

---

# **ANÁLISIS DE PLASTICIDAD EN PÓRTICOS PLANOS**

---



# **UNIVERSIDAD POLITÉCNICA SALESIANA SEDE CUENCA**

## **UNIDAD DE POSGRADOS**

### **MAESTRÍA EN MÉTODOS NUMÉRICOS PARA DISEÑO EN INGENIERÍA**

---

## **TEMA: ANÁLISIS DE PLASTICIDAD EN PÓRTICOS PLANOS**

---

TESIS PREVIA A LA OBTENCIÓN DEL GRADO DE  
MAGÍSTER EN MÉTODOS NUMÉRICOS PARA DISEÑO EN INGENIERÍA

**AUTOR: ING. DIEGO JAVIER NAREA CHUMBI**

DIRECTOR: ING. ESTEBAN SAMANIEGO ALVARADO, PH.D.



**JUNIO DE 2011**

**CUENCA - ECUADOR**

**NAREA CHUMBI DIEGO JAVIER**  
**“ANÁLISIS DE PLASTICIDAD EN PÓRTICOS PLANOS”**

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA SALESIANA, CUENCA – ECUADOR, 2011.  
UNIDAD DE POSGRADOS.

Formato: 170x240 mm.

Páginas: 170

**Breve reseña del autor:**



**Diego Javier Narea Chumbi**  
Ingeniero Civil (2006).  
Facultad de Ingeniería.  
Universidad de Cuenca.  
e-mail: diegojnc8@hotmail.com

**Dirigido por:**

**Esteban Patricio Samaniego Alvarado**

Ingeniero Civil. Facultad de Ingeniería, Universidad de Cuenca.

Master en Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería (1998). Universidad Politécnica de Cataluña.

Ph.D. en Mecánica Computacional (2003). Universidad Politécnica de Cataluña.

Catedrático de la Facultad de Ingeniería en la Universidad de Cuenca.

e-mail: esteban.samaniego@gmail.com

Todos los derechos reservados.

Queda prohibida cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública y transformación de esta obra para fines comerciales, sin contar con autorización de titulares de propiedad intelectual. La infracción de los derechos mencionados puede ser constitutiva de delito contra la propiedad intelectual. Se permite la libre difusión de este texto con fines académicos o investigativos por cualquier medio, con la debida autorización del autor.

DERECHOS RESERVADOS © 2011

Universidad Politécnica Salesiana

Cuenca – Ecuador

DIEGO JAVIER NAREA CHUMBI

**“ANÁLISIS DE PLASTICIDAD EN PÓRTICOS PLANOS”**

*Edición y Producción: Diego Javier Narea Chumbi*

Impreso en Ecuador – *Printed in Ecuador*

ÍNDICE

ÍNDICE.....	i
LISTA DE FIGURAS .....	v
LISTA DE TABLAS .....	vii
LISTA DE SÍMBOLOS .....	xi
DEDICATORIA.....	xv
PREFACIO.....	xvii
PRÓLOGO .....	xix
AGRADECIMIENTO .....	xxi
<b>CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>1</b>
1.1 INTRODUCCIÓN.....	3
1.2 JUSTIFICACIÓN.....	4
1.3 OBJETIVO GENERAL .....	5
1.4 OBJETIVOS ESPECÍFICOS .....	5
1.5 HIPÓTESIS INICIALES.....	5
1.6 ESBOZO DE LA TESIS .....	6
<b>CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO .....</b>	<b>7</b>
2.1 INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS PLÁSTICO DE ESTRUCTURAS.....	9
2.1.1 INTRODUCCIÓN .....	9
2.1.2 HIPÓTESIS Y FUNDAMENTOS.....	11

2.1.3 PROCEDIMIENTOS DE ANÁLISIS .....	12
2.2 MODELOS REOLÓGICOS DE PLASTICIDAD UNIDIMENSIONAL .....	13
2.2.1 MODELO ELASTO-PLÁSTICO UNIDIMENSIONAL CON ENDURECIMIENTO LINEAL .....	13
2.2.2 MODELO ELASTO-VISCOPLÁSTICO PERFECTO UNIDIMENSIONAL	15
2.3 TEORÍA INCREMENTAL DE PLASTICIDAD UNIDIMENSIONAL .....	18
2.3.1 TEORÍA INCREMENTAL PARA EL MODELO ELASTO-PLÁSTICO UNIDIMENSIONAL CON ENDURECIMIENTO LINEAL .....	18
2.3.2 TEORÍA INCREMENTAL PARA EL MODELO ELASTO- VISCOPLÁSTICO PERFECTO UNIDIMENSIONAL .....	21
2.4 INTEGRACIÓN NUMÉRICA DEL MODELO ELASTO-VISCOPLÁSTICO DE PERZYNA .....	26
2.4.1 INTEGRACIÓN NUMÉRICA DEL MODELO ELASTO-VISCOPLÁSTICO DE PERZYNA CON ENDURECIMIENTO LINEAL .....	26
2.5 ANÁLISIS DE ELEMENTOS TIPO BARRA SOMETIDOS A CARGAS AXIALES.....	33
2.5.1 DISCRETIZACIÓN EN ELEMENTOS FINITOS .....	34
2.6 ANÁLISIS DE LA FLEXIÓN EN VIGAS ESBELTAS MEDIANTE LA TEORÍA DE EULER-BERNOULLI.....	36
2.6.1 DISCRETIZACIÓN EN ELEMENTOS FINITOS .....	38
2.7 PUNTOS ÓPTIMOS PARA EL CÁLCULO DE TENSIONES Y DEFORMACIONES.....	41
<b>CAPÍTULO 3: MODELACIÓN PROPUESTA.....</b>	<b>43</b>
3.1 MODELO PROPUESTO PARA EL ANÁLISIS DE PLASTICIDAD EN PÓRTICOS PLANOS.....	45
3.2 FORMULACIÓN DEL MODELO .....	45
3.2.1 DETERMINACIÓN DE FUERZAS INTERNAS EN UNA SECCIÓN .....	47

3.2.2 INCORPORACIÓN DEL MODELO ELASTO-VISCOPLÁSTICO DE PERZYNA CON ENDURECIMIENTO LINEAL A LA FORMULACIÓN POR ELEMENTOS FINITOS DE UNA BARRA SOMETIDO A CARGA AXIAL.....	49
3.2.3 INCORPORACIÓN DEL MODELO ELASTO-VISCOPLÁSTICO DE PERZYNA CON ENDURECIMIENTO LINEAL A LA FORMULACIÓN POR ELEMENTOS FINITOS DE LA VIGA DE EULER-BERNOULLI.....	53
3.2.4 FORMULACIÓN EN ELEMENTOS FINITOS PARA ELEMENTOS TIPO BARRA SOMETIDOS A ESFUERZOS AXIALES Y DE FLEXIÓN INCORPORANDO EL MODELO ELASTO-VISCOPLÁSTICO DE PERZYNA CON ENDURECIMIENTO LINEAL .....	58
<b>CAPÍTULO 4: IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL DEL MODELO PROPUESTO.....</b>	<b>63</b>
4.1 IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL DEL MODELO PROPUESTO .....	65
4.1.1 ALGORITMO PRINCIPAL DEL MODELO (Archivo: PRINCIPAL.m).....	65
4.1.2 ALGORITMO PARA LECTURA DE DATOS (Archivo: f_lectura.m) .....	66
4.1.3 ALGORITMO PARA LA DETERMINACIÓN DE LA RESPUESTA DEL PÓRTICO (Archivo: f_interna.m).....	66
4.1.4 ALGORITMO PARA DISCRETIZACIÓN DE LA SECCIÓN DE UN ELEMENTO (Archivo: f_seccion.m) .....	67
4.1.5 ALGORITMO DE RETORNO APLICADO AL MODELO ELASTO-VISCOPLÁSTICO DE PERZYNA CON ENDURECIMIENTO LINEAL (Archivo: f_tension.m) .....	68
<b>CAPÍTULO 5: EJEMPLOS DE APLICACIÓN.....</b>	<b>69</b>
5.1 INTRODUCCIÓN.....	71
5.2 EJEMPLO 1 .....	72
5.2.1 SOLUCIÓN “EXACTA”.....	72
5.2.2 SOLUCIÓN MEDIANTE EL MODELO IMPLEMENTADO .....	78

5.3 EJEMPLO 2.....	86
5.3.1 SOLUCIÓN MEDIANTE EL MODELO IMPLEMENTADO.....	88
5.3.2 VERIFICACIÓN DEL EQUILIBRIO MEDIANTE EL SAP2000.....	93
5.4 EJEMPLO 3.....	94
5.4.1 SOLUCIÓN MEDIANTE EL MODELO IMPLEMENTADO.....	96
5.4.2 VERIFICACIÓN DEL EQUILIBRIO MEDIANTE EL SAP2000.....	101
5.5 EJEMPLO 4.....	102
5.5.1 SOLUCIÓN MEDIANTE EL MODELO IMPLEMENTADO.....	104
5.5.2 VERIFICACIÓN DEL EQUILIBRIO MEDIANTE EL SAP2000.....	109
<b>CAPÍTULO 6: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....</b>	<b>111</b>
6.1 CONCLUSIONES.....	113
6.2 RECOMENDACIONES.....	115
<b>ANEXOS.....</b>	<b>117</b>
<b>REFERENCIAS.....</b>	<b>147</b>



---

**LISTA DE FIGURAS**
**CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN**

Figura 1.1 Esquema de las escalas de enfoque a emplear en el modelo propuesto. a) Pórtico plano de la estructura idealizada (escala global). b) Curva de evolución de la respuesta interna de la sección, obtenida a partir de la aplicación de la Mecánica de Medios Continuos Unidimensional (escala local). .....3

**CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO**

Figura 2.1 Curva esfuerzo deformación para un material elastoplástico perfecto. ....9

Figura 2.2 Evolución de la sección de un elemento cuyo material es elastoplástico perfecto sometido a flexión. ....10

Figura 2.3 Curva momento-curvatura. ....11

Figura 2.4 Modelo elasto-plástico unidimensional con endurecimiento. ....13

Figura 2.5 Modelo elasto-visco-plástico perfecto. ....16

Figura 2.6 Ley de endurecimiento de tipo lineal. ....19

Figura 2.7 Curva típica esfuerzo-deformación para el modelo elasto-plástico con endurecimiento lineal. ....19

Figura 2.8 Curva típica esfuerzo-deformación para el Modelo Elasto-Viscoplástico Perfecto Unidimensional. ....22

Figura 2.9 Modelo elasto-viscoplástico de Perzyna. ....24

Figura 2.10 Curva esfuerzo-deformación con puntos del estado trial para el modelo elasto-viscoplástico de Perzyna con endurecimiento lineal. ....28

Figura 2.11 Esquema de aplicación del Algoritmo de Retorno a un punto en estado trial fuera de la curva esfuerzo-deformación. ....29

Figura 2.12 Elemento tipo barra sometidos a cargas axiales. ....33

Figura 2.13 Elemento unidimensional de clase  $C_0$  de 2 nodos. Variables nodales y funciones de forma. ....34

Figura 2.14 Viga de Euler-Bernoulli. ....36

Figura 2.15 Elemento unidimensional de clase C1 de 2 nodos. Variables nodales y funciones de forma..... 38

**CAPÍTULO 3: MODELACIÓN PROPUESTA**

Figura 3.1 Modelo del pórtico respecto al sistema global, elemento tipo viga en ejes locales. .... 46

Figura 3.2 Proceso general de aplicación del Modelo Propuesto para el Análisis de Plasticidad en Pórticos Planos..... 46

Figura 3.3 Discretización de la sección en dovelas y representación de las deformaciones de una sección correspondiente al j-ésimo punto de Gauss. .... 47

Figura 3.4 Elemento tipo barra sometido a flexo-compresión o flexo-tracción..... 58

Figura 3.5 Pórtico plano y sus elementos en ejes locales y globales. .... 60

**CAPÍTULO 5: EJEMPLOS DE APLICACIÓN**

Figura 5.1 Viga simplemente apoyada en estado elastoplástico. .... 72

Figura 5.2 Estado elastoplástico de una sección doblemente simétrica. .... 73

Figura 5.3 Modelo en elementos finitos de la viga simplemente apoyada del EJEMPLO 1. .... 78

Figura 5.4 Evolución de la sección ilustrativa para el EJEMPLO 1. .... 83

Figura 5.5 Pórtico correspondiente al EJEMPLO 2..... 86

Figura 5.6 Evolución de la sección ilustrativa para el EJEMPLO 2. .... 92

Figura 5.7 Pórtico correspondiente al EJEMPLO 3..... 94

Figura 5.8 Evolución de la sección ilustrativa para el EJEMPLO 3. .... 100

Figura 5.9 Pórtico correspondiente al EJEMPLO 4..... 102

Figura 5.10 Evolución de la sección ilustrativa para el EJEMPLO 4. .... 108

**ANEXOS**

Figura A.7-1 Curva esfuerzo- deformación, para ensayo de carga axial monotónica en una barra de acero de refuerzo ( $f_y=4200\text{kg/cm}^2$ ). .... 144

## LISTA DE TABLAS

**CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO**

Tabla 2.1 Resumen del Modelo Elasto-plástico Unidimensional con Endurecimiento Lineal.....	21
Tabla 2.2 Resumen del Modelo Elasto-Viscoplástico de Perzyna.....	25

**CAPÍTULO 5: EJEMPLOS DE APLICACIÓN**

Tabla 5.1 Valoración de resultados mediante solución “exacta” del EJEMPLO 1. ....	77
Tabla 5.2 Resumen Parámetros que definen el material.....	78
Tabla 5.3 Geometría de las secciones.....	79
Tabla 5.4 Numeración de nodos y sus coordenadas. ....	79
Tabla 5.5 Definición de elementos, de sus conexiones nodales, del tipo de material asignado.....	79
Tabla 5.6 Condiciones de contorno. ....	80
Tabla 5.7 Cargas nodales externas aplicadas.....	80
Tabla 5.8 Desplazamientos nodales finales para el EJEMPLO 1.....	84
Tabla 5.9 Cargas nodales externas para el EJEMPLO 1. ....	84
Tabla 5.10 Resultados obtenidos mediante el modelo implementado para el EJEMPLO 1. ....	85
Tabla 5.11 Resumen Parámetros que definen el material.....	86
Tabla 5.12 Geometría de las secciones.....	86
Tabla 5.13 Numeración de nodos y sus coordenadas. ....	87
Tabla 5.14 Definición de elementos, de sus conexiones nodales, del tipo de material asignado.....	87
Tabla 5.15 Condiciones de contorno. ....	87
Tabla 5.16 Cargas nodales externas aplicadas.....	88

Tabla 5.17 Desplazamientos nodales finales para el EJEMPLO 2. ....	93
Tabla 5.18 Cargas nodales externas para el EJEMPLO 2. ....	93
Tabla 5.19 Cargas nodales externas para el EJEMPLO 2 desde el SAP2000. ....	93
Tabla 5.20 Resumen Parámetros que definen el material. ....	94
Tabla 5.21 Geometría de las secciones. ....	94
Tabla 5.22 Numeración de nodos y sus coordenadas. ....	95
Tabla 5.23 Definición de elementos, de sus conexiones nodales, del tipo de material asignado. ....	95
Tabla 5.24 Condiciones de contorno. ....	95
Tabla 5.25 Cargas nodales externas aplicadas. ....	96
Tabla 5.26 Desplazamientos nodales finales para el EJEMPLO 3. ....	101
Tabla 5.27 Cargas nodales externas para el EJEMPLO 3. ....	101
Tabla 5.28 Cargas nodales externas para el EJEMPLO 3 desde el SAP2000. ....	101
Tabla 5.29 Resumen Parámetros que definen el material. ....	102
Tabla 5.30 Geometría de las secciones. ....	102
Tabla 5.31 Numeración de nodos y sus coordenadas. ....	103
Tabla 5.32 Definición de elementos, de sus conexiones nodales, del tipo de material asignado. ....	103
Tabla 5.33 Condiciones de contorno. ....	103
Tabla 5.34 Cargas nodales externas aplicadas. ....	104
Tabla 5.35 Desplazamientos nodales finales para el EJEMPLO 4. ....	109
Tabla 5.36 Cargas nodales externas para el EJEMPLO 4. ....	109
Tabla 5.37 Cargas nodales externas para el EJEMPLO 4 desde el SAP2000. ....	109

**ANEXOS**

Tabla A.7-1 Disposición de datos en hoja puntos\_Gauss..... 121

Tabla A.7-2 Disposición de datos en hoja modulo. .... 121

Tabla A.7-3 Disposición de datos en hoja fluencia. .... 122

Tabla A.7-4 Disposición de datos en hoja endurecimiento. .... 122

Tabla A.7-5 Disposición de datos en hoja viscosidad. .... 122

Tabla A.7-6 Disposición de datos en hoja seccion. .... 122

Tabla A.7-7 Disposición de datos en hoja nodo. .... 122

Tabla A.7-8 Disposición de datos en hoja barra. .... 123

Tabla A.7-9 Disposición de datos en hoja barra. .... 123

Tabla A.7-10 Disposición de datos en hoja carga. .... 123

Tabla A.7-11 Resultados obtenidos en laboratorio para el ensayo a tracción. .... 143



## LISTA DE SÍMBOLOS

<b>Símbolo</b>	<b>Descripción</b>
$A$	Operador de ensamblaje.
$b$	Carga distribuida de axial por unidad de longitud
$\underline{\underline{B}}$	Matriz de deformación axial
$\underline{\underline{B}}_f$	Matriz de deformación de flexión o de curvatura del elemento
$\partial E_\sigma$	Superficie de fluencia
$E$	Módulo de elasticidad
$E^{\tan}$	Módulo de deformación tangente
$E_\sigma$	Dominio elástico
$\bar{E}_\sigma$	Espacio de tensiones admisibles
(e)	Superíndice que indica que la variable sobre la que se encuentra corresponde a un elemento
$f$	Función de fluencia
$F^{\text{int}}$	Fuerza interna
$F_x$	Fuerza en la dirección del eje $x$
$g$	Función de endurecimiento
$H'$	Módulo de endurecimiento
$I$	Inercia de la sección respecto al eje neutro
$i$	Contador
$j$	Contador
$k$	Contador
$\underline{\underline{K}}^{\tan}$	Matriz de rigidez tangente del sistema
$\underline{\underline{K}}_a^{\tan}$	Matriz de rigidez tangente del sistema para el caso axial
$\underline{\underline{K}}_f^{\tan}$	Matriz de rigidez tangente del sistema para el caso de flexión
$M$	Momento flector
$Me$	Momento límite elástico
$M^{\text{int}}$	Momento interno
$M_p$	Momento de fluencia de toda la sección
$\underline{\underline{N}}$	Matriz de las funciones de forma
$ndov$	Número de dovelas
$ngauss$	Número de puntos de Gauss
$P$	Carga puntual perpendicular al eje del elemento

$\underline{P}$	Vector de fuerzas nodales externas
$\underline{P}^{\text{int}}$	Vector de fuerzas nodales internas
$q$	Ley de endurecimiento
$S^z$	Doble del momento estático de la semisección que permanece elástica respecto al eje neutro
$\underline{u}$	Vector de desplazamientos nodales
$u$	Desplazamiento en el sentido del eje x
$v$	Desplazamiento en el sentido del eje y
$w$	Desplazamiento en el sentido del eje z
$W$	Trabajo virtual
$W^z$	Módulo resistente de la zona que permanece elástica respecto al eje neutro
$X$	Fuerza externa axial
$x_m$	Coordenada del centro del elemento
$\alpha$	Variable de endurecimiento
$\delta_{\text{VAR}}$	Desplazamiento virtual de la variable "VAR"
$\varepsilon$	Deformación unitaria
$\dot{\varepsilon}^p$	Velocidad de deformación plástica
$\dot{\varepsilon}^{vp}$	Velocidad de deformación visco-plástica
$\varepsilon^e$	Deformación unitaria en el elemento elástico
$\varepsilon^p$	Deformación unitaria en el modelo plástico
$\varepsilon^{vp}$	Deformación unitaria en el modelo visco-plástico
$\varepsilon_x$	Deformación unitaria en el sentido del eje x
$\varepsilon_y$	Deformación unitaria en el sentido del eje y
$\varepsilon_z$	Deformación unitaria en el sentido del eje z
$\phi$	Ángulo de dirección
$\gamma$	Multiplificador plástico
$\gamma_{xy}$	Distorsión unitaria en el plano xy
$\gamma_{xz}$	Distorsión unitaria en el plano xz
$\gamma_{yz}$	Distorsión unitaria en el plano yz
$\eta$	Parámetro de viscosidad
$\kappa$	Curvatura
$\kappa e$	Curvatura en el momento de límite elástico



$\theta$	Factor de peso en "Método Teta", Ángulo de giro dentro de la Teoría de Euler-Bernolli
$\sigma$	Esfuerzo
$\sigma^{(1)}$	Esfuerzo en el elemento (1)
$\sigma^{(2)}$	Esfuerzo en el elemento (2)
$\sigma^e$	Esfuerzo en el elemento elástico
$\sigma^p$	Esfuerzo en el modelo plástico
$\sigma^v$	Esfuerzo en el elemento viscoso
$\sigma^{vp}$	Esfuerzo en el modelo visco-plástico
$\sigma_y$	Esfuerzo de fluencia
$\sigma_x$	Esfuerzo axial en la dirección del eje x
$\varpi$	Carga distribuida de flexión por unidad de longitud
$\omega_j$	Peso correspondiente al j-ésimo punto de la cuadratura de Gauss-Legendre
$\xi$	Coordenada natural



**DEDICATORIA**

El presente trabajo está dedicado a mis padres que gracias a su esfuerzo, cariño y ejemplo, han sido pilar fundamental a lo largo de mi vida.

A mis hermanos por su comprensión, apoyo y alegría brindados.

A todos y cada uno de mis amigas y amigos quienes me han extendido su mano.



## PREFACIO

En vista de que en varias circunstancias las acciones a las que se encuentra solicitada una estructura provocan que la misma se comporte de forma tal que la relación acción-efecto es de carácter no lineal, es importante incursionar en los principios y métodos que permiten analizar la respuesta de la misma bajo este comportamiento.

Una de las causas de análisis de la no linealidad en las estructuras es la debida al comportamiento del material constitutivo de sus elementos. A veces incluso desde el momento mismo en que una estructura entra en servicio, y más aún frente a determinadas situaciones de sollicitaciones externas (sismo por ejemplo) a las que se encuentra sometida una edificación, ocasionan que el material que componen sus miembros incursione fuera del rango elástico. Es por esto que se considera necesario dar un enfoque hacia el tratamiento del análisis plástico de las estructuras.

Considerando que es importante conocer a más del estado resultante de una estructura, la evolución que ha sufrido hasta llegar a su estado final, se propondrá un modelo que aporte con información detallada acerca del estado tenso-deformacional mientras pasa de un estado elástico a uno plástico del material constitutivo. Dicho modelo se concentrará en el tratamiento de pórticos planos.

Debido a que la formulación que implica el análisis no lineal del material dentro de las estructuras, es importante conocer y/o desarrollar algoritmos que me permitan, en conjunto con la aplicación de los métodos numéricos, encontrar la solución de la misma con una aproximación adecuada, sin olvidar que la mejor forma de tratar problemas de tipo numérico, es su implementación computacional con el objetivo de elaborar herramientas de apoyo.



## PRÓLOGO

En el presente trabajo se describe en forma general los tipos de no linealidad que se presentan en el análisis de estructural, para dentro de este contexto enfocarnos en el objetivo de la tesis, que es el análisis plástico de pórticos planos.

Bajo esta premisa, se trata en forma detallada los modelos reológicos unidimensionales: elasto-plástico con endurecimiento lineal, elasto-viscoplástico perfecto, y el elasto-viscoplástico de Perzyna con endurecimiento lineal. Posteriormente se aborda el tema de los elementos finitos tipo barra, sometidos a efectos axiales, y de flexión. Dentro de cada uno de éstos temas se deduce la formulación matemática que los gobierna y se describe la forma en que se desarrollará su solución numérica.

Al final y en base a los conceptos desarrollados, se plantea un modelo para analizar pórticos planos mediante elementos finitos tipo barra que incluyan efectos de tipo axial y de flexión, pero incorporando el modelo elasto-viscoplástico de Perzyna con endurecimiento lineal dentro de su formulación, para determinar la respuesta de la estructura fuera del rango elástico. Para el tratamiento de la solución numérica del modelo propuesto se utiliza la estrategia incremental iterativa, se expone los algoritmos de resolución del fenómeno, y al final se desarrolla una herramienta computacional para dicho modelo empleando el programa MATLAB, exponiendo algunos ejemplos de aplicación.

### Palabras clave:

- Análisis no lineal de estructuras.
- Análisis plástico de pórticos planos.
- Modelos reológicos de plasticidad unidimensional.
- Método de los elementos finitos.
- Estrategia incremental iterativa.
- Programa MATLAB.





**AGRADECIMIENTO**

A mi familia por todo su apoyo y afecto.

A todos y cada uno de los profesores que impartieron su cátedra dentro de la maestría.

Al Ing. Esteban Samaniego por su valioso aporte y apoyo, tanto académico como personal a lo largo de la dirección de la presente tesis.



# **CAPÍTULO 1**

## **INTRODUCCIÓN**

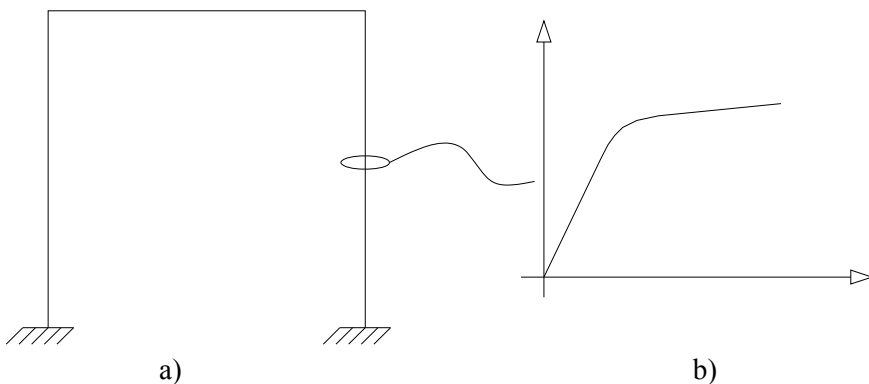


## 1.1 INTRODUCCIÓN

La estructura de una edificación en general se puede idealizar como un sistema de marcos rígidos bi o tridimensionales sometidos a la acción de determinadas cargas o deformaciones, y sujetas a un conjunto de condiciones de contorno preestablecidas, bajo este contexto en este caso nos limitaremos al estudio de pórticos planos.

Para determinar la respuesta de una estructura (estado tensional y deformacional), es importante realizar hipótesis sobre el comportamiento físico-mecánico de los materiales que la conforman, los cuales al sobrepasar ciertos límites de tensión o deformación no se pueden representar con modelos lineales como los elásticos (Singer & Pytel, 1982), por tanto se debe recurrir al empleo de modelos adecuados que incluyan el comportamiento inelástico. Además es necesario idealizar su geometría, condiciones de apoyo, y seleccionar los efectos relevantes que se han de tomar en cuenta para el análisis. Luego se debe plantear una formulación matemática que represente el modelo y finalmente definir la estrategia numérica que me permita resolver dicha formulación.

En el presente trabajo se desarrollará una metodología que permita analizar el comportamiento en régimen plástico de los elementos de edificaciones, que pueden modelarse como pórticos planos. Si bien es cierto existe varios tipos de materiales empleados en la construcción de edificaciones, a cada material se lo puede caracterizar mediante parámetros físico-mecánicos que describen de forma adecuada, su comportamiento inelástico. El modelo a proponer será de carácter multiescala (véase Figura 1.1), bajo el siguiente enfoque:



**Figura 1.1** Esquema de las escalas de enfoque a emplear en el modelo propuesto. a) Pórtico plano de la estructura idealizada (escala global). b) Curva de evolución de la respuesta interna de la sección, obtenida a partir de la aplicación de la Mecánica de Medios Continuos Unidimensional (escala local).

- Una escala global de la estructura, pues a partir de la idealización de su modelo, vamos a determinar su respuesta frente a las sollicitaciones externas.

- Y, otra escala local para una sección transversal de cada elemento estructural, que se encuentra gobernada por la *Mecánica de Medios Continuos Unidimensional* (Oliver Olivella & de Saracibar Bosch, 2002), (Samaniego Alvarado, 2007b), y por *Las Leyes Constitutivas de los Materiales* (Samaniego Alvarado, 2007a).

Cabe mencionar que la mayor parte de los métodos empleados para el análisis de estructuras, se enfocan en exponer la respuesta final de la estructura dejando de lado la evolución que ha sufrido la misma hasta llegar a tal condición. Es por esto que la propuesta del presente trabajo, empleando el enfoque multiescala indicado, es aportar con información acerca de la evolución del estado tenso-deformacional en varias secciones de los elementos que componen la estructura de modo que en cada paso podamos analizar su comportamiento, y al final disponer de un registro de su respuesta frente a una historia de sollicitaciones externas dada.

Para el desarrollo de la metodología propuesta, emplearemos *Algoritmos de Inelasticidad Computacional* (Simo & Hughes, 1998), en la solución del modelo que describe el comportamiento del material constitutivo de los elementos de la estructura en régimen plástico, dicho modelo será acorde a la *Teoría de Plasticidad Unidimensional*. A la estructura la idealizaremos como un pórtico plano, que será resuelto mediante la aplicación del método de los elementos finitos incluyendo en dicha formulación la plasticidad del material. Con estos conceptos, al final se elaborará una herramienta computacional, que será implementada utilizando el programa MATLAB.

## 1.2 JUSTIFICACIÓN

Es importante el análisis inelástico de una estructura, pues es conocido que incluso bajo cargas de servicio, existen puntos dentro de la estructura en los cuales se excede el límite elástico, ya sea por la aplicación de cargas puntuales, por defectos en la fabricación de los materiales, por errores en la construcción y montaje, o por deficiencias en los cálculos. El análisis del comportamiento en el rango inelástico de una estructura se hace más evidente cuando la misma se encuentra bajo sollicitaciones de carga repetida o de inversión del sentido de su aplicación, como es el caso efectos sísmicos, por ejemplo.

Frente a lo expuesto, y debido a que la mayoría de los enfoques para el análisis del comportamiento de las estructuras se preocupan del estado final de la misma frente a las sollicitaciones existentes, a veces sin detallar lo que sucede a lo largo de la aplicación de las cargas, el presente trabajo se justifica en la necesidad que se tiene de conocer cómo va evolucionando el material fuera del rango elástico, a medida que se incrementa la carga hasta llegar a la sollicitación requerida, en varias secciones de los elementos que componen el pórtico.

Por lo tanto en base a leyes constitutivas que rigen el comportamiento de los materiales de los elementos que componen la estructura de una edificación y a la verificación del equilibrio entre la respuesta interna de la estructura y las acciones externas a las que se somete, se desarrollará una herramienta numérica mediante la cual se podrá encontrar la respuesta de la estructura (escala global) fuera del rango elástico, pero aportando con información acerca de la evolución del comportamiento interno de la misma en varias secciones de los elementos, para diferentes escenarios de carga. Además, al ir describiendo la evolución del estado tenso-deformacional en varias secciones de la estructura se podrá obtener un registro de la historia de deformación que sufrió la misma.

### **1.3 OBJETIVO GENERAL**

Determinar el comportamiento plástico de los pórticos planos de una estructura sin llegar al colapso, generando información acerca de su evolución durante el proceso inelástico.

### **1.4 OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

Los principales fines que se pretende alcanzar con el presente trabajo son:

- Analizar los principales modelos de plasticidad para materiales.
- Desarrollar la solución numérica del modelo elegido para caracterizar el comportamiento plástico del material.
- Proponer un modelo que incluya en la formulación de elementos finitos el modelo de plasticidad que caracteriza el material del elemento, de modo que sea aplicable para la resolución de pórticos planos fuera del rango elástico.
- Desarrollar una herramienta numérica, en base al modelo propuesto, que permita analizar pórticos planos en estado plástico, de forma tal que aporte con información respecto a la evolución del estado tenso-deformacional a lo largo de la historia de carga.
- Valorar el modelo desarrollado.

### **1.5 HIPÓTESIS INICIALES**

Se partirá de las siguientes consideraciones:

- Las deformaciones son infinitesimales.

- No se considerarán los efectos debidos al cortante, y se toman en cuenta las acciones debidas a carga axial y a flexión, asumiendo para la flexión las hipótesis cinemáticas de Euler-Bernoulli.
- Las secciones de los elementos de los pórticos son tales que no se tendrá problemas de pandeo local.

Como se dijo anteriormente los pórticos a analizar se encuentran en el plano, así pues es suficiente emplear modelos reológicos unidimensionales para caracterizar su material. Dichos modelos estarán expresados en forma discreta de modo que se los pueda implementar numéricamente.

En base a los modelos reológicos se obtendrá la respuesta interna de cada elemento frente a las solicitaciones externas de tipo estático, para luego mediante la aplicación de los elementos finitos buscar el equilibrio general de la estructura.

Se tomará en cuenta básicamente los efectos de carga axial, y de flexión bajo la teoría de Euler-Bernoulli, para modelar el comportamiento de los elementos que componen los pórticos de una estructura.

Cada elemento de la estructura estará compuesto por una sola clase de material homogéneo e isotrópico (por ejemplo, acero dulce estructural), y la sección transversal será simétrica respecto al plano que contiene al pórtico.

Las cargas serán de tipo estático y monotónicas, de magnitud tal que no produzca el colapso de un elemento dentro de la estructura, por las razones que se exponen más adelante en la sección 2.1.2 HIPÓTESIS Y FUNDAMENTOS, y estarán aplicadas dentro del plano que contiene el pórtico.

## **1.6 ESBOZO DE LA TESIS**

Al tratar en el presente trabajo acerca del análisis de plasticidad en pórticos planos, que es parte del análisis no lineal de estructuras, en la primera parte del presente documento dentro del CAPÍTULO 1 se plantea una introducción al tema, su justificación, objetivos, hipótesis, y su esbozo. Más adelante en el CAPÍTULO 2 se presentan los fundamentos teóricos bases, para luego en el CAPÍTULO 3 aplicar dichos conceptos y proponer un modelo que nos ayude a llevar a cabo el análisis de plasticidad en pórticos planos. Debido a que la manera más adecuada para llevar a cabo la resolución de la modelización es su implementación computacional en el CAPÍTULO 4 se da a conocer la forma en la que se efectuó la misma, para posteriormente en el CAPÍTULO 5 presentar algunos ejemplos de aplicación, y finalmente exponer las conclusiones y recomendaciones al respecto en el CAPÍTULO 6.



## **CAPÍTULO 2**

### **MARCO TEÓRICO**



## 2.1 INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS PLÁSTICO DE ESTRUCTURAS

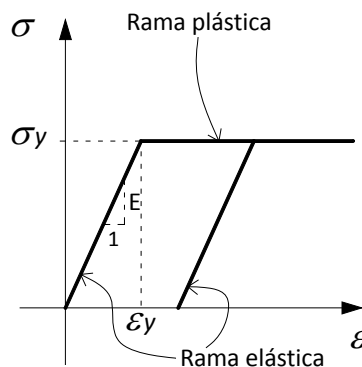
### 2.1.1 INTRODUCCIÓN

La no linealidad de estructuras en general puede deberse a 5 causas principales (Pino Velazquez, 2008):

- Debidas a comportamientos inelásticos del material. (No linealidades del material).
- Causadas por la geometría del modelo. (No linealidades geométricas).
- Desplazamientos dependientes de las condiciones de contorno. (No linealidades de contacto).
- Cargas aplicadas dependientes de las condiciones de contorno.
- Al comportamiento y desarrollo de grietas en el material. (Mecánica de la Fractura).

