excavación circular formado por 8 elementos como se ve en la figura 7.5b; la idea es crear solo elementos a lado derecho de la simetría (elementos del 1 a 4) y automáticamente generar los elementos a lado izquierdo (1<sup>1</sup> a 4<sup>1</sup>). Las incidencias de todos los elementos son:

Elemento	i	j	Elemento	i	j
1	4	5	1 <sup>1</sup>	5	4 <sup>1</sup>
2	3	4	2 <sup>1</sup>	4 <sup>1</sup>	3 <sup>1</sup>
3	2	3	3 <sup>1</sup>	3 <sup>1</sup>	2 <sup>1</sup>
4	1	2	4 <sup>1</sup>	2 <sup>1</sup>	1

Nótese que la secuencia de los nodos espejo es el revés. Esto es importante puesto que afecta la dirección de la normal de salida del vector  $n$ . Las coordenadas de los nodos al lado izquierdo de la simetría se pueden obtener a partir de los nodos de la derecha.

Nodo	x	y
2 <sup>1</sup>	-x <sub>2</sub>	y <sub>2</sub>
3 <sup>1</sup>	-x <sub>3</sub>	y <sub>3</sub>
4 <sup>1</sup>	-x <sub>4</sub>	y <sub>4</sub>

Se puede ahorrar esfuerzo sustancialmente si durante el ensamblaje consideramos que los valores a la izquierda se pueden obtener a partir de los de la derecha. Para problemas potenciales se tiene  $u_2^1 = u_2; u_3^1 = u_3; u_4^1 = u_4$ .



**Figura 6.6:** Ejemplo con dos planos de simetría.

Para problemas de elasticidad ver figura 7.5(a).

Nodo	$u_x$	$u_y$
$2^1$	$-u_{x2}$	$u_{y2}$
$3^1$	$-u_{x3}$	$u_{y3}$
$4^1$	$-u_{x4}$	$u_{y4}$

Para ensamblar el sistema de ecuaciones, es decir que los coeficientes de los nodos espejo se ensamblan en el mismo lugar de los nodos de no espejos.

En problemas de elasticidad el signo negativo de la componente  $x$  del desplazamiento debe ser considerado durante el ensamblaje. Si se utiliza este sistema de ensamblaje, entonces el número de incógnitas se reduce al número de incógnitas del lado derecho. El único trabajo adicional será la integración de las funciones de forma sobre los elementos espejo. Si existe simetría en  $x$  y  $y$ ; entonces los elementos se hacen espejo dos veces como se ve en la figura 7.6.

Los vectores de incidencia son:

Elemento	i	j	Elemento	i	j
1	2	3	1 <sup>2</sup>	2 <sup>2</sup>	3 <sup>2</sup>
2	1	2	2 <sup>2</sup>	1 <sup>2</sup>	2 <sup>2</sup>
1 <sup>1</sup>	3	2 <sup>1</sup>	1 <sup>3</sup>	3 <sup>1</sup>	2 <sup>3</sup>
2 <sup>1</sup>	2 <sup>1</sup>	1 <sup>1</sup>	2 <sup>3</sup>	2 <sup>3</sup>	1

Nótese que para todos los elementos a excepción de 1<sup>2</sup> y 2<sup>2</sup>, las incidencias se reversan, las coordenadas de los nodos espejo son:

Nodo	x	y
1 <sup>1</sup>	-x <sub>1</sub>	y <sub>1</sub>
3 <sup>2</sup>	-x <sub>3</sub>	-y <sub>3</sub>
2 <sup>1</sup>	-x <sub>2</sub>	y <sub>2</sub>
2 <sup>2</sup>	-x <sub>2</sub>	-y <sub>2</sub>
2 <sup>3</sup>	x <sub>2</sub>	-y <sub>2</sub>

En problemas de potencial se tiene  $u_2^1 = u_2^2 = u_2^3 = u_2$ ;  $u_1^1 = u_1$  y  $u_3^1 = u_3$ . Para problemas de elasticidad los desplazamientos en los nodos espejo se dan por:

Nodo	u <sub>x</sub>	u <sub>y</sub>
1 <sup>1</sup>	-u <sub>x1</sub>	0
3 <sup>1</sup>	0	-u <sub>y3</sub>
2 <sup>1</sup>	-u <sub>x2</sub>	u <sub>y2</sub>
2 <sup>2</sup>	-u <sub>x2</sub>	-u <sub>y2</sub>
2 <sup>3</sup>	u <sub>x2</sub>	-u <sub>y2</sub>

## 6.2.2 Subrutina espejo

Esta subrutina se realiza para generar elementos a través de planos simétricos. Devuelve las incidencias, destinos y el vector de coordenadas del elemento espejo, como también los factores de multiplicación para el ensamblaje. En la subrutina se debe considerar que si los puntos están en el plano simétrico, entonces se les da el valor de coordenada cero.

