

**El método de la Banda Finita
para el análisis de vigas cajón.**

El método de la Banda Finita para el análisis de vigas cajón.

GEOVANY GONZALEZ RODRIGUEZ

Ingeniero Civil
Facultad de Ingeniería Civil
Universidad de Cuenca

Dirigido por:

ÁNGEL JULVER PINO VELÁSQUEZ

Ingeniero Civil, MSc.
Docente de la Universidad de Cuenca
Facultad de Ingenierías
Carrera de Ingeniería Civil



Cuenca – Ecuador

GONZALEZ RODRIGUEZ GEOVANNY

El método de la Banda Finta para el análisis de vigas cajón.

Universidad Politécnica Salesiana, Cuenca-Ecuador, 2010

INGENIERIA CIVIL

Formato 170x240

Páginas: 88

Breve reseña de autores e información de contacto:

Geovanny González Rodríguez

Ingeniero Civil

Facultad de Ingeniería Civil

Universidad de Cuenca

gornog_ec@hotmail.com

Dirigido por:

Ángel Julver Pino Velásquez

Ingeniero Civil, MSc.

Docente de la Universidad de Cuenca

Facultad de Ingenierías

Carrera de Ingeniería Civil

ajulver02@yahoo.com

Todos los derechos reservados.

Queda prohibida, salvo excepción prevista en la Ley, cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública y transformación de esta obra para fines comerciales, sin contar con autorización de los titulares de propiedad intelectual. La infracción de los derechos mencionados puede ser constitutiva de delito contra la propiedad intelectual. Se permite la libre difusión de este texto con fines académicos o investigativos por cualquier medio, con la debida notificación a los autores.

DERECHOS RESERVADOS

©2010 Universidad Politécnica Salesiana.

CUENCA - ECUADOR – SUDAMÉRICA

GONZALEZ RODRIGUEZ GEOVANNY

El método de la Banda Finta para el análisis de vigas cajón.

Edición y Producción:

González Rodríguez Geovanny

Diseño de la portada:

González Rodríguez Geovanny

IMPRESO EN ECUADOR - PRINTED IN ECUADOR

ÍNDICE GENERAL

CAPITULO 1	1
INTRODUCCION	1
1.1 Antecedentes	1
1.2 Marco Teórico.....	2
1.3 Alcance y Objetivos	4
1.3.1 Objetivos principales	5
1.3.2 Objetivos secundarios	5
CAPITULO 2	7
GENERALIDADES DEL METODO	7
2.1 Métodos de análisis elástico de placas y láminas.....	7
2.1.1 Métodos exactos	7
2.1.2 Métodos aproximados.....	7
2.1.3 Método de los elementos finitos.....	8
2.2 Generalidades del método de la banda finita	9
2.2.1 Teoría general de la banda finita	9
CAPITULO 3	15
ANÁLISIS DE PLACAS RECTANGULARES	15
3.0 Análisis de placas rectangulares por el método de la banda finita.....	15
3.1 Teoría de Kirchhoff.....	15

3.1.1 Hipótesis fundamentales	16
3.1.2 Campo de desplazamientos	16
3.1.3 Campo de deformaciones, tensiones y esfuerzos	18
3.1.4 Campo de esfuerzos y deformaciones generalizadas	20
3.2 Teoría de Reissner - Mindlin	21
3.2.1 Hipótesis fundamentales	21
3.2.2 Campo de desplazamientos	22
3.2.3 Campo de deformaciones, tensiones y esfuerzos	23
3.2.4 Campo de esfuerzos y deformaciones generalizadas	27
3.3 Formulación de Reissner-Mindlin en banda finita	29
3.3.1 Discretización y ecuaciones de rigidez	29
3.3.2 Deformaciones generalizadas y esfuerzos	33
3.3.3 Desacoplamiento de la ecuación de rigidez	34
3.3.4 Vector de fuerzas nodales equivalentes	35
CAPITULO 4	37
MODELACION NUMERICA DEL METODO DE LA BANDA FINITA	37
4.1 Aplicación del método numérico	37
4.2 El método de los elementos finitos	38
4.3 Aplicación del método de la banda finita	42
4.3.1 formación de la matriz de rigidez	42
4.3.2 Transformación de ejes coordenados	52
4.3.3 Ensamblaje de la matriz de rigidez	55

4.3.4 Vector de cargas nodales	56
CAPITULO 5	59
APLICACIONES NUMERICAS	59
5.1 Anàlisis de las aplicaciones mediante las teorías de Kirchhoff y de Reissner - Mindlin	59
5.1.1 Problema de una viga rectangular C.....	59
5.1.2 Resultados obtenidos	60
5.1.3 Anàlisis	71
5.1.1 Problema de una viga rectangular cerrada	73
CAPITULO 6	85
Conclusiones	85
BIBLIOGRAFÍA	87