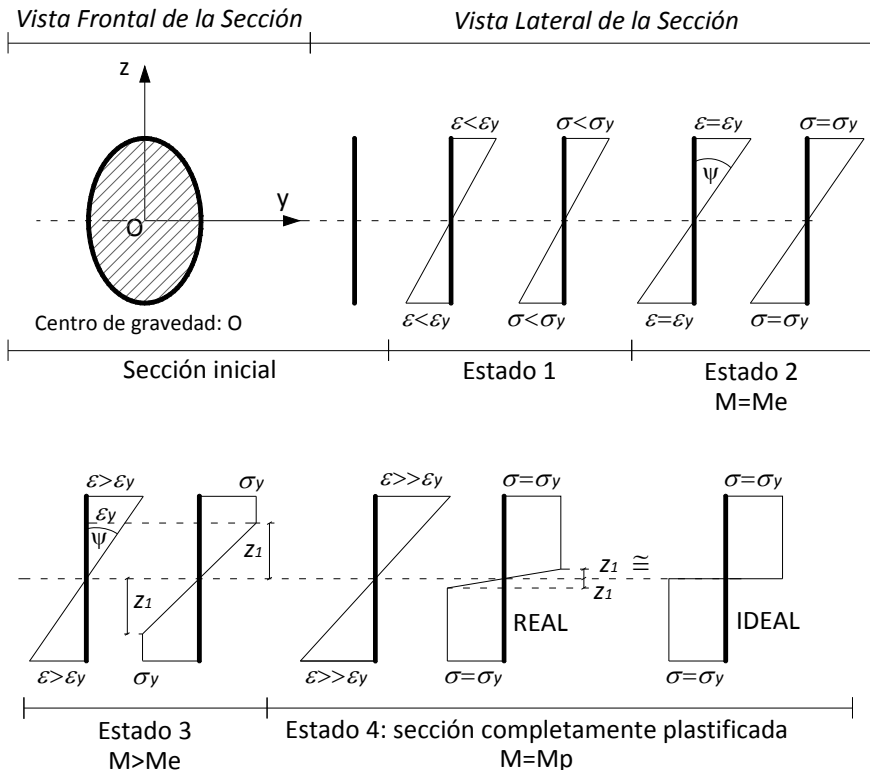
En nuestro caso nos enfocaremos en el análisis plástico (no linealidad de material) del material que compone los elementos de un pórtico en el plano. Y que al ser un caso particular del análisis no lineal también está regido por los principios básicos del mismo (Dalmau & Vilardell, 2003), que son aplicables a cualquier medio continuo, y son:

- Principio de la continuidad del medio o de la conservación de la masa.
- Principio de la cantidad de movimiento lineal: de este principio se derivan las ecuaciones de equilibrio y de movimiento (desplazamiento).
- Principio del momentum angular.
- Principio de la conservación de la energía.



*Figura 2.1* Curva esfuerzo deformación para un material elastoplástico perfecto.

Para ilustrar el comportamiento plástico de un material, vamos a considerar un elemento tipo viga conformado por un material elasto-plástico perfecto cuya curva esfuerzo-deformación es como se muestra en la Figura 2.1, con una sección doblemente simétrica, y sometido únicamente a flexión. Vamos a analizar una sección de este elemento que se encuentre sometida a un momento ( $M$ ) de mayor sollicitación para un sistema de cargas externas actuante dado. Suponiendo que dichas cargas se van incrementando gradualmente desde cero hasta alcanzar el colapso de la sección, la evolución de la sección es como se muestra en la Figura 2.2.



**Figura 2.2** Evolución de la sección de un elemento cuyo material es elastoplástico perfecto sometido a flexión.

Como se puede observar en dicha figura a medida que se incrementa el valor de  $M$ , se tiene que para el “Estado 1” la sección se encuentra en el rango elástico, ya en el “Estado 2” la sección se encuentra en el estado límite elástico a punto de entrar en la rama plástica de la curva tensión-deformación en este instante el valor de  $M = M_e$ , mientras que en el “Estado 3” la sección se encuentra en un estado elasto-plástico pues existe una zona que se encuentra en rango elástico y otra en la cual las fibras han alcanzado la fluencia, a medida que se incrementa el momento en la sección hasta alcanzar un valor de  $M = M_p$  de modo que toda la sección se encuentre plastificada es

decir **colapsada** (puesto que no admite mayor carga), la sección se encuentra en el “Estado 4”.

A partir de la ecuación (2.77) evaluando la curvatura (inverso del radio de giro) para el “Estado 4”, tenemos:

$$\kappa = -\frac{\sigma_y}{E z_1} \quad (2.1)$$

De la ecuación (2.1) notamos que mientras  $z_1 \rightarrow 0$  la curvatura tiende a infinito (Borg & Gennaro, 1962), lo que sugiere que la sección intentará girar libremente simulando una articulación, denominándose a esta condición “**rótula plástica**”. Es importante aclarar este concepto, pues como se observa en la Figura 2.2, la sección se comporta como una rótula de rozamiento que permanece rígida en tanto que  $M < M_p$ , y que permite la rotación relativa en la sección en el momento que alcanza su valor plástico  $M_p$  después de lo cual se deforma plásticamente a momento constante ( $M_p$ ), por tanto se trata de una rotación refrenada aunque la denominación “rótula plástica” sugiere una rotación libre (Massonnet & Save, 1966).

Además es posible demostrar que existe una condición límite de giro de la sección, por lo que cuando se ha generado la rótula plástica  $z_1 \rightarrow 0$ , pero no es nulo, es decir que una zona muy pequeña dentro de la sección que no alcanzara la deformación plástica (Massonnet & Save, 1966), (Pino Velazquez, 2008), por lo que en realidad el momento  $M$  que produce el “Estado 4” de plastificación total de la sección será muy cercano a  $M_p$ , dicha interpretación es tal como se muestra en la Figura 2.3.

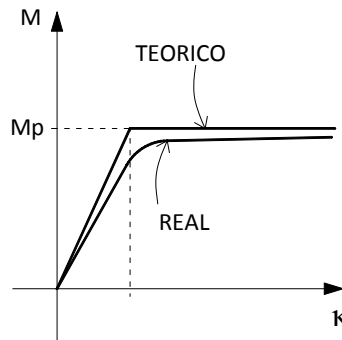


Figura 2.3 Curva momento-curvatura.

### 2.1.2 HIPÓTESIS Y FUNDAMENTOS

Bajo la premisa que únicamente vamos a considerar únicamente la no linealidad del material mediante análisis plástico, se asumen las siguientes hipótesis (Pino Velazquez, 2008):

- Que los desplazamientos y deformaciones son infinitesimales.
- La relación tenso-deformacional es no lineal.

De esta manera las tensiones y deformaciones son las que usualmente se tratan en ingeniería en fenómenos lineales, pero siendo necesario incorporar en el análisis las leyes constitutivas del material para cuando se encuentra en régimen plástico.

Cuando dentro de una estructura dada se producen rótulas plásticas, es decir cuando una o varias secciones han colapsado, cambian las condiciones en las que se comporta la estructura en general, existiendo una redistribución de la respuesta interna en los elementos que la componen, y si el colapso en varios elementos es tal que la estructura se convierte en un mecanismo, se dice que la estructura ha colapsado. Así pues, en estructuras isostáticas el colapso de toda la estructura ocurre cuando el miembro o elemento más solicitado alcanza el colapso, y es en este momento que la estructura pasa de un equilibrio estable a uno inestable; mientras que en estructuras hiperestáticas a medida que se va incrementado las solicitaciones exteriores el grado de hiperestaticidad baja un grado cada vez que uno de sus elementos ha colapsado ocasionando una redistribución de las solicitaciones. Además es importante indicar que una vez que un material ha sobrepasado el límite elástico se presentan tanto deformaciones como tensiones residuales luego que se ha descargado el material, lo cual influye en su historia de carga o descarga posterior. Es por esto que en el presente trabajo nos limitaremos a analizar estructuras bajo cargas estáticas y monotónicas de magnitud tal que no se llegue a colapsar una sección de un elemento puesto que tendríamos que variar las condiciones de contorno de la estructura de modo que se tomen en cuenta la redistribución de solicitaciones internas.

### 2.1.3 PROCEDIMIENTOS DE ANÁLISIS

En general para realizar un análisis no lineal existen principalmente 3 procesos: el incremental, el iterativo, y uno mixto “incremental iterativo” (Argyris, Boni, & Kleiber, 1982). El método incremental consiste en dividir la acción actuante en pequeños incrementos de carga e ir aplicándolos paso a paso, mientras se verifica su equilibrio, hasta lograr que su suma alcance el total de la carga. En el método iterativo se aplica inicialmente toda la carga, se determina la matriz de rigidez del sistema, y se obtiene los incrementos de desplazamiento respectivos a partir de los cuales se actualiza el vector de desplazamientos, y en base a ésta última se determina la carga de respuesta correspondiente a dichos desplazamientos, la diferencia entre la carga actuante y la carga de respuesta de la estructura es la carga a equilibrar, y el proceso se repite actualizando la matriz de rigidez del sistema hasta que la carga a equilibrar sea próxima a cero. Por último el método incremental iterativo, que es el que vamos a emplear, resulta como una combinación de los 2 anteriores, es decir dividiremos la carga total en incrementos de carga, y para cada incremento se actualizará en forma iterativa la matriz de rigidez en función del modelo reológico que gobierna el

comportamiento del material, hasta verificar que se cumpla el equilibrio entre la carga resultante y la actuante.

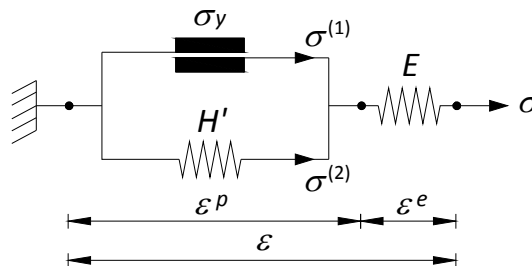
Bajo este esquema de análisis a continuación se tratarán los fundamentos teóricos necesarios para llegar a deducir la formulación que nos permitirá llevar a cabo el procedimiento incremental iterativo descrito.

## 2.2 MODELOS REOLÓGICOS DE PLASTICIDAD UNIDIMENSIONAL

Existen varios modelos reológicos (Oliver Olivella & de Saracíbar Bosch, 2002), cuya elección y uso depende de la forma en la que se espera o asume se comporte un determinado material. Para el objeto de la presente tesis se van a tratar básicamente 2 tipos de modelos: “Modelo Elasto-Plástico con Endurecimiento Lineal”, “Modelo Elasto-Viscoplástico Perfecto” en una dimensión, para posteriormente al final de la presente sección, en base a dichos modelos, obtener las ecuaciones que rigen el “Modelo Elasto-Viscoplástico de Perzyna”. Siendo este último el modelo que se va a emplear para caracterizar el comportamiento no lineal del material que compone una estructura, debido a la versatilidad que tiene para caracterizar dicho material y a las ventajas propias del modelo que se detallan más adelante en la presente sección.

### 2.2.1 MODELO ELASTO-PLÁSTICO UNIDIMENSIONAL CON ENDURECIMIENTO LINEAL

Es un modelo reológico que resulta de la combinación de un elemento elástico, con módulo de elasticidad  $E$ , en serie con un modelo plástico con endurecimiento lineal definido mediante un módulo de endurecimiento  $H'$  y esfuerzo de fluencia  $\sigma_y$ , tal como se observa en la *Figura 2.4*.



**Figura 2.4** Modelo elasto-plástico unidimensional con endurecimiento.

Al aplicar una tensión  $\sigma$  al modelo de la Figura 2.4, dicha tensión es la misma y se transmite tanto al modelo plástico como al elemento elástico, por estar colocados en serie. En el modelo plástico, al estar conformado por un elemento friccional (con

esfuerzo de fluencia  $\sigma_y$ ) y un elemento elástico (caracterizado por un módulo de endurecimiento  $H'$ ) en paralelo, ambos elementos tienen el mismo valor de deformación unitaria  $\varepsilon^p$ , mientras que la deformación del elemento elástico es  $\varepsilon^e$ , y la deformación total  $\varepsilon$  del modelo corresponde a la suma de  $\varepsilon^p$  y  $\varepsilon^e$ . Por tanto a partir de las ecuaciones de equilibrio de tensiones y de compatibilidad de las deformaciones, tenemos:

$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \\ \Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^e + \Delta\varepsilon^p \end{cases} \rightarrow \text{descomposición aditiva de la deformación}$$

$$\begin{cases} \sigma = \sigma^e = \sigma^p \\ \Delta\sigma = \Delta\sigma^e = \Delta\sigma^p \end{cases}, \text{ sabiendo que } \sigma^p = \sigma^{(1)} + \sigma^{(2)}, \text{ entonces} \quad (2.2)$$

$$\sigma^{(1)} = \sigma^p - \sigma^{(2)} = \sigma - H' \varepsilon^p$$

siendo,

$\varepsilon$  : deformación unitaria

$\varepsilon^e$  : deformación unitaria en el elemento elástico

$\varepsilon^p$  : deformación unitaria en el modelo plástico

$\sigma$  : esfuerzo

$\sigma^e$  : esfuerzo en el elemento elástico

$\sigma^p$  : esfuerzo en el modelo plástico

$\sigma^{(1)}$  : esfuerzo en el elemento friccional

$\sigma^{(2)}$  : esfuerzo en el elemento elástico, cuyo módulo de endurecimiento es  $H'$

A partir de la ecuación (2.2) analizaremos el comportamiento del modelo propuesto así:

- Cuando  $|\sigma^{(1)}| < \sigma_y$ , el modelo plástico con endurecimiento no se deforma y el incremento en la deformación total  $\Delta\varepsilon$  es absorbido completamente por el elemento elástico, y el proceso es enteramente *elástico*, tal como se describe según las siguientes ecuaciones.

$$\text{Si } |\sigma - H' \varepsilon^p| < \sigma_y, \text{ entonces } \begin{cases} \Delta\varepsilon^p = 0 \\ \Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^e \end{cases} \text{ por tanto } \Delta\sigma = E \Delta\varepsilon \quad (2.3)$$

- Cuando  $|\sigma^{(1)}| = |\sigma - H' \varepsilon^p| = \sigma_y$ , se tienen las siguientes posibilidades:



- a) Si  $\sigma \cdot \Delta\sigma > 0$ , nos encontramos en un *proceso de carga inelástica*. Aquí tanto  $\sigma$  como  $\Delta\sigma$  deben tener el mismo signo, por lo que el incremento o decremento en el esfuerzo total es el mismo en ambos elementos: en el modelo plástico con endurecimiento, y en el elemento elástico por estar dispuestos en serie, y teniendo en cuenta que el elemento que absorbe dicho esfuerzo dentro del modelo plástico es el componente caracterizado por el módulo de endurecimiento  $H'$ . Lo anterior se expresa así:

$$\Delta\sigma = \Delta\sigma^e = \Delta\sigma^p, \text{ siendo } \Delta\sigma^e = E \Delta\varepsilon^e \text{ y } \Delta\sigma^p = H' \Delta\varepsilon^p \quad (2.4)$$

Mientras que el incremento o decremento en la deformación es absorbido por ambos elementos del modelo, así pues la deformación total se determina mediante la suma de la deformación correspondiente al elemento elástico y al del elemento plástico con endurecimiento lineal, tal como se indica a continuación a partir de la ecuación (2.4):

$$\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^e + \Delta\varepsilon^p = \frac{1}{E} \Delta\sigma + \frac{1}{H'} \Delta\sigma = \frac{E + H'}{EH'} \Delta\sigma \quad (2.5)$$

De la expresión anterior se puede observar que existe proporcionalidad entre  $\Delta\sigma$  y  $\Delta\varepsilon$ , a esta relación se le conoce en general como *módulo de deformación tangente*  $E^{\tan}$ , y que para el presente caso elasto-plástico es:

$$\Delta\sigma = \frac{EH'}{E + H'} \Delta\varepsilon = E^{\tan} \Delta\varepsilon \quad (2.6)$$

- b) Si  $\sigma \cdot \Delta\sigma < 0$ ,  $\sigma$  y  $\Delta\sigma$  tienen signo contrario lo que indica que el valor del esfuerzo en valor absoluto disminuye, y por tanto cualquier cambio de deformación  $\Delta\varepsilon$  es absorbido por el elemento elástico, a este caso lo denominaremos *proceso de descarga elástica*, así:

$$\text{siendo } \sigma \cdot \Delta\sigma < 0, \text{ se tiene } \Delta\varepsilon^p = 0 \therefore \Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^e, \text{ entonces } \Delta\sigma = E \Delta\varepsilon \quad (2.7)$$

### 2.2.2 MODELO ELASTO-VISCOPLÁSTICO PERFECTO UNIDIMENSIONAL

Este modelo reológico es análogo al caso anterior, pues consta de un elemento elástico, con módulo de elasticidad  $E$ , en serie con un modelo visco-plástico definido mediante un componente con parámetro de viscosidad  $\eta$  y otro caracterizado por el esfuerzo de fluencia  $\sigma_y$ , tal como se muestra en la *Figura 2.5*.

El presente modelo considera la velocidad de deformación de un material que se encuentra sometido a un proceso de carga; por tanto es de gran utilidad para el análisis de la respuesta de materiales que presenten algún comportamiento viscoso, y en especial cuando se someten a cargas donde el tiempo es un factor importante durante el desarrollo del fenómeno.

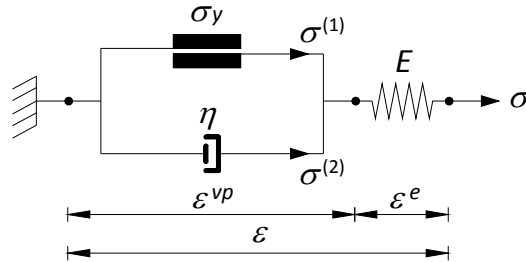


Figura 2.5 Modelo elasto-visco-plástico perfecto.

Del equilibrio de tensiones y compatibilidad de las deformaciones, tanto el elemento friccional como el viscoso comparten la misma deformación  $\epsilon^{vp}$ , siendo  $\epsilon^e$  la deformación del elemento elástico, la deformación total  $\epsilon$  del modelo es la suma de  $\epsilon^{vp}$  y  $\epsilon^e$ . Mientras que la tensión  $\sigma$  es la misma y se transmite tanto al modelo visco-plástico como al elemento elástico, por estar colocados en serie. Lo que se expresa de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \epsilon = \epsilon^e + \epsilon^{vp} \\ \Delta\epsilon = \Delta\epsilon^e + \Delta\epsilon^{vp} \end{cases} \rightarrow \text{descomposición aditiva de la deformación}$$

$$\begin{cases} \sigma = \sigma^e = \sigma^{vp} \\ \Delta\sigma = \Delta\sigma^e = \Delta\sigma^{vp} \end{cases}, \text{ sabiendo que } \sigma^{vp} = \sigma^{(1)} + \sigma^{(2)}, \text{ entonces} \quad (2.8)$$

$$\sigma^{(1)} = \sigma^{vp} - \sigma^{(2)} = \sigma - \eta \dot{\epsilon}^{vp}$$

siendo,

$\epsilon$  : deformación unitaria

$\epsilon^e$  : deformación unitaria en el elemento elástico

$\epsilon^{vp}$  : deformación unitaria en el modelo visco-plástico

$\sigma$  : esfuerzo

$\sigma^e$  : esfuerzo en el elemento elástico

$\sigma^{vp}$  : esfuerzo en el modelo visco-plástico

$\sigma^{(1)}$  : esfuerzo en el elemento friccional

$\sigma^{(2)} = \eta \dot{\varepsilon}^{vp}$  : esfuerzo en el elemento viscoso

$\eta$  : parámetro de viscosidad,  $\eta \in [0, \infty]$

$\dot{\varepsilon}^{vp}$  : velocidad de deformación visco-plástica

El comportamiento del presente modelo se lo describe en función de los siguientes casos:

- Si  $|\sigma^{(1)}| < \sigma_y$ , el incremento en la deformación total  $\Delta\varepsilon$  es absorbido completamente por el elemento elástico, y el proceso es enteramente *elástico*, tal como se describe según las siguientes ecuaciones.

$$\text{Si } \left| \sigma - \eta \dot{\varepsilon}^{vp} \right| < \sigma_y, \text{ entonces } \begin{cases} \Delta\varepsilon^{vp} = 0 \\ \Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^e \end{cases} \text{ por tanto } \Delta\sigma = E \Delta\varepsilon \quad (2.9)$$

- Cuando  $|\sigma^{(1)}| = \left| \sigma - \eta \dot{\varepsilon}^{vp} \right| = \sigma_y$ , se tienen las siguientes posibilidades:
  - a) Si  $\sigma \cdot \Delta\sigma > 0$ , tanto  $\sigma$  como  $\Delta\sigma$  deben tener el mismo signo y nos encontramos en un *proceso de carga inelástica*, así el incremento o decremento en el esfuerzo total es el mismo en el modelo visco-plástico, y en el elemento elástico por estar dispuestos en serie, y teniendo en cuenta que el elemento que absorbe dicho esfuerzo dentro del modelo visco-plástico es el componente viscoso. Lo anterior se expresa como:

$$\Delta\sigma = \Delta\sigma^e = \Delta\sigma^{vp}, \text{ siendo } \Delta\sigma^e = E \Delta\varepsilon^e \text{ y } \Delta\sigma^{vp} = \Delta\sigma_y + \eta \dot{\varepsilon}^{vp} \quad (2.10)$$

Mientras que el incremento o decremento en la deformación es absorbido por ambos elementos del modelo, así pues la deformación total se determina mediante la suma de la deformación correspondiente al elemento elástico y al del elemento visco-plástico:

$$\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^e + \Delta\varepsilon^{vp} \quad (2.11)$$

- b) Cuando  $\sigma \cdot \Delta\sigma < 0$ ,  $\sigma$  y  $\Delta\sigma$  tienen signo contrario lo que significa que el valor del esfuerzo en valor absoluto disminuye, de modo que cualquier variación en la deformación  $\Delta\varepsilon$  es absorbido por el elemento elástico, y estamos en un *proceso de descarga elástica*, así:

siendo  $\sigma \cdot \Delta\sigma < 0$ , se tiene  $\Delta\varepsilon^{vp} = 0 \therefore \Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^e$ , entonces  $\Delta\sigma = E \Delta\varepsilon$  (2.12)

## 2.3 TEORÍA INCREMENTAL DE PLASTICIDAD UNIDIMENSIONAL

A través de la teoría incremental (Oliver Olivella & de Saracíbar Bosch, 2002) vamos a modelar matemáticamente el comportamiento tenso-deformacional de un material dado, para cada uno de los modelos descritos en la sección 2.1. Para el caso unidimensional se pretende aproximar el comportamiento tenso-deformacional mediante una serie de ramas elásticas e inelásticas.

### 2.3.1 TEORÍA INCREMENTAL PARA EL MODELO ELASTO-PLÁSTICO UNIDIMENSIONAL CON ENDURECIMIENTO LINEAL

Se define al *multiplicador plástico*  $\gamma$  como una función dependiente del tiempo  $\gamma = \gamma(t)$ , de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= \dot{\varepsilon}^p \quad \text{si } \sigma = q \\ \dot{\gamma} &= -\dot{\varepsilon}^p \quad \text{si } \sigma = -q \end{aligned} \quad \therefore \gamma = \left| \dot{\varepsilon}^p \right| \quad (2.13)$$

siendo  $q$  una función a través de la cual se define la *ley de endurecimiento*. Antes de continuar vamos a introducir el concepto de *variable de endurecimiento*  $\alpha$ , la cual también depende del tiempo y se expresa según la ecuación (2.14).

$$\alpha(t) = \int_t \left| \dot{\varepsilon}^p \right| dt = \int_t \gamma dt, \text{ por tanto } \dot{\alpha}(t) = \dot{\gamma}(t) \quad (2.14)$$

Siendo  $g(\alpha)$  una función de endurecimiento, que para el presente modelo es de tipo lineal, la *ley de endurecimiento*  $q$  también es de tipo lineal (véase Figura 2.6), y se expresa como se indica a continuación:

$$q = \sigma_y + g(\alpha), \text{ siendo } g(\alpha) = H' \alpha, \text{ de donde } q = \sigma_y + H' \alpha \quad (2.15)$$

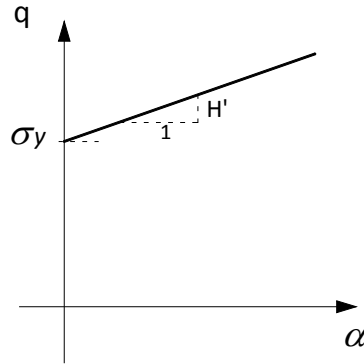


Figura 2.6 Ley de endurecimiento de tipo lineal.

Vale indicar que para un proceso monótono de carga creciente, correspondiente a un intervalo de tiempo dado, tanto la variable de endurecimiento como la deformación inelástica son equivalentes, es decir  $\alpha = \int_t \left| \dot{\varepsilon}^p \right| dt = \varepsilon^p$ .

Con los conceptos anteriores vamos a definir la *función de fluencia*  $f(\sigma, q)$ , como se indica en la ecuación (2.16), siendo la curva representativa para la tensión deformación la que se muestra en la Figura 2.7.

$$f(\sigma, q) = |\sigma| - q = |\sigma| - [\sigma_y + g(\alpha)] \therefore \tag{2.16}$$

$$f(\sigma, q) = |\sigma| - [\sigma_y + H' \alpha]$$

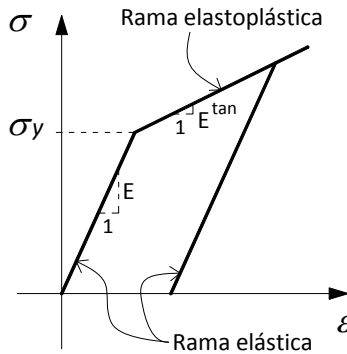


Figura 2.7 Curva típica esfuerzo-deformación para el modelo elasto-plástico con endurecimiento lineal.

Hay que tener presente que si  $\dot{\varepsilon}^p = 0$  nos encontramos dentro de un proceso elástico y en consecuencia  $f(\sigma, q) < 0$ ; mientras que cuando  $\dot{\varepsilon}^p \neq 0$  el comportamiento del

material es en este caso elastoplástico con endurecimiento lineal, por tanto  $f(\sigma, q) = 0$ ; en conclusión la función de fluencia debe cumplir que  $f(\sigma, q) \leq 0$ .

A partir del equilibrio de tensiones y de la compatibilidad de deformaciones, la relación tensión-deformación se expresa de la siguiente manera:

$$\sigma = E \varepsilon^e \therefore \sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (2.17)$$

Se define como *dominio elástico*  $E_\sigma$  (ver ecuación (2.18)) al espacio de tensiones que se encuentra al interior del dominio encerrado por la *superficie de fluencia*.

$$E_\sigma = \{\sigma \in R / f(\sigma, q) < 0\} \quad (2.18)$$

Al contorno del dominio elástico se le denomina *superficie de fluencia*  $\partial E_\sigma$ :

$$\partial E_\sigma = \{\sigma \in R / f(\sigma, q) \equiv |\sigma| - q = 0\} \quad (2.19)$$

El conjunto formado por la unión del dominio elástico y su contorno, se le conoce como *espacio de tensiones admisibles*  $\bar{E}_\sigma$ , y cualquier estado tensional fuera de este espacio  $\bar{E}_\sigma$  no es factible:

$$\bar{E}_\sigma = E_\sigma \cup \partial E_\sigma = \{\sigma \in R / f(\sigma, q) \equiv |\sigma| - q \leq 0\} \quad (2.20)$$

A continuación vamos a establecer las condiciones en las que se fundamenta este modelo. Despejando  $\dot{\varepsilon}^p$  de la ecuación (2.13) obtenemos la denominada *regla de flujo* que se expresa como:

$$\dot{\varepsilon}^p = \gamma \frac{\partial f(\sigma, q)}{\partial \sigma} = \gamma \frac{\partial (|\sigma| - [\sigma_y + H' \alpha])}{\partial \sigma} = \gamma \text{sign}(\sigma) \quad (2.21)$$

Sabiendo que  $\gamma \equiv \left| \dot{\varepsilon}^p \right| \geq 0$  y que  $f(\sigma, q) \leq 0$ , por tanto cuando a un determinado material se le somete a un proceso de carga inelástica entonces  $\gamma > 0 \rightarrow f(\sigma, q) = 0$ , mientras que cuando cesa esa acción y deja de existir deformación inelástica significa que nos encontramos en un proceso de descarga elástica pues  $f(\sigma, q) < 0 \rightarrow \gamma = 0$ , así pues en resumen la *condición de carga y descarga* puede escribirse de la siguiente manera:

$$\gamma \cdot f(\sigma, q) = 0 \quad (2.22)$$

Para instantes en los cuales  $f(\sigma, q) = 0$  se tiene que  $\dot{f}(\sigma, q) \leq 0$ , así en un proceso de carga inelástica  $\gamma > 0$  se tiene que  $\dot{f}(\sigma, q) = 0$ , y para un proceso de descarga elástica  $\gamma = 0$  resulta que  $\dot{f}(\sigma, q) < 0$ , es decir persiste en la superficie de fluencia, a ésta condición se le conoce como *condición de persistencia* y se resume así:

$$\gamma \cdot \dot{f}(\sigma, q) = 0 \tag{2.23}$$

Las ecuaciones que definen el presente modelo se resumen en la *Tabla 2.1* a continuación:

**Tabla 2.1** Resumen del Modelo Elasto-plástico Unidimensional con Endurecimiento Lineal.

Ecuación	Descripción
$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^p)$	Relación esfuerzo-deformación
$q = \sigma_y + H' \alpha$	Ecuación de endurecimiento
$f(\sigma, q) =  \sigma  - q =  \sigma  - [\sigma_y + H' \alpha]$	Función de fluencia
$\dot{\varepsilon}^p = \gamma \frac{\partial f(\sigma, q)}{\partial \sigma} = \gamma \text{sign}(\sigma)$	Regla de flujo
$\gamma \cdot f(\sigma, q) = 0$	Condición de carga y descarga
$\gamma \cdot \dot{f}(\sigma, q) = 0$	Condición de persistencia

### 2.3.2 TEORÍA INCREMENTAL PARA EL MODELO ELASTO-VISCOPLÁSTICO PERFECTO UNIDIMENSIONAL

Tal como puede verse en la *Figura 2.5*, a partir de la compatibilidad de deformaciones y del equilibrio de tensiones, las expresiones que determinan la deformación total (ecuación (2.24)) y la relación tensión-deformación (ecuación (2.25)) para éste modelo son:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^{vp} \tag{2.24}$$

$$\sigma = E \varepsilon^e = E(\varepsilon - \varepsilon^{vp}) \tag{2.25}$$

siendo,

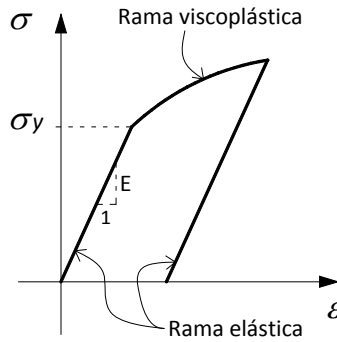
$\varepsilon$  : deformación unitaria

$\varepsilon^e$  : deformación unitaria en el elemento elástico

$\varepsilon^{vp}$  : deformación unitaria en el modelo visco-plástico  
 $\sigma$  : esfuerzo

En este caso la *función de fluencia*  $f(\sigma, q)$ , siendo  $q = \sigma_y$ , sólo depende de la tensión  $\sigma$  como se indica en la ecuación (2.26), y cuya curva representativa se muestra en la *Figura 2.8*, **nótese que la transición entre la rama elástica y la viscoplástica es menos brusca**. Y análogo al modelo anterior se debe cumplir que  $f(\sigma) \leq 0$ .

$$f(\sigma, q) = |\sigma| - \sigma_y \therefore f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y \tag{2.26}$$



**Figura 2.8** Curva típica esfuerzo-deformación para el Modelo Elasto-Viscoplástico Perfecto Unidimensional.

El *dominio elástico*, la *superficie de fluencia* y el *espacio de tensiones admisibles* (cualquier estado tensional fuera de este espacio es inadmisibles), se indican en las ecuaciones (2.27), (2.28) y (2.29), respectivamente.

$$E_\sigma = \{ \sigma \in R / f(\sigma) < 0 \} \tag{2.27}$$

$$\partial E_\sigma = \{ \sigma \in R / f(\sigma) \equiv |\sigma| - \sigma_y = 0 \} \tag{2.28}$$

$$\bar{E}_\sigma = E_\sigma \cup \partial E_\sigma = \{ \sigma \in R / f(\sigma) \equiv |\sigma| - \sigma_y \leq 0 \} \tag{2.29}$$

Cuando nos encontramos frente a un proceso enteramente elástico, la función de fluencia posee valores menores a cero, no existe deformación inelástica y toda esta deformación es absorbida por el elemento elástico del modelo, así:

$$\begin{aligned} f(\sigma) &< 0 \\ \bullet \varepsilon^{vp} &= 0 \\ \varepsilon &= \varepsilon^e \end{aligned} \tag{2.30}$$



Analicemos ahora el caso para el cual un material se encuentra dentro de un proceso inelástico, en éste modelo existe una diferencia fundamental con el Modelo Elasto-plástico Unidimensional con Endurecimiento Lineal, pues estados de tensión fuera del *espacio de tensiones admisibles* son permitidos en este caso, de tal manera que es posible que  $f(\sigma) \geq 0$ :

$$f(\sigma) \equiv |\sigma| - \sigma_y \geq 0 \quad (2.31)$$

del equilibrio de tensiones (véase *Figura 2.5*), la tensión  $\sigma$  en el modelo visco-plástico es igual a la suma de la tensión en el elemento friccional más la correspondiente al elemento viscoso (véase ecuación (2.8)):

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma^{vp} = \sigma_y \text{sign}(\sigma) + \sigma^v \\ \therefore \sigma^v &= \sigma - \sigma_y \text{sign}(\sigma) = |\sigma| \text{sign}(\sigma) - \sigma_y \text{sign}(\sigma) = (|\sigma| - \sigma_y) \text{sign}(\sigma) \end{aligned} \quad (2.32)$$

siendo,

$\sigma$ : esfuerzo aplicado

$\sigma^{vp}$ : esfuerzo en el modelo visco-plástico

$\sigma_y$ : esfuerzo en el elemento friccional

$\sigma^v$ : esfuerzo en el elemento viscoso

teniendo en cuenta que el esfuerzo en el elemento viscoso es:

$$\sigma^v = \eta \dot{\varepsilon}^{vp} \quad (2.33)$$

siendo,

$\eta$ : parámetro de viscosidad,  $\eta \in [0, \infty]$

$\dot{\varepsilon}^{vp}$ : velocidad de deformación visco-plástica,

igualando la ecuación (2.32) y (2.33), sabiendo que la función de fluencia está dada por la ecuación (2.26), y despejando  $\dot{\varepsilon}^{vp}$  obtenemos la ecuación de evolución siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}^v &= \eta \dot{\varepsilon}^{vp} = (|\dot{\sigma}| - \dot{\sigma}_y) \text{sign}(\dot{\sigma}) = f(\dot{\sigma}) \text{sign}(\dot{\sigma}) \\ \therefore \dot{\varepsilon}^{vp} &= \frac{f(\dot{\sigma})}{\eta} \text{sign}(\dot{\sigma}) = \frac{f(\dot{\sigma})}{\eta} \frac{\partial f(\dot{\sigma})}{\partial \dot{\sigma}} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Para cualquier estado tensional la ecuación de evolución (2.34) se expresa como:

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \frac{\langle f(\dot{\sigma}) \rangle}{\eta} \frac{\partial f(\dot{\sigma})}{\partial \dot{\sigma}} \quad (2.35)$$

siendo,

$\langle f(\dot{\sigma}) \rangle$ : la función rampa de  $f(\dot{\sigma})$ , la cual se define de la siguiente manera:

$$\langle f(\dot{\sigma}) \rangle = \frac{|f(\dot{\sigma})| + f(\dot{\sigma})}{2} = \begin{cases} f(\dot{\sigma}) & \text{para } f(\dot{\sigma}) \geq 0 \\ 0 & \text{para } f(\dot{\sigma}) < 0 \end{cases} \quad (2.36)$$

Si consideramos *endurecimiento* obtenemos el denominado “**Modelo Elasto-Viscoplástico de Perzyna**” (Runneson, 2002) (véase *Figura 2.9*), así las ecuaciones de evolución se expresan de la siguiente manera, siendo  $q$  la ley de endurecimiento:

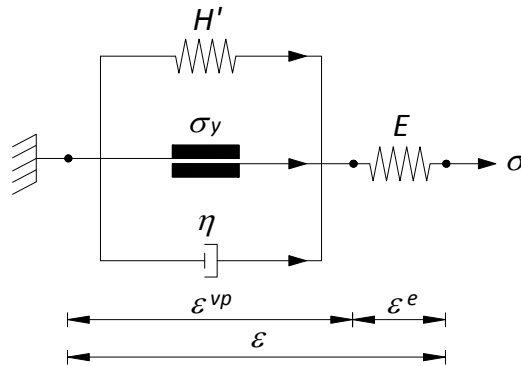


Figura 2.9 Modelo elasto-viscoplástico de Perzyna.