SUBROUTINE espejo(Isym,nsy,Nodes,Elcor,Fac,Incie,Ldeste,Elres\_te,Elres\_ue&  
,Nodel,Ndof,Cdim)

!-----

! Crea elementos espejo

```

!-----
IMPLICIT NONE
INTEGER, INTENT(IN)          :: Isym    ! indicador de
simetria
INTEGER, INTENT(IN)          :: nsy     ! contador de simetria
INTEGER, INTENT(IN)          :: nodes   ! nodo mas alto
REAL, INTENT(IN OUT)         :: Elcor(:, :) ! coordenadas a modificar
REAL, INTENT(IN OUT)         :: Elres_te(:) ! Tracciones del elemnto
REAL, INTENT(IN OUT)         :: Elres_ue(:) ! Desplazamientos del
elemento
REAL, INTENT(OUT)            :: Fac(:)   ! factor de multiplicacion
INTEGER, INTENT(IN OUT) :: Incie(:)
INTEGER, INTENT(IN OUT) :: Ldeste(:)
INTEGER, INTENT(IN)          :: Nodel   ! nodos por elemento
INTEGER, INTENT(IN)          :: Ndof    !
INTEGER, INTENT(IN)          :: Cdim    ! dimensión cartesiana
REAL :: TD(3) ! vector de transformación
INTEGER :: n,m,Ison1,Ison2,Ison3,i
IF(nsy == 1)RETURN
! Assign coefficients of TD
SELECT CASE (nsy-1)
  CASE(1)
    TD=(-1.0,1.0,1.0/)
  CASE(2)
    TD=(-1.0,-1.0,1.0/)
  CASE(3)
    TD=(1.0,-1.0,1.0/)
  CASE(4)
    TD=(1.0,1.0,-1.0/)
  CASE(5)
    TD=(-1.0,1.0,-1.0/)
  CASE(6)
    TD=(-1.0,-1.0,-1.0/)
  CASE(7)
    TD=(1.0,-1.0,-1.0/)
END SELECT
! genera coordenadas e incidencias
Nodes1: &
DO n=1,nodel
  Direction: &
  DO m=1,Cdim
    Elcor(m,n)= Elcor(m,n)*TD(m)
  END DO &
  Direction

```

```

!      revisa puntos para simetria
Ison1= 0
Ison2= 0
Ison3= 0
IF(Elcor(1,n)==0.0) Ison1=1
IF(Elcor(2,n)==0.0) Ison2=1
IF(Cdim> 2 .AND. Elcor(3,n)==0.0) Ison3=1
IF(ison1==1 .AND. nsy-1==1)CYCLE
IF(ison2==1 .AND. nsy-1==3) CYCLE
IF(ison1+ison2+ison3 > 1 .AND. nsy-1<4) CYCLE
Incie(n)= Incie(n) + Nodes
END DO &
Nodes1
!  generafactores de multiplicacion
IF(Ndof> 1) THEN
  I=0
  Nodes2: &
  DO n=1,nodel
    Degrees_of_freedom1: &
    DO m=1,Ndof
      I=I+1
      Fac(I)= TD(m)      ! factores de multiplicación para
simetria
    END DO &
    Degrees_of_freedom1
  END DO &
  Nodes2
END IF
SELECT CASE (nsy-1)
CASE (1,3,4,6)
  CALL Reverse(Incie,elcor,ldeste,Elres_te,Elres_ue,Ndof,Cdim,nodel)
CASE DEFAULT
END SELECT
RETURN
END SUBROUTINE espejo

```

### 6.2.3 Subrutina ensamblaje

Se presenta un sub programa para ensamblar la matriz de coeficientes utilizando un vector de incidencias o destinos, así como información del tipo de contorno y condición de simetría. La información acerca de la condición de borde es obtenida por cada nodo o grado de libertad de un elemento y el código es 0 para *Neuman* y 1

para la condición de *Dirichlet*. Se debe tener cuidado cuando la condición de contorno es discontinua.

Por ejemplo en figura 6.3 la temperatura y el flujo son conocidas en el primer nodo del elemento 1, pero solo la temperatura es conocida en el segundo nodo del elemento 4. Para el ensamblaje se debe especificar un código global y no un código para cada elemento. Entonces si *Neuman* BC se especifica y el código global es *Dirichlet*, tanto  $\Delta T$  y  $\Delta U$  se ensamblan a lado derecho. En la lista de vectores paramétricos *Elres\_uyElres\_t*; estos eventualmente contendrán valores conocidos (prescritos) y los otros valores serán cero.