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1: Deformación del plano medio de una placa delgada y giro de la normal ...	3
Figura 1.2: Giro de la normal en la teoría de Reissner-Mindlin	4
Figura 2.1: Etapas de discretización de la placa en bandas finitas de dos nodos	11
Figura 3.1: Definición geométrica de una placa y convenio de signos para desplazamientos y giros	15
Figura 3.2: Deformación del plano medio y giro de la normal.....	17
Figura 3.3: Convenio de signos para tensiones y momentos en una placa.....	19
Figura 3.4: Convenio de signos para los movimientos y giro de la normal en la teoría de Reissner-Mindlin	23
Figura 3.5: Convenio de signos para las tensiones τ_{xz} y τ_{yz}	25
Figura 3.6: Convenio de signos para los esfuerzos en una placa	27
Figura 3.7: Placa simplemente apoyada	31
Figura 3.8: Funciones de forma	32; Error! Marcador no definido.
Figura 3.9: Cargas repartidas y puntuales sobre un elemento de banda finita de dos nodos	36
Figura 4.1: Banda finita genérica.....	43
Figura 4.2: Funciones de forma (ley de variación de los desplazamientos).....	44
Figura 4.3: Banda finita con ejes generales y locales	53
Figura 4.4: Estructura formada por tres bandas.....	55
Figura 5.1: Viga formada por tres bandas finitas.....	60
Figura 5.2: Gráfico de desplazamientos con la teoría Kirchhoff con $l=1$ (armónico) ..	61

Figura 5.3: Gráfico de desplazamientos con la teoría Kirchhoff con $l=2$ (armónico) ..	62
Figura 5.4: Gráfico de desplazamientos con la teoría Kirchhoff con $l=3$ (armónico).....	63
Figura 5.5: Gráfico del vector U con la teoría de Kirchhoff con los tres armónicos..	65
Figura 5.6: Gráfico del vector U (desplazamientos).....	65
Figura 5.7: Gráfico de desplazamientos con la teoría de Reissner-Mindlin $l=1$	66
Figura 5.8: Gráfico de desplazamientos con la teoría de Reissner-Mindlin $l=2$	67
Figura 5.9: Gráfico de desplazamientos con la teoría de Reissner-Mindlin $l=3$	68
Figura 5.10: Gráfico del vector U con la teoría de Reissner-Mindlin con los tres armónicos.....	70
Figura 5.11: Gráfico del vector U (desplazamientos).....	70
Figura 5.12: Gráfico del vector U (desplazamientos) con las dos teorías.....	72
Figura 5.13: Estructura formada por cuatro bandas.....	73
Figura 5.14: Gráfico de desplazamientos con la teoría Kirchhoff con $l=1$	74
Figura 5.15: Gráfico de desplazamientos con la teoría Kirchhoff con $l=2$	75
Figura 5.16: Gráfico de desplazamientos con la teoría Kirchhoff con $l=3$	76
Figura 5.17: Gráfico del vector U con los tres armónicos de una viga cerrada	78
Figura 5.18: Gráfico del vector U (desplazamientos) con los tres armónicos de una viga cerrada.....	78
Figura 5.19: Gráfico de desplazamientos de una viga cerrada con la teoría de Reissner-Mindlin $l=1$	79
Figura 5.20: Gráfico de desplazamientos de una viga cerrada con la teoría de Reissner-Mindlin $l=2$	80
Figura 5.21: Gráfico de desplazamientos de una viga cerrada con la teoría de Reissner-Mindlin $l=3$	81

Figura 5.22: Gráfico del vector U de una viga cerrada con la teoría de Reissner-Mindlin y $l=3$	83
Figura 5.23: Gráfico de desplazamientos de una viga cerrada con la teoría de Reissner-Mindlin y $l=3$	83
Figura 5.24: Gráfico de desplazamientos de una viga cerrada con las dos teorías y los tres armónicos	84

ÍNDICE DE CUADROS

Cuadro 5.1: Valores del vector U con la teoría de Kirchhoff con los 3 armónicos	64
Cuadro 5.2: Valores del vector U con la teoría de Reissner-Mindlin con los 3 armónicos	69
Cuadro 5.3: Desplazamientos obtenidos con las teorías de Kirchhoff y de Reissner-Mindlin.....	71
Cuadro 5.4: Valores del vector U de una viga cerrada con la teoría de Kirchhoff con los 3 armónicos	77
Cuadro 5.5: Valores del vector U de una viga cerrada con la teoría de Reissner-Mindlin con los 3 armónicos	82
Cuadro 5.6: Valores del vector U (desplazamientos) con las dos teorías y con los 3 armónicos	84

*A mi esposa Deisy, mis hijos:
Karen, Geovanny y Santiago
y a mis padres*

1.1.ANTECEDENTES

La aplicación de los métodos numéricos como una herramienta alternativa para el análisis y/o resolución de problemas estructurales, es cada vez más utilizada; es ampliamente conocido que el Método de los Elementos Finitos ha dominado este campo, pero, otros métodos, como el Método de la Banda Finita continua teniendo sus propios roles y no ha sido descartados en estas áreas.

Muchas estructuras poseen propiedades geométricas constantes a lo largo de una dirección, como son: placas, puentes y láminas en los que la sección transversal de dichas estructuras no varía en dirección longitudinal; y si las propiedades mecánicas de los materiales son también constantes en dicha dirección, se puede simplificar el análisis combinando el método de los elementos finitos con desarrollos en series de Fourier para modelar dicho comportamiento.