- Para el caso viscoso la velocidad de deformación visco-plástica es,

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \frac{\langle f(\dot{\sigma}, q) \rangle}{\eta} \frac{\partial f(\dot{\sigma}, q)}{\partial \dot{\sigma}} = \frac{\langle f(\dot{\sigma}, q) \rangle}{\eta} \text{sign}(\dot{\sigma}), \text{ siendo } \gamma = \left| \frac{\dot{\varepsilon}^{vp}}{\dot{\varepsilon}} \right| = \frac{\langle f(\dot{\sigma}, q) \rangle}{\eta} \quad (2.37)$$

mientras que la ecuación de evolución para la variable de endurecimiento es,

$$\dot{\alpha} = \gamma = \left| \frac{\dot{\varepsilon}^{vp}}{\varepsilon} \right| = \frac{\langle f(\sigma, q) \rangle}{\eta} \quad (2.38)$$

A continuación se resumen en la *Tabla 2.2* siguiente las ecuaciones que definen el Modelo Elasto-Viscoplástico de Perzyna (Samaniego Alvarado, 2007a), *la ventaja de éste modelo es que no se requieren condiciones de carga y descarga.*

**Tabla 2.2** Resumen del Modelo Elasto-Viscoplástico de Perzyna.

Ecuación	Descripción
$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^{vp})$	Relación esfuerzo-deformación.
$q = \sigma_y + g(\alpha)$	Ecuación de endurecimiento. Siendo $g(\alpha)$ la función de endurecimiento.
$f(\sigma, q) =  \sigma  - q$	Función de fluencia.
$\dot{\varepsilon}^{vp} = \frac{\langle f(\sigma, q) \rangle}{\eta} \frac{\partial f(\sigma, q)}{\partial \sigma} = \gamma \text{sign}(\sigma)$	Ecuación de evolución de la deformación visco-plástica.
$\dot{\alpha} = \gamma = \left  \frac{\dot{\varepsilon}^{vp}}{\varepsilon} \right  = \frac{\langle f(\sigma, q) \rangle}{\eta}$	Ecuación de evolución de la variable de endurecimiento.

Cabe aclarar que dentro de éste modelo, al incluir el parámetro de viscosidad logramos que la curva esfuerzo-deformación sea más suave y no tengamos una transición brusca al pasar de la rama elástica a la plástica, véase Figura 2.7 y Figura 2.8. De esta manera al caracterizar a algún material que se emplea usualmente dentro de las estructuras, el parámetro de viscosidad, es de carácter meramente numérico pues ayuda a que el modelo reológico posea *robustez numérica*, es decir que el modelo, en este caso, se esperaría que sea capaz de funcionar adecuadamente frente a distintas situaciones de carga dentro o fuera de la rama elástica.

## 2.4 INTEGRACIÓN NUMÉRICA DEL MODELO ELASTO-VISCOPLÁSTICO DE PERZYNA

En esta sección vamos a deducir las expresiones matemáticas que permiten aproximar numéricamente las ecuaciones que definen únicamente al Modelo Elasto-Viscoplástico de Perzyna (Samaniego Alvarado, 2007a), pues este es el modelo que vamos a emplear en el presente trabajo, y porque abarca a los modelos Elasto-Plástico con Endurecimiento Lineal y Elasto-Viscoplástico Perfecto. La ley de endurecimiento que vamos a emplear será de tipo lineal (véase ecuación (2.15)).

Lo que nos interesa conocer es la evolución de cada una de las variables que determinan al modelo a medida que se desarrolla un determinado proceso de carga o descarga con el consiguiente cambio en la deformación del material, por tanto nos enfocaremos en la determinación de sus valores en el paso siguiente de avance ( $n+1$ ).

### 2.4.1 INTEGRACIÓN NUMÉRICA DEL MODELO ELASTO-VISCOPLÁSTICO DE PERZYNA CON ENDURECIMIENTO LINEAL

Ecuación de evolución de la deformación visco-plástica (ecuación (2.37)) la vamos a expresar mediante la Regla Trapezoidal Generalizada o Método Teta, así:

$$\frac{\Delta \varepsilon^{vp}}{\Delta t} = (1-\theta)\gamma_n \text{sign}(\sigma_n) + \theta \gamma_{n+1} \text{sign}(\sigma_{n+1}) \quad (2.39)$$

siendo  $\theta$  un factor de peso; empleando el Método de Euler hacia atrás (Backward Euler), es decir haciendo  $\theta=1$ , y teniendo en cuenta la ecuación (2.37) para  $\gamma$ , la regla de flujo se escribe como:

$$\frac{\Delta \varepsilon^{vp}}{\Delta t} = \frac{\varepsilon_{n+1}^{vp} - \varepsilon_n^{vp}}{\Delta t} = \gamma_{n+1} \text{sign}(\sigma_{n+1}) = \frac{\langle f_{n+1} \rangle}{\eta} \text{sign}(\sigma_{n+1}) \quad (2.40)$$

definiendo la discretización con respecto al tiempo de la evolución del multiplicador plástico de la siguiente manera:

$$\frac{\Delta \gamma}{\Delta t} = \gamma_{n+1} \quad (2.41)$$

y despejando  $\varepsilon_{n+1}^{vp}$  de la ecuación (2.40) tenemos:

$$\varepsilon_{n+1}^{vp} = \varepsilon_n^{vp} + \Delta t \gamma_{n+1} \text{sign}(\sigma_{n+1}) \quad \therefore \quad \varepsilon_{n+1}^{vp} = \varepsilon_n^{vp} + \Delta t \frac{\langle f_{n+1} \rangle}{\eta} \text{sign}(\sigma_{n+1}) \quad (2.42)$$

Discretizando la evolución con respecto al tiempo de la variable de endurecimiento dada en la ecuación (2.38) y utilizando la definición (2.41), obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} &= \frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{\Delta t} = \gamma_{n+1} \quad \therefore \quad \alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta t \gamma_{n+1} \quad \therefore \\ \alpha_{n+1} &= \alpha_n + \Delta \gamma = \alpha_n + \Delta t \frac{\langle f_{n+1} \rangle}{\eta} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Para determinar el valor de la tensión, usaremos la relación tensión-deformación de la ecuación de la *Tabla 2.2*:

$$\sigma_{n+1} = E \left( \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^{vp} \right) \quad (2.44)$$

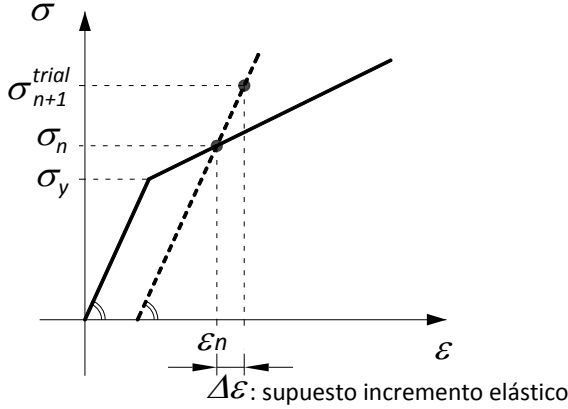
Y discretizando la ecuación que define la función de fluencia, dada en la *Tabla 2.2*, y considerando endurecimiento lineal, tenemos:

$$f_{n+1} = |\sigma_{n+1}| - q_{n+1} \quad \therefore \quad f_{n+1} = |\sigma_{n+1}| - [\sigma_y + H' \alpha_{n+1}] \quad (2.45)$$

#### 2.4.1.1 Estado Elástico de Prueba (“Estado Trial”) para el Modelo Elasto-Viscoplástico de Perzyna con Endurecimiento Lineal

Debido a que, por ejemplo al estar en un determinado proceso de carga inelástico se incrementa la deformación unitaria, correspondiéndole a ésta última un valor de tensión que debe estar dentro del espacio de tensiones admisibles  $\bar{E}_\sigma$ , es necesario comprobar si un determinado estado del material definido mediante los valores de deformación unitaria, esfuerzo, variable de endurecimiento, y función de fluencia, son o no permisibles para el modelo correspondiente. Así por tanto vamos a definir el *Estado Trial* como un estado de prueba cuyos valores serán verificados antes de asumirlos como válidos, y más adelante veremos la forma de corregirlos en caso de que no sean admisibles.

Hay que tener presente que la determinación de los valores de las *variables trial*, se determinan a partir de valores previos que ya han sido verificados como admisibles.



**Figura 2.10** Curva esfuerzo-deformación con puntos del estado trial para el modelo elasto-viscoplástico de Perzyna con endurecimiento lineal.

El estado trial para el Modelo Elasto-Viscoplástico de Perzyna con Endurecimiento Lineal, véase Figura 2.10, está dado por las ecuaciones (2.46) a (2.49), que determinan la deformación unitaria viscoplástica, variable de endurecimiento, tensión, y función de fluencia, respectivamente.

$$\epsilon_{n+1}^{vp \text{ trial}} = \epsilon_n^{vp} \quad (2.46)$$

$$\alpha_{n+1}^{\text{trial}} = \alpha_n \quad (2.47)$$

$$\sigma_{n+1}^{\text{trial}} = E(\epsilon_{n+1} - \epsilon_n^{vp}) = E((\epsilon_n + \Delta\epsilon) - \epsilon_n^{vp}) = E(\epsilon_n - \epsilon_n^{vp}) + E \Delta\epsilon \quad (2.48)$$

$$\therefore \sigma_{n+1}^{\text{trial}} = \sigma_n + E \Delta\epsilon$$

$$f_{n+1}^{\text{trial}} = |\sigma_{n+1}^{\text{trial}}| - q(\alpha_n) \therefore f_{n+1}^{\text{trial}} = |\sigma_{n+1}^{\text{trial}}| - [\sigma_y + H' \alpha_n] \quad (2.49)$$

Para entender mejor el estado trial vamos a realizar un análisis de su comportamiento, así cuando la función de fluencia cumple que  $f_{n+1}^{\text{trial}} \leq 0$  nos encontramos en un estado elástico, lo cual implica que:

$$\epsilon_{n+1}^{vp} = \epsilon_n^{vp} = \epsilon_{n+1}^{vp \text{ trial}} \quad (2.50)$$

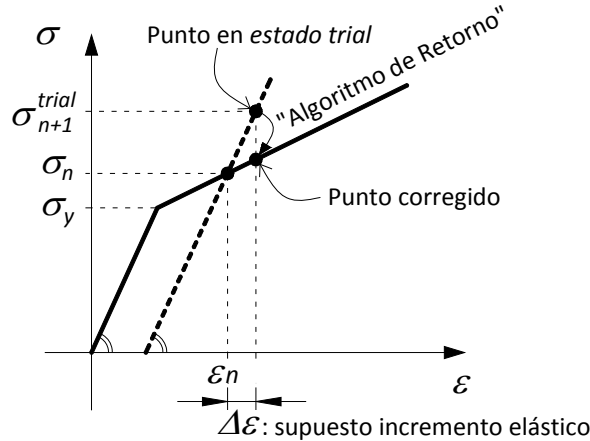
$$\alpha_{n+1} = \alpha_n = \alpha_{n+1}^{\text{trial}} \quad (2.51)$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{\text{trial}} \quad (2.52)$$

$$f_{n+1} \equiv f_{n+1}^{\text{trial}} \leq 0 \quad (2.53)$$

es decir el estado trial en este caso es admisible.

En cambio cuando  $f_{n+1}^{trial} > 0$ , dicho *estado trial* no es admisible y por tanto no se pueden igualar las variables del paso siguiente ( $n+1$ ) a las *variables trial* (tal como sucedía anteriormente en el caso elástico), debiéndose realizar una corrección a éste *estado* de modo que el punto que se encuentra fuera de la curva esfuerzo-deformación retorne a la curva correctamente (véase ecuación (2.48) y *Figura 2.11*), para lo cual vamos a emplear el denominado “*Algoritmo de Retorno*” o “*Return Mapping Algorithm*”.



**Figura 2.11** Esquema de aplicación del Algoritmo de Retorno a un punto en estado trial fuera de la curva esfuerzo-deformación.

Reorganizando la ecuación (2.44), tomando en cuenta la ecuación (2.42) y (2.48), obtenemos:

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1} &= E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^{vp}) = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^{vp}) + E\varepsilon_n^{vp} - E\varepsilon_n^{vp} = \\ &= E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^{vp}) - E(\varepsilon_{n+1}^{vp} - \varepsilon_n^{vp}) = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^{vp}) - E\Delta\varepsilon^{vp} \end{aligned}$$

$$\text{siendo: } \Delta\varepsilon^{vp} = \varepsilon_{n+1}^{vp} - \varepsilon_n^{vp} = \Delta t \frac{\langle f_{n+1} \rangle}{\eta} \text{sign}(\sigma_{n+1}) = \Delta\gamma \text{sign}(\sigma_{n+1})$$

$$\therefore \sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{trial} - \underbrace{E\Delta t \frac{\langle f_{n+1} \rangle}{\eta} \text{sign}(\sigma_{n+1})}_{\text{corrección plástica}} = \sigma_{n+1}^{trial} - E\Delta\gamma \text{sign}(\sigma_{n+1}) \quad (2.54)$$

y operando sobre la expresión resultante anterior:

$$|\sigma_{n+1}| \text{sign}(\sigma_{n+1}) = |\sigma_{n+1}^{trial}| \text{sign}(\sigma_{n+1}^{trial}) - E \Delta t \frac{\langle f_{n+1} \rangle}{\eta} \text{sign}(\sigma_{n+1})$$

$$\therefore \left( |\sigma_{n+1}| + E \Delta t \frac{\langle f_{n+1} \rangle}{\eta} \right) \text{sign}(\sigma_{n+1}) = |\sigma_{n+1}^{trial}| \text{sign}(\sigma_{n+1}^{trial})$$

siendo los términos  $\left( |\sigma_{n+1}| + E \Delta t \frac{\langle f_{n+1} \rangle}{\eta} \right)$ ,  $|\sigma_{n+1}^{trial}|$  positivos, se concluye de la ecuación anterior que:

$$\text{sign}(\sigma_{n+1}) = \text{sign}(\sigma_{n+1}^{trial}), \quad (2.55)$$

$$\left( |\sigma_{n+1}| + E \Delta t \frac{\langle f_{n+1} \rangle}{\eta} \right) = |\sigma_{n+1}^{trial}| \quad \therefore |\sigma_{n+1}| = |\sigma_{n+1}^{trial}| - E \Delta t \frac{\langle f_{n+1} \rangle}{\eta} \quad (2.56)$$

Utilizando la ecuación (2.56) para evaluar  $|\sigma_{n+1}|$ , la función de fluencia discretizada queda así:

$$f_{n+1} = |\sigma_{n+1}| - q_{n+1} \quad \therefore$$

$$f_{n+1} = |\sigma_{n+1}^{trial}| - E \Delta t \frac{\langle f_{n+1} \rangle}{\eta} - q_{n+1} \quad (2.57)$$

Considerando la ley de endurecimiento lineal dada en la ecuación (2.15) y reemplazando en la expresión anterior, se tiene:

$$f_{n+1} = |\sigma_{n+1}^{trial}| - E \Delta t \frac{\langle f_{n+1} \rangle}{\eta} - \sigma_y - H' \alpha_{n+1}, \text{ sumando y restando } (H' \alpha_n) \therefore$$

$$f_{n+1} = \underbrace{|\sigma_{n+1}^{trial}| - \sigma_y - H' \alpha_n}_{f_{n+1}^{trial}} - E \Delta t \frac{\langle f_{n+1} \rangle}{\eta} - H' \alpha_{n+1} + H' \alpha_n$$

$$f_{n+1} = f_{n+1}^{trial} - E \Delta t \frac{\langle f_{n+1} \rangle}{\eta} - H' (\alpha_{n+1} - \alpha_n) = f_{n+1}^{trial} - (E + H') \Delta \alpha \quad (2.58)$$

sabiendo por la ecuación (2.43) que  $\Delta \alpha = \Delta \gamma = \Delta t \frac{\langle f_{n+1} \rangle}{\eta}$ , y reemplazando en la ecuación anterior obtenemos:



$$f_{n+1} = f_{n+1}^{trial} - (E + H') \Delta t \frac{\langle f_{n+1} \rangle}{\eta} \quad (2.59)$$

Considerando que  $f_{n+1} > 0$ , por estar fuera del rango elástico, entonces  $\langle f_{n+1} \rangle = f_{n+1}$ , despejando  $f_{n+1}$  de la ecuación anterior y reemplazándolo en la ecuación (2.43) para obtener  $\Delta\gamma$ :

$$\begin{aligned} \Delta\gamma = \Delta\alpha = \Delta t \frac{\langle f_{n+1} \rangle}{\eta} &= \Delta t \frac{f_{n+1}}{\eta} = \Delta t \frac{f_{n+1}^{trial}}{\eta + \Delta t(E + H')} \therefore \\ \Delta\gamma &= \frac{f_{n+1}^{trial}}{(E + H')} \left( \frac{\Delta t}{\frac{\eta}{E + H'} + \Delta t} \right) \end{aligned} \quad (2.60)$$

Derivando la ecuación (2.54) respecto a la variable  $\varepsilon_{n+1}$  considerando el caso de carga plástica ( $\sigma_{n+1} > 0$ ,  $sign(\sigma_{n+1}) = 1$ ), y tomando la ecuación (2.60) para  $\Delta\gamma$ , el módulo tangente para el presente modelo se evalúa mediante la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} E^{\tan} &= \frac{d\sigma_{n+1}}{d\varepsilon_{n+1}} = \frac{d\sigma_{n+1}^{trial}}{d\varepsilon_{n+1}} - E \frac{d\Delta\gamma}{d\varepsilon_{n+1}} \\ &= \frac{d(E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^{vp}))}{d\varepsilon_{n+1}} - E \frac{d}{d\varepsilon_{n+1}} \left( \frac{f_{n+1}^{trial}}{(E + H')} \left( \frac{\Delta t}{\frac{\eta}{E + H'} + \Delta t} \right) \right) \\ &= \frac{d(E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^{vp}))}{d\varepsilon_{n+1}} - E \frac{d}{d\varepsilon_{n+1}} \left( \frac{(\sigma_{n+1}^{trial} - [\sigma_y + H' \alpha_n])}{(E + H')} \left( \frac{\Delta t}{\frac{\eta}{E + H'} + \Delta t} \right) \right) \\ &= \frac{d(E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^{vp}))}{d\varepsilon_{n+1}} - E \frac{d}{d\varepsilon_{n+1}} \left( \frac{(E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^{vp}) - [\sigma_y + H' \alpha_n])}{(E + H')} \left( \frac{\Delta t}{\frac{\eta}{E + H'} + \Delta t} \right) \right) \therefore \\ E^{\tan} &= E - \frac{E^2}{E + H'} \left( \frac{\Delta t}{\frac{\eta}{E + H'} + \Delta t} \right) \end{aligned} \quad (2.61)$$

El valor que se asume para la variable  $\Delta t$  y  $\eta$  deben ser calibrados dentro del modelo numérico realizando varias corridas computacionales, de forma tal que numéricamente ajusten el modelo reológico para que describa de manera adecuada el comportamiento del material. Es decir, dentro de la modelación que se propondrá y que se detalla en el capítulo siguiente, dichos parámetros son de carácter meramente numérico, pues ayudan a que el modelo reológico posea *robustez numérica*, es decir que el modelo, será capaz de funcionar adecuadamente frente a distintas situaciones de carga dentro o fuera de la rama elástica, debido a que estas variables colaboran a que produzca una transición suave entre la rama elástica y la plástica (véase Figura 2.8).

## 2.5 ANÁLISIS DE ELEMENTOS TIPO BARRA SOMETIDOS A CARGAS AXIALES

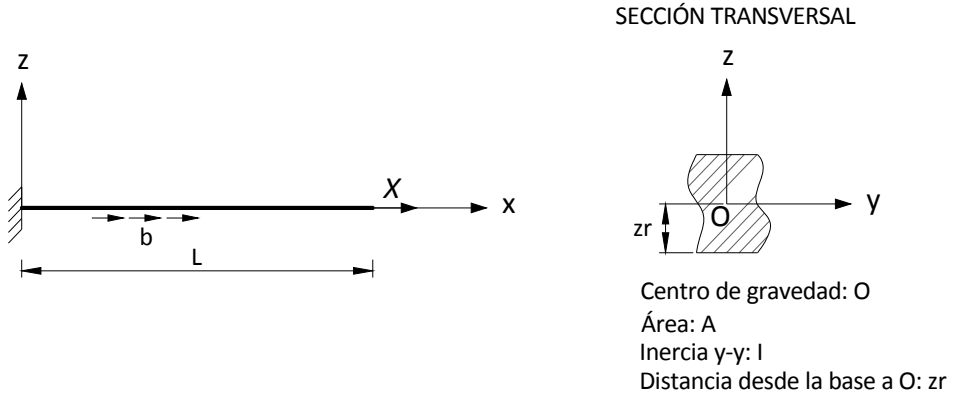


Figura 2.12 Elemento tipo barra sometidos a cargas axiales.

Para el elemento tipo barra bajo acciones axiales (Oñate Ibañez de Navarra, 1995) que se muestra en la Figura 2.12, los únicos campos de desplazamiento, deformación unitaria, esfuerzo, no nulos son los correspondientes a la dirección axial, así:

$$u = u(x) \quad (2.62)$$

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \quad (2.63)$$

$$\sigma_x \quad (2.64)$$

Considerando como fuerza positiva a la de tracción, y como negativa a la de compresión. De esta forma la fuerza axial se puede determinar como:

$$dF_x = \sigma_x dA \quad \therefore \quad \int_{F_x} dF_x = \int_A \sigma_x dA \quad \therefore \quad F_x = \int_A \sigma_x dA \quad (2.65)$$

El trabajo virtual interno del elemento se expresa como:

$$W^{\text{int}} = \int_V \delta \varepsilon_x \sigma_x dV = \int_L \int_A \delta(\varepsilon_x) \sigma_x dA dx = \int_L \delta(\varepsilon_x) \int_A \sigma_x dA dx = \int_L \delta(\varepsilon_x) F_x dx \quad (2.66)$$

De forma análoga el trabajo externo está dado por:

$$W^{ext} = \int_L \delta u_x b dx + \sum_i \delta u_i X_i \tag{2.67}$$

La condición de equilibrio se obtiene cuando el trabajo virtual interno y externo se igualan, y cuyo planteamiento se expone más adelante en el CAPÍTULO 3, al desarrollar la formulación para la modelación propuesta.

### 2.5.1 DISCRETIZACIÓN EN ELEMENTOS FINITOS

Para la dicretización de la barra en elementos finitos elegimos elementos unidimensionales de 2 nodos de clase *C0* (Zienkiewicz & Taylor, 1994), tal como se muestra en la Figura 2.13.

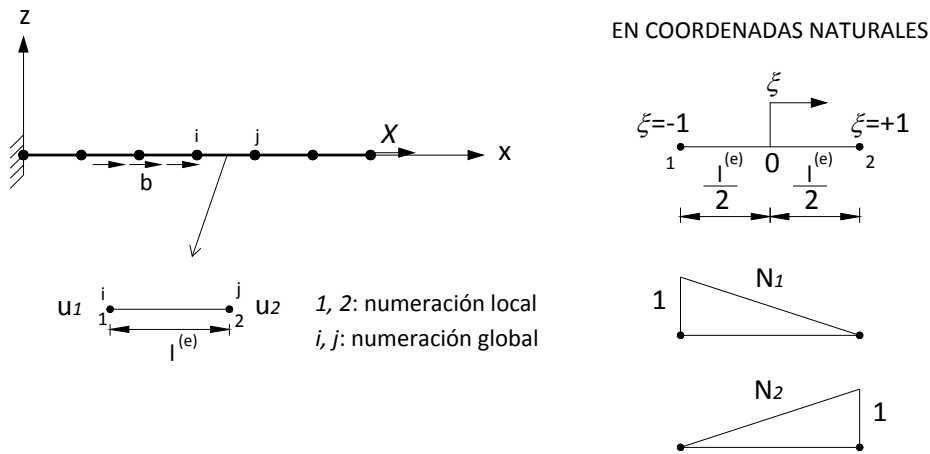


Figura 2.13 Elemento unidimensional de clase *C0* de 2 nodos. Variables nodales y funciones de forma.

En cada nodo del elemento finito tenemos la variable de desplazamiento axial, así pues tenemos 2 variables por elemento, a través de las cuales definiremos un polinomio de grado 1 para estimar el campo de desplazamientos tal como se indica en la ecuación.

$$u(x) = a + b x \tag{2.68}$$

Siendo  $a, b$ , constantes que definen el polinomio. Teniendo en cuenta la relación entre las coordenadas cartesianas y naturales está dada por:

$$\xi = \frac{2}{l^{(e)}}(x - x_m), \text{ sabiendo que: } x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} \tag{2.69}$$

y sustituyendo las variables nodales de desplazamiento axial en la ecuación (2.68), y ordenando los términos de forma tal que la ecuación que define el campo de desplazamientos se puede expresar como:

$$u(\xi) = N_1(\xi)u_1 + N_2(\xi)u_2 = \underline{\underline{N}}u^{(e)} \quad (2.70)$$

siendo:  $\underline{\underline{N}} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix}$ , y  $\underline{u}^{(e)} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}^T$   
*matriz de funciones de forma*      *vector de desplazamientos nodales*

Y estando las funciones de forma definidas para este caso como:

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi); \quad N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (2.71)$$

En base a la ecuación (2.69) se deduce que:

$$dx = \frac{l^{(e)}}{2} d\xi; \quad \frac{du}{dx} = \frac{2}{l^{(e)}} \frac{du}{d\xi} \quad (2.72)$$

A partir de la ecuación (2.70) y (2.72), encontramos la siguiente relación para definir el campo de deformaciones unitarias:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{du}{dx} = \frac{2}{l^{(e)}} \frac{du}{d\xi} = \frac{2}{l^{(e)}} \frac{dN}{d\xi} u^{(e)} = \underline{\underline{B}} u^{(e)} \quad \therefore \\ \varepsilon_x &= \frac{du}{dx} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l^{(e)}} & \frac{1}{l^{(e)}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \underline{\underline{B}} u^{(e)} \end{aligned} \quad (2.73)$$

Al término  $\underline{\underline{B}}$  se le conoce como matriz de deformación, en este caso, de tipo axial.

En la sección 3.2.2, a través de la discretización de la ecuación (2.66) y (2.67), y haciendo cumplir la condición de equilibrio, se obtendrá la formulación que incorpora el análisis plástico en elementos tipo barra sometidos a sollicitaciones axiales.

## 2.6 ANÁLISIS DE LA FLEXIÓN EN VIGAS ESBELTAS MEDIANTE LA TEORÍA DE EULER-BERNOULLI

Considérese una viga cualquiera, cuyas características geométricas, solicitaciones externas, condiciones de apoyo, y ejes de referencia, son tal como se muestra en la Figura 2.14 a continuación.

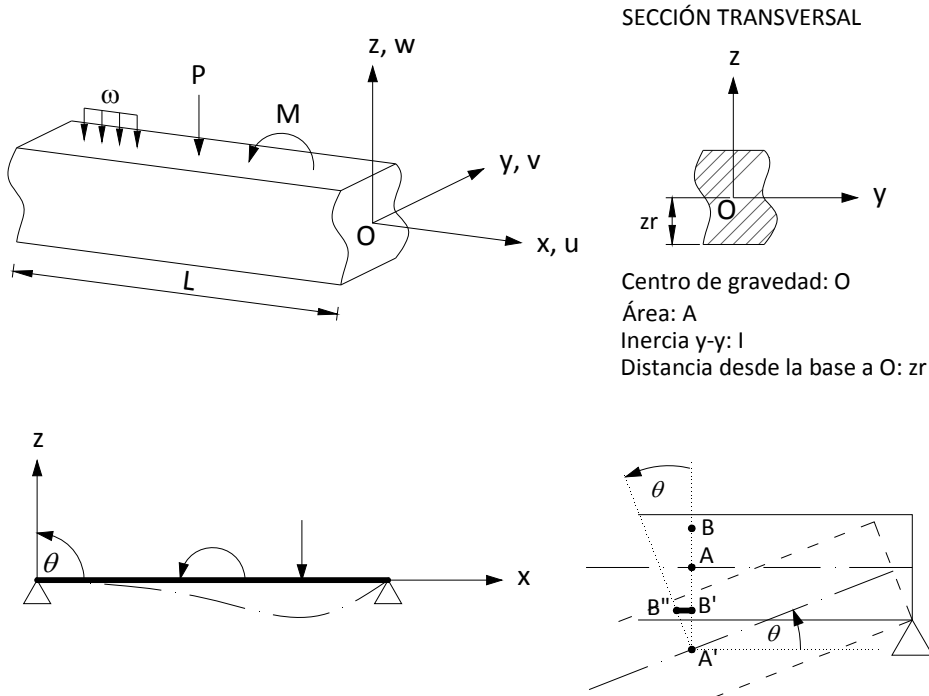


Figura 2.14 Viga de Euler-Bernoulli.

Así pues, las hipótesis en las que se basa la teoría de Euler-Bernoulli (Oñate Ibañez de Navarra, 1995), son:

1. Los desplazamientos verticales de todos los puntos de una sección transversal son pequeños e iguales a los del eje de la viga.
2. El desplazamiento lateral según el eje  $y$  es nulo.
3. Las secciones transversales al eje de la viga antes de la deformación, permanecen planas y ortogonales al dicho eje después de la deformación.
4. El plano en el que actúan las fuerzas contiene a uno de los ejes principales de la sección recta de la viga y las cargas actúan perpendicularmente al eje longitudinal de aquella.

Por la hipótesis 3, y considerando que el giro es pequeño, entonces es igual a la pendiente de la deformada del eje:

$$\theta = \frac{dw}{dx} = \theta(x) \quad (2.74)$$

Así pues, el campo de desplazamientos es:

$$\begin{aligned} u &= -\theta \cdot z = -z \frac{dw}{dx} \\ v &= 0 \\ w &= w(x) \end{aligned} \quad (2.75)$$

Mientras que el campo de deformaciones unitarias queda definido mediante:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{du}{dx} = -z \frac{d^2w}{dx^2}, \text{ siendo la curvatura: } \kappa = \frac{d^2w}{dx^2} \therefore \varepsilon_x = -z \kappa ; \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_z = \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \end{aligned} \quad (2.76)$$

La única tensión no nula es la correspondiente a la tensión axial en la dirección x, definida como:

$$\sigma_x \quad (2.77)$$

Considerando que el momento de flexión es positivo cuando las fibras inferiores al eje neutro se estiran y las superiores se contraen, y es negativo cuando las fibras superiores se alargan y las inferiores se acortan, la deducción de una expresión para evaluar el momento en una sección de la viga, es:

$$\begin{aligned} dM &= (-z) dF_x = -z \sigma_x dA \therefore \\ \int_M dM &= \int_A -z \sigma_x dA \therefore \\ M &= \int_A -z \sigma_x dA \end{aligned} \quad (2.78)$$

Aplicando el Principio de Trabajo Virtual, el trabajo virtual interno en la viga es:

$$\begin{aligned}
 W^{int} &= \int_V \delta \varepsilon_x \sigma_x dV = \int_L \int_A \delta(-z \kappa) \sigma_x dA dx = \\
 &= \int_L \int_A -z \delta(\kappa) \sigma_x dA dx = \int_L \delta(\kappa) \int_A -z \sigma_x dA dx \quad \therefore \\
 W^{int} &= \int_L \delta(\kappa) M dx \tag{2.79}
 \end{aligned}$$

Mientras que el trabajo exterior realizado por las cargas externas aplicadas en la viga es:

$$W^{ext} = - \int_L \delta w \varpi dx - \sum_i \delta w_i P_i + \sum_j \delta \theta_j M_j \tag{2.80}$$

Como es de esperar el equilibrio de la viga se alcanza cuando el trabajo virtual interno y externo se igualan, dicha condición se emplea más adelante en el CAPÍTULO 3, al desarrollar la formulación para la modelación propuesta.

### 2.6.1 DISCRETIZACIÓN EN ELEMENTOS FINITOS

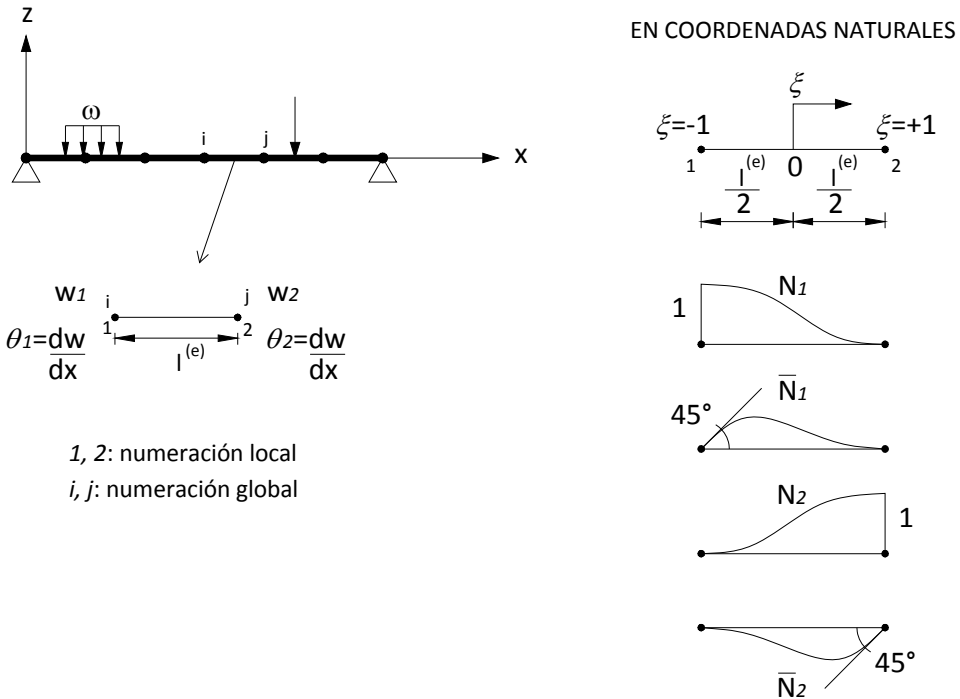


Figura 2.15 Elemento unidimensional de clase C1 de 2 nodos. Variables nodales y funciones de forma.



La incógnita fundamental es la flecha  $w$ . Al tener segundas derivadas de la flecha en el planteamiento del trabajo virtual interno, debemos utilizar elementos de clase  $C1$  (continuidad de la función y su primera derivada) para evitar singularidades en el cálculo de las integrales. Este hecho se aclara, observando que la primera derivada de la flecha corresponde a la pendiente de la deformada del eje de la viga, y que por tanto dicha derivada debe ser continua para garantizar que la deformada describa una curva suave.

Se elige elementos unidimensionales de 2 nodos de clase  $C1$ , para discretizar la viga (véase Figura 2.15). Debido a la continuidad de la primera derivada, entonces el giro también se toma como variable, adicional a la flecha, así pues tenemos 2 variables en cada nodo, dando un total de 4 variables por elemento. Dichas 4 variables definen un polinomio cúbico de la flecha, ecuación (2.81).

$$w(x) = a + b x + c x^2 + d x^3 \tag{2.81}$$

Siendo  $a, b, c, d$ , constantes que definen el polinomio. Teniendo en cuenta la relación entre las coordenadas cartesianas y naturales está dada por:

$$\xi = \frac{2}{l^{(e)}}(x - x_m), \text{ sabiendo que: } x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} \tag{2.82}$$

luego de sustituir las variables nodales de flecha y giro en la ecuación (2.81) y en su derivada respectivamente, y organizándolas convenientemente, la ecuación anterior se puede expresar en coordenadas naturales de la siguiente forma:

$$w(\xi) = N_1(\xi)w_1 + \bar{N}_1(\xi)\frac{l^{(e)}}{2}\theta_1 + N_2(\xi)w_2 + \bar{N}_2(\xi)\frac{l^{(e)}}{2}\theta_2 \tag{2.83}$$

estando las funciones de forma definidas como:

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= \frac{1}{4}(2 - 3\xi + \xi^3); & \bar{N}_1(\xi) &= \frac{1}{4}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3) \\ N_2(\xi) &= \frac{1}{4}(2 + 3\xi - \xi^3); & \bar{N}_2(\xi) &= \frac{1}{4}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3) \end{aligned} \tag{2.84}$$

Imponiendo que:

$$\underline{N} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 & \bar{N}_1 \frac{l^{(e)}}{2} & N_2 & \bar{N}_2 \frac{l^{(e)}}{2} \end{bmatrix}}_{\text{matriz de funciones de forma}}, \text{ y } \underbrace{\underline{u}^{(e)} = [w_1 \quad \theta_1 \quad w_2 \quad \theta_2]^T}_{\text{vector de desplazamientos nodales}} \tag{2.85}$$

entonces la ecuación escrita en forma matricial queda como:

$$\underline{w} = \underline{N} \underline{u}^{(e)} \quad (2.86)$$

A partir de la ecuación (2.82) se deduce que:

$$dx = \frac{l^{(e)}}{2} d\xi; \quad \frac{dw}{dx} = \frac{2}{l^{(e)}} \frac{dw}{d\xi}; \quad \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{4}{(l^{(e)})^2} \frac{d^2w}{d\xi^2} \quad (2.87)$$

Tal como se definió en (2.74), y teniendo en cuenta la ecuación (2.86) y (2.87), el ángulo se determinará a partir de:

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{dw}{dx} = \frac{2}{l^{(e)}} \frac{dw}{d\xi} = \\ &= \frac{2}{l^{(e)}} \cdot \\ &\cdot \left[ \frac{1}{4}(-3+3\xi^2) \quad \frac{l^{(e)}}{8}(-1-2\xi+3\xi^2) \quad \frac{1}{4}(3-3\xi^2) \quad \frac{l^{(e)}}{8}(-1+2\xi+3\xi^2) \right] \underline{u}^{(e)} \end{aligned} \quad (2.88)$$

Así pues, a partir de la ecuación (2.83) y (2.87), la curvatura se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{4}{(l^{(e)})^2} \frac{d^2w}{d\xi^2} = \frac{4}{(l^{(e)})^2} \frac{d^2N}{d\xi^2} \underline{u}^{(e)} = \underline{B}_f \underline{u}^{(e)} \therefore \\ \kappa &= \left[ \begin{array}{cccc} \frac{6\xi}{(l^{(e)})^2} & \frac{(-1+3\xi)}{l^{(e)}} & \frac{-6\xi}{(l^{(e)})^2} & \frac{(1+3\xi)}{l^{(e)}} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \underline{B}_f \underline{u}^{(e)} \end{aligned} \quad (2.89)$$

Al término  $\underline{B}_f$  se le conoce como matriz de deformación de flexión o de curvatura del elemento.