La subrutina ensamblaje se puede utilizar para ensamblar problemas bi y tridimensionales para potencial y elasticidad.

```

SUBROUTINE Ensamblaje(Lhs,Rhs,DTe,DUE,Ldest,BCode,Ncode&
,Elres_u,Elres_te,Diag,Ndofe,Ndof,Nodel,Fac)
!-----
! Ensambla la contribución de elementos
!-----
REAL(KIND=8)      :: Lhs(:,),Rhs(:)
REAL(KIND=8), INTENT(IN):: DTe(:,),DUE(:,)
INTEGER , INTENT(IN)  :: LDest(:)
INTEGER , INTENT(IN)      :: BCode(:)
INTEGER , INTENT(IN)      :: NCode(:)
INTEGER , INTENT(IN)      :: Ndofe

INTEGER , INTENT(IN)      :: Ndof

INTEGER , INTENT(IN)      :: Nodel

REAL , INTENT(IN)        :: Elres_u(:)
REAL , INTENT(IN)        :: Elres_te(:)
REAL , INTENT(IN)        :: Fac(:)

REAL(KIND=8)             :: Diag(:,)
INTEGER                   :: :n,Ncol
DoF_per_Element:&
DO m=1,Ndofe
    Ncol=LDest(m)
    IF(BCode(m) == 0) THEN ! Neumann BC
        Rhs(:) = Rhs(:) + DUE(:,m)*Elres_te(m)*Fac(m)
    
```

```

        IF (NCode(Ldest(m)) == 0 .and. Ncol /= 0) THEN
            Lhs(:,Ncol)= Lhs(:,Ncol) + DTe(:,m)*Fac(m)
        ELSE
            Rhs(:) = Rhs(:) - DTe(:,m) * Elres_u(m)*Fac(m)
        END IF
    END IF
    IF(BCode(m) == 1) THEN ! Dirichlet BC
        Lhs(:,Ncol) = Lhs(:,Ncol) - DUe(:,m)*Fac(m)
        Rhs(:)= Rhs(:) - DTe(:,m) * Elres_u(m)*Fac(m)
    END IF
END DO &
DoF_per_Element

DO n=1,Nodel
    DO k=1,Ndof
        l=(n-1)*Ndof+k
        Diag(:,k)= Diag(:,k) - DTe(:,l)
    END DO
END DO
RETURN
END SUBROUTINE Ensamblaje

```

### 6.3 Solución del sistema de ecuaciones

Luego del ensamblaje se obtiene un sistema de ecuaciones. La diferencia con el sistema obtenido con el MEF es que no es un sistema simétrico y la matriz es totalmente poblada. La no simetría de los coeficientes de la matriz dio problemas por un tiempo a los ingenieros acostumbrados a matrices simétricas, esto se da debido a que no estamos resolviendo las ecuaciones integrales exactamente sino por aproximación numérica.

En lugar de forzar el Teorema de Betti con un número infinito de puntos, seleccionamos un número limitado de puntos que son los puntos nodales de la malla. Se puede demostrar que si la fineza de la malla crece, los coeficientes de la matriz se vuelven más y más simétricos.

El caso de que la matriz es totalmente poblada nos permiten despreocuparnos de la solución por medio de programas que se dedica a resolver matrices esparsas.

### 6.3.1 Eliminación de Gauss.

El método de Gauss es posiblemente el más viejo y más utilizado como Método de Solución de Ecuaciones. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\mathbf{Au}=\mathbf{F} \quad \text{Ec. 6.15}$$

La solución de  $\mathbf{u}$  requiere dos pasos.

*Paso 1: Reducción*

Se introducen ceros bajo la diagonal principal por lo que terminamos con una matriz triangular superior así si consideramos las ecuaciones *nyin* tenemos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} a_{nn}u_n + \dots + a_{nj}u_j + \dots &= F_n \\ a_{in}u_n + \dots + a_{ij}u_j + \dots &= F_i \end{aligned} \quad \text{Ec. 6.16}$$

Para introducir ceros en la columna  $n$  de la ecuación  $ni$ , dividimos  $(a_{in}/a_{nn})$  veces la ecuación  $n$  de la ecuación  $i$ :

$$\begin{aligned} a_{nn}u_n + \dots + a_{nj}u_j + \dots &= F_n \\ 0 + \dots + a_{ij}u_j + \dots &= F_i^* \end{aligned} \quad \text{Ec. 6.17}$$

Donde

$$\begin{aligned} a_{ij}^* &= a_{ij} - \frac{a_{in}}{a_{nn}} a_{nj} \\ F_i^* &= F_i - \frac{a_{in}}{a_{nn}} F_n \end{aligned} \quad \text{Ec. 6.18}$$

Este procedimiento que también se denomina como *Eliminación de la variable n*, puede ser visto como una continua modificación de los coeficientes  $a$  por los coeficientes  $a^*$ . Se continúa con este procedimiento con todas las ecuaciones hasta que los coeficientes bajo la diagonal sean cero.