Dichas estructuras como las vigas de sección abierta o cerrada presentan alabeo en su sección transversal con la manifestación de tensiones normales, mientras las tensiones tangenciales que son producto del cortante y la torsión también son significativas, y se alejan sensiblemente de un análisis simple. En este caso específico de las vigas de sección abierta, el estudio del alabeo de la sección y la determinación de las tensiones normales y tangenciales son auto - equilibradas, es decir, que surgen localmente a consecuencia de dicho alabeo y también la aparición del fenómeno de “shearlag” (corte retardado) cuyos efectos no se pueden despreciar.

Para el análisis del alabeo (curvatura) y del shearlag los métodos utilizados para solucionar han sido analíticos; es decir, una vez deducidas las ecuaciones que modelan el fenómeno (generalmente ecuaciones diferenciales), enfrentar su solución directamente, mediante métodos operacionales y también variacionales. En la formulación de un problema, independientemente de la exactitud de la solución, el paso más importante es la selección del modelo físico adecuado, que sea capaz de recoger las características fundamentales del fenómeno estudiado.

El método de los elementos finitos, siendo la herramienta más versátil, requiere una discretización en cada dimensión de los problemas, y, por tanto, generalmente necesita más incógnitas para la discretización que otros métodos. El avance de las computadoras ha dado frente a problemas que se consideraban intratables debido a su naturaleza compleja y a su tamaño, y que han sido resueltos con éxito con el método de los elementos finitos.

No obstante, aunque el costo de las soluciones ha disminuido, están aún lejos de ser considerado barato. Es también conocido que en problemas con formas geométricas regulares y condiciones de contorno simples, un análisis complejo con elementos finitos, resulta extravagante e innecesario. En consecuencia, métodos alternativos de análisis que reduzcan el coste computacional y los requerimientos de base y que tengan una amplia versatilidad en el análisis de elementos finitos, son evidentemente deseables.

Un método alternativo, es el método de la banda finita, para problemas bi-dimensionales. La reducción del problema se consigue mediante la separación de las variables en las distintas direcciones del problema, habilitado con el uso de la adecuada expresión de las funciones interpoladoras. Las fórmulas iniciales utilizan funciones polinómicas simples en algunas direcciones y funciones trigonométricas diferenciales en las otras direcciones. La forma general de las funciones de desplazamiento queda como un producto de funciones polinómicas y series. Y se puede decir que, toda serie que satisfaga, a priori, las condiciones de contorno en los extremos de la banda, puede ser utilizada en la interpolación. Al mismo tiempo, para satisfacer distintas condiciones de contorno, se necesita en cada caso, funciones en serie diferentes. Esta formulación puede ser llamada como banda finita.

1.2.MARCO TEORICO

En el análisis de una viga cajón o canal cerrado y de una viga de sección C o de canal como se conoce, debido a su sección de paredes delgadas y su contorno cerrado ha sido siempre interesante las alteraciones que experimenta las tensiones normales y tangenciales debidas a dos fenómenos complejos:

- el alabeo (curvatura) de la sección transversal y
- el shearlag (corte retardado).

Por otra parte, no es menos interesante abordar este problema usando la técnica del Método de los Elementos Finitos (MEF); sin embargo existen muchos modelos

físicos a emplear en este enfoque y para este caso se utilizará el modelo de la banda finita.

Este método considera una estructura laminar que está conformada por láminas planas unidas entre sí a través de sus lados y que no existe un movimiento independiente de cada una de las láminas, es decir, que existe una compatibilidad de desplazamientos entre los miembros integrantes. Cada una de estas láminas se comporta como una superposición de dos trabajos independientes, el membranal y el de placa bajo cargas normales a su plano.

En el membranal las láminas están sometidas a fuerzas normales y tangenciales en su plano, cuya distribución es uniforme en el espesor de la lámina porque se considera que dicho espesor es muy pequeño en comparación con las dimensiones de la lámina; y se considera además que existe un comportamiento lineal carga vs desplazamiento.

Por su parte como placa o banda, esto se considera que responde a las hipótesis de las placas delgadas de Kirchhoff o de Reissner – Mindlin; es decir:

- que se considera la hipótesis que establece que cualquier segmento de recta normal al plano medio de la placa permanece recto, mientras se desprecia la presión que pudiera ejercer los planos paralelos a ese plano medio para Kirchhoff,

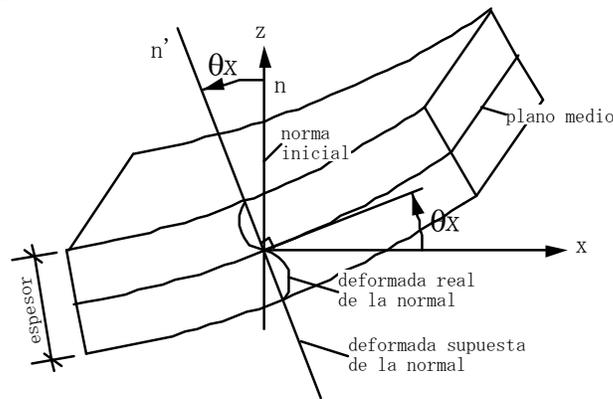


Figura 1.1 Deformación del plano medio de una placa delgada y giro de la normal. [fuente_4].