Más adelante en la sección 3.2.3, a través de la discretización de la ecuación (2.79) y (2.80), e igualándolas por la condición de equilibrio, se obtendrá la formulación que introduce el análisis plástico en elementos tipo viga bajo la teoría de Euler-Bernoulli.

## 2.7 PUNTOS ÓPTIMOS PARA EL CÁLCULO DE TENSIONES Y DEFORMACIONES

Si las funciones de forma son polinomios completos de grado  $p$ , la aproximación de las tensiones será polinómica de grado  $p-1$  ó  $p-2$ , según se obtengan de la primera o segunda derivada del campo de desplazamientos (Oñate Ibañez de Navarra, 1995).

Está demostrado que las tensiones obtenidas por el MEF pueden considerarse como un ajuste por mínimos cuadrados ponderados de la solución exacta. Además una importante propiedad de la integración numérica de Gauss-Legendre dice que “en los puntos de una cuadratura de Gauss-Legendre de orden  $n$ , un polinomio de grado  $n$  y otro de grado  $n-1$ , obtenido como ajuste por mínimos cuadrados del anterior, toman el mismo valor.

De esta forma si la distribución exacta de las tensiones o de las deformaciones es un polinomio de grado  $n$ , y la aproximada, a partir del MEF, es de grado  $n-1$ , la evaluación de las tensiones o deformaciones en los puntos de la cuadratura de Gauss-Legendre de orden  $n$  es exacta.

Además los puntos de la cuadratura de Gauss-Legendre tienen la interesante propiedad de aproximar con un orden mayor (un término más del desarrollo en serie de Taylor de la solución exacta que en cualquier otro punto del elemento, cuando la solución exacta y aproximada difieren en más de un grado) las tensiones o deformaciones que por consiguiente deben evaluarse en dichos puntos, y a partir de los valores allí obtenidos, en caso de requerirse, extrapolar para estimar los valores nodales. Por esta razón dichos puntos de la cuadratura de Gauss-Legendre se les considera óptimos para el cálculo de tensiones y deformaciones.

Como se verá en la sección siguiente, al elegir polinomios de tercer grado para la funciones de forma que definen los desplazamientos en los nodos de un elemento unidimensional de clase  $C1$  (continuidad de la función y su primera derivada) de 2 nodos, entonces el grado del polinomio que se esperaría para las tensiones obtenido por el MEF será de primer grado (pues se lo obtiene a partir de la segunda derivada del campo de desplazamientos), por lo tanto los puntos de Gauss que emplearemos inicialmente serán los correspondientes a una cuadratura de Gauss-Legendre de segundo grado.



## **CAPÍTULO 3**

# **MODELACIÓN PROPUESTA**



### 3.1 MODELO PROPUESTO PARA EL ANÁLISIS DE PLASTICIDAD EN PÓRTICOS PLANOS

El modelo a emplear para realizar el análisis de plasticidad en pórticos planos se basa en las siguientes hipótesis:

- La estructura a analizar se encuentra en el plano y se la idealiza como un sistema de pórticos.
- Los elementos que conforman el pórtico son barras unidimensionales tipo viga que se rigen por la teoría de Euler-Bernoulli, pero adicionando a la modelación de éstos elementos la formulación correspondiente a elementos de tipo axial. Como se verá más adelante la formulación de elementos tipo viga por la teoría de Euler-Bernoulli, y la correspondiente a elementos sometidos a carga axial, se desarrolla por separado por facilidad de su deducción, y posteriormente se los incorporará en la modelación por elementos finitos del pórtico en análisis.
- El comportamiento del material de los elementos del pórtico, mismo que será homogéneo e isótropo, se lo caracterizará por el Modelo Elasto-Viscoplástico de Perzyna.
- La respuesta interna de cada elemento se determinará en base al análisis del comportamiento de sus secciones en los puntos de Gauss. El comportamiento de cada sección de un elemento del pórtico y su respuesta interna, se determinará discretizando la sección en dovelas paralelas al plano del eje neutro y encontrando el estado tenso-deformacional de cada una definido por el modelo que caracteriza el material.
- La respuesta global de la estructura frente a determinadas acciones de carga externa se determinará aplicando la *estrategia incremental iterativa* hasta encontrar el equilibrio entre las fuerzas internas de los elementos del pórtico (determinadas tal como se describió en el párrafo anterior) y las fuerzas externas aplicadas, con ayuda de la aplicación del Método de los Elementos Finitos (MEF). Las cargas externas deben ser aplicadas en los nodos, por tanto de no ser así deben ser convertidas en acciones nodales (Oñate Ibañez de Navarra, 1995), para facilitar la aplicación del MEF en el modelo propuesto.

### 3.2 FORMULACIÓN DEL MODELO

Para la deducción de la formulación matemática que define el modelo vamos a ir realizando un análisis desde lo puntual hacia lo global, para luego ir acoplando estos conceptos.

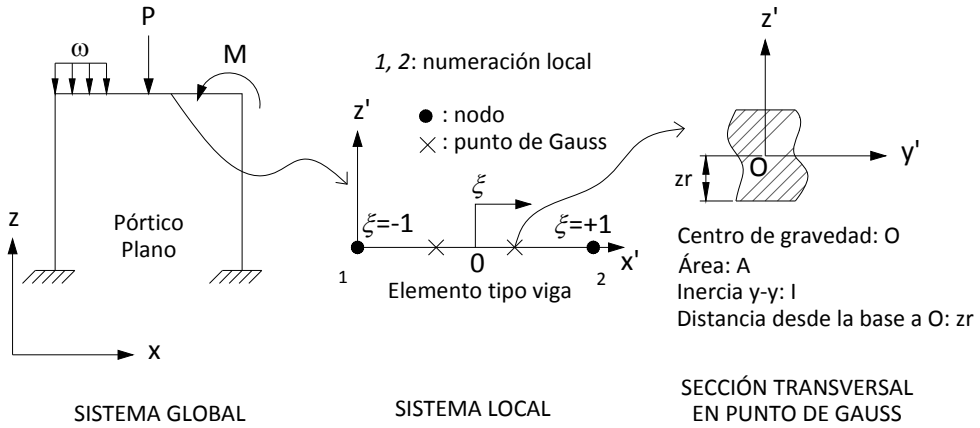


Figura 3.1 Modelo del pórtico respecto al sistema global, elemento tipo viga en ejes locales.

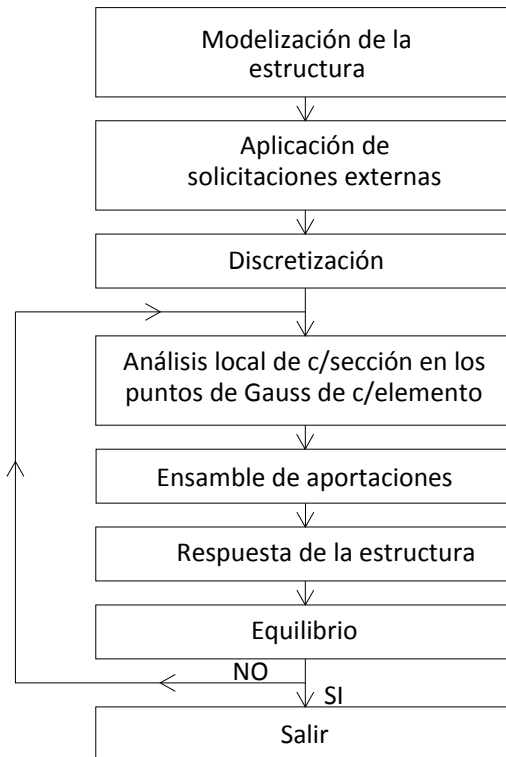


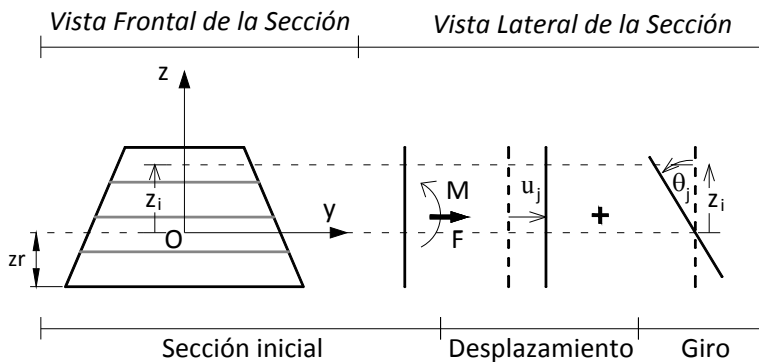
Figura 3.2 Proceso general de aplicación del Modelo Propuesto para el Análisis de Plasticidad en Pórticos Planos.



Bajo el esquema propuesto, a partir del pórtico idealizado para representar una estructura, bajo el esquema de la modelización propuesta, vamos a tomar uno de sus elementos tipo barra, y realizaremos un análisis de la respuesta interna de cada una de sus secciones elegidas (véase Figura 3.1). Las secciones a analizar en cada elemento se encuentran ubicadas en los puntos de Gauss (cuyo orden de cuadratura correspondiente estará en función del grado del polinomio de aproximación dado por el MEF para estimar los valores de una variable dada) a partir de las cuales se estimará los valores de respuesta frente a las acciones externas en los nodos del elemento. Una vez que se haya realizado este análisis en todos los elementos, en función del aporte de cada elemento se estima la respuesta global del pórtico, que si se encuentra en equilibrio con las sollicitaciones externas se obtendría el estado final solución, caso contrario nuevamente se iniciaría éste proceso tal como se ilustra en la Figura 3.2, hasta llegar a una solución que cumpla las condiciones de equilibrio con una adecuada precisión.

### 3.2.1 DETERMINACIÓN DE FUERZAS INTERNAS EN UNA SECCIÓN

Como se mencionó anteriormente para determinar la respuesta interna de una sección ubicada en uno de los puntos de Gauss del elemento, por ejemplo en el  $j$ -ésimo punto, procedemos a discretizarla en dovelas paralelas al eje  $y$ , tal como se muestra en la Figura 3.3 siguiente. Y consideremos que se somete a la sección a una carga axial ( $F$ ) y momento flector ( $M$ ), externos.



**Figura 3.3** Discretización de la sección en dovelas y representación de las deformaciones de una sección correspondiente al  $j$ -ésimo punto de Gauss.

Primero considerando la acción axial, la sección responde a la acción de la carga axial con una fuerza interna que puede determinarse en forma discretizada mediante:

$$F_j^{\text{int}} = \int_A (dF_x)_j = \int_A (\sigma_x)_j dA \approx \sum_{i=1}^{ndov} (\sigma_{xi})_j A_i \quad (3.1)$$

y la deformación unitaria de cada una de las dovelas, considerando únicamente la carga axial (véase ecuación (2.63)), es igual en todas a lo largo de la sección, y está dada por:

$$(\varepsilon_{xi})_j = \varepsilon_{xj} \quad (3.2)$$

siendo,

$j$ : subíndice que indica que la sección en análisis corresponde al punto  $j$ -ésimo de Gauss del elemento

$i$ : subíndice que va desde 1 hasta el número total de dovelas  $ndov$ , indicando la  $i$ -ésima dovela

Ahora analizando únicamente la flexión en la sección, y considerando que un momento de flexión es positivo cuando las fibras inferiores al eje neutro se estiran y las superiores se contraen, y es negativo cuando las fibras superiores se alargan y las inferiores se acortan, la expresión discretizada que permite evaluar el momento de respuesta, en función de las dovelas que en que se dividió la sección sería:

$$M_j^{\text{int}} = \int_A -z (dF_x)_j = \int_A -z (\sigma_x)_j dA \approx \sum_{i=1}^{ndov} -(\sigma_{xi})_j z_i A_i \quad (3.3)$$

mientras que la deformación unitaria en cada dovela debido al efector de flexión sería (véase ecuación (2.76)):

$$(\varepsilon_{xi})_j = -z_i \kappa_j \quad (3.4)$$

siendo,

$j$ : subíndice que indica que la sección en análisis corresponde al punto  $j$ -ésimo de Gauss del elemento

$i$ : subíndice que va desde 1 hasta el número total de dovelas  $ndov$ , indicando la  $i$ -ésima dovela

Si para una sección cualquiera correspondiente al punto  $j$  de Gauss, combinamos el efecto de la acción axial y de flexión, la deformación unitaria axial total para la dovela  $i$ -ésima se determina como la suma de las deformaciones unitarias axiales provenientes del caso axial (cuyo valor es constante a lo largo del elemento) más la del caso de flexión (cuyo valor depende de la posición de la dovela), y que se expresaría como:

$$\left(\varepsilon_{xi}\right)_j = \varepsilon_{xj} - z_i \kappa_j \quad (3.5)$$

Entonces combinando el efecto axial y el de flexión, al calcular la respuesta de la sección  $F_j^{\text{int}}$ ,  $M_j^{\text{int}}$ , mediante las ecuaciones (3.1) y (3.3) respectivamente, vemos que son función de las tensiones correspondientes a cada dovela. Así, es importante aclarar que para nuestro modelo propuesto **el esfuerzo axial de cada dovela, en base a los cuales se estima la fuerza y momento en la sección, deben ser admisibles bajo el Modelo Elasto-Viscoplástico de Perzyna con Endurecimiento Lineal, para la deformación unitaria de la dovela correspondiente determinada mediante la ecuación (3.5).**

### 3.2.2 INCORPORACIÓN DEL MODELO ELASTO-VISCOPLÁSTICO DE PERZYNA CON ENDURECIMIENTO LINEAL A LA FORMULACIÓN POR ELEMENTOS FINITOS DE UNA BARRA SOMETIDO A CARGA AXIAL

De la ecuación (2.66), el trabajo interno de un elemento finito bajo carga axial, en coordenadas naturales se expresa como:

$$\left(W^{\text{int}}\right)^{(e)} = \int_{l^{(e)}} \delta(\varepsilon_x) \sigma_x A dx = \int_{-1}^{+1} \frac{l^{(e)}}{2} \delta(\varepsilon_x) \sigma_x A d\xi = \int_{-1}^{+1} \frac{l^{(e)}}{2} \delta(\varepsilon_x) F_x d\xi \quad (3.6)$$

Aplicando la integración numérica de Gauss-Legendre a la ecuación anterior, e introduciendo implícitamente el Modelo Elasto-Viscoplástico de Perzyna para caracterizar el comportamiento del material mediante la ecuación (3.1) para valorar la fuerza axial y verificando la admisibilidad del estado tenso-deformacional dentro de dicho modelo, obtenemos:

$$\left(W^{\text{int}}\right)^{(e)} = \sum_{j=1}^{ngauss} \frac{l^{(e)}}{2} \delta(\varepsilon_{xj}) F_j \varpi_j \quad (3.7)$$

siendo  $\varpi_j$  el peso correspondiente al punto de la cuadratura de Gauss j-ésimo.

Mientras que la deformación unitaria virtual queda expresada como sigue, haciendo uso de la ecuación (2.73).

$$\delta\varepsilon_x = \underline{\underline{B}} \delta(\underline{\underline{u}}^{(e)}) = \delta(\underline{\underline{u}}^{(e)})^T \underline{\underline{B}}^T \quad (3.8)$$

De forma análoga, y teniendo en cuenta que las cargas externas o sus equivalentes deben estar aplicadas en los nodos del elemento finito, tomando en consideración la ecuación (2.67), el trabajo virtual externo expresado en forma matricial para un elemento finito sería:

$$(W^{ext})^{(e)} = \delta(\underline{u}^{(e)})^T \underline{p}^{(e)} \quad (3.9)$$

siendo  $\underline{p}^{(e)}$ : vector de cargas externas nodales en el elemento (e),

$$\underline{p}^{(e)} = \underbrace{[X_1 \quad X_2]^T}_{\text{vector de cargas nodales externas}} \quad (3.10)$$

Planteando el equilibrio de un elemento finito que compone la viga, es decir igualando las ecuaciones (3.7) y (3.9), y haciendo uso de la ecuación (3.8), obtenemos:

$$\begin{aligned} (W^{int})^{(e)} &= (W^{ext})^{(e)} \quad \therefore \\ \sum_{j=1}^{ngauss} \frac{l^{(e)}}{2} \delta(\varepsilon_{xj}) F_j \varpi_j &= \delta(\underline{u}^{(e)})^T \underline{p}^{(e)} \quad \therefore \\ \sum_{j=1}^{ngauss} \frac{l^{(e)}}{2} \delta(\underline{u}^{(e)})^T \underline{B}^T F_j \varpi_j &= \delta(\underline{u}^{(e)})^T \underline{p}^{(e)} \quad \therefore \\ \underbrace{\sum_{j=1}^{ngauss} \frac{l^{(e)}}{2} \underline{B}^T F_j \varpi_j}_{\underline{p}^{int(e)}} &= \underline{p}^{(e)} \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde  $\underline{p}^{int(e)}$  es el vector de fuerzas internas del elemento.

En base a la ecuación (3.11) se irán incorporando los aportes internos y externos de cada elemento para determinar el equilibrio general de la barra. Dicho equilibrio se determinara iterativamente mediante el empleo del Método de Newton-Raphson, así pues, definiendo el vector  $\underline{r}$  de equilibrio, que es función del vector de desplazamientos generalizados  $\underline{u}$ , como:

$$\underline{r}(\underline{u}) = \underline{p}^{int}(\underline{u}) - \underline{p} = \underline{0} \quad (3.12)$$

La ecuación anterior debe ser igual a cero por equilibrio del sistema, y los valores de  $\underline{u}$  que satisfacen dicha condición se los determinará numéricamente en forma iterativa con ayuda del Método de Newton-Raphson, así pues:

$$\underline{r}(\underline{u} + \partial\underline{u}) = \underline{r}(\underline{u}) + [\underline{\nabla}_{\underline{u}} \underline{r}(\underline{u})] \partial\underline{u} = \underline{0} \quad (3.13)$$

Definiendo la matriz  $\underline{K}_a^{\text{tan}} = \underline{\nabla}_{\underline{u}} \underline{r}(\underline{u})$ , gradiente del vector  $\underline{r}$  en el espacio de los desplazamientos nodales del vector  $\underline{u}$ , que corresponde a la matriz de rigidez tangente del sistema para el caso axial, y a partir de la ecuación anterior tenemos:

$$\partial\underline{u} = -[\underline{K}_a^{\text{tan}}]^{-1} \underline{r}(\underline{u}) \quad (3.14)$$

De tal forma que iterativamente el valor de los desplazamientos  $\underline{u}$  en el paso  $k+1$ , se estimará como se indica a continuación, de modo que con una aproximación aceptable se cumpla la ecuación de equilibrio (3.12):

$$\begin{aligned} \partial\underline{u}^{(k)} &= -[\underline{K}_a^{\text{tan}(k)}]^{-1} \underline{r}(\underline{u}^{(k)}) \\ \therefore \underline{u}^{(k+1)} &= \underline{u}^{(k)} + \partial\underline{u}^{(k)} \end{aligned} \quad (3.15)$$

En consecuencia, al tener el Método de Newton-Raphson una convergencia local, es decir que hay que dar valores de aproximación iniciales cercanos a la solución para asegurar la convergencia, vamos a emplear lo que se conoce como “*Estrategia Incremental Iterativa*”, y que consiste en realizar incrementos de carga lo suficientemente pequeños, y en cada uno de ellos emplear Newton-Raphson hasta llegar al equilibrio, y finalmente establecer la respuesta de la estructura frente a las acciones externas a las que está sometida.

De esta manera lo que nos queda es deducir una expresión que defina la  $\underline{K}_a^{\text{tan}}$ , así pues operando en la expresión que lo define, tenemos:

$$\begin{aligned} \underline{K}_a^{\text{tan}} &= \underline{\nabla}_{\underline{u}} \underline{r}(\underline{u}) = \underline{\nabla}_{\underline{u}} (\underline{p}^{\text{int}}(\underline{u}) - \underline{p}) = \underline{\nabla}_{\underline{u}} \underline{p}^{\text{int}}(\underline{u}) - \underbrace{\underline{\nabla}_{\underline{u}} \underline{p}}_{=0} \\ \therefore \underline{K}_a^{\text{tan}} &= \underline{\nabla}_{\underline{u}} \underline{p}^{\text{int}}(\underline{u}) = \frac{\partial \underline{p}^{\text{int}}(\underline{u})}{\partial \underline{u}} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Como se sabe el sistema global corresponde a un ensamble de las aportaciones provenientes de cada uno de los elementos finitos, bajo esta premisa y definiendo a  $A$  como un operador de ensamblaje, el vector de fuerzas internas global se puede

expresar como un ensamble de las aportaciones de los vectores de fuerzas internas elementales, así :

$$\underline{P}^{int}(\underline{u}) = A \underline{P}^{int(e)} \quad (3.17)$$

de forma análoga y en base a la ecuación (3.16), la  $K_{\underline{a}}^{tan}$  nos quedaría de la siguiente manera como ensamble de aportaciones elementales:

$$K_{\underline{a}}^{tan} = \nabla_{\underline{u}} \underline{P}^{int}(\underline{u}) = A \left( \nabla_{\underline{u}}^{(e)} \underline{P}^{int(e)} \right) = A K_{\underline{a}}^{tan(e)} \quad (3.18)$$

De esta manera lo que vamos a deducir una expresión para encontrar la matriz de rigidez tangente de un elemento (e),  $K_{\underline{a}}^{tan(e)}$ . A partir de la ecuación (3.18) tenemos:

$$K_{\underline{a}}^{tan(e)} = \left( \nabla_{\underline{u}}^{(e)} \underline{P}^{int(e)} \right) = \frac{\partial \underline{P}^{int(e)}}{\partial \underline{u}^{(e)}} \quad (3.19)$$

con ayuda de la ecuación (3.11) y (3.1), la ecuación (3.19) nos queda como:

$$K_{\underline{a}}^{tan(e)} = \frac{\partial \underline{P}^{int(e)}}{\partial \underline{u}^{(e)}} = \sum_{j=1}^{ngauss} \left[ \frac{l^{(e)}}{2} \underline{B}^T \sum_{i=1}^{ndov} \left( \frac{\partial (\sigma_{xi})_j}{\partial \underline{u}^{(e)}} A_i \right) \varpi_j \right] \quad (3.20)$$

Haciendo uso de la regla de la cadena, sabiendo que en este caso la deformación unitaria axial está dada mediante la ecuación (3.2):

$$\frac{\partial (\sigma_{xi})_j}{\partial \underline{u}^{(e)}} = \frac{\partial (\sigma_{xi})_j}{\partial (\varepsilon_{xi})_j} \frac{\partial (\varepsilon_{xi})_j}{\partial \underline{u}^{(e)}} \quad (3.21)$$

entonces obtenemos: que el término  $\frac{\partial (\sigma_{xi})_j}{\partial (\varepsilon_{xi})_j}$  es igual a  $E_i^{tan}$ ; y de la ecuación (2.73)

se deduce que  $\frac{\partial (\varepsilon_{xi})_j}{\partial \underline{u}^{(e)}} = \underline{B}$ .

Reemplazando los anteriores resultados obtenidos para (3.21) en (3.20), tenemos:

$$\begin{aligned}
 \underline{K}_{=a}^{\tan(e)} &= \frac{\partial \underline{p}^{\text{int}(e)}}{\partial \underline{u}^{(e)}} = \sum_{j=1}^{ngauss} \left[ \frac{I^{(e)}}{2} \underline{B}^T \sum_{i=1}^{ndov} (E_i^{\tan} \underline{B} A_i) \varpi_j \right] \cdot: \\
 \underline{K}_{=a}^{\tan(e)} &= \sum_{j=1}^{ngauss} \left[ \frac{I^{(e)}}{2} \underline{B}^T \underline{B} \sum_{i=1}^{ndov} (E_i^{\tan} A_i) \varpi_j \right]
 \end{aligned} \quad (3.22)$$

siendo,

$$\frac{I^{(e)}}{2} \underline{B}^T \underline{B} = \frac{I^{(e)}}{2} \begin{bmatrix} -\frac{1}{I^{(e)}} \\ \frac{1}{I^{(e)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{I^{(e)}} & \frac{1}{I^{(e)}} \\ \frac{1}{I^{(e)}} & -\frac{1}{I^{(e)}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2I^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

por tanto la ecuación (3.22) para la matriz de rigidez tangente, considerando únicamente el efecto axial, queda como:

$$\underline{K}_{=a}^{\tan(e)} = \sum_{j=1}^{ngauss} \left[ \frac{1}{2I^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \sum_{i=1}^{ndov} (E_i^{\tan} A_i) \varpi_j \right] \quad (3.24)$$

### 3.2.3 INCORPORACIÓN DEL MODELO ELASTO-VISCOPLÁSTICO DE PERZYNA CON ENDURECIMIENTO LINEAL A LA FORMULACIÓN POR ELEMENTOS FINITOS DE LA VIGA DE EULER-BERNOULLI

El trabajo interno de un elemento finito, en base a la ecuación (2.79), en coordenadas naturales se expresa como:

$$(W^{\text{int}})^{(e)} = \int_{I^{(e)}} \delta(\kappa) M dx = \int_{-1}^{+1} \frac{I^{(e)}}{2} \delta(\kappa) M d\xi \quad (3.25)$$

Aplicando la integración numérica de Gauss-Legendre a la ecuación anterior, e introduciendo implícitamente el Modelo Elasto-Viscoplástico de Perzyna para caracterizar el comportamiento del material mediante la ecuación (3.3) para determinar el momento flector y verificando que el estado tenso-deformacional sea admisible dentro de dicho modelo, tenemos:

$$(W^{\text{int}})^{(e)} = \sum_{j=1}^{ngauss} \frac{I^{(e)}}{2} \delta(\kappa_j) M_j \varpi_j \quad (3.26)$$

siendo  $\varpi_j$  el peso correspondiente al punto de la cuadratura de Gauss j-ésimo.

La curvatura virtual queda expresada como sigue, haciendo uso de la ecuación (2.89).

$$\delta\kappa_j = \underline{B}_f \delta(\underline{u}^{(e)}) = \delta(\underline{u}^{(e)})^T \underline{B}_f^T \quad (3.27)$$

De forma análoga, y teniendo en cuenta que las cargas externas o sus equivalentes deben estar aplicadas en los nodos del elemento finito, tomando en consideración la ecuación (2.80), el trabajo virtual externo expresado en forma matricial para un elemento finito sería:

$$(W^{ext})^{(e)} = \delta(\underline{u}^{(e)})^T \underline{P}^{(e)} \quad (3.28)$$

siendo  $\underline{P}^{(e)}$ : vector de cargas externas nodales en el elemento (e),

$$\underline{P}^{(e)} = \underbrace{[P_1 \quad M_1 \quad P_2 \quad M_2]^T}_{\text{vector de cargas nodales externas}} \quad (3.29)$$

Planteando el equilibrio de un elemento finito que compone la viga, es decir igualando las ecuaciones (3.26) y (3.28), y haciendo uso de la ecuación (3.27), obtenemos:

$$\begin{aligned} (W^{int})^{(e)} &= (W^{ext})^{(e)} \quad \therefore \\ \sum_{j=1}^{ngauss} \frac{I^{(e)}}{2} \delta(\kappa_j) M_j \varpi_j &= \delta(\underline{u}^{(e)})^T \underline{P}^{(e)} \quad \therefore \\ \sum_{j=1}^{ngauss} \frac{I^{(e)}}{2} \delta(\underline{u}^{(e)})^T \underline{B}_f^T M_j \varpi_j &= \delta(\underline{u}^{(e)})^T \underline{P}^{(e)} \quad \therefore \\ \underbrace{\sum_{j=1}^{ngauss} \frac{I^{(e)}}{2} \underline{B}_f^T M_j \varpi_j}_{\underline{P}^{int(e)}} &= \underline{P}^{(e)} \end{aligned} \quad (3.30)$$

donde  $\underline{P}^{int(e)}$  es el vector de fuerzas internas del elemento.

En base a la ecuación (3.30) se irán incorporando los aportes internos y externos de cada elemento para determinar el equilibrio general de la viga. Dicho equilibrio se determinara iterativamente mediante el empleo del Método de Newton-Raphson, así



pues, definiendo el vector  $\underline{r}$  de equilibrio de la viga, que es función del vector de desplazamientos generalizados  $\underline{u}$ , como:

$$\underline{r}(\underline{u}) = \underline{p}^{\text{int}}(\underline{u}) - \underline{p} = \underline{0} \quad (3.31)$$

La ecuación anterior debe ser igual a cero por equilibrio del sistema, y los valores de  $\underline{u}$  que satisfacen dicha condición se los determinará numéricamente en forma iterativa con ayuda del Método de Newton-Raphson, así pues:

$$\underline{r}(\underline{u} + \partial\underline{u}) = \underline{r}(\underline{u}) + [\nabla_{\underline{u}} \underline{r}(\underline{u})] \partial\underline{u} = \underline{0} \quad (3.32)$$

Definiendo la matriz  $\underline{K}_f^{\text{tan}} = \nabla_{\underline{u}} \underline{r}(\underline{u})$ , gradiente del vector  $\underline{r}$  en el espacio de los desplazamientos nodales del vector  $\underline{u}$ , que corresponde a la matriz de rigidez tangente del sistema, y a partir de la ecuación anterior tenemos:

$$\partial\underline{u} = -[\underline{K}_f^{\text{tan}}]^{-1} \underline{r}(\underline{u}) \quad (3.33)$$

De tal forma que iterativamente el valor de los desplazamientos  $\underline{u}$  en el paso  $k+1$ , se estimará como se indica a continuación, de tal forma que con una aproximación aceptable se cumpla la ecuación de equilibrio (3.31):

$$\begin{aligned} \partial\underline{u}^{(k)} &= -[\underline{K}_f^{\text{tan}(k)}]^{-1} \underline{r}(\underline{u}^{(k)}) \\ \therefore \underline{u}^{(k+1)} &= \underline{u}^{(k)} + \partial\underline{u}^{(k)} \end{aligned} \quad (3.34)$$

En consecuencia, al tener el Método de Newton-Raphson una convergencia local, es decir que hay que dar valores de aproximación iniciales cercanos a la solución para asegurar la convergencia, vamos a emplear lo que se conoce como “*Estrategia Incremental Iterativa*”, y que consiste en realizar incrementos de carga lo suficientemente pequeños, y en cada uno de ellos emplear Newton-Raphson hasta llegar al equilibrio, y finalmente establecer la respuesta de la estructura frente a las acciones externas a las que está sometida.

De esta manera lo que nos queda es deducir una expresión que defina la  $\underline{K}_f^{\text{tan}}$ , así pues operando en la expresión que lo define, tenemos:

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{K}}_f^{\text{tan}} &= \underline{\nabla}_u \underline{r}(\underline{u}) = \underline{\nabla}_u \left( \underline{p}^{\text{int}}(\underline{u}) - \underline{p} \right) = \underline{\nabla}_u \underline{p}^{\text{int}}(\underline{u}) - \underbrace{\underline{\nabla}_u \underline{p}}_{=0} \\
 \therefore \underline{\underline{K}}_f^{\text{tan}} &= \underline{\nabla}_u \underline{p}^{\text{int}}(\underline{u}) = \frac{\partial \underline{p}^{\text{int}}(\underline{u})}{\partial \underline{u}}
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Como se sabe el sistema global corresponde a un ensamble de las aportaciones provenientes de cada uno de los elementos finitos, bajo esta premisa y definiendo a  $\underline{A}$  como un operador de ensamblaje, el vector de fuerzas internas global se puede expresar como un ensamble de las aportaciones de los vectores de fuerzas internas elementales, así :

$$\underline{p}^{\text{int}}(\underline{u}) = \underline{A} \underline{p}^{\text{int}(e)} \tag{3.36}$$

de forma análoga y en base a la ecuación (3.35), la  $\underline{\underline{K}}_f^{\text{tan}}$  nos quedaría de la siguiente manera:

$$\underline{\underline{K}}_f^{\text{tan}} = \underline{\nabla}_u \underline{p}^{\text{int}}(\underline{u}) = \underline{A} \left( \underline{\nabla}_u^{(e)} \underline{p}^{\text{int}(e)} \right) = \underline{A} \underline{\underline{K}}_f^{\text{tan}(e)} \tag{3.37}$$

De esta manera lo que vamos a deducir a continuación es una expresión para encontrar la matriz de rigidez tangente de un elemento (e),  $\underline{\underline{K}}_f^{\text{tan}(e)}$ . A partir de la ecuación (3.37) tenemos:

$$\underline{\underline{K}}_f^{\text{tan}(e)} = \left( \underline{\nabla}_u^{(e)} \underline{p}^{\text{int}(e)} \right) = \frac{\partial \underline{p}^{\text{int}(e)}}{\partial \underline{u}^{(e)}} \tag{3.38}$$

con ayuda de la ecuación (3.30) y (3.3), la ecuación (3.38) nos queda como:

$$\underline{\underline{K}}_f^{\text{tan}(e)} = \frac{\partial \underline{p}^{\text{int}(e)}}{\partial \underline{u}^{(e)}} = \sum_{j=1}^{\text{ngauss}} \left[ \frac{1}{2} \underline{B}_{=f}^{(e)T} \sum_{i=1}^{\text{ndov}} \left( - \frac{\partial (\sigma_{xi})_j}{\partial \underline{u}^{(e)}} z_i A_i \right) \underline{\sigma}_j \right] \tag{3.39}$$

Haciendo uso de la regla de la cadena, sabiendo que en este caso la deformación unitaria axial está determinada por la ecuación (3.4):

$$\frac{\partial (\sigma_{xi})_j}{\partial \underline{u}^{(e)}} = \frac{\partial (\sigma_{xi})_j}{\partial (\varepsilon_{xi})_j} \frac{\partial (\varepsilon_{xi})_j}{\partial \kappa_j} \frac{\partial \kappa_j}{\partial \underline{u}^{(e)}} \tag{3.40}$$

obtenemos que: el término  $\frac{\partial(\sigma_{xi})_j}{\partial(\varepsilon_{xi})_j}$  es igual a  $E_i^{\tan}$ ; mientras que a partir de la ecuación (3.4), tenemos que  $\frac{\partial(\varepsilon_{xi})_j}{\partial\kappa_j} = -z_i$ ; y de la ecuación (2.89) se deduce que  $\frac{\partial\kappa_j}{\partial\underline{u}^{(e)}} = \underline{B}_f$ .