*Paso 2: Sustitución reversa*

Los resultados se obtienen sustituyendo los valores de la última ecuación en la ecuación superior y así sucesivamente. La fórmula para esto se da como:

$$u_n = -\frac{1}{a_{nn}} \sum_{i=n+1}^N a_{ni} u_i - F_n$$

Ec. 6.19

Este procedimiento fácilmente se convierte en una subrutina.

```

SUBROUTINE SLNPD(A,B,D,N,NX)
!
! PROGRAM 6
!
! SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES
! POR EL METODO DE ELIMINACION DE GAUSS
! SE INTERCAMBIA LAS FILAS UNA VEZ QUE SE HALLAN LAS
! SOLUCIONES
!
!
! A : MATRIZ DEL SISTEMA
! B : ORIGINALY CONTIENE EL SISTEMA INDEPENDIENTE.
!   DESPUES DE LA SOLUCION GUARDA
!   LOS VOLERES DE LAS INCOGNITAS.
!
! N : NUMERO DE INCOGNITAS
! NX: TAMAÑO DE FILAS Y COLUMNAS DE A
!
!   DIMENSION B(NX),A(NX,NX)
!
!   TOL=1.E-6
!
!   N1=N-1
!   DO 100 K=1,N1
!     K1=K+1
!     C=A(K,K)
!     IF(ABS(C)-TOL)1,1,3
!     1 DO 7 J=K1,N
!
!     ! INTENTA CAMBIAR FILAS PARA NO OBTENER NINGUN CERO EN LA
!     ! DIAGONAL
!
!     IF(ABS((A(J,K)))-TOL)7,7,5
!       5 DO 6 L=K,N
!         C=A(K,L)

```

```

A(K,L)=A(J,L)
  6 A(J,L)=C
    C=B(K)
B(K)=B(J)
B(J)=C
  C=A(K,K)
  GO TO 3
7 CONTINUE
  GO TO 8
!
! DIVIDE LA FILA POR EL COEFICIENTE DE LA DIAGONAL
!
3 C=A(K,K)
  DO 4 J=K1,N
    4 A(K,J)=A(K,J)/C
B(K)=B(K)/C
!
! ELIMINA LA INCOGNITA X(K) DE LA FILA I
!
DO 10 I=K1,N
  C=A(I,K)
  DO 9 J=K1,N
    9 A(I,J)=A(I,J)-C*A(K,J)
    10 B(I)=B(I)-C*B(K)
  100 CONTINUE
!
! OBTIENE LA ULTIMA INCOGNITA
!
IF(ABS((A(N,N)))-TOL)8,8,101
101 B(N)=B(N)/A(N,N)
!
! APLICA EL PROCESO DE SUBSTITUCION REVERSA PARA HALLAR EL
RESTO DE INCOGNITAS
!
  DO 200 L=1,N1
    K=N-L
    K1=K+1
DO 200 J=K1,N
200 B(K)=B(K)-A(K,J)*B(J)
!
! OBTIENE EL VALOR DEL DETERMINANTE
!
D=1.
  DO 250 I=1,N

```

```

250 D=D*A(I,I)
    GO TO 300
    8 WRITE(IPR,2) K
    2 FORMAT(' **** SINGULARIDAD EN FILA',I5)
D=0.
300 RETURN
END

```

### 6.3.2 Escalado de los coeficientes en los términos que intervienen en elasticidad

Cuando se observa la solución fundamental para elasticidad notamos que el Kernel  $U$  contiene módulos de elasticidad mientras que  $T$  no. Dependiendo de las unidades escogidas se espera una gran diferencia de valores. Como se ha visto desde el inicio del capítulo, si existen condiciones mixtas de valores de contorno entonces se produce un cruce de  $U$  y  $T$  en la matriz de ensamblaje.

Esto puede dar problemas en la solución de ecuaciones, puesto que términos pequeños serán restados de términos muy grandes.

Por este motivo se recomienda escalar el ingreso de datos y se puede hacer de tal manera que todas las tracciones se dividan por  $E$  y todas las coordenadas por la mayor diferencia entre coordenadas.

```

PROGRAM BEM
!!
! ESTE PROGRAMA RESUELVE PROBLEMAS DE ELASTICIDAD
! BIDIMENSIONAL
! UTILIZANDO ELEMENTOS DE BORDE CUADRATICOS
!
CHARACTER*10 FILEIN,FILEOUT
!
COMMON/MATG/ G(100,150)
COMMON/MATH/ H(100,100)
COMMON N,L,GE,XNU,INP,IPR
DIMENSION X(51),Y(51)
DIMENSION DFI(150),FI(100),KODE(150)
DIMENSION CX(20),CY(20),SSOL(60),DSOL(40)
!
! SE ASIGNA EL MAXIMO NUMERO DEL SISTEMA DE ECUACIONES (NX)