- y que los puntos que antes de la deformación estaban sobre la normal al plano medio de la placa, permanecen al deformarse sobre una misma recta, sin que ésta tenga que ser necesariamente ortogonal a la deformada en la teoría de Reissner - Mindlin

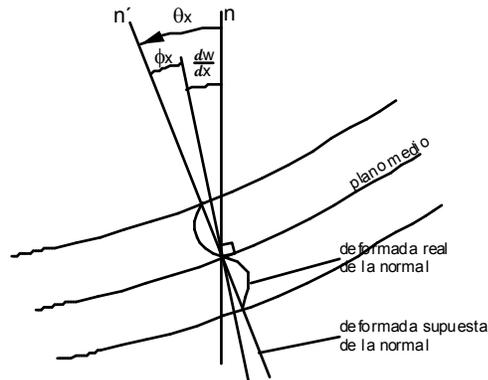


Figura 1.2 Giro de la normal en la teoría de Reissner-Mindlin [fuente __4].

En cuanto al material constitutivo se considera que tiene un comportamiento tenso deformación lineal y elástico, es decir, se modela en la teoría de la Elasticidad.

1.3.ALCANCE Y OBJETIVOS

El análisis a los problemas de estructuras constituidos por “elementos laminares delgados”, es decir en caso de placas planas, el cual se basa en las simplificaciones de la elasticidad en el análisis de vigas aplicadas a estructuras prismática, tipos de placas, puentes cajón y láminas de revolución. Ya que las distintas teorías de placas se diferencian, similarmente al caso de vigas, en las hipótesis sobre el giro de las normales al plano medio.

En todas estas estructuras, las propiedades mecánicas de los materiales son constantes en la dirección prismática o transversal, puede simplificarse el análisis combinando MEF y series de Fourier para modelar el comportamiento transversal y longitudinal.

Y para el manejo de software comerciales es necesario un conocimiento total del problema y de los factores que influyen en dicho análisis, es por ello que también

se pretende desarrollar un algoritmo de cálculo en Matlab, basado en el modelo de las bandas finitas.

1.3.1. Objetivos principales

- Analizar las estructuras de una viga mediante un modelo físico en un estado general de carga, los materiales constitutivos de los elementos estructurales a considerar serán de tipo convencional utilizados para la construcción en nuestro medio.
- Obtener las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de una viga cajón o de sección C tomando como modelo físico la banda finita.

1.3.2. Objetivos secundarios

- Describir el método de la banda finita para problemas de estructuras laminares rectas.
- Implementar en MatLab un algoritmo basado en la banda finita para su aplicación en la resolución del problema.
- Comparar los resultados obtenidos con el método de la banda finita con los resultados derivados de otro método.

GENERALIDADES DEL METODO

2.1.METODOS DE ANALISIS ELASTICO DE PLACAS Y LAMINAS

El cálculo de placas tiene su origen con los trabajos que realizó Euler en el siglo XIII, a partir de los cuales se han desarrollado la teoría fundamental de placas. Las hipótesis principales sobre la deformación parten de la clasificación de las placas en delgadas y gruesas; las placas delgadas admiten las hipótesis de Kirchhoff, que desprecia la deformación por cortante, esto permite expresar las ecuaciones de derivadas parciales de equilibrio de la placa en función únicamente de la flecha; es decir, que se considera la hipótesis que establece que cualquier segmento de la recta normal al plano medio de la placa permanece recto, mientras se desprecia la presión que pudiera ejercer los planos paralelos a ese plano medio. Cuando la placa tiene un espesor considerable se debe tener en cuenta la deformación por cortante, por lo que, además de la flecha, se tiene que introducir como incógnitas independientes los giros de las normales al plano medio de la placa; estas hipótesis configuran la teoría de Reissner - Mindlin.

Los métodos de análisis se clasifican en métodos exactos, métodos aproximados y el método de los elementos finitos para el cálculo de placas:

2.1.1. Métodos exactos

Los métodos exactos son solo posibles en un número muy limitado de casos, la solución de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de la teoría de placas es exacta cuando estas generan a ecuaciones diferenciales ordinarias. Esto se da en casos de geometrías específicas, como en placas delgadas circulares con simetría axial.

2.1.2. Métodos aproximados

Los métodos aproximados se caracterizan por ser rápidos y fiables aunque no constituyan una solución exacta de un determinado problema físico, sin embargo permite determinar soluciones aproximadas suficientes para los objetivos de un

proyecto estructural. En el caso de placas rectangulares con cargas uniformes existen métodos propuestos por Grashof [fuente__4] y mejorado por Marcus [fuente__4] basado en superficies de influencia obtenidas por métodos analíticos o experimentales.

La solución por desarrollos en series ha sido otro procedimiento muy utilizado en muchos problemas de placas delgadas, considera la solución del problema formada por series dobles o simples infinitas que satisfacen las condiciones de equilibrio interno y las condiciones de frontera. Timoshenko analiza un gran número de placas por este método en su tratado de placas [fuente__6].