Reemplazando los anteriores resultados obtenidos para (3.40) en (3.39), tenemos:

$$\begin{aligned} K_{=f}^{\tan(e)} &= \frac{\partial P^{\text{int}(e)}}{\partial \underline{u}^{(e)}} = \sum_{j=1}^{ngauss} \left[ \frac{I^{(e)}}{2} \underline{B}_{=f}^T \sum_{i=1}^{ndov} \left( -E_i^{\tan} (-z_i^2) \underline{B}_{=f} A_i \right) \varpi_j \right] \therefore \\ K_{=f}^{\tan(e)} &= \sum_{j=1}^{ngauss} \left[ \frac{I^{(e)}}{2} \underline{B}_{=f}^T \underline{B}_{=f} \sum_{i=1}^{ndov} \left( E_i^{\tan} z_i^2 A_i \right) \varpi_j \right] \end{aligned} \quad (3.41)$$

siendo,

$$\begin{aligned} \frac{I^{(e)}}{2} \underline{B}_{=f}^T \underline{B}_{=f} &= \frac{I^{(e)}}{2} \begin{bmatrix} \frac{6\xi}{(I^{(e)})^2} \\ (-1+3\xi) \\ -6\xi \\ \frac{(I^{(e)})^2}{(1+3\xi)} \\ \frac{(1+3\xi)}{I^{(e)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{6\xi}{(I^{(e)})^2} & \frac{(-1+3\xi)}{I^{(e)}} & \frac{-6\xi}{(I^{(e)})^2} & \frac{(1+3\xi)}{I^{(e)}} \end{bmatrix} \\ \frac{I^{(e)}}{2} \underline{B}_{=f}^T \underline{B}_{=f} &= \frac{1}{2(I^{(e)})^3} \begin{bmatrix} 36\xi^2 & 6I^{(e)}\xi(3\xi-1) & -36\xi^2 & 6I^{(e)}\xi(3\xi+1) \\ \cdot & (I^{(e)})^2(3\xi-1)^2 & -6I^{(e)}\xi(3\xi-1) & (I^{(e)})^2(9\xi^2-1) \\ \cdot & \cdot & 36\xi^2 & -6I^{(e)}\xi(3\xi+1) \\ \cdot & \text{simétrica} & \cdot & (I^{(e)})^2(3\xi+1)^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.42)$$

por tanto la ecuación (3.41) para la matriz de rigidez tangente, considerando únicamente el efecto de flexión, queda como:

$$\underset{=f}{K}^{\tan(e)} = \sum_{j=1}^{ngauss} \frac{1}{2(l^{(e)})^3} \left[ \begin{array}{cccc} 36\xi^2 & 6l^{(e)}\xi(3\xi-1) & -36\xi^2 & 6l^{(e)}\xi(3\xi+1) \\ \cdot & (l^{(e)})^2(3\xi-1)^2 & -6l^{(e)}\xi(3\xi-1) & (l^{(e)})^2(9\xi^2-1) \\ \cdot & \cdot & 36\xi^2 & -6l^{(e)}\xi(3\xi+1) \\ \cdot & \text{simétrica} & \cdot & (l^{(e)})^2(3\xi+1)^2 \end{array} \right] \cdot \sum_{i=1}^{ndov} (E_i^{\tan} z_i^2 A_i) \varpi_j \quad (3.43)$$

**3.2.4 FORMULACIÓN EN ELEMENTOS FINITOS PARA ELEMENTOS TIPO BARRA SOMETIDOS A ESFUERZOS AXIALES Y DE FLEXIÓN INCORPORANDO EL MODELO ELASTO-VISCOPLÁSTICO DE PERZYNA CON ENDURECIMIENTO LINEAL**

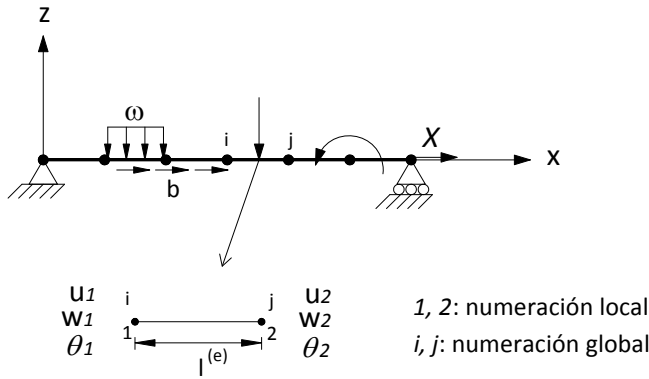


Figura 3.4 Elemento tipo barra sometido a flexo-compresión o flexo-tracción.

Al considerar en un elemento tipo barra de 2 nodos los efectos axiales, y de flexión bajo la teoría de Euler-Bernoulli, tendríamos en cada nodo 3 variables de desplazamiento, tal como se muestra en la Figura 3.4, así pues, el vector de desplazamientos nodales del elemento, está definido como:

$$\underline{u}^{(e)} = [u_1^{(e)} \quad w_1^{(e)} \quad \theta_1^{(e)} \quad u_2^{(e)} \quad w_2^{(e)} \quad \theta_2^{(e)}]^T \quad (3.44)$$

Ahora bien, para cada dovela *i* dentro de una sección correspondiente al punto de Gauss *j* del elemento (*e*), la deformación unitaria, incluyendo los efectos axiales y de flexión (véase ecuación (3.5), (2.73), (2.89)), a partir de los desplazamientos nodales, se determina como:

$$\left( \varepsilon_{xi} \right)_j = \underline{\underline{B}} \begin{Bmatrix} u_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \end{Bmatrix} - z_i \underline{\underline{B}}_f \begin{Bmatrix} w_1^{(e)} \\ \theta_1^{(e)} \\ w_2^{(e)} \\ \theta_2^{(e)} \end{Bmatrix} \quad (3.45)$$

Para la deformación anterior, empleando el “*Algoritmo de Retorno*” en el Modelo Elasto-Viscoplástico de Perzyna con Endurecimiento lineal, determinamos las tensiones  $(\sigma_{xi})_j$  y módulos tangente  $(E_i^{\tan})_j$ , para la dovela  $i$ -ésima correspondiente al punto de Gauss  $j$ , cuyos valores serán empleados en la determinación de la matriz de rigidez tangente y de las fuerzas internas del elemento.

Una vez que se han determinado los módulos tangente considerando ambos efectos, en base a la ecuación (3.24) y (3.43), la matriz de rigidez elemental que considera la situación de carga axial y de flexión, sería:

$$\underline{\underline{K}}^{\tan(e)} = \begin{matrix} & u_1^{(e)} & w_1^{(e)} & \theta_1^{(e)} & u_2^{(e)} & w_2^{(e)} & \theta_2^{(e)} \\ \left[ \begin{matrix} \underline{\underline{K}}_a^{\tan(e)}(1,1) & 0 & 0 & \underline{\underline{K}}_a^{\tan(e)}(1,2) & 0 & 0 \\ 0 & \underline{\underline{K}}_f^{\tan(e)}(1,1) & \underline{\underline{K}}_f^{\tan(e)}(1,2) & 0 & \underline{\underline{K}}_f^{\tan(e)}(1,3) & \underline{\underline{K}}_f^{\tan(e)}(1,4) \\ 0 & \underline{\underline{K}}_f^{\tan(e)}(2,1) & \underline{\underline{K}}_f^{\tan(e)}(2,2) & 0 & \underline{\underline{K}}_f^{\tan(e)}(2,3) & \underline{\underline{K}}_f^{\tan(e)}(2,4) \\ \underline{\underline{K}}_a^{\tan(e)}(2,1) & 0 & 0 & \underline{\underline{K}}_a^{\tan(e)}(2,2) & 0 & 0 \\ 0 & \underline{\underline{K}}_f^{\tan(e)}(3,1) & \underline{\underline{K}}_f^{\tan(e)}(3,2) & 0 & \underline{\underline{K}}_f^{\tan(e)}(3,3) & \underline{\underline{K}}_f^{\tan(e)}(3,4) \\ 0 & \underline{\underline{K}}_f^{\tan(e)}(4,1) & \underline{\underline{K}}_f^{\tan(e)}(4,2) & 0 & \underline{\underline{K}}_f^{\tan(e)}(4,3) & \underline{\underline{K}}_f^{\tan(e)}(4,4) \end{matrix} \right] & \end{matrix} \quad (3.46)$$

Mientras que en este caso el vector de cargas externas nodales para el elemento es:

$$\underline{\underline{P}}^{(e)} = \left[ X_1^{(e)} \quad P_1^{(e)} \quad M_1^{(e)} \quad X_2^{(e)} \quad P_2^{(e)} \quad M_2^{(e)} \right]^T \quad (3.47)$$

Ya determinadas las tensiones  $(\sigma_{xi})_j$  que incluyen efectos axiales y de flexión, como se indicó anteriormente, es posible determinar las fuerzas internas mediante las ecuaciones (3.11) y (3.30), mismas que tendrán que equilibrarse con sus correspondientes externas contenidas dentro de la expresión (3.47).

De esta forma incluyendo las aportaciones de todos los elementos, nuevamente se encuentra la matriz de rigidez de la estructura, y se plantea la ecuación de equilibrio entre acciones externas y respuesta interna de la estructura:

$$r(\underline{u}) = \underline{P}^{int}(\underline{u}) - \underline{P} = 0 \tag{3.48}$$

Y aplicando el Método de Newton-Raphson, hasta encontrar el vector de desplazamientos que cumpla la ecuación anterior mediante interacciones, tenemos que para el paso  $k+1$ :

$$\underline{u}^{(k+1)} = \underline{u}^{(k)} + \partial \underline{u}^{(k)}, \text{ siendo } \partial \underline{u}^{(k)} = -\left[ \underline{K}^{tan(k)} \right]^{-1} r(\underline{u}^{(k)}) \tag{3.49}$$

Hasta ahora la deducción de las formulaciones tanto para elementos sometidos a carga axial, como para los sometidos a flexión, se ha realizado suponiendo que el elemento es horizontal y que coincide con el eje  $x$ , por tanto las matrices de rigidez tangente, vectores de fuerzas, vector de desplazamientos, y demás variables en ejes locales, son equivalentes a sus correspondientes en ejes globales.

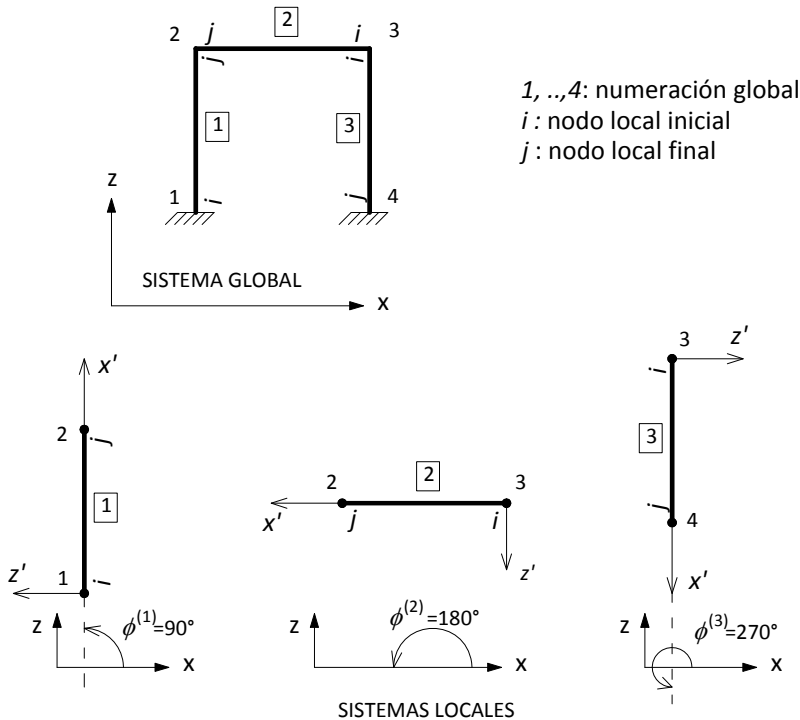


Figura 3.5 Pórtico plano y sus elementos en ejes locales y globales.

Debido a que vamos a trabajar sobre pórticos en el plano, los elementos pueden encontrarse en posiciones diferentes a la horizontal dentro del plano xz, tal como se muestra en la Figura 3.5, así pues si asumimos que para una barra cualquiera el nodo inicial es el  $i$ , y el nodo final es el  $j$ , entonces el ángulo que define su dirección es el ángulo  $\phi$ , mismo que se mide desde el eje global x hacia la *barra dirigida* y que es positivo si su sentido de giro es contrario al sentido de giro de las agujas del reloj o negativo en caso contrario. Por convención vamos a utilizar el símbolo ' para indicar que la variable o eje es local, y diferenciarlo de su correspondiente en ejes globales (véase Figura 3.5).

Se puede demostrar (Oñate Ibañez de Navarra, 1995) que la relación entre variables locales y globales está dada para el vector de fuerzas nodales, vector de desplazamientos, y matriz de rigidez tangente de un elemento, respectivamente, como se muestra en las siguientes ecuaciones:

$$\underline{p}^{(e)'} = \underline{T}^{(e)} \underline{p}^{(e)} \quad (3.50)$$

$$\underline{u}^{(e)'} = \underline{T}^{(e)} \underline{u}^{(e)} \quad (3.51)$$

$$\underline{K}^{\tan(e)} = \left( \underline{T}^{(e)} \right)^T \left( \underline{K}^{\tan(e)'} \right) \left( \underline{T}^{(e)} \right) \quad (3.52)$$

siendo  $\underline{T}^{(e)}$  la matriz de transformación del elemento, misma que es ortogonal (su transpuesta es igual a su inversa), y que se determina de la siguiente manera:

$$\underline{T}^{(e)} = \begin{bmatrix} \cos\phi^{(e)} & \sin\phi^{(e)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\phi^{(e)} & \cos\phi^{(e)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\phi^{(e)} & \sin\phi^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\phi^{(e)} & \cos\phi^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

Lógicamente al final se ensamblará las variables (desplazamientos, fuerzas, matrices de rigidez) del sistema porticado en ejes globales, como resultado de la suma de aportaciones de cada una de las variables elementales transformadas así mismo a ejes globales, y luego de este procedimiento nuevamente se llegará a la ecuación de equilibrio (3.54) en ejes globales, considerando en este caso efectos axiales y de flexión.

$$\underline{r}(\underline{u}) = \underline{p}^{\text{int}}(\underline{u}) - \underline{p} = \underline{0} \quad (3.54)$$

De esta manera utilizando el Método de Newton-Raphson y con ayuda de la “*Estrategia Incremental Iterativa*”, que consiste en realizar incrementos de carga lo suficientemente pequeños, pero actualizando en cada paso la matriz de rigidez tangente, vector de desplazamientos nodales, y vector de fuerzas internas, hasta converger a la solución con una aproximación adecuada, al final encontraremos la respuesta del pórtico frente a las acciones externas prescritas, pero teniendo en cuenta que dentro de ésta formulación se ha incluido el Modelo Elasto-Viscoplastico de Perzyna con Endurecimiento Lineal para caracterizar el comportamiento del material que compone a cada elemento de la estructura.



## **CAPÍTULO 4**

# **IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL DEL MODELO PROPUESTO**



## **4.1 IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL DEL MODELO PROPUESTO**

Mediante la utilización del programa MATLAB (versión 7.10.0) se creó una herramienta numérica que permite realizar un análisis de la plasticidad en pórticos planos bajo la formulación en la que se basa el modelo propuesto y cuya deducción se trató en los capítulos anteriores.

La herramienta computacional creada consta de 5 archivos de MATLAB, uno principal llamado “PRINCIPAL.m”, y cuatro subrutinas: “f\_lectura.m”, “f\_interna.m”, “f\_seccion.m”, “f\_tension.m”. Teniendo en cuenta que previa a su ejecución se debe disponer del archivo de datos en formato .xls correspondiente al pórtico en análisis, cuya descripción y proceso de asignación de valores se detalla en el ANEXO A.1. Es necesario recordar que estos 5 archivos deben estar guardados dentro de una misma carpeta.

En esta sección vamos a describir los algoritmos empleados en la implementación. Primero trataremos el algoritmo principal de la herramienta computacional completa, para luego ir describiendo los de cada una de las subrutinas que utiliza. Debido a que el lenguaje que vamos a utilizar en este caso es el MATLAB, la codificación correspondiente a cada algoritmo se detalla en la sección respectiva dentro del ANEXO A.2 del presente trabajo.

### **4.1.1 ALGORITMO PRINCIPAL DEL MODELO (Archivo: PRINCIPAL.m)**

Los datos correspondientes a un pórticos cualquiera serán almacenados y leídos desde un archivo de Excel con un formato predefinido que se describe en el ANEXO A.1.

El algoritmo que rige el modelo está constituido de la siguiente manera:

- Entrada de datos: parámetros que caracterizan al material, geometría del pórtico y sus elementos, numeración de nodos y de barras, cargas externas, condiciones de contorno (véase ANEXO A.1). Tolerancia para la solución aproximada, número de intervalos de carga, factor de exageración de la deformada.
- Salida: desplazamientos nodales, reacciones, gráfica de la deformada, gráfica de la evolución de las secciones en los puntos de Gauss de cada elemento.
- Proceso:
  - Lectura de datos

- Determinación de las incógnitas del problema, en base a las condiciones de contorno y acciones aplicadas al pórtico.
- División en la carga externa total en incrementos de carga.
- Determinación de la respuesta de la estructura en cada incremento de carga.
- Verificación del equilibrio aplicando la estrategia incremental iterativa, para cada estado de carga.
- Presentación de los resultados.

#### **4.1.2 ALGORITMO PARA LECTURA DE DATOS (Archivo: f\_lectura.m)**

La forma en que se desarrolla el presente algoritmo es de la siguiente manera:

- Entrada de datos: nombre del archivo de excel en donde se encuentra almacenado los datos de la estructura (véase ANEXO A.1). El archivo debe estar dentro del mismo directorio que los archivos de codificación en MATLAB.
- Salida: variables que contienen las características de los materiales, geometría del pórtico (numeración de nodos y barras), geometría y discretización de secciones, condiciones de contorno, cargas externas aplicadas.
- Proceso:
  - Ingreso del nombre del archivo de datos.
  - Lectura de valores.
  - Creación de variables en función de los datos leídos en el archivo.

#### **4.1.3 ALGORITMO PARA LA DETERMINACIÓN DE LA RESPUESTA DEL PÓRTICO (Archivo: f\_interna.m)**

Este algoritmo determina la respuesta interna de la estructura: estado tenso deformacional, desplazamientos nodales, fuerzas internas que reaccionan y corresponden a la carga actual aplicada, en función de los desplazamientos convergidos en el paso anterior de carga. Dicha respuesta interna es llevada nuevamente a la codificación principal para verificar que cumpla con el equilibrio del sistema. El proceso que en general se usará para el presente algoritmo es de la siguiente forma:

- Entrada de datos: para cada elemento se necesitan las características del material, número de secciones a analizar, desplazamientos nodales, y dentro de cada sección los valores de deformación elasto-viscoplástica, variable de endurecimiento, convergidas en el paso anterior.

- Salida: respuesta interna del sistema porticado (incluido fuerzas reaccionantes), matriz de rigidez tangente global, deformaciones elasto-viscoplásticas, variables de endurecimiento, y momento, curvatura, giro, carga axial de cada una de las secciones en los puntos de Gauss para cada elemento.
- Proceso:
  - Estimación de los desplazamientos nodales elementales locales de cada elemento, para el estado de carga actual.
  - Discretización en dovelas de las secciones en los puntos de Gauss de cada elemento.
  - Determinación del estado tenso-deformacional de cada sección en los puntos de Gauss de cada elemento mediante el modelo elasto-viscoplástico de Perzyna. Esto se realiza en base al valor iterativo de deformación elasto-viscoplástica y variable de endurecimiento, que son definidas en base a los desplazamientos nodales del paso anterior.
  - Determinación de las fuerzas internas elementales locales.
  - Determinación de las matrices de rigidez tangente local de cada elemento.
  - Ensamblaje de las aportaciones elementales de fuerzas internas, y transformación a ejes globales del mismo, obteniendo así el vector global de respuesta de cargas internas.
  - Ensamble de las aportaciones de las matrices de rigidez locales de cada elemento, y su transformación a ejes globales, para determinar la matriz de rigidez tangente global del sistema.

#### **4.1.4 ALGORITMO PARA DISCRETIZACIÓN DE LA SECCIÓN DE UN ELEMENTO** **(Archivo: f\_seccion.m)**

Partiendo de la premisa de que únicamente trabajaremos con secciones trapezoidales, cuyo eje de simetría corresponde al eje  $z$  (véase por ejemplo Figura 2.12), con esta subrutina se discretiza la sección en dovelas y se determina su posición respecto al centroide de la misma, incluyendo el valor del área de cada dovela, bajo el siguiente esquema:

- Entrada de datos: geometría de la sección, número de dovelas.
- Salida: posición del centroide de la sección medido desde la base, área de cada dovela, vector de posición de cada dovela respecto a los ejes locales de la sección cuyo origen se localiza en el centroide de la sección.
- Proceso:
  - Determinación de la posición del centroide respecto a la base.

- Determinación del área de cada dovela.
- Establecimiento del vector posición de cada dovela respecto al eje z.

#### **4.1.5 ALGORITMO DE RETORNO APLICADO AL MODELO ELASTO-VISCOPLÁSTICO DE PERZYNA CON ENDURECIMIENTO LINEAL (Archivo: f\_tension.m)**

Con este modelo se determina el estado tenso-deformacional de cada una de las dovelas en las que se ha discretizado una sección. Además, si el estado del material es no lineal para una dovela cualquiera, se determina si es admisible o no (Guartasaca, 2007), estableciendo la corrección respectiva correspondiente al modelo reológico elegido.

- Entrada de datos: deformación unitaria total del paso actual, deformación unitaria elasto-viscoplástica y variable de endurecimiento del paso anterior, demás parámetros que caracterizan el material.
- Salida: esfuerzo, deformación unitaria total y elasto-viscoplástica, variable de endurecimiento, módulo de deformación tangente.
- Proceso:
  - Verificación del estado tenso-deformacional bajo del modelo elasto-viscoplástico de Perzyna con endurecimiento lineal, aplicando el “Algoritmo de Retorno”. (Véase sección 2.4.1).

## **CAPÍTULO 5**

### **EJEMPLOS DE APLICACIÓN**





## 5.1 INTRODUCCIÓN

En los ejemplos que se presentan a continuación, se ha asumido como material constitutivo de los elementos el acero, de características semejantes al acero de tipo A36 según la ASTM (American Society for Testing and Materials), es decir que el límite de fluencia es de 36000psi. Por lo que asumimos para nuestro estudio un  $f_y=2500\text{kg/cm}^2$ , mientras que el módulo de elasticidad lo tomamos de  $E=2000000\text{kg/cm}^2$ , y el valor del parámetro de endurecimiento lo adoptamos de  $H_p=20000\text{kg/cm}^2$ . Los valores asumidos para E,  $H_p$ , se los justifica en base a un ensayo de carga axial efectuado sobre una barra de acero tal como se muestra en el ANEXO A.3.

Las cargas aplicadas al pórtico deben ser nodales, por lo que si se tienen cargas entre nodos las mismas deben ser transformadas a sus equivalentes nodales. Las cargas nodales aplicadas, pueden ser fuerzas verticales u horizontales, así como momentos, adoptando como positivo sus valores cuyo sentido de aplicación sea hacia arriba, hacia la derecha, levogiro, respectivamente. En todos los casos se ha despreciado el peso propio de la estructura, pues su valor es mucho menor que el valor de las cargas aplicadas.

En el primer ejemplo se resolverá un elemento viga sencillo de forma tal que su resolución se pueda llevar a cabo manualmente en forma analítica y poder comparar los resultados con los obtenidos mediante el uso de la modelación propuesta. Este ejemplo se presenta con la finalidad de indicar que ya en el caso general, cuando se trata ya una estructura la solución ya no es tan simple, y por ende es necesario recurrir a modelos iterativos que ayuden a resolver el problema.

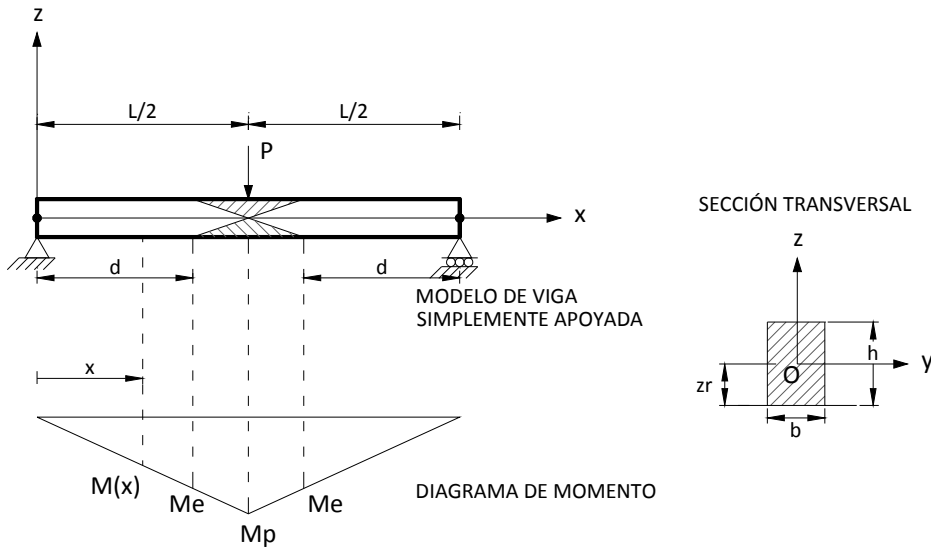
Es por esta razón que ya en los ejemplos siguientes, al no ser tan sencilla su resolución a mano, puesto que incluiremos endurecimiento lineal luego de la rama elástica, vamos a solventarlos mediante el uso de la modelación propuesta y mostrar los resultados que se obtienen a partir de su empleo.

Cabe indicar que las unidades de los resultados son acordes con las unidades de las variables de entrada. En caso de que se elija otro sistema de unidades se debe tener cuidado de manejar el mismo para definir a todas las variables, y sabiendo que el resultado estará en unidades congruentes con el sistema elegido.

Para la interpretación de las gráficas que se presentan en cada sección se debe tener en cuenta el sentido de los ejes locales de cada barra que se ha asignado para el elemento dentro de la hoja de Excel (véase Figura 3.1, Figura 3.5, ANEXO A.1), puesto que su representación es de tipo local para cada barra.

## 5.2 EJEMPLO 1

A continuación se resolverá una viga simplemente apoyada con una carga puntual en el centro de la luz, suponiendo que el material luego de la rama elástica se comporta de forma plástica perfecta. Además se considera que la sección es doblemente simétrica de tipo rectangular. El instante de análisis será tal que la sección más esforzada se encuentre completamente plastificada, tal como se muestra en la Figura 5.1, a partir del cual la viga colapsa.



*Figura 5.1 Viga simplemente apoyada en estado elastoplástico.*

De la figura anterior se puede observar que los tramos de la viga dentro de la distancia  $d$  se encuentra en estado elástico, mientras que la zona intermedia está dentro del rango elastoplástico.

Vamos a suponer que el material de la viga es acero con  $f_y=2500\text{kg/cm}^2$ , mientras que el módulo de elasticidad lo tomamos de  $E=2000000\text{ kg/cm}^2$ , y no consideramos endurecimiento. La geometría de la sección la asumimos como  $b=3\text{cm}$ ,  $h=4\text{cm}$ , mientras que la luz nos imponemos un valor de  $L=100\text{cm}$ .

### 5.2.1 SOLUCIÓN “EXACTA”

A continuación vamos a deducir las expresiones que me definen el comportamiento en estado elastoplástico de la viga (Pino Velazquez, 2008).

Considerando el estado elastoplástico en una sección doblemente simétrica tal como se muestra en la Figura 5.2 siguiente,

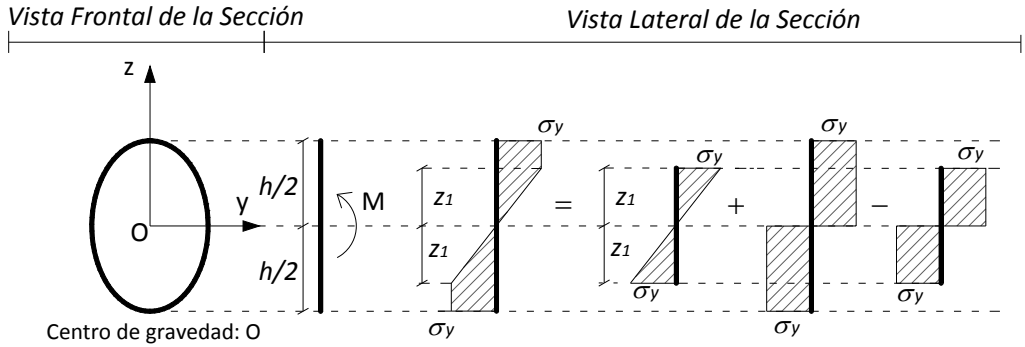


Figura 5.2 Estado elastoplástico de una sección doblemente simétrica.

definimos:

$W^{z1}$  : módulo resistente de la zona que permanece elástica respecto al eje neutro

$$W^{z1} = \frac{I}{z1}, \text{ siendo } I = \text{inercia de la sección respecto al eje neutro} \tag{5.1}$$

$S^{z1}$  : doble del momento estático de la semisección que permanece elástica respecto al eje neutro

$$S^{z1} = 2 \int_0^{z1} z dA \tag{5.2}$$

ahora planteando el equilibrio del momento:

$$\begin{aligned} M &= \sigma_y W^{z1} + 2 \int_0^{h/2} \sigma_y z dA - 2 \int_0^{z1} \sigma_y z dA \\ &= \sigma_y W^{z1} + \sigma_y S - \sigma_y S^{z1} \end{aligned} \tag{5.3}$$

el término  $\sigma_y S$  corresponde al momento de plastificación de la sección  $Mp$ , por lo tanto operando sobre la ecuación anterior tenemos:

$$\begin{aligned} M &= \sigma_y W^{z1} + Mp - \sigma_y S^{z1} = Mp + \sigma_y (W^{z1} - S^{z1}) \\ &= Mp + \frac{Mp}{Mp} \sigma_y (W^{z1} - S^{z1}) = Mp \left[ 1 - \frac{S^{z1} - W^{z1}}{Mp / \sigma_y} \right] \end{aligned} \tag{5.4}$$

Dividiendo la expresión anterior para el momento límite elástico  $M_e$  (momento en el cual la fibra más tensionada de la sección alcanza el valor de tensión de fluencia), obtenemos:

$$\frac{M}{M_e} = \frac{Mp}{M_e} \left[ 1 - \frac{S^{z1} - W^{z1}}{S} \right] \quad (5.5)$$

En una sección rectangular tenemos que:

$$Mp = \sigma_y S = \sigma_y 2 \int_0^{h/2} z dA = \sigma_y 2b \int_0^{h/2} z dz = \sigma_y \frac{bh^2}{4} \quad (5.6)$$

$$M_e = \sigma_y W = \sigma_y \frac{I}{h/2} = \sigma_y \frac{bh^3}{12} \frac{2}{h} = \sigma_y \frac{bh^2}{6} \quad (5.7)$$

y tomando en cuenta las definiciones (5.1) y (5.2), la ecuación (5.5) queda como:

$$\frac{M}{M_e} = \frac{3}{2} \left[ 1 - \frac{4}{3} \left( \frac{z1}{h} \right)^2 \right] \quad (5.8)$$

A partir de la Figura 2.2 se tiene que la curvatura  $\kappa$  (inverso del radio de giro  $\rho$ ) en estado límite elástico, y en estado elastoplástico es como se muestra en las ecuaciones respectivamente:

$$\kappa_e = \frac{1}{\rho_e} = \frac{d\psi}{ds} = \frac{\varepsilon_y}{h/2} \frac{1}{ds} \quad (5.9)$$

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\psi}{ds} = \frac{\varepsilon_y}{z1} \frac{1}{ds} \quad (5.10)$$

entonces la relación entre curvaturas es:

$$\frac{\kappa_e}{\kappa} = 2 \frac{z1}{h} \quad (5.11)$$

Reemplazando la relación anterior en la ecuación del momento (5.8), se tiene:

$$\frac{M}{M_e} = \frac{3}{2} \left[ 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{\kappa_e}{\kappa} \right)^2 \right] \quad (5.12)$$

Despejando de la ecuación anterior la curvatura para estado elastoplástico, obtenemos:

$$\kappa = \frac{\kappa_e}{\sqrt{3 - 2 \frac{M}{Me}}} \quad (5.13)$$

Ahora vamos a determinar las expresiones que definen la deformada de la viga. Así pues, para el caso del ejemplo, al ser simétrico el estado de la viga, vamos a analizar únicamente la mitad izquierda del tramo de la viga. De la Figura 5.1, al tener una distribución lineal de momento, podemos escribir:

$$\frac{M(x)}{Me} = \frac{x}{d}, \text{ para } 0 \leq x \leq L/2 \quad (5.14)$$

Para el tramo (1)  $0 \leq x \leq d$ , en el que todavía el elemento se encuentra en el rango elástico, tenemos:

$$\kappa^{(1)} = \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (5.15)$$

Utilizando (5.14) y sabiendo que  $\kappa_e = \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{Me}{EI}$ , la ecuación (5.15) queda como:

$$\kappa^{(1)} = \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{Me}{EI} \frac{x}{d} = \frac{\kappa_e EI}{EI} \frac{x}{d} = \frac{x}{d} \kappa_e \quad (5.16)$$

De la ecuación anterior tenemos que el giro y la flecha en el tramo (1)  $0 \leq x \leq d$ , están dados por:

$$\theta^{(1)} = \frac{dw}{dx} = \frac{x^2}{2d} \kappa_e + C_1 \quad (5.17)$$

$$w^{(1)} = \frac{x^3}{6d} \kappa_e + C_1 x + C_2 \quad (5.18)$$

Para el tramo (2)  $d < x \leq L/2$ , en el que la viga se encuentra en estado elastoplástico, en base a la ecuación (5.13) y recordando que la ecuación del momento en este caso está dada por (5.14), la expresión para la curvatura queda definida como:

$$\kappa^{(2)} = \frac{\kappa_e}{\sqrt{3-2\frac{M}{Me}}} = \kappa_e \left(3-2\frac{x}{d}\right)^{-1/2} \quad (5.19)$$

A partir de la ecuación anterior tenemos que el giro y la flecha en el tramo (2)  $d < x \leq L/2$ , respectivamente, son:

$$\theta^{(2)} = \frac{dw}{dx} = \frac{1}{1/2} \left(3-2\frac{x}{d}\right)^{1/2} \kappa_e \left(-\frac{d}{2}\right) + C_3 \quad (5.20)$$

$$w^{(2)} = \left(3-2\frac{x}{d}\right)^{3/2} \kappa_e \frac{d^2}{3} + C_3 x + C_4 \quad (5.21)$$

Los valores de las constantes  $C_1$  a  $C_4$ , se determinan aplicando en las ecuaciones (5.17) a (5.18), y (5.20) a (5.21), las siguientes condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} \text{para } x=0: w^{(1)} &= 0; \\ \text{para } x=d: w^{(1)} &= w^{(2)}, \theta^{(1)} = \theta^{(2)}; \\ \text{para } x=L/2: \theta^{(2)} &= 0 \end{aligned} \quad (5.22)$$

de este modo se encuentra que:

$$C_1 = d \kappa_e \left[ -\frac{3}{2} + \left(3 - \frac{L}{d}\right)^{1/2} \right] \quad (5.23)$$

$$C_2 = 0 \quad (5.24)$$

$$C_3 = d \kappa_e \left(3 - \frac{L}{d}\right)^{1/2} \quad (5.25)$$

$$C_4 = -\frac{5}{3} d^2 \kappa_e \quad (5.26)$$

En este caso en particular del ejemplo el valor de la distancia “d” se encuentra igualando el valor del momento al del correspondiente al momento  $Me$ :

$$M(x) = \frac{P}{2} x, \text{ para } 0 \leq x \leq L/2 \quad (5.27)$$

$$\text{de donde: } \frac{P}{2} d = Me \therefore d = \frac{2Me}{P} \quad (5.28)$$

Una vez que hemos deducido las expresiones que me definen el comportamiento de la viga en estado elastoplástico, ahora lo que nos queda es obtener los valores necesarios para compararlos con los obtenidos mediante la aplicación del modelo propuesto. Así pues la carga que me genera el estado indicado en la Figura 5.1, se la obtiene igualando el valor del momento de la ecuación (5.27) evaluado en  $x = L/2$ , al valor del momento  $M_p$  dado en la ecuación (5.6), en este caso para los datos de la geometría del elemento y características del material dados al inicio del ejemplo se tiene que la carga que me genera el estado elastoplástico indicado en la Figura 5.1, es  $P = P_p = 1200\text{kgf}$ . De igual forma con ayuda de la ecuación (5.7) y (5.28) se tiene que la distancia  $d = 33.3\text{cm}$ . Como dato adicional el instante en el que el momento máximo de la viga en el centro de la luz alcanza el valor de  $M = M_e$  corresponde a una carga  $P = P_e$ , cuyo valor se ha determinado evaluando la ecuación (5.27) en  $x = L/2$ , e igualándola a la ecuación (5.6), de donde  $P_e = 800\text{kgf}$ .