```

```

! NX= 2*MAXIMO NUMERO DE NODOS= 4*MAXIMO NUMERO DE
ELEMENTOS
! NX1= 3*MAXIMO NUMERO DE NODOS= 6*MAXIMO NUMERO DE
ELEMENTOS
!
  NX=100
  NX1=150
!
! ASIGNA NUMEROS PARA LOS ARCHIVOS DE ENTRADA Y SALIDA
!
  INP=5
  IPR=6
!
! LEE NOMBRES Y ABRE LOS ARCHIVOS DE ENTRADA Y SALIDA
!
WRITE(*,' (A) ') ' NOMBRE DEL ARCHIVO DE ENTRADA (MAX. 10
CARACTERES.)'
READ(*,' (A) ')FILEIN
OPEN(INP,FILE=FILEIN,STATUS='OLD')
WRITE(*,' (A) ') ' NOMBRE DEL ARCHIVO DE SALIDA (MAX. 10
CARACTERES.)'
READ(*,' (A) ')FILEOUT
OPEN(IPR,FILE=FILEOUT,STATUS='NEW')
!
! LEE LOS DATOS
!
CALL INPUTEQ(CX,CY,X,Y,KODE,DFI)
!
! OBTIENE LAS MATRICES G Y H PARA FORMAR EL SISTEMA (A X = F)
!
CALL GHMATEQ(X,Y,G,H,FI,DFI,KODE,NX,NX1)
!
! RESUELVE EL SISTEMA DE ECUACIONES
!
NN=2*N
CALL SLNPD(H,FI,D,NN,NX)
!
! OBTIENE LAS TENSIONES Y DESPLAZAMIENTOS EN LOS PUNTOS
INTERNOS.
!
CALL INTEREQ(FI,DFI,KODE,CX,CY,X,Y,SSOL,DSOL)
!
! IMPRIME LOS RESULTADOS EN LOS NODOS DE BORDE Y EN LOS
PUNTOS INTERNOS

```

```
!  
CALL OUTPTEQ(X,Y,FI,DFI,CX,CY,SSOL,DSOL)  
!  
! CIERRA LOS ARCHIVOS DE ENTRADA Y SALIDA  
!  
  CLOSE (INP)  
  CLOSE (IPR)  
  STOP  
  END
```

## 7.UTILIZACION DEL PROGRAMA

### 7.1Ingreso de datos

Este programa determina las tracciones y desplazamientos en todos los nodos de los elementos cuadráticos y también obtiene los desplazamientos y esfuerzos en cualquier punto de nuestro interés.

Para poder utilizar el programa se requiere crear un archivo de texto y guardarlo con la extensión *.txt*, por ejemplo el archivo “viga.txt”.

En la primera fila se escribe el nombre del archivo de salida con un máximo de diez caracteres y con la extensión *.txt*, por ejemplo “deviga.txt”. En la segunda fila un texto explicativo para que salga en el archivo de salida. En la tercera fila separado por un espacio se deberá colocar el número de elementos cuadriláteros, el número de nodos internos del análisis, el valor del coeficiente elástico y el valor del módulo de Poisson.

Desde la cuarta fila, las coordenadas  $(x, y)$  de los nodos que forman la geometría del elemento en análisis y que completan la creación del número de elementos cuadriláteros; pudiendo ser más de una línea. En las siguientes líneas se escriben las condiciones en cada nodo para  $x, y$  prescritas.

En la última fila se deberá escribir las coordenadas donde queremos conocer un valor interno de los desplazamientos y esfuerzos.

### 7.2Salida de datos

En las primeras nueve filas se escriben los datos de ingreso, el número de elementos, el número de puntos internos, el módulo de cortante y el coeficiente de Poisson.

En las siguientes filas se escribe el número de nodo con sus coordenadas, y luego los valores prescritos en cada uno de los elementos.

Finalmente se muestran los resultados en cada nodo junto con los desplazamientos en  $x$  y en  $y$ .

Seguido se escriben las tracciones en  $x$  y en  $y$ .

Al final se escriben los desplazamientos y esfuerzos de los puntos internos escogidos.

### 7.3Ejemplo

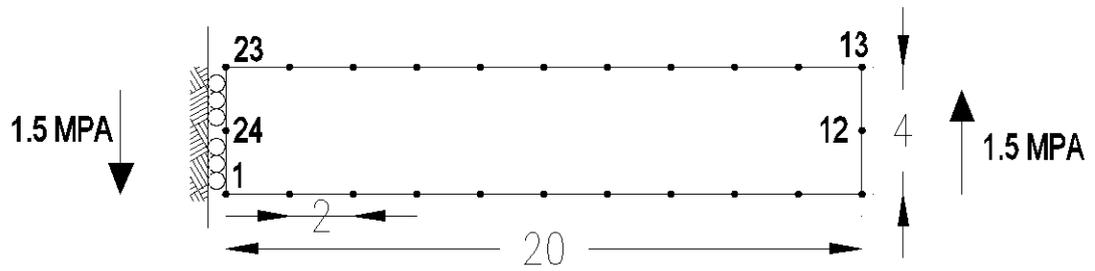


Figura7.1: Viga en cantiliver con carga transversal.

#### Ingreso de datos, archivo "viga.txt"

deVIGA.TXT

VIGA EN CANTILIVER CON CARGA TRANSVERSAL (12 ELEMENTOS)

12 1 80000 0.2

0. 0. 2. 0. 4. 0. 6. 0. 8. 0. 10. 0. 12. 0. 14. 0. 16. 0. 18. 0. 20. 0.