Otro método es la solución por diferencias finitas, en este caso las derivadas parciales de la placa se transforman a cocientes entre incrementos finitos. Formando una malla de la misma forma que la placa, se toma como incógnita la flecha o las funciones de tensión en los nodos. De esta forma las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de la placa pasan a ser un sistema de ecuaciones algebraicas con numerosas incógnitas. La función resultante para todos los nodos se obtiene de un polinomio de interpolación, esto hace necesario la colocación de nodos ficticios fuera de la geometría de la placa y la aplicación de condiciones de contorno para valorar las incógnitas en dichos puntos. Esta solución es utilizada para problemas de placas delgadas.

Otro análisis utilizado es el emparrillado plano, donde la geometría de la estructura se modela mediante un conjunto de barras longitudinales y transversales conectadas rígidamente entre sí en un conjunto de puntos. La barra, gobernada por la teoría general de vigas, se convierte en el elemento fundamental; el método es ampliamente aplicable en placas y puentes [fuente__4].

2.1.3. Método de los elementos finitos

Este método es parte de los métodos aproximados, pero es la herramienta más versátil para la solución de los problemas de flexión de placas. Los problemas de placas o elementos laminares delgados planos, se basan en las hipótesis sobre el giro de las normales al plano medio y nos distingue dos teorías. La teoría de placas delgadas de Kirchhoff establece que las normales al plano medio se mantienen rectas y ortogonales a la deformada del plano medio, esto permite despreciar la deformación por cortante pero limita el espesor de la placa. La teoría de Reissner-Mindlin mantiene la condición de deformación recta de la normal, pero no exigen su ortogonalidad con la deformada del plano medio, y permite desarrollar elementos finitos más sencillos que el caso de la teoría clásica de Kirchhoff, y válidos tanto para el análisis de placas delgadas como para el de placas gruesas.

El método de los elementos finitos precisa de una discretización en cada dimensión de los problemas, por lo que requiere más incógnitas por la aproximación que otros métodos. Y si las estructuras tienen propiedades geométricas y mecánicas constantes a lo largo de una dirección, como las placas o las denominadas estructuras prismáticas, en la que la sección transversal no varía en dirección longitudinal, se simplifica el análisis combinando el método de los elementos finitos con desarrollos en series de Fourier para modelar el comportamiento transversal y longitudinal. Se combina la expresión del comportamiento de las variables longitudinales en series de Fourier con el desarrollo con elementos finitos unidimensionales en dirección transversal, esto permite eliminar las variables asociadas a la dirección longitudinal, y resolver el problema por aplicaciones sucesivas de un problema unidimensional en el que solo intervienen las variables asociadas a la discretización de la sección transversal. Este procedimiento es conocido como el método de la banda finita.

2.2.GENERALIDADES DEL METODO DE LA BANDA FINITA

2.2.1. Teoría general de la banda finita

La **primera etapa** del cálculo del método es desarrollar los movimientos de la banda longitudinal (o dirección prismática) de la estructura en series de Fourier. De forma general se puede decir que en toda aquella serie que puede satisfacer a priori las condiciones de contorno en los extremos de la banda pueden ser utilizadas. Así, para un movimiento genérico $w(x,y)$, se tiene:

$$w(x, y) = \sum_{l=1}^m (w^l(x) \operatorname{sen} \frac{l\pi}{b} y + w^{-l}(x) \operatorname{cos} \frac{l\pi}{b} y) \quad (2.1)$$

Donde:

y : dirección longitudinal de la estructura

w^l y w^{-l} : amplitudes modales del movimiento w para el armónico l

m : el número de términos armónicos utilizados en el análisis

b : la longitud prismática de la estructura

Las funciones seno o coseno se escogen de manera que el campo de movimiento satisfaga “a priori” las condiciones de contorno en las secciones extremas $y=0$ e $y=b$. La ecuación puede generalizarse en forma matricial.

$$u(x, y) = \sum_{l=1}^m S^l(y)u^l(x) \quad (2.2)$$

Donde:

u : vector de movimientos de un punto

u^l : vector de amplitudes modales de los movimientos para el armónico l

S^l : una matriz que contiene las funciones armónica o trigonométricas que cumplen con las condiciones de contorno.

La segunda etapa es discretizar el campo de amplitudes modales u^l a lo largo de la sección transversal de la estructura utilizando elementos finitos en la manera usual:

$$u^l(x) = \sum_{i=1}^n N_i(x)a_i^l \quad (2.3)$$

Donde:

$N_i(x)$: son las funciones de forma unidimensionales asociados a los elementos finitos de n nodos que discretizan la sección transversal de la estructura.

a_i^l : vector de amplitudes modales de los movimientos del nodo i para el armónico l

Combinado las ecuaciones (2.2) y (2.3), resulta:

$$u(x, y) = \sum_{l=1}^m S^l(y)u^l(x) = \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^n S^l(y) N_i(x)a_i^l \quad (2.4)$$

En la siguiente figura (figura 2.1) se muestra un ejemplo del proceso de discretización de una placa en bandas finitas de dos nodos:

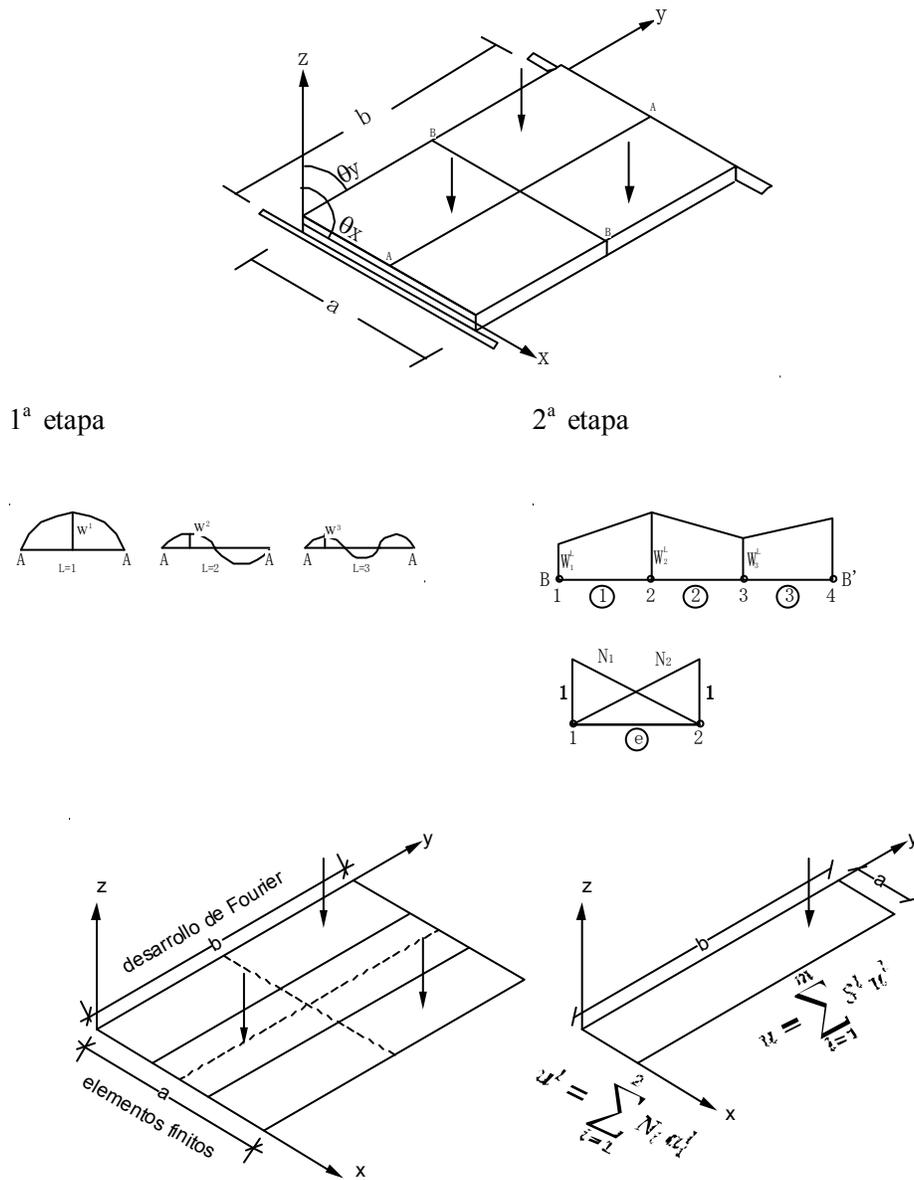


Figura 2.1 Etapas de la discretización de la placa en bandas finitas de dos nodos [fuente_4].

El hecho que la ecuación separe las variables de $u(x, y)$ como producto de una función polinómica $N_i(x)$ y una expresión analítica conocida $S^l(y)$ hace que estos procedimientos se conozcan también con el nombre de “métodos semi-analíticos”.

Al sustituir la expresión anterior en el vector de deformaciones la expresión en función de las amplitudes nodales a_i^l queda como

$$\varepsilon = \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^n \hat{S}^l(y) B_i^l(x) a_i^l \quad (2.5)$$

Donde:

$B_i^l(x)$: la matriz de deformación del nodo i para el armónico l .

$\hat{S}^l(y)$: la matriz que contiene sólo funciones armónicas

De igual manera la ecuación constitutiva puede expresarse de forma general como

$$\sigma = \hat{D}\varepsilon = \hat{D} \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^n \hat{S}^l(y) B_i^l(x) a_i^l \quad (2.6)$$

Donde:

σ : Tensiones del vector.

\hat{D} : matriz de constantes elástica del material o matriz constitutiva

Por otra parte, las cargas deben expresarse también en series de Fourier utilizando los mismos desarrollos que para el campo de movimientos.

$$b = \sum_{l=1}^m S^l b^l \quad (2.7)$$

Donde las amplitudes modales de la carga b^l pueden obtenerse a partir de los datos sobre las fuerzas exteriores como

$$b^l = \frac{\int_{y_1}^{y_2} S^l b dy}{\int_0^b [S^l]^2 dy} \quad (2.8)$$

Aplicando la expresión de Principio de Trabajos Virtuales, o en la de la Energía Potencial de la estructura:

$$\int_0^b \delta \varepsilon_i^T \sigma_j dy = \int_0^b \delta u_i^T q_j dy + \delta a_i^T f_j \quad (2.9)$$

y teniendo en cuenta las propiedades ortogonales de las funciones armónicas escogidas

$$\left. \begin{aligned} \int_0^b \operatorname{sen} \frac{l\pi}{b} y \operatorname{sen} \frac{m\pi}{b} y dy \\ \int_0^b \operatorname{cos} \frac{l\pi}{b} y \operatorname{cos} \frac{m\pi}{b} y dy \end{aligned} \right\} = \begin{cases} \frac{b}{2} \text{ para } l = m \\ 0 \text{ para } l \neq m \end{cases} \quad (2.10)$$