En la tabla siguiente se muestran los resultados obtenidos mediante la formulación aquí desarrollada para los valores de momento, curvatura, flecha y giro, correspondientes a la posición  $x$  cuando la carga  $P = P_p$ , nótese que únicamente se colocan valores dentro del rango  $0 \leq x \leq L/2$ , puesto que la carga genera efectos simétricos en el elemento.

**Tabla 5.1** Valoración de resultados mediante solución “exacta” del EJEMPLO 1.

<i>Coord. Natural</i>	<i>Posición (x)</i> [cm]	<i>Momento (M)</i> (Ec. (5.27)) [kgf-cm]	<i>Curvat. (κ)</i> (Ec. (5.16) ó Ec. (5.19)) [1/cm]	<i>Flecha (w)</i> (Ec. (5.18) ó Ec. (5.21)) [cm]	<i>Giro (θ)</i> (Ec. (5.17) ó Ec. (5.20)) [rad]
	0.00	0.00	0.00	0.00	-3.125E-02
$\xi_1^{(1)}$	5.28	3169.87	9.906E-05	-0.165	-3.099E-02
$\xi_2^{(1)}$	19.72	11830.13	3.697E-04	-0.592	-2.761E-02
	25.00	15000.00	4.688E-04	-0.732	-2.539E-02
$\xi_1^{(2)}$	27.64	16584.94	5.183E-04	-0.798	-2.409E-02
$\xi_2^{(2)}$	34.86	20915.06	6.557E-04	-0.957	-1.986E-02
	37.50	22500.00	7.217E-04	-1.007	-1.804E-02
$\xi_1^{(3)}$	40.14	24084.94	8.126E-04	-1.052	-1.602E-02
$\xi_2^{(3)}$	47.36	28415.06	1.570E-03	-1.143	-8.294E-03
	50.00	30000.00	indeterminado	-1.157	0.00

Nótese que los valores se han obtenido para las posiciones (x) correspondientes a los puntos de Gauss dentro de los elementos en los que se ha discretizado al elemento tal como se verá en la sección siguiente, de forma que se puedan comparar los resultados.

5.2.2 SOLUCIÓN MEDIANTE EL MODELO IMPLEMENTADO

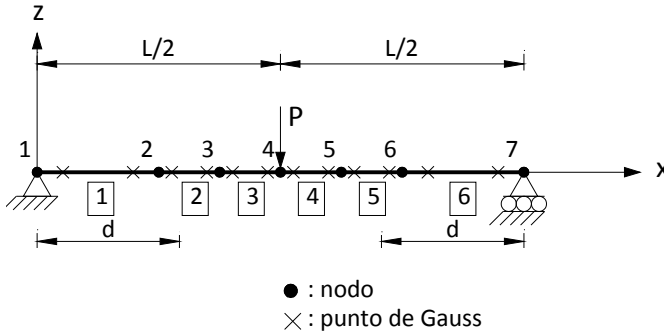


Figura 5.3 Modelo en elementos finitos de la viga simplemente apoyada del EJEMPLO 1.

Debido a que la zona comprendida en el tramo  $d \leq x \leq (L-d)$  se encuentra sometida a un estado no lineal, vamos a discretizar un poco más la viga en ese tramo, tal como se muestra en la Figura 5.3. A la viga se la ha dividido en 6 elementos, definiéndose así 7 nodos, además dentro de cada elemento se ha asumido para el análisis 2 puntos de Gauss correspondientes a una cuadratura de segundo orden. El resto de datos que me definen el modelo ingresados en el formato de la hoja de Excel, es como se describe a continuación.

Los parámetros que definen el material los indicados en la *Tabla 5.2*:

Tabla 5.2 Resumen Parámetros que definen el material.

MÓDULOS DE ELASTICIDAD (E)	
Tipo	Valor (kgf/cm <sup>2</sup> )
1	2.00E+06

ESFUERZOS DE FLUENCIA (fy)	
Tipo	Valor (kgf/cm <sup>2</sup> )
1	2500

PARÁMETROS DE ENDURECIMIENTO DEL MATERIAL (Hp)	
Tipo	Valor (kgf/cm <sup>2</sup> )
1	0

COEFICIENTES DE VISCOSIDAD (cvis)	
Tipo	Valor (kgf-s/cm <sup>2</sup> )
1	0.05

Los datos para la sección son según la *Tabla 5.3*:



Tabla 5.3 Geometría de las secciones.

TIPOS DE SECCION TRAPEZOIDAL SEGÚN SU GEOMETRIA							
Tipo	a	b	h	zr	A	I	Discretización Sección
	(cm)	(cm)	(cm)	(cm)	(cm <sup>2</sup> )	(cm <sup>4</sup> )	ndov
1	3.00	3.00	4.00	2.00	12.00	16	16

Los datos de numeración de nodos, numeración y tipos de barras, condiciones de contorno, cargas externas aplicada, se muestran en la *Tabla 5.4*, *Tabla 5.5*, *Tabla 5.6*, *Tabla 5.7*, respectivamente.

Tabla 5.4 Numeración de nodos y sus coordenadas.

DEFINICION DE NODOS Y SUS COORDENADAS		
Nodo	Coordenada X (cm)	Coordenada Z (cm)
1	0.00	0.00
2	25.00	0.00
3	37.50	0.00
4	50.00	0.00
5	62.50	0.00
6	75.00	0.00
7	100.00	0.00

Tabla 5.5 Definición de elementos, de sus conexiones nodales, del tipo de material asignado.

DEFINICION DE TIPOS DE BARRAS, NODOS ENTRE LOS QUE SE ENCUENTRAN, CARACTERISTICAS DEL MATERIAL, CONFIGURACION PARA LA DISCRETIZACION											
Barra	Nodo 1	Nodo 2	Tipo de:					Discretización MEF			
			Sección	E	fy	Hp	cvis	le (cm)	Puntos Gauss	sen (φ)	cos (φ)
1	1	2	1	1	1	1	1	25.00	2	0	1
2	2	3	1	1	1	1	1	12.50	2	0	1
3	3	4	1	1	1	1	1	12.50	2	0	1
4	4	5	1	1	1	1	1	12.50	2	0	1
5	5	6	1	1	1	1	1	12.50	2	0	1
6	6	7	1	1	1	1	1	25.00	2	0	1

Tabla 5.6 Condiciones de contorno.

NODOS RESTRINGIDOS ( 0=LIBRE, 1=RESTRINGIDO )			
Nodo	En dirección X (u)	En dirección Z (w)	Giro (teta)
1	1	1	0
7	0	1	0

Tabla 5.7 Cargas nodales externas aplicadas.

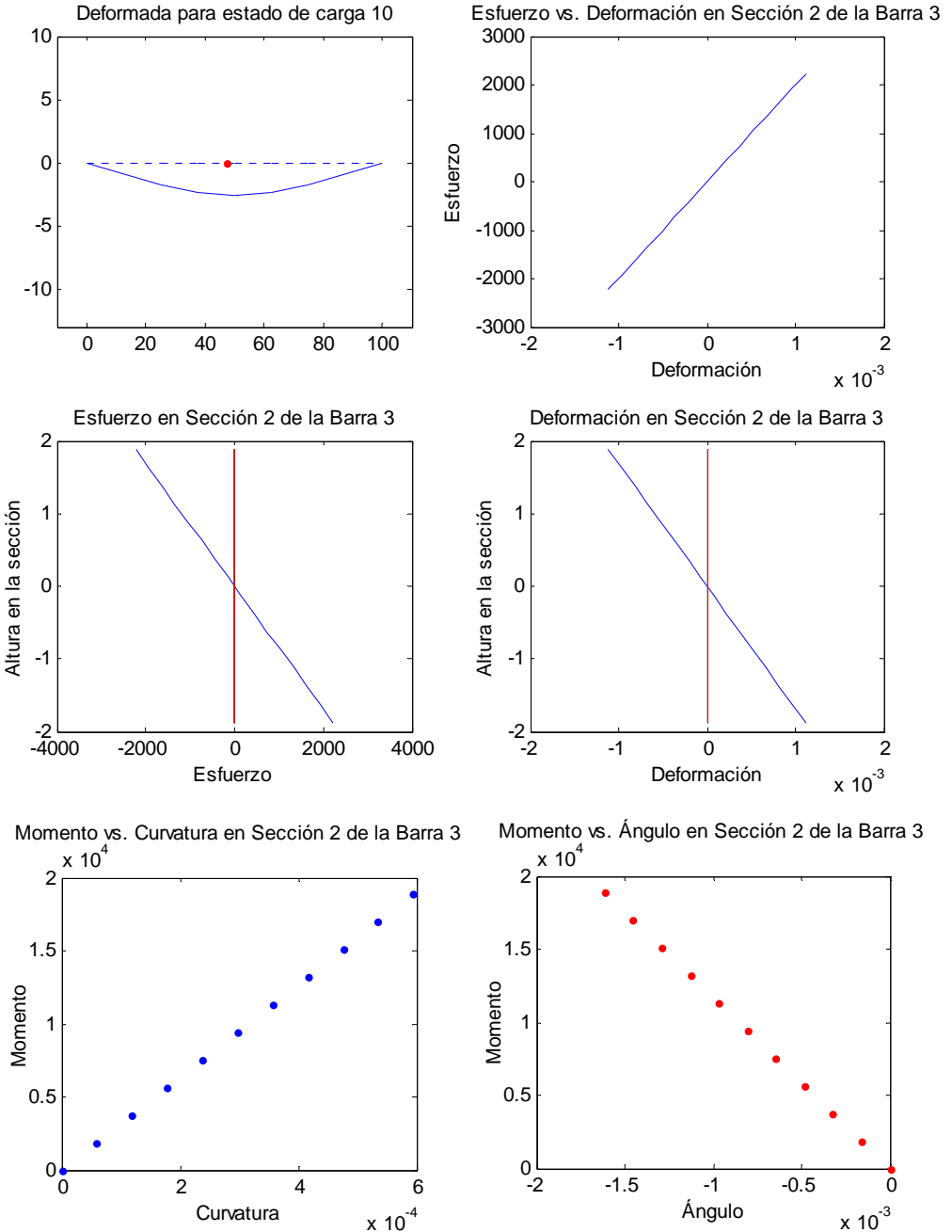
NODOS CON CARGA EXTERIOR			
FUERZAS APLICADAS HACIA → = POSITIVO			
FUERZAS APLICADAS HACIA ↑ = POSITIVO			
MOMENTOS EN LEVOGIRO ↺ = POSITIVO			
Nodo	Fuerza en X (kgf)	Fuerza en Z (kgf)	Momento (kgf-cm)
4	0.00	-1200.00	0.00

Ya introducidos los datos corremos la herramienta computacional, en donde nos pide el número de intervalos de carga a considerar (mientras más pequeño mejor), en este caso hemos asumido un valor de 10, y una tolerancia para aproximar las soluciones de 0.01%, y un factor de amplificación de la deformada de 5, esto con la finalidad de exagerar visualmente la deformada. El programa en cada paso de incremento de carga arroja los valores de desplazamientos nodales y el vector de cargas externas nodales incluyendo las reacciones, además muestra gráficamente la evolución del estado tenso-deformacional en cada uno de los puntos de Gauss de cada elemento, por esto, debido al número de iteraciones únicamente expondremos los resultados de desplazamientos y reacciones finales, y analizaremos la evolución en de una sola sección en determinados estados de carga de manera que se destaque la variación de estado tenso-deformacional a medida que se incrementa la carga.

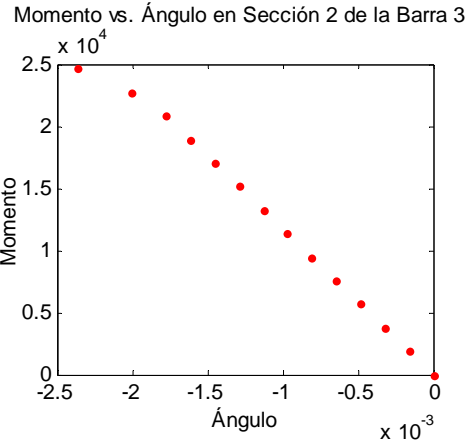
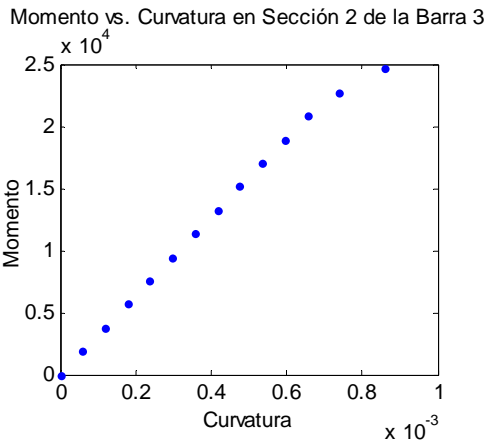
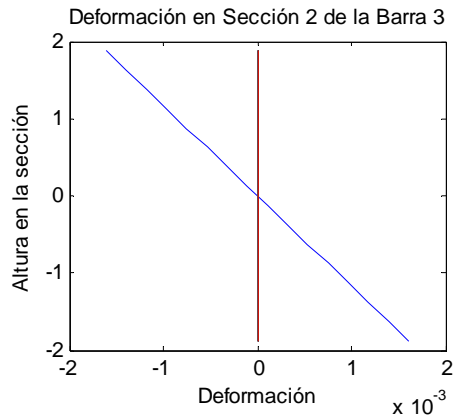
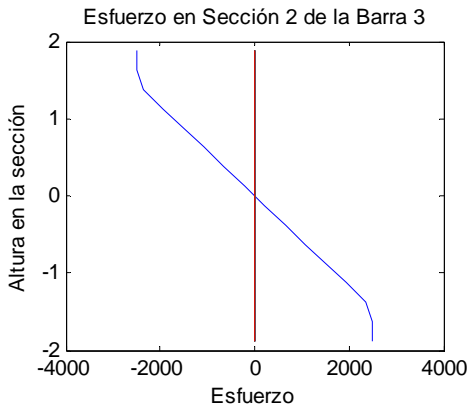
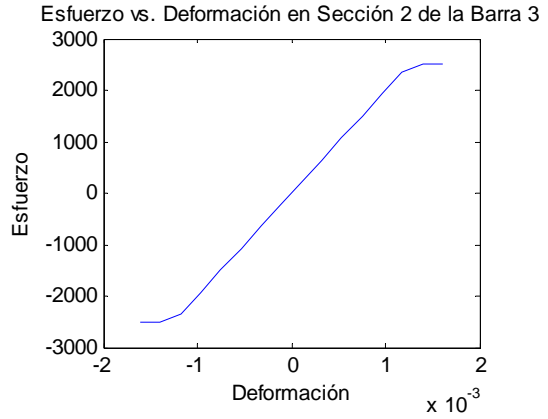
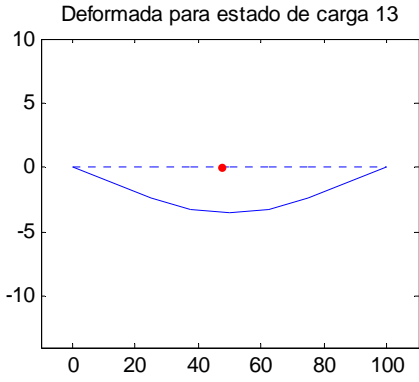
La sección correspondiente al 2° punto de Gauss ( $x=47.36\text{cm}$ , sección ilustrativa) del elemento 3 es en la que vamos a describir su evolución, hay que tener presente que la ubicación de los puntos de Gauss dentro del elemento depende de la ubicación de ejes locales del mismo (véase Figura 3.1, Figura 3.5 y Tabla 5.5), así pues la sección a la que nos referimos es la que se encuentra más cercana al nodo 4. En la Figura 5.4 siguiente se muestra la evolución de la misma para los pasos de carga ahí indicados, que como es de esperar, tal como indica el gráfico de esfuerzo en la sección, las fibras superiores se encuentran a compresión y las inferiores a tracción. La sección se mantiene en el rango elástico hasta el estado mostrado en la ilustración b) de la Figura 5.4, pues como es de esperar según se analizó en la resolución “exacta” a la carga  $P=Pe=800\text{kgf}$  le corresponde el estado límite elástico en el centro de la luz. Ya en los

estados de carga subsiguientes se ve que parte de la sección se encuentra en fluencia y otra parte en estado elástico, acorde al comportamiento esperado (véase Figura 5.1).

a) Cuando la carga tiene un valor de  $-800$  kgf.



*b) Cuando la carga tiene un valor de -1040 kgf.*



c) Cuando la carga tiene un valor de -1200 kgf.

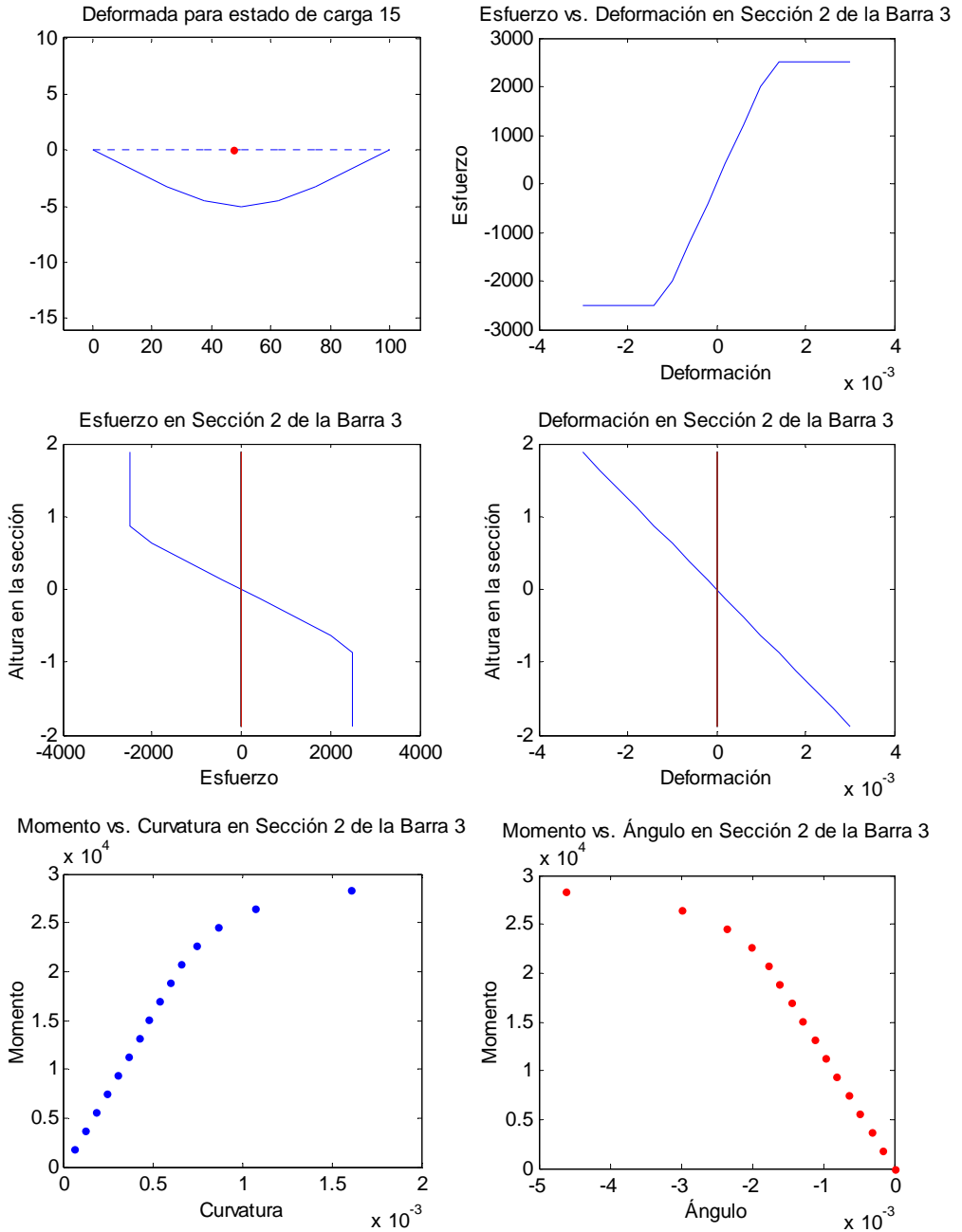


Figura 5.4 Evolución de la sección ilustrativa para el EJEMPLO 1.

Al final, al aplicar el total de la carga  $P=P_p$ , se tiene que el valor de los desplazamientos nodales es:

**Tabla 5.8** Desplazamientos nodales finales para el EJEMPLO 1.

Nodo	u (cm)	w (cm)	$\theta$ (rad)
1	0.000	0.000	-2.838E-02
2	0.000	-0.660	-2.250E-02
3	0.000	-0.899	-1.514E-02
4	0.000	-1.011	0.000
5	0.000	-0.899	1.514E-02
6	0.000	-0.660	2.250E-02
7	0.000	0.000	2.838E-02

Y el valor de las fuerzas externas nodales, como respuesta de la estructura, que me arroja el programa, incluyendo las reacciones, son:

**Tabla 5.9** Cargas nodales externas para el EJEMPLO 1.

Nodo	X (kgf)	Z (kgf)	M (kgf-cm)
1	0.00	600.00	0.00
2	0.00	0.00	0.00
3	0.00	0.00	0.00
4	0.00	-1200.00	0.00
5	0.00	0.00	0.00
6	0.00	0.00	0.00
7	0.00	600.00	0.00

En las dos tablas anteriores nótese la simetría de los resultados, acorde a lo esperado para el ejemplo planteado.

Ahora bien, para poder comparar los resultados que me arroja el modelo implementado, aunque explícitamente no se visualiza los valores de las variables a comparar en los puntos de Gauss, se pueden obtener desde las matrices T, M, C que almacenan los valores de giro, momento, curvatura, respectivamente, para cada estado de carga en los puntos de Gauss. Así pues para el presente ejemplo, tabulando los resultados obtenidos en los nodos, conjuntamente con los de los puntos de Gauss para la primera mitad de la viga (pues en el otro tramo los resultados son simétricos), se tiene:

Tabla 5.10 Resultados obtenidos mediante el modelo implementado para el EJEMPLO 1.

<i>Coord. Natural</i>	<i>Posición (x)</i> [cm]	<i>Momento (M)</i> [kgf-cm]	<i>Curvat. (K)</i> [1/cm]	<i>Flecha (w)</i> [cm]	<i>Giro (θ)</i> [rad]
	0.00	-	-	0.000	-2.838E-02
$\xi_1^{(1)}$	5.28	3169.87	9.945E-05	-	-2.812E-02
$\xi_2^{(1)}$	19.72	11830.13	3.711E-04	-	-2.472E-02
	25.00	-	-	-0.660	-2.250E-02
$\xi_1^{(2)}$	27.64	16584.94	5.203E-04	-	-2.119E-02
$\xi_2^{(2)}$	34.86	20915.06	6.562E-04	-	-1.694E-02
	37.50	-	-	-0.899	-1.514E-02
$\xi_1^{(3)}$	40.14	24084.94	8.175E-04	-	-1.336E-02
$\xi_2^{(3)}$	47.36	28415.06	1.605E-03	-	-4.622E-03
	50.00	-	-	-1.011	0.00

Al ser el modelo propuesto de tipo discreto no se disponen de valores de ciertas variables en algunas de las posiciones, pero para los valores disponibles comparando la Tabla 5.1 con la Tabla 5.10, se ve que los valores son bastante similares, siendo los que más difieren los correspondientes a los de la flecha y giro en promedio alrededor del 12% como máximo respecto a los valores “exactos”, existiendo un valor pico que no se ha tomado para tal estimación pues su diferencia es mayor y que corresponde al giro en la posición 47.36cm. Se puede demostrar que corriendo el ejemplo con diez elementos, discretizando más en la zona elastoplástica, la variación promedio en los resultados está alrededor del 2%.

Este ejemplo ha sido desarrollado con la finalidad de exponer lo laborioso que implica un desarrollo de tipo analítico para encontrar el comportamiento “exacto” de una estructura y la forma en la que se simplifica su resolución mediante un modelo discreto tal como el propuesto en el presente trabajo, y cuya mayor utilidad se verifica al analizar la evolución del estado tenso-deformacional de una estructura más general como es el caso de un pórtico.

### 5.3 EJEMPLO 2

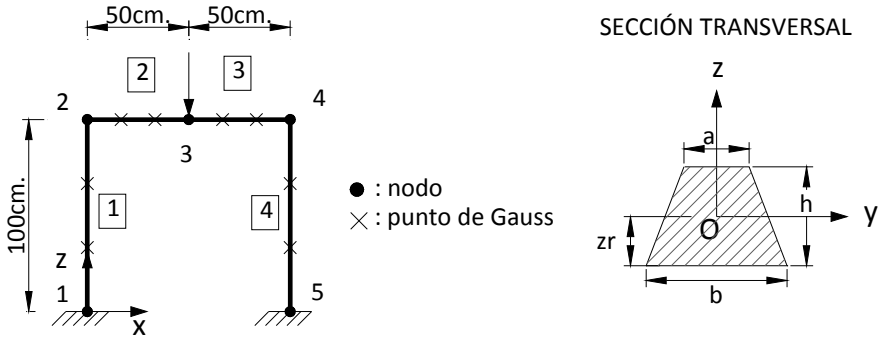


Figura 5.5 Pórtico correspondiente al EJEMPLO 2.

Para el pórtico mostrado en la Figura 5.5, ingresamos los datos en la hoja de Excel según el formato predefinido, siendo los parámetros que definen el material los indicados en la *Tabla 5.11*.

Tabla 5.11 Resumen Parámetros que definen el material.

MÓDULOS DE ELASTICIDAD (E)	
Tipo	Valor (kgf/cm <sup>2</sup> )
1	2.00E+06

ESFUERZOS DE FLUENCIA (fy)	
Tipo	Valor (kgf/cm <sup>2</sup> )
1	2500

PARÁMETROS DE ENDURECIMIENTO DEL MATERIAL (Hp)	
Tipo	Valor (kgf/cm <sup>2</sup> )
1	20000

COEFICIENTES DE VISCOSIDAD (cvis)	
Tipo	Valor (kgf-s/cm <sup>2</sup> )
1	0.05

Los datos para la sección son según la *Tabla 5.12*:

Tabla 5.12 Geometría de las secciones.

TIPOS DE SECCION TRAPEZOIDAL SEGÚN SU GEOMETRIA							
Tipo	a	b	h	zr	A	I	Discretización Sección
	(cm)	(cm)	(cm)	(cm)	(cm <sup>2</sup> )	(cm <sup>4</sup> )	ndov
1	5.00	3.00	4.00	2.17	16.00	20.89	100



Los datos de numeración de nodos, numeración y tipos de barras, condiciones de contorno, cargas externas aplicada, se muestran en la *Tabla 5.13*, *Tabla 5.14*, *Tabla 5.15*, *Tabla 5.16*, respectivamente.

**Tabla 5.13** Numeración de nodos y sus coordenadas.

DEFINICION DE NODOS Y SUS COORDENADAS		
Nodo	Coordenada X (cm)	Coordenada Z (cm)
1	0.00	0.00
2	0.00	100.00
3	50.00	100.00
4	100.00	100.00
5	100.00	0.00

**Tabla 5.14** Definición de elementos, de sus conexiones nodales, del tipo de material asignado.

DEFINICION DE TIPOS DE BARRAS, NODOS ENTRE LOS QUE SE ENCUENTRAN, CARACTERISTICAS DEL MATERIAL, CONFIGURACION PARA LA DISCRETIZACION											
Barra	Nodo 1	Nodo 2	Tipo de:					Discretización MEF			
			Sección	E	fy	Hp	evis	le (cm)	Puntos Gauss	sen (φ)	cos (φ)
1	1	2	1	1	1	1	1	100.00	2	1	0
2	2	3	1	1	1	1	1	50.00	2	0	1
3	4	3	1	1	1	1	1	50.00	2	0	-1
4	4	5	1	1	1	1	1	100.00	2	-1	0

**Tabla 5.15** Condiciones de contorno.

NODOS RESTRINGIDOS ( 0=LIBRE, 1=RESTRINGIDO )			
Nodo	En dirección X (u)	En dirección Z (w)	Giro (teta)
1	1	1	1
5	1	1	1

**Tabla 5.16** Cargas nodales externas aplicadas.

NODOS CON CARGA EXTERIOR			
FUERZAS APLICADAS HACIA $\rightarrow$ = POSITIVO			
FUERZAS APLICADAS HACIA $\uparrow$ = POSITIVO			
MOMENTOS EN LEVOGIRO $\curvearrowright$ = POSITIVO			
Nodo	Fuerza en X (kgf)	Fuerza en Z (kgf)	Momento (kgf-cm)
3	0.00	-4000.00	0.00

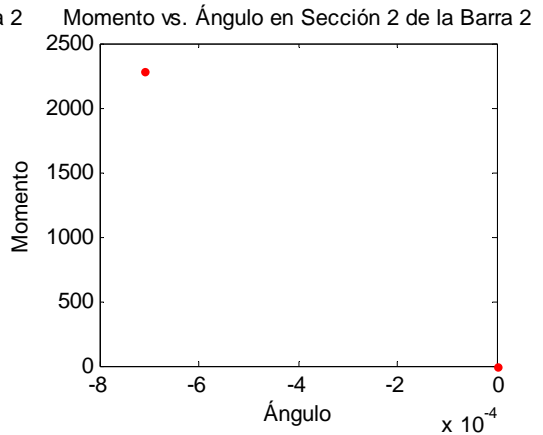
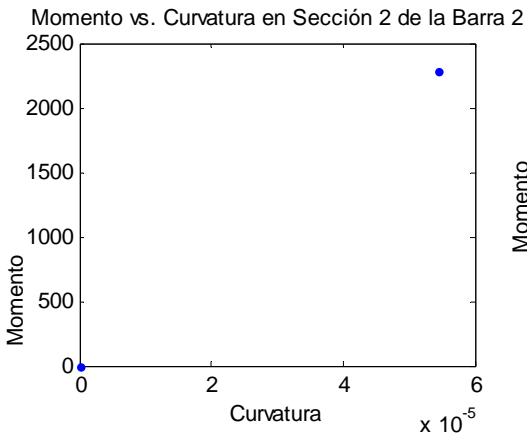
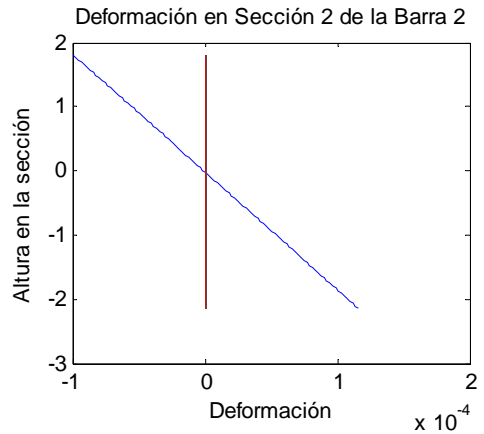
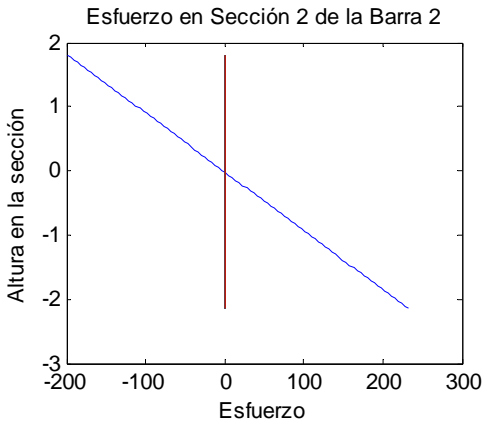
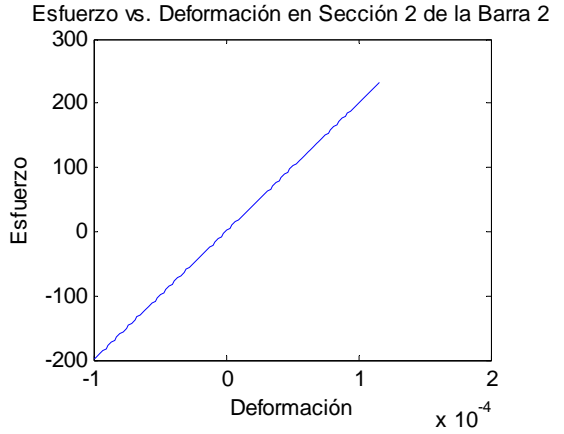
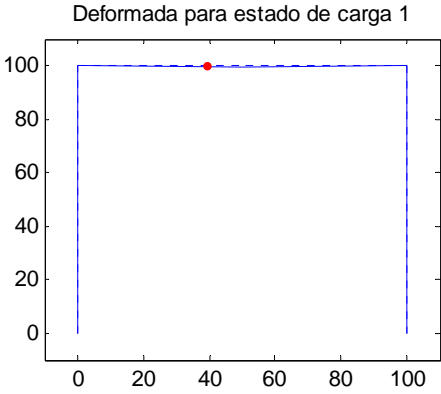
### 5.3.1 SOLUCIÓN MEDIANTE EL MODELO IMPLEMENTADO

Una vez que hemos introducido los datos necesarios, corremos la herramienta computacional, en donde nos pide el número de intervalos de carga a considerar (mientras más pequeño mejor), en este caso hemos asumido un valor de 20, y una tolerancia para aproximar las soluciones de 0.01%, con un factor de amplificación visual de la deformada de 10. El programa en cada paso de incremento de carga arroja los valores de desplazamientos nodales y el vector de cargas externas nodales incluyendo las reacciones, además muestra gráficamente la evolución del estado tenso-deformacional en cada uno de los puntos de Gauss de cada elemento, por esto, debido al número de iteraciones, únicamente expondremos el resultados de desplazamientos y reacciones finales, y analizaremos la evolución en de una sola sección en determinados estados de carga de manera que se destaque la variación de estado tenso-deformacional a medida que se incrementa la carga.

La sección correspondiente al 2° punto de Gauss (sección ilustrativa) del elemento 2 es en la que vamos a describir su evolución, hay que tener presente que la ubicación de los puntos de Gauss dentro del elemento depende de la ubicación de ejes locales del mismo (véase Figura 3.1, Figura 3.5 y Tabla 5.14), así pues la sección a la que nos referimos es la que se encuentra más cercana al nodo 3. Y en la Figura 5.6 siguiente se muestra la evolución de la misma para los pasos de carga ahí indicados, que como es de esperar, tal como indica el gráfico de esfuerzo en la sección, las fibras superiores se encuentran a compresión y las inferiores a tracción. La sección se mantiene en el rango elástico hasta poco antes del estado mostrado en la ilustración b) de la Figura 5.6.

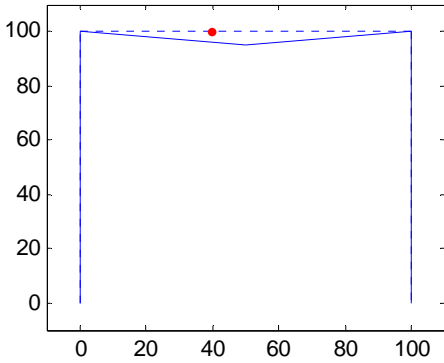
Ya en los estados de carga subsiguientes parte de la sección se encuentra en fluencia. En cada situación de carga se muestra también la gráfica de Esfuerzo–Deformación unitaria, Momento–Curvatura, y Momento–Ángulo de giro.

a) Cuando la carga tiene un valor de -200 kgf.