20. 2. 20. 4. 18. 4. 16. 4. 14. 4. 12. 4. 10. 4. 8. 4. 6. 4. 4. 4.

2. 4. 0. 4. 0. 2.

1 0. 0 0. 1 0. 1 0. 1 0. 1 0.

1 0. 1 0. 1 0. 1 0. 1 0. 1 0.

1 0. 1 0. 1 0. 1 0. 1 0. 1 0.

1 0. 1 0. 1 0. 1 0. 1 0. 1 0.

1 0. 1 0. 1 0. 1 0. 1 0. 1 0.

1 0. 1 0. 1 0. 1 1500. 1 0. 1 0.

1 0. 1 0. 1 0. 1 0. 1 0. 1 0.

1 0. 1 0. 1 0. 1 0. 1 0. 1 0.

1 0. 1 0. 1 0. 1 0. 1 0. 1 0.

1 0. 1 0. 1 0. 1 0. 1 0. 1 0.

1 0. 1 0. 1 0. 1 0. 1 0. 1 0.

0 0. 1 0. 0 0. 1 -1500. 0 0. 1 0.

0 5.

**Salida de datos, archivo deviga.txt**

\*\*\*\*\*

VIGA EN CANTILIVER CON CARGA TRANSVERSAL (12 ELEMENTOS)

DATOS: PROGRAMA BEM, POR HERNAN GARCIA E.

NUMERO DE ELEMENTOS= 12

NUMERO DE PUNTOS INTERNOS= 1

MODULO CORTANTE= 0.8000000E+05

COEFICIENTE POISSON= 0.2000000E+00

COORDENADAS DE NODOS DE CONTORNO

| NODO | X             | Y             |
|------|---------------|---------------|
| 1    | 0.0000000E+00 | 0.0000000E+00 |
| 2    | 0.2000000E+01 | 0.0000000E+00 |
| 3    | 0.4000000E+01 | 0.0000000E+00 |

|    |               |               |
|----|---------------|---------------|
| 4  | 0.6000000E+01 | 0.0000000E+00 |
| 5  | 0.8000000E+01 | 0.0000000E+00 |
| 6  | 0.1000000E+02 | 0.0000000E+00 |
| 7  | 0.1200000E+02 | 0.0000000E+00 |
| 8  | 0.1400000E+02 | 0.0000000E+00 |
| 9  | 0.1600000E+02 | 0.0000000E+00 |
| 10 | 0.1800000E+02 | 0.0000000E+00 |
| 11 | 0.2000000E+02 | 0.0000000E+00 |
| 12 | 0.2000000E+02 | 0.2000000E+01 |
| 13 | 0.2000000E+02 | 0.4000000E+01 |
| 14 | 0.1800000E+02 | 0.4000000E+01 |
| 15 | 0.1600000E+02 | 0.4000000E+01 |
| 16 | 0.1400000E+02 | 0.4000000E+01 |
| 17 | 0.1200000E+02 | 0.4000000E+01 |
| 18 | 0.1000000E+02 | 0.4000000E+01 |
| 19 | 0.8000000E+01 | 0.4000000E+01 |
| 20 | 0.6000000E+01 | 0.4000000E+01 |
| 21 | 0.4000000E+01 | 0.4000000E+01 |
| 22 | 0.2000000E+01 | 0.4000000E+01 |
| 23 | 0.0000000E+00 | 0.4000000E+01 |
| 24 | 0.0000000E+00 | 0.2000000E+01 |

CONDICIONES DE CONTORNO

VALORES PREESCRITOS

--PRIMER NODO--      --SEGUNDO NODO--      --TERCER NODO--

ELE X DIR. C Y DIR. C X DIR. C Y DIR. C X DIR. C Y DIR. C

|    |       |   |       |   |       |   |           |   |       |   |       |   |
|----|-------|---|-------|---|-------|---|-----------|---|-------|---|-------|---|
| 1  | 0.000 | 1 | 0.000 | 0 | 0.000 | 1 | 0.000     | 1 | 0.000 | 1 | 0.000 | 1 |
| 2  | 0.000 | 1 | 0.000 | 1 | 0.000 | 1 | 0.000     | 1 | 0.000 | 1 | 0.000 | 1 |
| 3  | 0.000 | 1 | 0.000 | 1 | 0.000 | 1 | 0.000     | 1 | 0.000 | 1 | 0.000 | 1 |
| 4  | 0.000 | 1 | 0.000 | 1 | 0.000 | 1 | 0.000     | 1 | 0.000 | 1 | 0.000 | 1 |
| 5  | 0.000 | 1 | 0.000 | 1 | 0.000 | 1 | 0.000     | 1 | 0.000 | 1 | 0.000 | 1 |
| 6  | 0.000 | 1 | 0.000 | 1 | 0.000 | 1 | 1500.000  | 1 | 0.000 | 1 | 0.000 | 1 |
| 7  | 0.000 | 1 | 0.000 | 1 | 0.000 | 1 | 0.000     | 1 | 0.000 | 1 | 0.000 | 1 |
| 8  | 0.000 | 1 | 0.000 | 1 | 0.000 | 1 | 0.000     | 1 | 0.000 | 1 | 0.000 | 1 |
| 9  | 0.000 | 1 | 0.000 | 1 | 0.000 | 1 | 0.000     | 1 | 0.000 | 1 | 0.000 | 1 |
| 10 | 0.000 | 1 | 0.000 | 1 | 0.000 | 1 | 0.000     | 1 | 0.000 | 1 | 0.000 | 1 |
| 11 | 0.000 | 1 | 0.000 | 1 | 0.000 | 1 | 0.000     | 1 | 0.000 | 1 | 0.000 | 1 |
| 12 | 0.000 | 0 | 0.000 | 1 | 0.000 | 0 | -1500.000 | 1 | 0.000 | 0 | 0.000 | 1 |