Puede obtenerse el sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} K^{11} \\ K^{22} \\ \dots \\ K^{ll} \\ \dots \\ K^{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \dots \\ a^l \\ \dots \\ a^m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f^1 \\ f^2 \\ \dots \\ f^l \\ \dots \\ f^m \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

Y se observa que el sistema está desacoplado para los diferentes términos armónicos, pudiéndose calcular las amplitudes modales de los movimientos para cada término armónico por separados resolviendo el sistema

$$K^{ll} a^l = f^l \quad l = 1, 2, \dots, m \quad (2.12)$$

Donde:

K^{ll} : la matriz de rigidez

f^l : vector de fuerza nodales equivalentes de la estructura para el armónico l

Y se pueden obtener ensamblando las contribuciones de los diferentes elementos de la banda o prisma finito y que tienen la expresión siguiente

$$[K_{ij}^l]^{(e)} = \frac{b}{2} \int_{S^{(e)}} [B_i^l]^T D B_j^l dS \quad (2.13)$$

$$[f_i^l]^{(e)} = \frac{b}{2} \int_{S^{(e)}} N_i^T b^l dS \quad (2.14)$$

Donde:

$S^{(e)}$: Representa el área o la longitud del elemento en el caso de tratarse de elementos de prisma finito o banda finita, respectivamente.

b^l : carga

Una vez obtenidas las diferentes amplitudes a^l se pueden calcular los movimientos, deformaciones y tensiones en cada sección transversal (con la ecuaciones (2.4), (2.5) y (2.6)).

ANÁLISIS DE PLACAS RECTANGULARES

3. ANÁLISIS DE PLACAS RECTANGULARES POR EL METODO DE LA BANDA FINITA

Se indica que los métodos de análisis de placas y láminas se fundamentan básicamente en las teorías de Kirchhoff y Reissner-Mindlin. A continuación se expondrán de forma general las hipótesis que rigen las dos teorías y su desarrollo de aplicación en la banda finita.

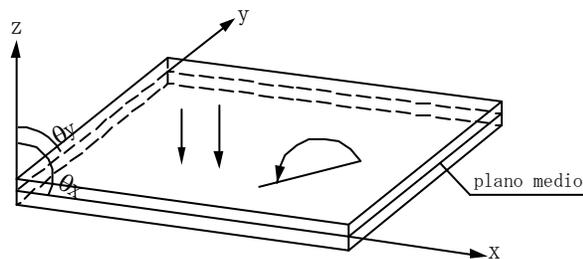


Figura 3.1 Definición geométrica de una placa y convenio de signos para desplazamientos y giros [fuente_4].

3.1. TEORIA DE KIRCHHOFF

Se define como placa al sólido paralelepípedo en el que una de sus dimensiones (espesor) es mucho más pequeña que las otras dos. La superficie plana equidistante de las caras de mayores dimensiones se denomina plano medio de la placa. Por otra parte, se define como estado de placa al estado de cargas en el que sólo actúan como cargas exteriores fuerzas normales al plano medio y momentos cuyos ejes están contenidos en dicho plano (figura 3.1).

3.1.1. Hipótesis fundamentales

Las hipótesis sobre las que se basa la teoría de placas de Kirchhoff son las siguientes:

- Los puntos del plano medio solo se mueven verticalmente
($u = v = 0$)
- Todos los puntos contenidos en una normal al plano medio tienen el mismo desplazamiento vertical
- La tensión normal σ_z es despreciable
- Los puntos sobre las rectas normales al plano medio antes de la deformación, permanecen sobre las rectas también ortogonales a la deformada del plano medio después de la deformación.

Las hipótesis primera, segunda y cuarta, permiten definir el campo de los desplazamientos a través del espesor de la placa; la tercera hipótesis afecta a la relación tensión-deformación.

3.1.2. Campo de desplazamientos

Teniendo en cuenta las hipótesis anteriores:

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z) &= -z\theta_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= -z\theta_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (1a. \text{ y } 4a. \text{ hipótesis}) \\ (2a. \text{ hipótesis}) \end{array} \quad (3.1)$$

Donde:

w : desplazamiento vertical (flecha) de los puntos del plano medio

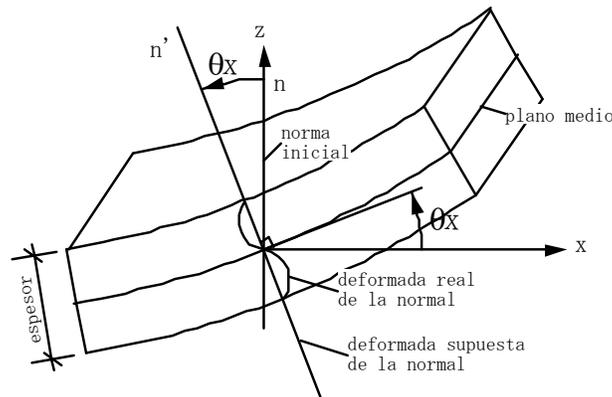
θ_x, θ_y : son los ángulos que definen el giro de la normal (hipótesis_4) contenidos en los planos xz e yz

Por lo tanto el vector de movimientos que contiene los desplazamientos y giros de un punto del plano medio de la placa, es:

$$\mathbf{u} = [w, \theta_x, \theta_y]^T \quad (3.2)$$

La hipótesis 4 permite que los giros se expresen como la derivada de los desplazamientos, figura 3.2.