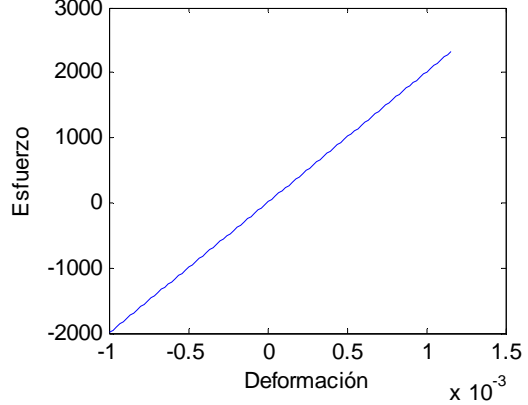


*b) Cuando la carga tiene un valor de -2000 kgf.*

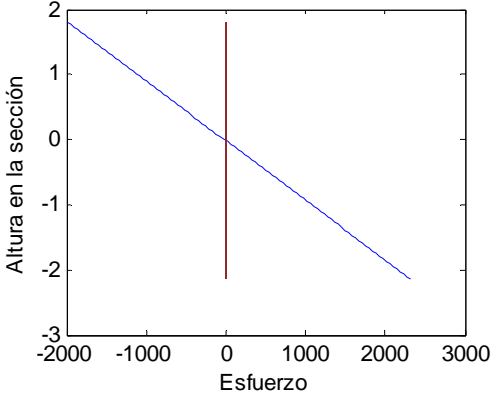
Deformada para estado de carga 10



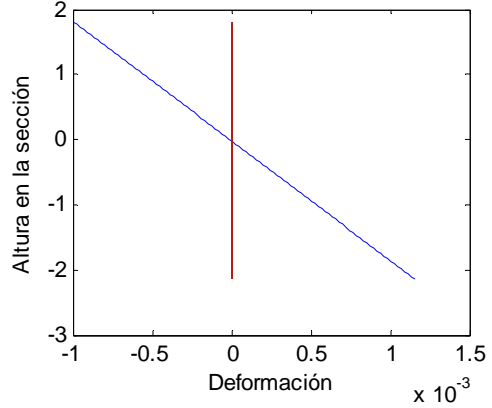
Esfuerzo vs. Deformación en Sección 2 de la Barra 2



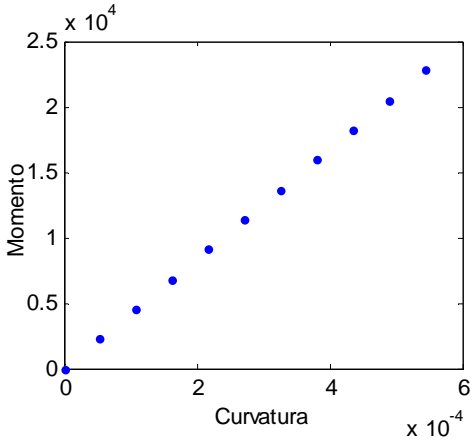
Esfuerzo en Sección 2 de la Barra 2



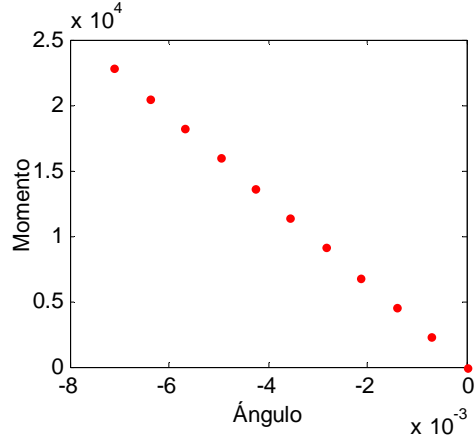
Deformación en Sección 2 de la Barra 2



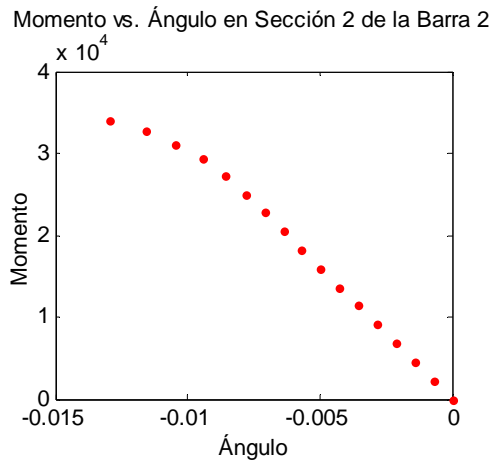
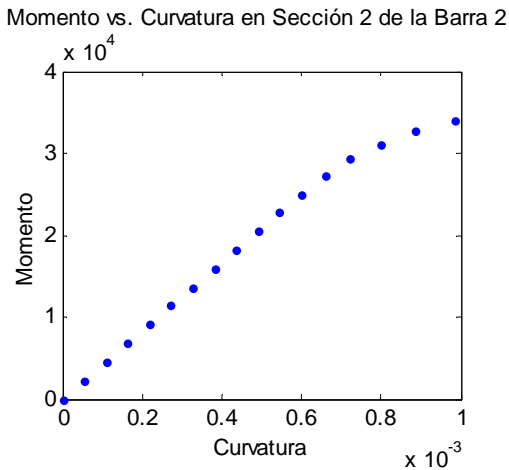
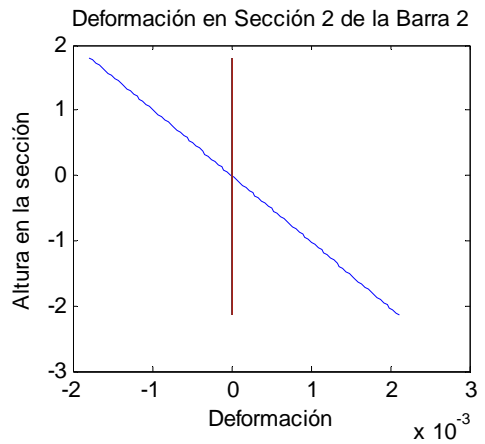
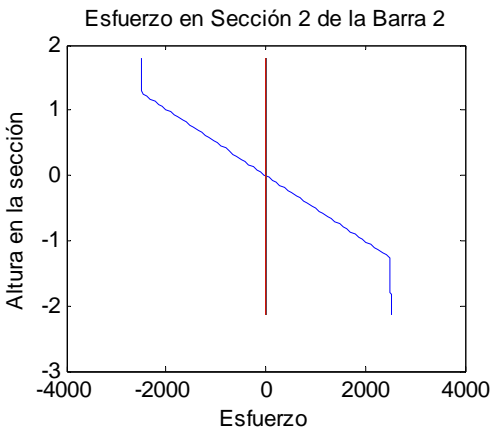
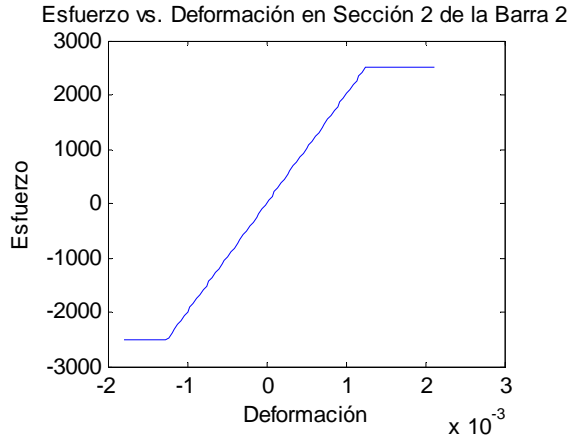
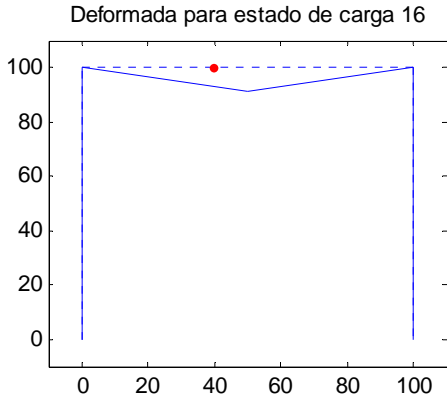
Momento vs. Curvatura en Sección 2 de la Barra 2



Momento vs. Ángulo en Sección 2 de la Barra 2



c) Cuando la carga tiene un valor de  $-3200$  kgf.



d) Cuando la carga tiene un valor de  $-4000$  kgf.

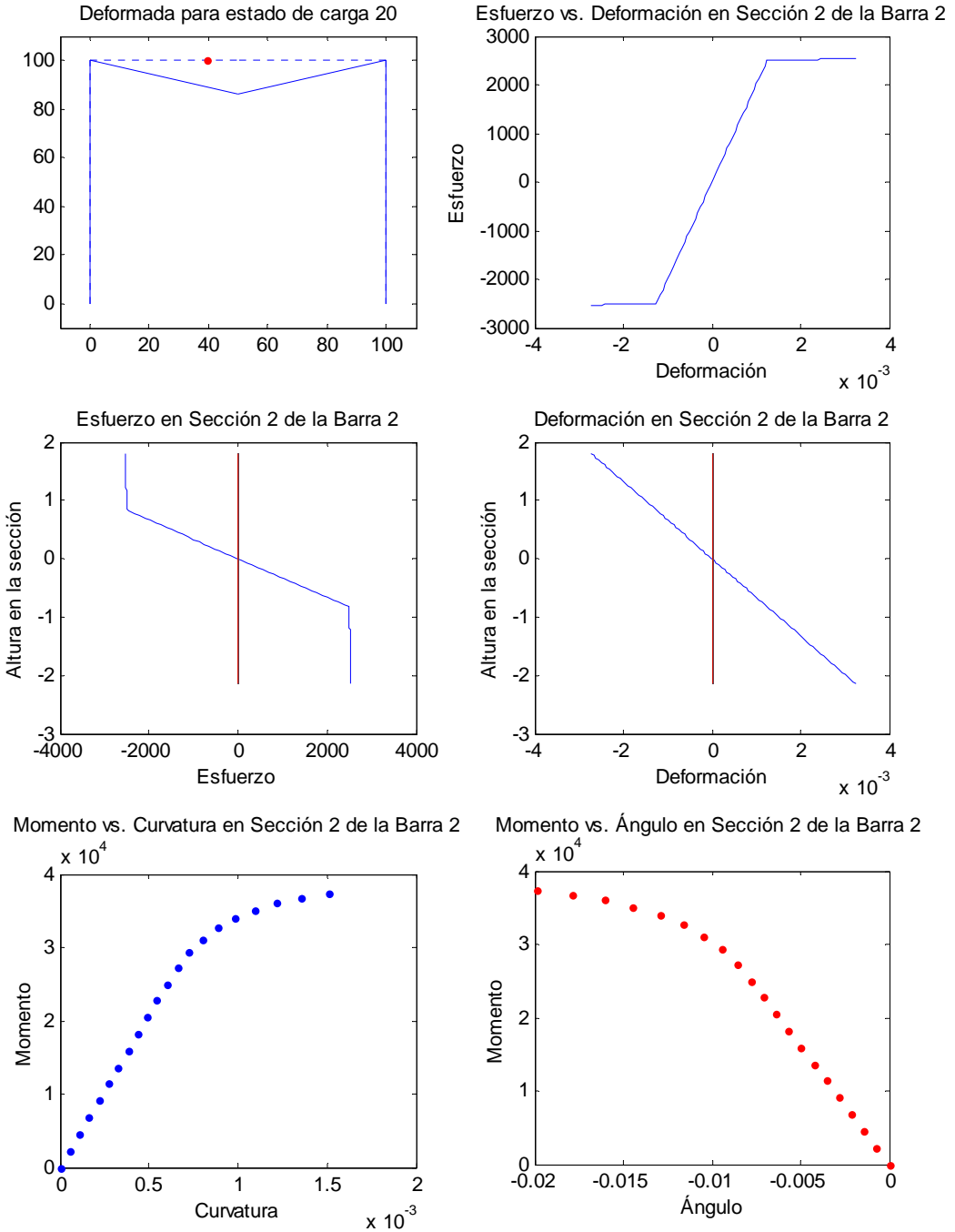


Figura 5.6 Evolución de la sección ilustrativa para el EJEMPLO 2.

Al final, al aplicar el total de la carga, se tiene que el valor de los desplazamientos nodales es:

**Tabla 5.17** Desplazamientos nodales finales para el EJEMPLO 2.

Nodo	u (cm)	w (cm)	$\theta$ (rad)
1	0	0	0
2	0.0004	-0.0070	-0.0256
3	0.0006	-1.3706	-0.0001
4	-0.0023	-0.0070	0.0257
5	0	0	0

Y el valor de las fuerzas externas nodales, como respuesta de la estructura, que me arroja el programa, incluyendo las reacciones, son:

**Tabla 5.18** Cargas nodales externas para el EJEMPLO 2.

Nodo	X (kgf)	Z (kgf)	M (kgf-cm)
1	625	2000	-21057
2	0	0	0
3	0	-4000	0
4	0	0	0
5	-625	2000	21042

### 5.3.2 VERIFICACIÓN DEL EQUILIBRIO MEDIANTE EL SAP2000

Introduciendo dicho pórtico dentro del programa SAP2000, se establece que las cargas nodales incluyendo las reacciones en los nodos son:

**Tabla 5.19** Cargas nodales externas para el EJEMPLO 2 desde el SAP2000.

Nodo	X (kgf)	Z (kgf)	M (kgf-cm)
1	499	2000	-16581
2	0	0	0
3	0	-4000	0
4	0	0	0
5	-499	2000	16581

Comparando con las reacciones obtenidas mediante la herramienta computacional se ve que los valores son mayores, y que la diferencia es de alrededor un 26% respecto a los resultados obtenidos con el SAP.

### 5.4 EJEMPLO 3

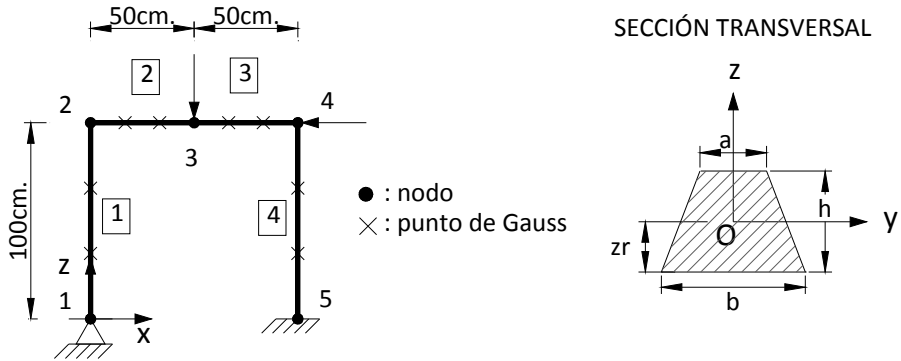


Figura 5.7 Pórtico correspondiente al EJEMPLO 3.

Para el pórtico mostrado en la Figura 5.7, ingresamos los datos en la hoja de Excel según el formato predefinido, siendo los parámetros que definen el material los indicados en la Tabla 5.20.

Tabla 5.20 Resumen Parámetros que definen el material.

MÓDULOS DE ELASTICIDAD (E)	
Tipo	Valor (kgf/cm <sup>2</sup> )
1	2.00E+06

ESFUERZOS DE FLUENCIA (fy)	
Tipo	Valor (kgf/cm <sup>2</sup> )
1	2500

PARÁMETROS DE ENDURECIMIENTO DEL MATERIAL (Hp)	
Tipo	Valor (kgf/cm <sup>2</sup> )
1	20000

COEFICIENTES DE VISCOSIDAD (cvis)	
Tipo	Valor (kgf-s/cm <sup>2</sup> )
1	0.05

Los datos para la sección son según la Tabla 5.21:

Tabla 5.21 Geometría de las secciones.

TIPOS DE SECCION TRAPEZOIDAL SEGÚN SU GEOMETRIA							
Tipo	a (cm)	b (cm)	h (cm)	zr (cm)	A (cm <sup>2</sup> )	I (cm <sup>4</sup> )	Discretización Sección
							ndov
1	5.00	3.00	4.00	2.17	16.00	20.89	100



Los datos de numeración de nodos, numeración y tipos de barras, condiciones de contorno, cargas externas aplicada, se muestran en la *Tabla 5.22*, *Tabla 5.23*, *Tabla 5.24*, *Tabla 5.25*, respectivamente.

**Tabla 5.22** Numeración de nodos y sus coordenadas.

DEFINICION DE NODOS Y SUS COORDENADAS		
Nodo	Coordenada X (cm)	Coordenada Z (cm)
1	0.00	0.00
2	0.00	100.00
3	50.00	100.00
4	100.00	100.00
5	100.00	0.00

**Tabla 5.23** Definición de elementos, de sus conexiones nodales, del tipo de material asignado.

DEFINICION DE TIPOS DE BARRAS, NODOS ENTRE LOS QUE SE ENCUENTRAN, CARACTERISTICAS DEL MATERIAL, CONFIGURACION PARA LA DISCRETIZACION											
Barra	Nodo 1	Nodo 2	Tipo de:					Discretización MEF			
			Sección	E	fy	Hp	cvis	le (cm)	Puntos Gauss	sen (Φ)	cos (Φ)
1	1	2	1	1	1	1	1	100.00	2	1	0
2	2	3	1	1	1	1	1	50.00	2	0	1
3	3	4	1	1	1	1	1	50.00	2	0	-1
4	4	5	1	1	1	1	1	100.00	2	-1	0

**Tabla 5.24** Condiciones de contorno.

NODOS RESTRINGIDOS ( 0=LIBRE, 1=RESTRINGIDO )			
Nodo	En dirección X (u)	En dirección Z (w)	Giro (teta)
1	1	1	0
5	1	1	1

**Tabla 5.25** Cargas nodales externas aplicadas.

NODOS CON CARGA EXTERIOR			
FUERZAS APLICADAS HACIA → = POSITIVO			
FUERZAS APLICADAS HACIA ↑ = POSITIVO			
MOMENTOS EN LEVOGIRO ↺ = POSITIVO			
Nodo	Fuerza en X (kgf)	Fuerza en Z (kgf)	Momento (kgf-cm)
3	0.00	-3000.00	0.00
4	-1000.00	0.00	0.00

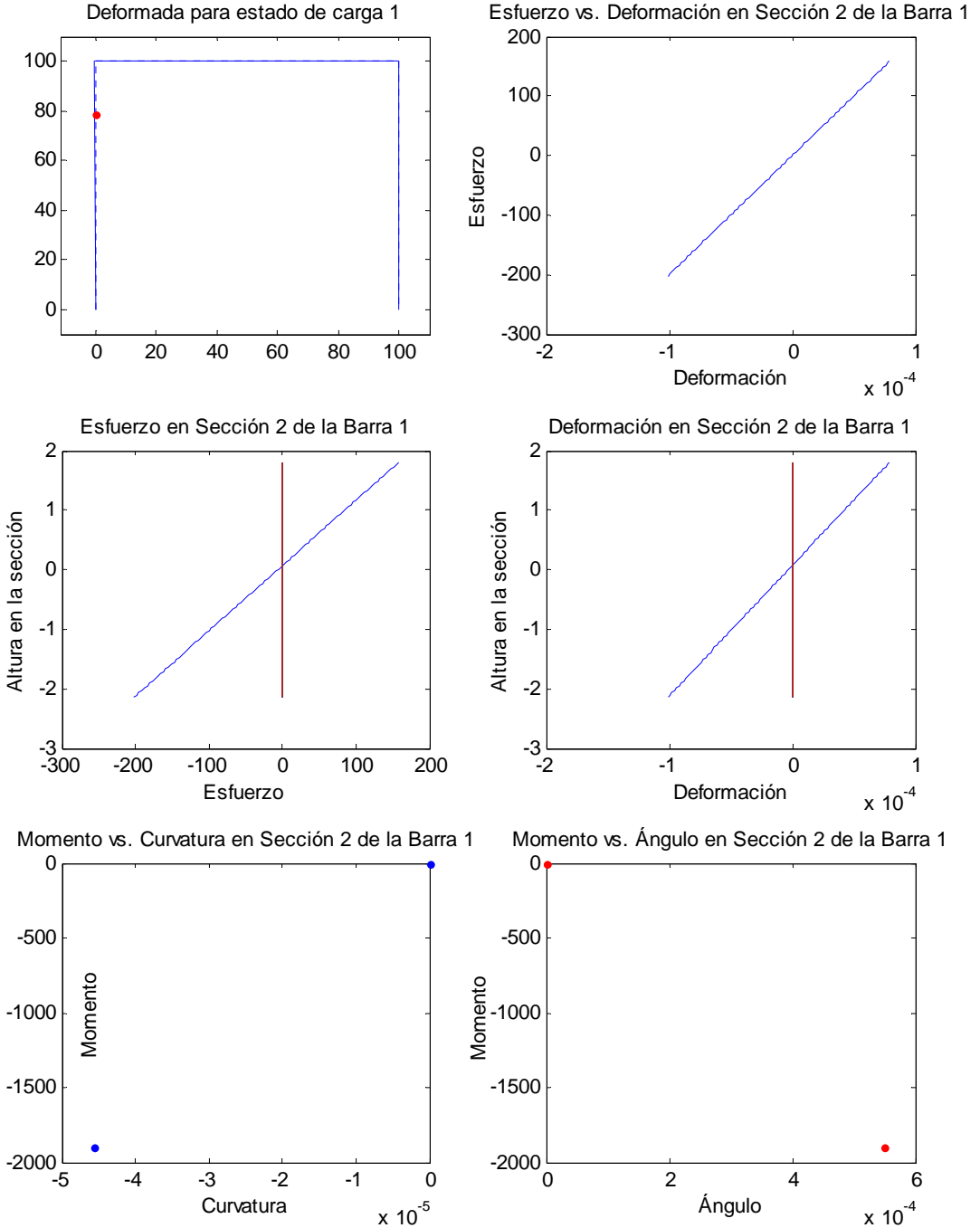
### 5.4.1 SOLUCIÓN MEDIANTE EL MODELO IMPLEMENTADO

Ya en la herramienta computacional, nos pide el número de intervalos de carga a considerar (mientras más pequeño mejor), en este caso hemos asumido un valor de 20, y una tolerancia para aproximar las soluciones de 0.01%, con un factor de amplificación visual de la deformada de 1.5. El programa en cada paso de incremento de carga arroja los valores de desplazamientos nodales y el vector de cargas externas nodales incluyendo las reacciones, además muestra gráficamente la evolución del estado tenso-deformacional en cada uno de los puntos de Gauss de cada elemento, por esto, debido al número de iteraciones, únicamente expondremos el resultados de desplazamientos y reacciones finales, y analizaremos la evolución en de una sola sección en determinados estados de carga de manera que se destaque la variación de estado tenso-deformacional a medida que se incrementa la carga.

La sección correspondiente al 2° punto de Gauss (sección ilustrativa) del elemento 1 es en la que vamos a describir su evolución, hay que tener presente que la ubicación de los puntos de Gauss dentro del elemento depende de la ubicación de ejes locales del mismo (véase Figura 3.1, Figura 3.5 y Tabla 5.23), así pues la sección a la que nos referimos es la que se encuentra más cercana al nodo 2. Y en la Figura 5.8 siguiente se muestra la evolución de la misma para los pasos de carga ahí indicados, que como es de esperar, tal como indica el gráfico de esfuerzo en la sección se mantiene en el rango elástico hasta poco antes del estado mostrado en la ilustración b) de la Figura 5.8.

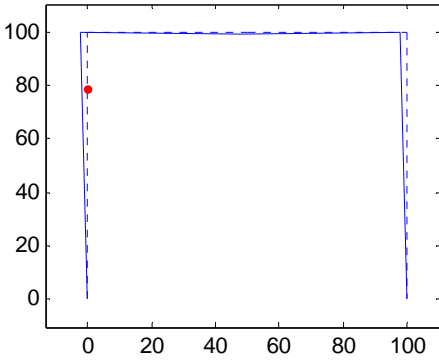
Ya en los estados de carga subsiguientes parte de la sección se encuentra en fluencia. En cada situación de carga se muestra también la gráfica de Esfuerzo–Deformación unitaria, Momento–Curvatura, y Momento–Ángulo de giro.

a) Cuando: carga vertical= -150 kgf, carga horizontal= -50 kgf.

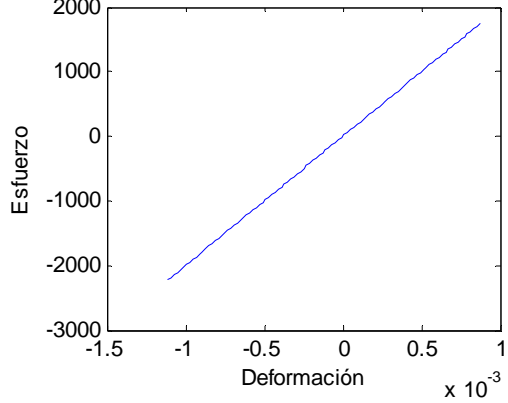


b) Cuando: carga vertical= -1650 kgf, carga horizontal= -550 kgf.

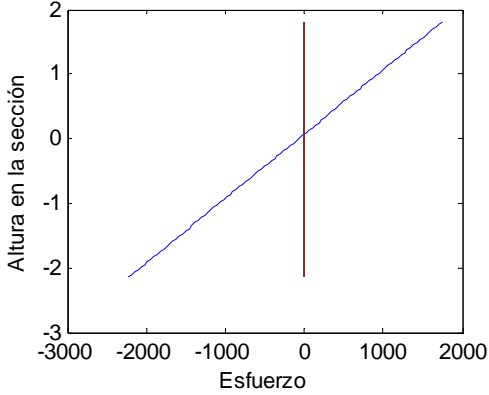
Deformada para estado de carga 11



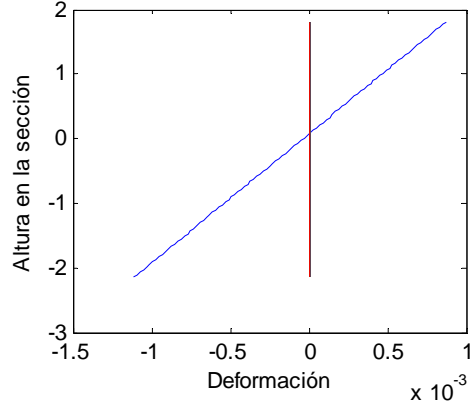
Esfuerzo vs. Deformación en Sección 2 de la Barra 1



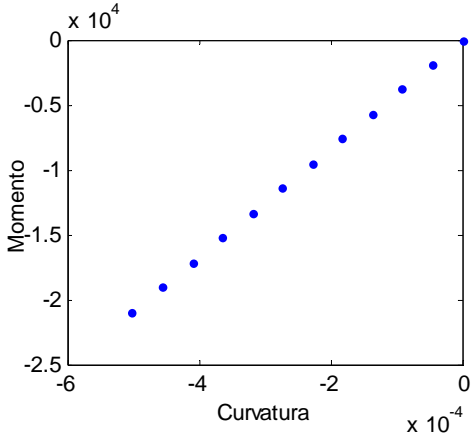
Esfuerzo en Sección 2 de la Barra 1



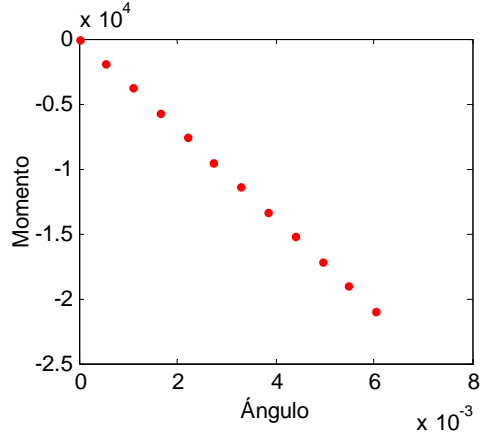
Deformación en Sección 2 de la Barra 1



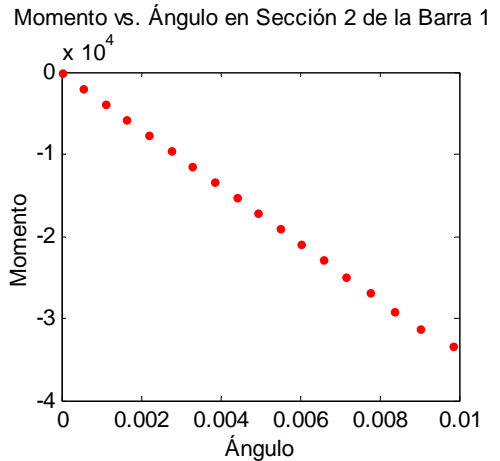
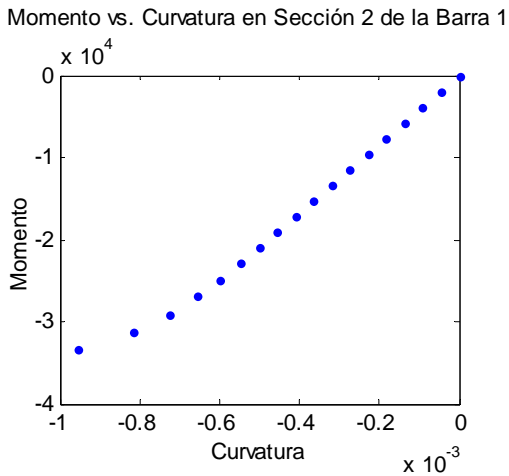
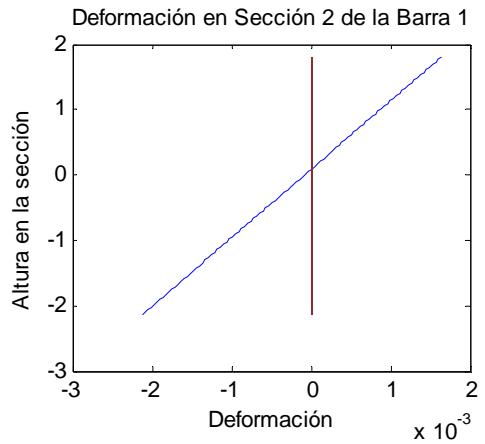
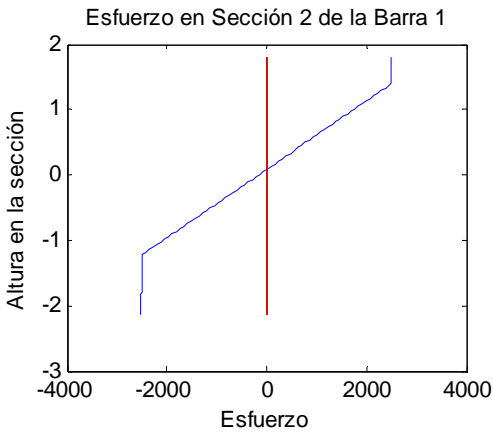
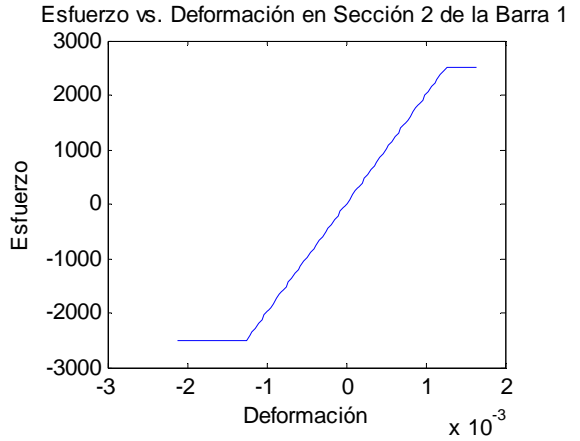
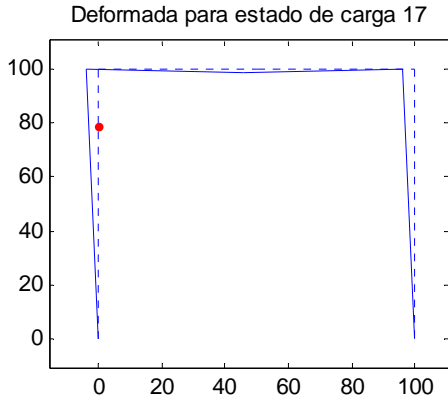
Momento vs. Curvatura en Sección 2 de la Barra 1



Momento vs. Ángulo en Sección 2 de la Barra 1



c) Cuando: carga vertical= -2550 kgf, carga horizontal= -850 kgf.



d) Cuando: carga vertical= -3000 kgf, carga horizontal= -1000 kgf.

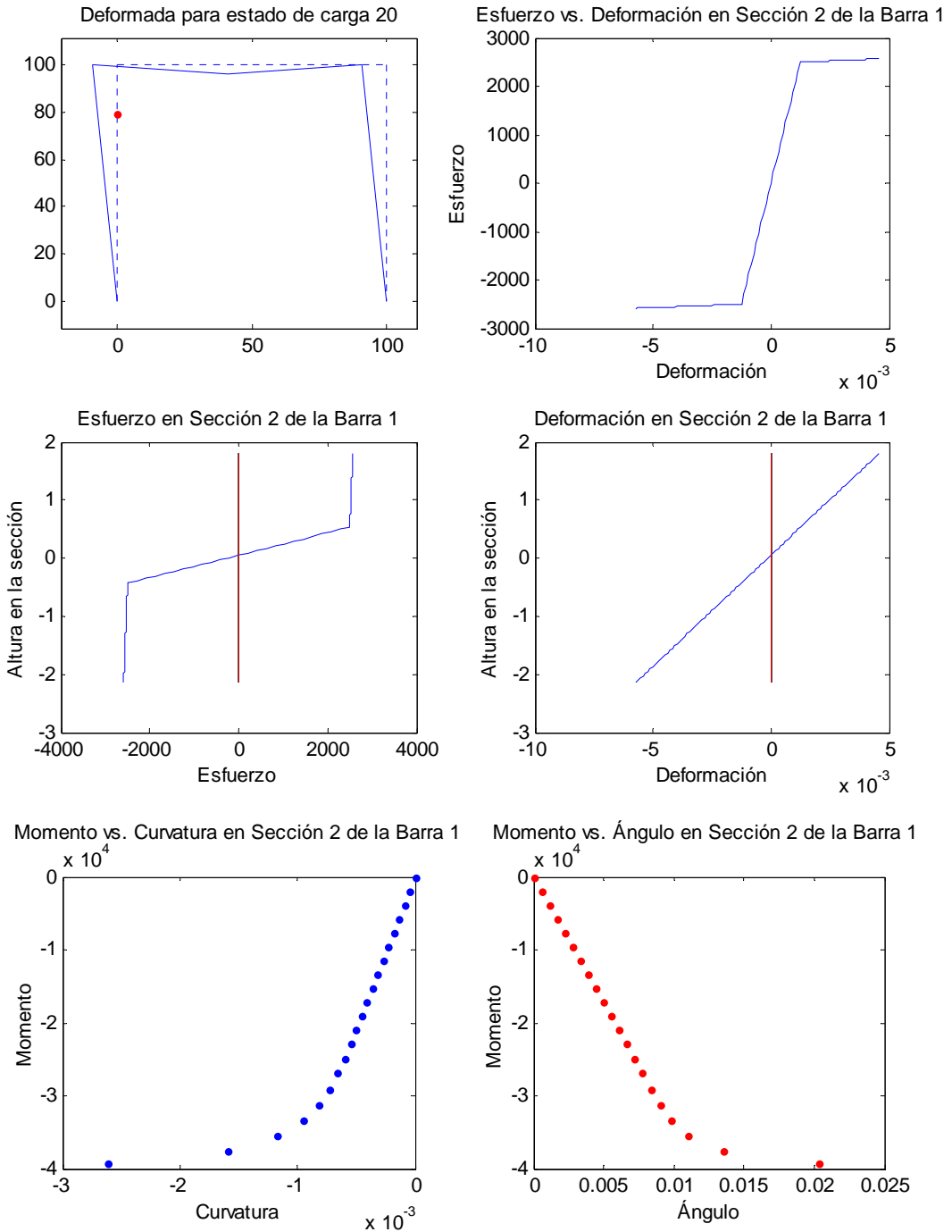


Figura 5.8 Evolución de la sección ilustrativa para el EJEMPLO 3.

Al final, al aplicar el total de la carga, se tiene que el valor de los desplazamientos nodales es:

**Tabla 5.26** Desplazamientos nodales finales para el EJEMPLO 3.

Nodo	u (cm)	w (cm)	$\theta$ (rad)
1	0	0	0.0992
2	-6.1672	-0.0139	-0.0440
3	-6.1680	-2.7089	-0.0430
4	-6.1672	-0.0072	0.0855
5	0	0	0

Y el valor de las fuerzas externas nodales, como respuesta de la estructura, que me arroja el programa, incluyendo las reacciones, son:

**Tabla 5.27** Cargas nodales externas para el EJEMPLO 3.

Nodo	X (kgf)	Z (kgf)	M (kgf-cm)
1	499	2021	0
2	0	0	0
3	0	-3000	0
4	-1000	0	0
5	501	979	-47915

## 5.4.2 VERIFICACIÓN DEL EQUILIBRIO MEDIANTE EL SAP2000

Introduciendo dicho pórtico dentro del programa SAP2000, se establece que las cargas nodales incluyendo las reacciones en los nodos son:

**Tabla 5.28** Cargas nodales externas para el EJEMPLO 3 desde el SAP2000.

Nodo	X (kgf)	Z (kgf)	M (kgf-cm)
1	483	2096	0
2	0	0	0
3	0	-3000	0
4	-1000	0	0
5	517	904	-40396

Comparando con las fuerzas obtenidas mediante la herramienta computacional se ve que la diferencia es de alrededor un 18% respecto a los resultados obtenidos con el SAP.