\*\*\*\*\*

RESULTADOS

NODOS DE CONTORNO

| X            | Y            | DESPLAZAMIENTOS X | DESPLAZAMIENTOS Y |
|--------------|--------------|-------------------|-------------------|
| 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00      | 0.000000E+00      |
| 0.200000E+01 | 0.000000E+00 | 0.2831663E+00     | 0.1641340E+00     |
| 0.400000E+01 | 0.000000E+00 | 0.5382550E+00     | 0.5995900E+00     |
| 0.600000E+01 | 0.000000E+00 | 0.7601999E+00     | 0.1273371E+01     |
| 0.800000E+01 | 0.000000E+00 | 0.9555881E+00     | 0.2155866E+01     |
| 0.100000E+02 | 0.000000E+00 | 0.1118171E+01     | 0.3217361E+01     |
| 0.120000E+02 | 0.000000E+00 | 0.1254120E+01     | 0.4428122E+01     |
| 0.140000E+02 | 0.000000E+00 | 0.1357263E+01     | 0.5758413E+01     |
| 0.160000E+02 | 0.000000E+00 | 0.1433851E+01     | 0.7178519E+01     |
| 0.180000E+02 | 0.000000E+00 | 0.1477297E+01     | 0.8658836E+01     |
| 0.200000E+02 | 0.000000E+00 | 0.1492665E+01     | 0.1016636E+02     |
| 0.200000E+02 | 0.200000E+01 | 0.4233792E-05     | 0.1016915E+02     |
| 0.200000E+02 | 0.400000E+01 | -0.1492660E+01    | 0.1016637E+02     |
| 0.180000E+02 | 0.400000E+01 | -0.1477290E+01    | 0.8658836E+01     |
| 0.160000E+02 | 0.400000E+01 | -0.1433844E+01    | 0.7178522E+01     |
| 0.140000E+02 | 0.400000E+01 | -0.1357257E+01    | 0.5758411E+01     |
| 0.120000E+02 | 0.400000E+01 | -0.1254114E+01    | 0.4428121E+01     |
| 0.100000E+02 | 0.400000E+01 | -0.1118166E+01    | 0.3217361E+01     |
| 0.800000E+01 | 0.400000E+01 | -0.9555855E+00    | 0.2155869E+01     |

|               |               |                |                |
|---------------|---------------|----------------|----------------|
| 0.6000000E+01 | 0.4000000E+01 | -0.7601988E+00 | 0.1273371E+01  |
| 0.4000000E+01 | 0.4000000E+01 | -0.5382553E+00 | 0.5995907E+00  |
| 0.2000000E+01 | 0.4000000E+01 | -0.2831656E+00 | 0.1641336E+00  |
| 0.0000000E+00 | 0.4000000E+01 | 0.0000000E+00  | 0.1313165E-06  |
| 0.0000000E+00 | 0.2000000E+01 | 0.0000000E+00  | -0.4010393E-01 |

TRACCIONES X TRACCIONES Y TRACCIONES X TRACCIONES Y

| X | Y | ANTES NODO | ANTES NODO | DESPUES NODO | DESPUES NODO |
|---|---|------------|------------|--------------|--------------|
|---|---|------------|------------|--------------|--------------|

|             |             |              |             |             |             |
|-------------|-------------|--------------|-------------|-------------|-------------|
| 0.00000E+00 | 0.00000E+00 | -0.29854E+05 | 0.00000E+00 | 0.00000E+00 | 0.65768E-01 |
|-------------|-------------|--------------|-------------|-------------|-------------|

|             |             |             |             |             |             |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 0.20000E+01 | 0.00000E+00 | 0.00000E+00 | 0.00000E+00 | 0.00000E+00 | 0.00000E+00 |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|

|             |             |             |             |             |             |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 0.40000E+01 | 0.00000E+00 | 0.00000E+00 | 0.00000E+00 | 0.00000E+00 | 0.00000E+00 |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|

|             |             |             |             |             |             |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 0.60000E+01 | 0.00000E+00 | 0.00000E+00 | 0.00000E+00 | 0.00000E+00 | 0.00000E+00 |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|

|             |             |             |             |             |             |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 0.80000E+01 | 0.00000E+00 | 0.00000E+00 | 0.00000E+00 | 0.00000E+00 | 0.00000E+00 |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|

|             |             |             |             |             |             |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 0.10000E+02 | 0.00000E+00 | 0.00000E+00 | 0.00000E+00 | 0.00000E+00 | 0.00000E+00 |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|

|             |             |             |             |             |             |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 0.12000E+02 | 0.00000E+00 | 0.00000E+00 | 0.00000E+00 | 0.00000E+00 | 0.00000E+00 |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|

|             |             |             |             |             |             |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 0.14000E+02 | 0.00000E+00 | 0.00000E+00 | 0.00000E+00 | 0.00000E+00 | 0.00000E+00 |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|

|             |             |             |             |             |             |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 0.16000E+02 | 0.00000E+00 | 0.00000E+00 | 0.00000E+00 | 0.00000E+00 | 0.00000E+00 |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|

|             |             |             |             |             |             |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 0.18000E+02 | 0.00000E+00 | 0.00000E+00 | 0.00000E+00 | 0.00000E+00 | 0.00000E+00 |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|

|             |             |             |             |             |             |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 0.20000E+02 | 0.00000E+00 | 0.00000E+00 | 0.00000E+00 | 0.00000E+00 | 0.00000E+00 |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|

|             |             |             |              |             |
|-------------|-------------|-------------|--------------|-------------|
| 0.20000E+02 | 0.20000E+01 | 0.00000E+00 | 0.15000E+04  | 0.00000E+00 |
| 0.15000E+04 |             |             |              |             |
| 0.20000E+02 | 0.40000E+01 | 0.00000E+00 | 0.00000E+00  | 0.00000E+00 |
| 0.18000E+02 | 0.40000E+01 | 0.00000E+00 | 0.00000E+00  | 0.00000E+00 |
| 0.16000E+02 | 0.40000E+01 | 0.00000E+00 | 0.00000E+00  | 0.00000E+00 |
| 0.14000E+02 | 0.40000E+01 | 0.00000E+00 | 0.00000E+00  | 0.00000E+00 |
| 0.12000E+02 | 0.40000E+01 | 0.00000E+00 | 0.00000E+00  | 0.00000E+00 |
| 0.10000E+02 | 0.40000E+01 | 0.00000E+00 | 0.00000E+00  | 0.00000E+00 |
| 0.80000E+01 | 0.40000E+01 | 0.00000E+00 | 0.00000E+00  | 0.00000E+00 |
| 0.60000E+01 | 0.40000E+01 | 0.00000E+00 | 0.00000E+00  | 0.00000E+00 |
| 0.40000E+01 | 0.40000E+01 | 0.00000E+00 | 0.00000E+00  | 0.00000E+00 |
| 0.20000E+01 | 0.40000E+01 | 0.00000E+00 | 0.00000E+00  | 0.00000E+00 |
| 0.00000E+00 | 0.40000E+01 | 0.00000E+00 | 0.00000E+00  | 0.29853E+05 |
| 0.00000E+00 |             |             |              |             |
| 0.00000E+00 | 0.20000E+01 | 0.41053E-01 | -0.15000E+04 | 0.41053E-01 |
| 0.15000E+04 |             |             |              |             |

#### DESPLAZAMIENTOS DE PUNTOS INTERNOS

| X             | Y             | DESPLAZAMIENTO X | DESPLAZAMIENTO Y |
|---------------|---------------|------------------|------------------|
| 0.0000000E+00 | 0.0000000E+00 | 0.9437837E-03    | -0.7159542E-06   |

#### ESFUERZOS DE PUNTOS INTERNOS

| X            | Y            | SIGMA X      | TAU XY       | SIGMA Y      |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.846201E+04 | 0.388580E+04 |
| 0.654614E+03 |              |              |              |              |

\*\*\*\*\*

## **BIBLIOGRAFIA**

WT Ang, A Beginner's Course in Boundary Element Methods, Universal Publishers, Boca Ratón, USA, 2007 (253 páginas)

Alejandra Del Carmen, Juan Carlos Ferreri y Luis Boutet, Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, Vol 18, 2, 199-207 , 2002 (10 páginas)

Julio Enrique Duarte y Flavio Humberto Fernández Morales, La simulación por computador en investigación y desarrollo, Tecnura N.- 16, primer semestre 2005 (9 páginas)

J. E. Ortiz, A. P. Cisilino y J. L. Otegui, Modelado Numérico de la Propagación de fisuras por fatiga en sólidos microfisurados, Universidad Nacional de Mar Del Plata (8 páginas)

Gernot Beer, Ian Smith y Christian Duenser, The Boundary Element Method with Programming, Springer Wien New York, 2008 (496 páginas)

Del Prado, Jorge Amador, Uso del método de diferencias finitas en la simulación de un sistema de protección catódica, Episteme No. 7 Año 2, Enero-Marzo 2006 (9 páginas)