### 5.5 EJEMPLO 4

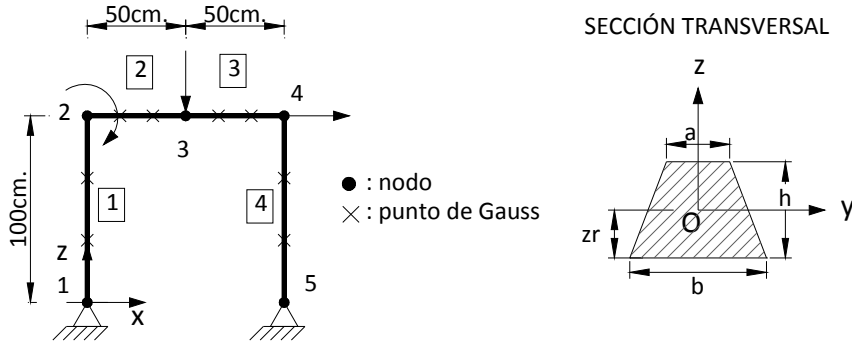


Figura 5.9 Pórtico correspondiente al EJEMPLO 4.

Para el pórtico mostrado en la Figura 5.9, ingresamos los datos en la hoja de Excel según el formato predefinido, siendo los parámetros que definen el material los indicados en la *Tabla 5.29*.

Tabla 5.29 Resumen Parámetros que definen el material.

MÓDULOS DE ELASTICIDAD (E)	
Tipo	Valor (kgf/cm <sup>2</sup> )
1	2.00E+06

ESFUERZOS DE FLUENCIA (fy)	
Tipo	Valor (kgf/cm <sup>2</sup> )
1	2500

PARÁMETROS DE ENDURECIMIENTO DEL MATERIAL (Hp)	
Tipo	Valor (kgf/cm <sup>2</sup> )
1	20000

COEFICIENTES DE VISCOSIDAD (cvis)	
Tipo	Valor (kgf-s/cm <sup>2</sup> )
1	0.05

Los datos para la sección son según la *Tabla 5.30*:

Tabla 5.30 Geometría de las secciones.

TIPOS DE SECCION TRAPEZOIDAL SEGÚN SU GEOMETRIA							
Tipo	a (cm)	b (cm)	h (cm)	zr (cm)	A (cm <sup>2</sup> )	I (cm <sup>4</sup> )	Discretización Sección
							ndov
1	5.00	3.00	4.00	2.17	16.00	20.89	100



Los datos de numeración de nodos, numeración y tipos de barras, condiciones de contorno, cargas externas aplicada, se muestran en la *Tabla 5.31*, *Tabla 5.32*, *Tabla 5.33*, *Tabla 5.34*, respectivamente.

**Tabla 5.31** Numeración de nodos y sus coordenadas.

DEFINICION DE NODOS Y SUS COORDENADAS		
Nodo	Coordenada X (cm)	Coordenada Z (cm)
1	0.00	0.00
2	0.00	100.00
3	50.00	100.00
4	100.00	100.00
5	100.00	0.00

**Tabla 5.32** Definición de elementos, de sus conexiones nodales, del tipo de material asignado.

DEFINICION DE TIPOS DE BARRAS, NODOS ENTRE LOS QUE SE ENCUENTRAN, CARACTERISTICAS DEL MATERIAL, CONFIGURACION PARA LA DISCRETIZACION											
Barra	Nodo 1	Nodo 2	Tipo de:					Discretización MEF			
			Sección	E	fy	Hp	cvis	le (cm)	Puntos Gauss	sen (Φ)	cos (Φ)
1	1	2	1	1	1	1	1	100.00	2	1	0
2	2	3	1	1	1	1	1	50.00	2	0	1
3	3	4	1	1	1	1	1	50.00	2	0	-1
4	4	5	1	1	1	1	1	100.00	2	-1	0

**Tabla 5.33** Condiciones de contorno.

NODOS RESTRINGIDOS ( 0=LIBRE, 1=RESTRINGIDO )			
Nodo	En dirección X (u)	En dirección Z (w)	Giro (teta)
1	1	1	0
5	1	1	0

**Tabla 5.34** Cargas nodales externas aplicadas.

<b>NODOS CON CARGA EXTERIOR</b>			
<b>FUERZAS APLICADAS HACIA → = POSITIVO</b>			
<b>FUERZAS APLICADAS HACIA ↑ = POSITIVO</b>			
<b>MOMENTOS EN LEVOGIRO ↺ = POSITIVO</b>			
<b>Nodo</b>	<b>Fuerza en X (kgf)</b>	<b>Fuerza en Z (kgf)</b>	<b>Momento (kgf-cm)</b>
2	0.00	0.00	-1000.00
3	0.00	-3000.00	0.00
4	500.00	0.00	0.00

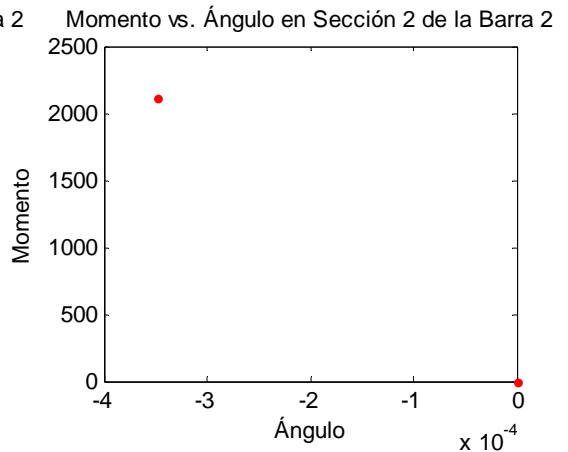
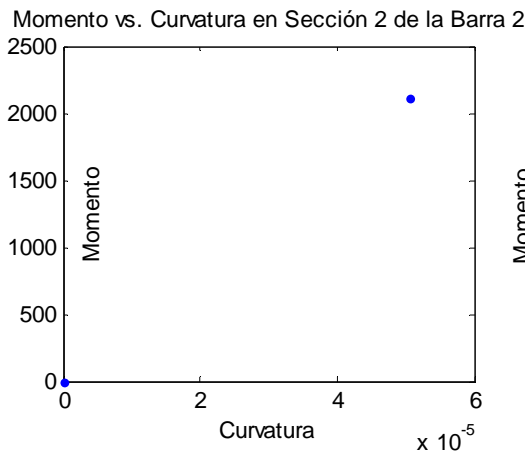
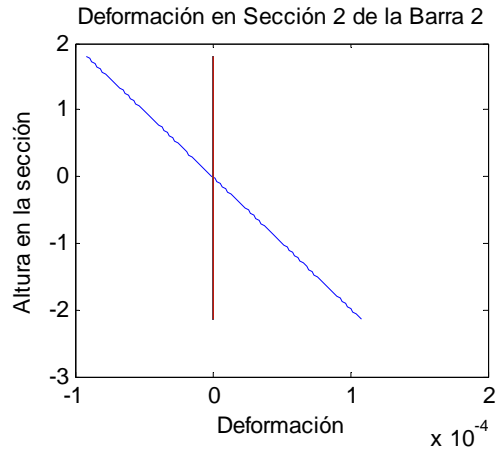
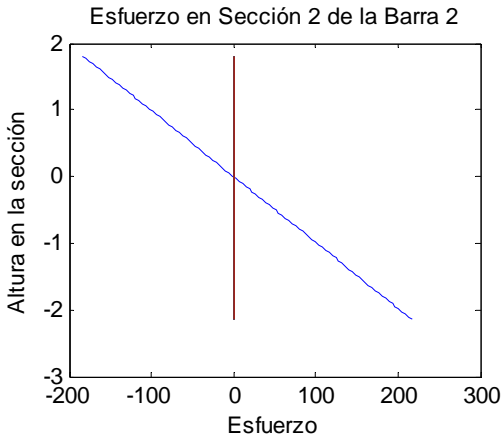
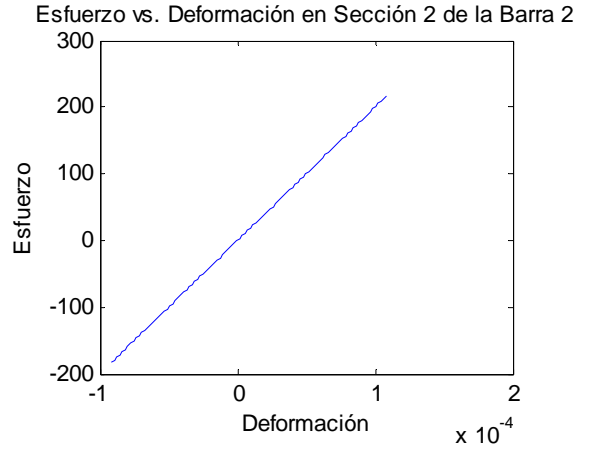
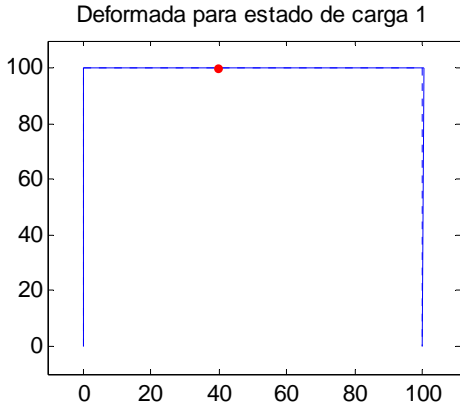
### 5.5.1 SOLUCIÓN MEDIANTE EL MODELO IMPLEMENTADO

Ya en la herramienta computacional, nos pide el número de intervalos de carga a considerar (mientras más pequeño mejor), en este caso hemos asumido un valor de 20, y una tolerancia para aproximar las soluciones de 0.01%, con un factor de amplificación visual de la deformada de 1.5. El programa en cada paso de incremento de carga arroja los valores de desplazamientos nodales y el vector de cargas externas nodales incluyendo las reacciones, además muestra gráficamente la evolución del estado tenso-deformacional en cada uno de los puntos de Gauss de cada elemento, por esto, debido al número de iteraciones, únicamente expondremos el resultados de desplazamientos y reacciones finales, y analizaremos la evolución en de una sola sección en determinados estados de carga de manera que se destaque la variación de estado tenso-deformacional a medida que se incrementa la carga.

La sección correspondiente al 2° punto de Gauss (sección ilustrativa) del elemento 2 es en la que vamos a describir su evolución, hay que tener presente que la ubicación de los puntos de Gauss dentro del elemento depende de la ubicación de ejes locales del mismo (véase Figura 3.1, Figura 3.5 y Tabla 5.23), así pues la sección a la que nos referimos es la que se encuentra más cercana al nodo 3. Y en la Figura 5.10 siguiente se muestra la evolución de la misma para los pasos de carga ahí indicados, que como es de esperar, tal como indica el gráfico de esfuerzo en la sección se mantiene en el rango elástico hasta poco antes del estado mostrado en la ilustración b) de la Figura 5.10.

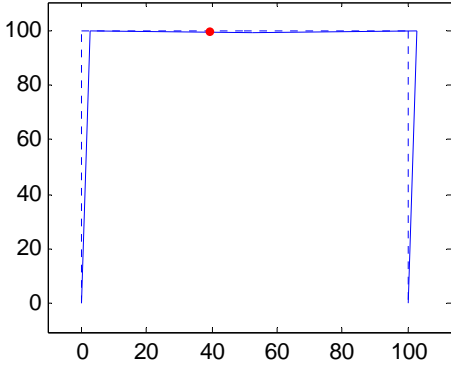
Ya en los estados de carga subsiguientes parte de la sección se encuentra en fluencia. En cada situación de carga se muestra también la gráfica de Esfuerzo–Deformación unitaria, Momento–Curvatura, y Momento–Ángulo de giro.

a) Cuando: carga vertical= -150 kgf, carga horizontal= 25 kgf., momento= -50 kgf-cm.

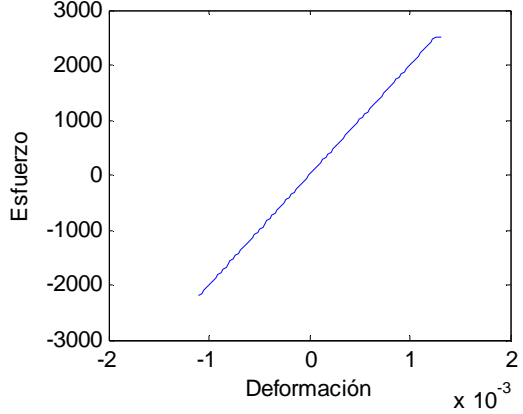


b) Cuando: carga vertical= -1800 kgf, carga horizontal= 300 kgf., momento= -600 kgf-cm.

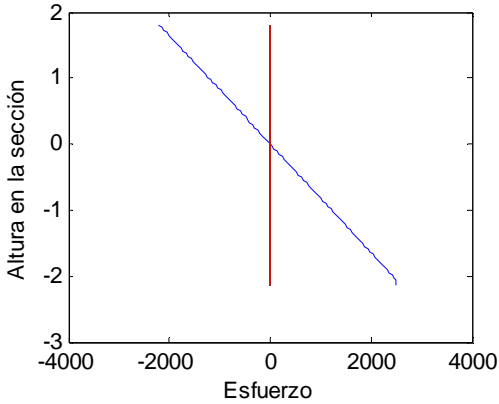
Deformada para estado de carga 12



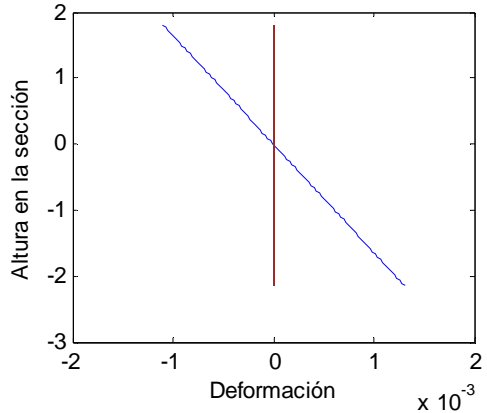
Esfuerzo vs. Deformación en Sección 2 de la Barra 2



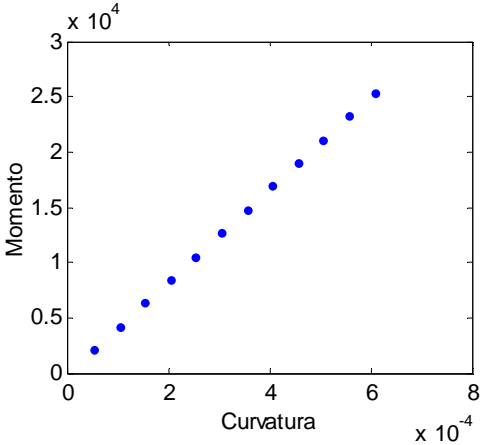
Esfuerzo en Sección 2 de la Barra 2



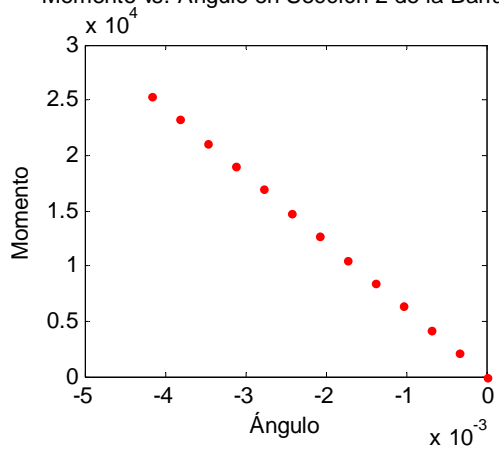
Deformación en Sección 2 de la Barra 2



Momento vs. Curvatura en Sección 2 de la Barra 2

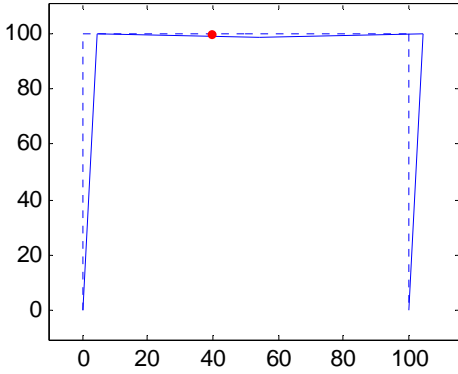


Momento vs. Ángulo en Sección 2 de la Barra 2

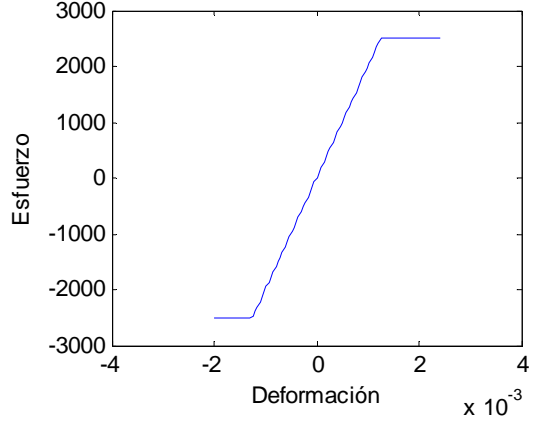


c) Cuando: carga vertical= -2550 kgf, carga horizontal= 425 kgf., momento= -850 kgf-cm.

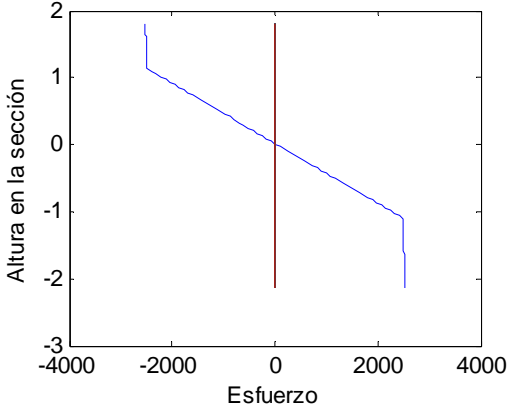
Deformada para estado de carga 17



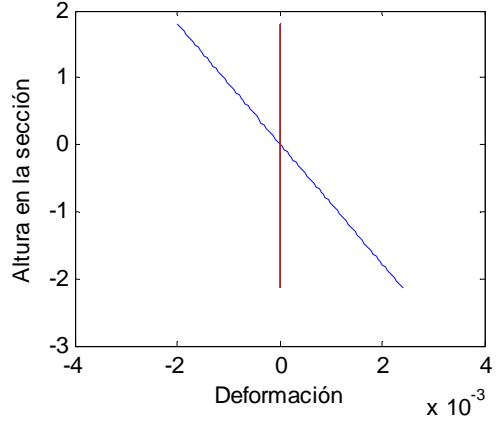
Esfuerzo vs. Deformación en Sección 2 de la Barra 2



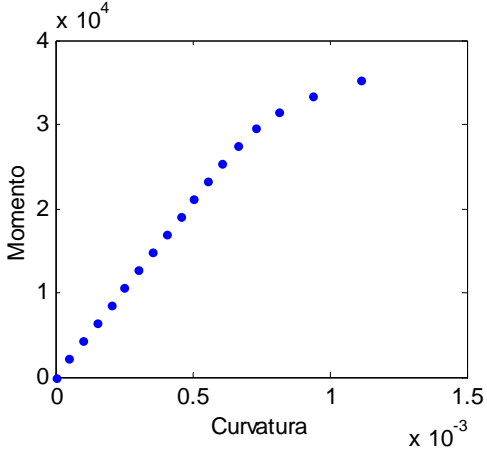
Esfuerzo en Sección 2 de la Barra 2



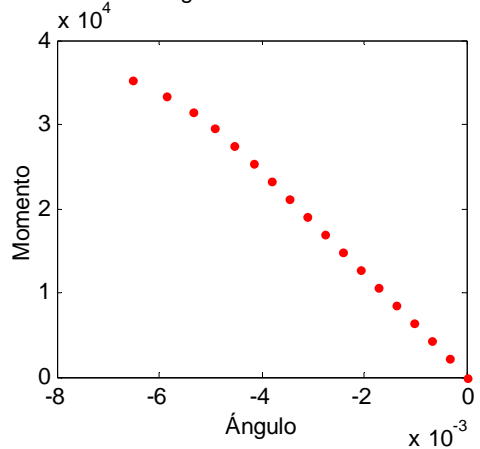
Deformación en Sección 2 de la Barra 2



Momento vs. Curvatura en Sección 2 de la Barra 2



Momento vs. Ángulo en Sección 2 de la Barra 2



d) Cuando: carga vertical= -3000 kgf, carga horizontal= 500 kgf., momento= -1000 kgf-cm.

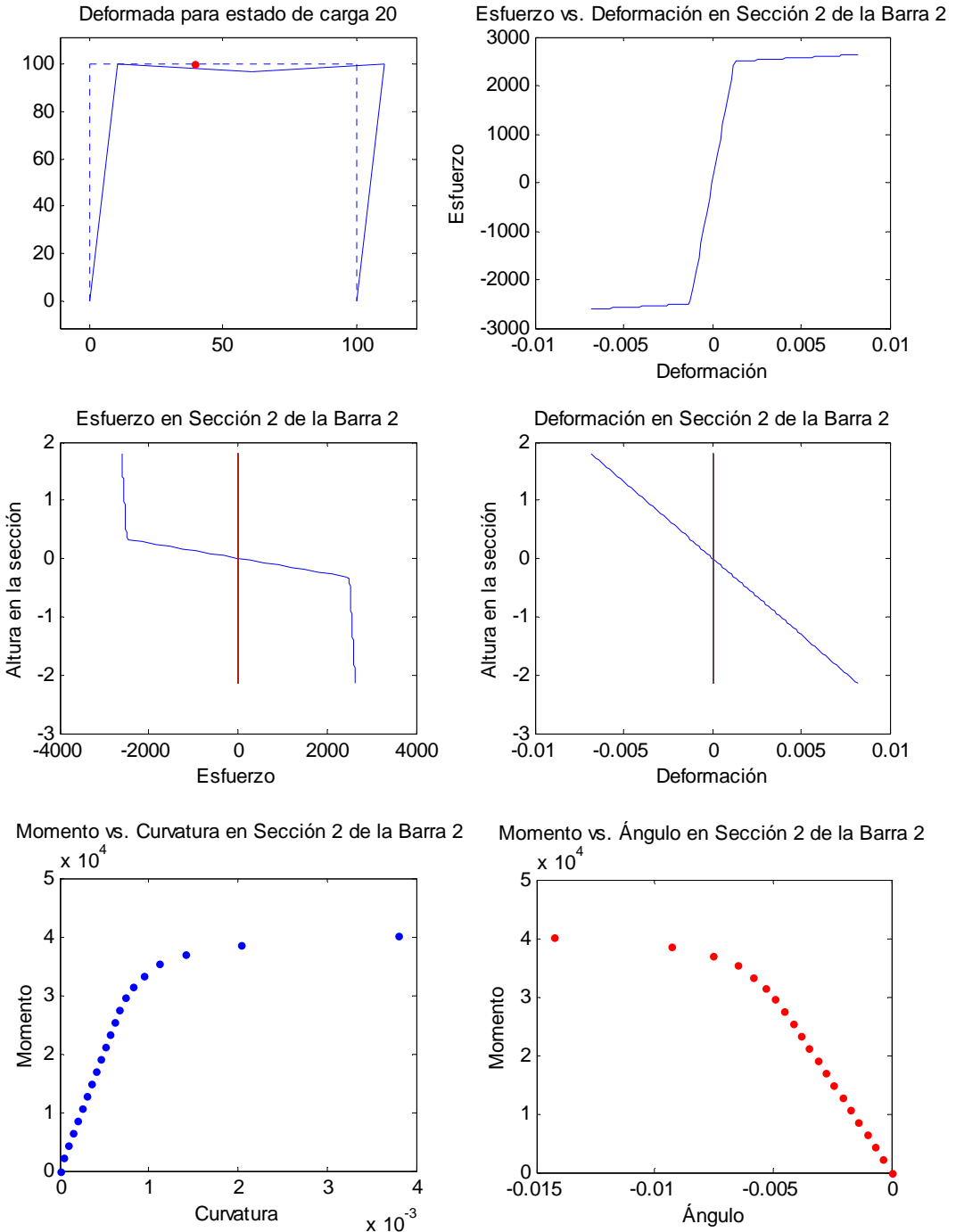


Figura 5.10 Evolución de la sección ilustrativa para el EJEMPLO 4.

Al final, al aplicar el total de la carga, se tiene que el valor de los desplazamientos nodales es:

**Tabla 5.35** Desplazamientos nodales finales para el EJEMPLO 4.

Nodo	u (cm)	w (cm)	$\theta$ (rad)
1	0	0	-0.0696
2	6.9525	-0.0031	-0.0693
3	6.9546	-2.1893	0.0328
4	6.9547	-0.0137	0.0336
5	0	0	-0.1064

Y el valor de las fuerzas externas nodales, como respuesta de la estructura, que me arroja el programa, incluyendo las reacciones, son:

**Tabla 5.36** Cargas nodales externas para el EJEMPLO 4.

Nodo	X (kgf)	Z (kgf)	M (kgf-cm)
1	-2	990	0
2	0	0	-1000
3	0	-3000	0
4	500	0	0
5	-498	2010	0

## 5.5.2 VERIFICACIÓN DEL EQUILIBRIO MEDIANTE EL SAP2000

Introduciendo dicho pórtico dentro del programa SAP2000, se establece que las cargas nodales incluyendo las reacciones en los nodos son:

**Tabla 5.37** Cargas nodales externas para el EJEMPLO 4 desde el SAP2000.

Nodo	X (kgf)	Z (kgf)	M (kgf-cm)
1	-22	990	0
2	0	0	-1000
3	0	-3000	0
4	500	0	0
5	-478	2010	0

Comparando con las fuerzas obtenidas mediante la herramienta computacional se ve que los valores son bastante aproximados a los obtenidos con el SAP.

## **CAPÍTULO 6**

# **CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES**





## 6.1 CONCLUSIONES

Teniendo en cuenta que el objetivo principal del presente trabajo es brindar un enfoque investigativo hacia el análisis plástico de las estructuras, es importante recalcar los siguientes aspectos, a manera de conclusiones generales:

- Al analizar una estructura es clave definir un modelo que la represente de la forma más sencilla y clara posible, *en función de las condiciones a las que se encuentra sometida y de la información que se espera obtener*. Este modelo debe representar, su geometría, materiales, conexión entre elementos, y condiciones de contorno, teniendo presente: las acciones a las que estará sometida la estructura, la forma en la que se esperaría que se comporte, y también las herramientas o métodos disponibles para determinar la solución numérica a la formulación matemática del modelo, y obtener la información requerida.

Además es necesario valorar el modelo, ya sea de forma experimental o mediante simulaciones. Obviamente que una simulación se basa en resultados experimentales, pero se pueden emplear historiales de datos de ensayos previos para calibrar la misma, con la ventaja de que se pueden realizar varias pruebas de forma inmediata, y por ende menor costo en tiempo y dinero, con la posibilidad de poder predecir un resultado cercano a la realidad sin la necesidad de elaborar un modelo físico en la mayoría de casos.

- El hecho de que una estructura incurriere fuera del rango elástico es imprescindible de analizar, pues este comportamiento forma parte intrínseca de la estructura. Aunque la mayor parte de modelos o software que se utilizan actualmente para idealizar las estructuras, consideran la posibilidad de que incurriere fuera del régimen elástico, no siempre se sabe cómo trabajan y tampoco nos indican la evolución que ha sufrido hasta llegar a su estado final.
- Los métodos numéricos son una herramienta fundamental en modelaciones cuya solución analítica es compleja, y por tanto es necesario conocerlos e implementarlos computacionalmente, debiendo seleccionar o desarrollar algoritmos que más se ajusten a los requerimientos del modelo planteado para llegar a su resolución.

Respecto al modelo propuesto para el análisis de plasticidad en pórticos planos, una vez que se ha expuesto sus hipótesis, fundamentos, formulación, algoritmos de resolución computacional, y realizado algunos ejemplos de aplicación, podemos indicar que:

- En función del tipo de material que conforma una estructura, se debe elegir o crear un modelo reológico que mejor lo caracterice. Dentro del presente trabajo de análisis plástico en pórticos, se eligió el modelo elasto-viscoplástico de Perzyna

con endurecimiento lineal, y se demuestra en base a la respuesta tenso-deformacional resultante correspondiente a los ejemplos precedentes, que representa de manera aceptable el comportamiento del material elegido.

- El empleo de una modelación reológica unidimensional resulta suficiente dentro del análisis plástico de un pórtico plano, para la metodología y tipo de formulación empleada en el modelo propuesto.
- El resultado obtenido a partir del acoplamiento de un modelo reológico inelástico dentro de una formulación por elementos finitos, tal como se detalla en la formulación y tratamiento del modelo aquí propuesto, es bastante interesante, pues nos permite determinar la respuesta de la estructura tanto en forma global, y a mayor detalle en forma local. Además nos muestra la forma en que va evolucionando la estructura bajo diferentes estados de carga, siendo en este caso una aplicación monotónica incremental de carga estática. De esta forma hemos conseguido *SIMULAR* el comportamiento que se esperaría en un pórtico bajo acciones externas aplicadas en sus nodos y describir la evolución de su respuesta interna.
- La evolución del comportamiento de las secciones en los puntos de Gauss, determinada a partir de la formulación propuesta, es coherente con la sollicitación externa, tal como puede observarse en los ejemplos detallados en el CAPÍTULO 5.
- La comparación de las reacciones finales obtenidas mediante el modelo propuesto y las que resultan del programa SAP2000, demuestra que la herramienta computacional desarrollada arroja resultados aceptables. Por tanto esta herramienta al encontrarse en su fase inicial debe ser considerada como un elemento de apoyo.
- Aunque el modelo propuesto represente mayor costo computacional, aporta con información adicional acerca de la evolución del estado tenso-deformacional de la estructura. Esta información puede emplearse por ejemplo en el análisis y caracterización de rótulas plásticas (ASCE, 2000), o también en la identificación de zonas de mayor sollicitación en la estructura y prever su reforzamiento.
- Es importante conocer la historia de respuesta que una estructura ha sufrido frente a sollicitaciones externas a lo largo de su servicio, para así poder evaluar su situación actual y prever su condición a futuro. Es en este sentido que el modelo planteado aporta con información de la evolución de la respuesta interna de la estructura al menos para el caso estático y monotónico de carga, y bajo las restricciones e hipótesis asumidas.

Por último, se debe tener presente que para cualquier tipo de modelación y su forma de resolución, respaldados con ensayos de laboratorio, son la base para establecer criterios y normativas dentro del análisis y diseño estructural.

## 6.2 RECOMENDACIONES

La herramienta computacional propuesta en el presente trabajo, es de carácter investigativo y se encuentra en su etapa inicial de desarrollo, por tanto debe utilizarse como una herramienta de apoyo. Así pues, sería conveniente realizar un análisis numérico de su estabilidad y convergencia, así como la posibilidad de mejorar la eficiencia y robustez del algoritmo empleado.

Dependiendo del material, se puede investigar más acerca de modelos reológicos alternativos a los aquí expuestos, que caractericen su comportamiento, e incluso realizar ensayos sobre el material para calibrar los parámetros del modelo.

Es imperativo continuar incursionando en el análisis no lineal de la estructuras, en base modelos matemáticos que nos ayuden a comprender la respuesta de una estructura frente a ciertas sollicitaciones, pero sin dejar de lado la evolución que ha sufrido la misma antes de llegar a su situación final, realizando análisis y comprobaciones tanto locales como globales. Dichas comprobaciones pueden ser mediante experimentación, o mediante la comparación con modelizaciones similares.

La formulación aquí desarrollada para el modelo propuesto combina los efectos axiales y de flexión simple, al determinar su respuesta interna mediante su estado tensional que es función de la deformación resultante que incluye ambos efectos (véase sección 3.2.4), por lo que a primera vista la matriz de rigidez dada en la ecuación (3.46) asumida para incluir ambos efectos, aparentemente no estaría “acoplando” dichas acciones al tener ceros dentro de las posiciones que relacionan los desplazamientos axiales con los de flexión, por lo que sería conveniente analizar la posibilidad de elaborar una formulación alternativa del problema de forma tal que existan términos de acoplamiento (en lugar de algunos ceros) dentro de la matriz de rigidez, y posteriormente comparar los resultados obtenidos a partir de cada modelización.

En base al modelo propuesto se podría además incluir o desarrollar formulaciones análogas para efectos tales como cortante o torsión, todo en función de las acciones e información que se espera obtener como resultado de la modelización. Inclusive, partiendo de los principios expuestos en el presente documento, se podría plantear modelizaciones que impliquen el tratamiento de estructuras espaciales.

Una línea de investigación como consecuencia del presente trabajo sería el análisis de colapso de una estructura cuando se forman rótulas plásticas en cantidad y posiciones tales que la conviertan en un mecanismo, y pudiendo apoyarnos con software ya existente tal como el SAP2000 (Kalny, 2010), para comparar los resultados. Incluso se podría adicionar el efecto que se obtendría incluyendo ciclos de carga y descarga, teniendo en cuenta modelos reológicos adecuados para representar el comportamiento

del material que compone la estructura para este tipo de situación. Esto es de especial interés en el análisis sísmico de estructuras.

Al discretizar una sección en dovelas, tal como se describe en la formulación planteada para el presente modelo propuesto, se podría también pensar en la posibilidad de extender dicha aplicación al análisis de secciones compuestas por distintas clases de materiales, tal como es el caso de las secciones de hormigón armado.

Si bien es cierto que existen varios tipos de software aplicados al análisis de estructuras, se debe disponer de los fundamentos teóricos que nos permitan valorar los resultados que obtenemos a partir de los mismos.

## REFERENCIAS

- Argyris, J. H., Boni, B., & Kleiber, M. (1982). *Finite Element Analysis of Two and Three – Dimensional Elasto - Plastic Frames – The Natural Approach*. Estútgart: University of Stuttgart.
- ASCE. (2000). *FEMA 356, Prestandard and Commentary for the Seismic Rehabilitation of Buildings*. Washington, D.C.
- Borg, S. F., & Gennaro, J. J. (1962). *Análisis Estructural Avanzado* (Primera en español ed.). México D.F.: Compañía Editorial Contiental S.A.
- Dalmau, M., & Vilardell, J. (2003). *Análisis Plástico de Estructuras. Introducción*. Barcelona: Ediciones UPC.
- Guartasaca, J. C. (2007). *Tesis de Pregrado “Aplicación de la Teoría de Plasticidad Unidimensional a la Sección de una Viga”*. Cuenca: Facultad de Ingeniería, Universidad de Cuenca.
- Kalny, O. (23 de Marzo de 2010). *Documentación "Nonlinear material properties" de Computers & Structures Inc*. Recuperado el 15 de Diciembre de 2010, de sitio web de Computers & Structures Inc.:  
<https://wiki.csiberkeley.com/display/kb/Nonlinear+material+properties>
- Massonnet, C., & Save, M. (1966). *Cálculo Plástico de las construcciones* (Vol. 1). España: Montaner y Simon, Editores.
- Oliver Olivella, X., & de Saracibar Bosch, C. A. (2002). *Mecánica de Medios Continuos para Ingenieros* (Segunda ed.). Cataluña: Ediciones UPC.
- Oñate Ibañez de Navarra, E. (1995). *Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos* (Segunda ed.). Barcelona: CIMNE.
- Pino Velazquez, A. J. (2008). *Apuntes de clase correspondientes a la cátedra de "Cálculo Estructural" dentro de la "Maestría en Métodos Numéricos para Diseño en Ingeniería"*. Cuenca.
- Runneson, K. (2002). *Notas de Clase “Constitutive Modeling of Dissipative Materials”*.
- Samaniego Alvarado, E. P. (2007a). *Apuntes de clase correspondientes a la cátedra de "Leyes de Materiales" dentro de la "Maestría en Métodos Numéricos para Diseño en Ingeniería"*. Cuenca.

- Samaniego Alvarado, E. P. (2007b). *Apuntes de clase correspondientes a la cátedra de "Mecánica de Medios Continuos" dentro de la "Maestría en Métodos Numéricos para Diseño en Ingeniería"*. Cuenca.
- Simo, J., & Hughes, T. (1998). *Computational Inelasticity* (Segunda ed.). New York: Springer-Verlag.
- Singer, F. L., & Pytel, A. (1982). *Resistencia de Materiales* (Tercera ed.). México: Editorial Harla S.A. de C.V.
- Zienkiewicz, O. C., & Taylor, R. L. (1994). *El Método de los Elementos Finitos. Vol. I* (Cuarta ed.). Barcelona: McGraw-Hill.