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x} \quad \theta_y = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.3)$$



En plano xz: $\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x}$

Y en plano yz: $\theta_y = \frac{\partial w}{\partial y}$

Figura 3.2 Deformación del plano medio y giro de la normal. [fuente_4].

Es decir, los giros de la normal en un punto coinciden con la pendiente del plano medio en ese punto. Entonces, el vector de desplazamientos de la placa se escribe como:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Y el vector de movimientos de la ec. (3.2) se escribe como:

$$\mathbf{u} = \left[w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \right]^T \quad (3.5)$$

La deformación recta a la normal no es nada más que una aproximación, equivale a suponer un giro medio, uniforme para cada normal, esto simplifica el problema. En realidad la sección transversal se distorsiona con la deformación (figura 3.2) y el ángulo θ_x (o θ_y) depende la altura sobre el plano medio.

Se tiene que añadir que la hipótesis de ortogonalidad de la normal solo se cumple para placas de pequeño espesor, y se considera cuando la relación espesor/ancho medio $\frac{t}{L} \leq 0.05$ o a veces $\frac{t}{L} < 0.1$ y el espesor es moderado o grande cuando $\frac{t}{L} \geq 0.10$. En este último caso la distorsión de la sección aumenta con la deformación de manera que se pierde la ortogonalidad entre la normal al plano medio y el plano medio. En estos casos la teoría de Reissner-Mindlin representa una mejor aproximación de la deformación real de la placa.

Si dicha distorsión es grande, lo que sucede en losas de gran espesor o en determinadas condiciones de apoyo o de cargas, hay que acudir a la teoría de la elasticidad tridimensional [fuente__4].

3.1.3. Campo de deformaciones, tensiones y esfuerzos

Siguiendo la teoría clásica de la elasticidad [fuente__4], el vector de deformaciones en un punto está definido por seis componentes como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left[\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz} \right]^T \quad (3.6)$$

Donde:

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$: son las deformaciones normales y

$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$: las deformaciones tangenciales

Dicho vector de deformaciones se reduce a

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}]^T$$

ya que γ_{xz} y γ_{yz} son nulas debido a la cuarta hipótesis de Kirchhoff, por consiguiente, las tensiones tangenciales transversales no contribuyen a la deformación de la placa. La hipótesis tres, a su tiempo conduce que el trabajo de deformación $\sigma_z \varepsilon_z$ sea nulo, por lo que se prescinde de la deformación ε_z en el análisis. Por tanto se puede escribir simplemente que:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

El vector de tensiones asociado al vector de deformaciones independientes de la placa es:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.8)$$

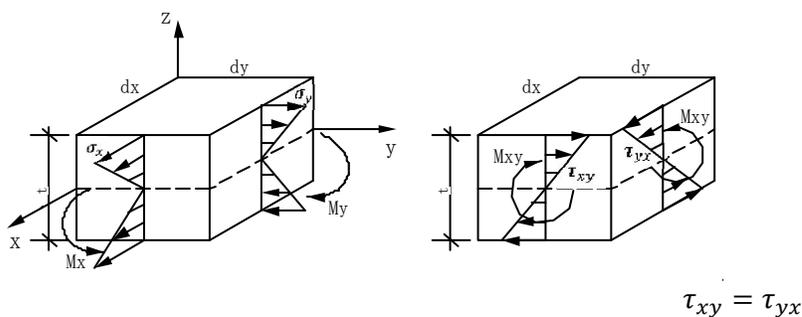


Figura 3.3 Convenio de signos para tensiones y momentos en una placa [fuente_4].

Expresión que proviene de la relación general entre tensiones y deformaciones de la elasticidad tridimensional. La matriz \mathbf{D} , matriz de constantes elásticas del material tiene la forma:

$$D = \frac{1}{1 - \nu_{yx}\nu_{xy}} \begin{bmatrix} E_x & \nu_{xy}E_x & 0 \\ \nu_{yx}E_y & E_y & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu_{yx}\nu_{xy})G_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Para material isotrópico:

$$D = \frac{1}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1 - \nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Se define el vector de esfuerzo como

$$\sigma_f = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} z \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz = \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} z \sigma dz \quad (3.11)$$

Donde:

M_x y M_y : momentos flectores producidos por las tensiones en x, y

M_{xy} : momento torsor producido por la tensión tangencial

3.1.4. Campo de esfuerzos y deformaciones generalizadas

Los vectores de esfuerzos generalizados y de deformaciones generalizadas (o curvaturas) tienen las expresiones siguientes

$$\hat{\sigma}_f = \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} z D \varepsilon dz = \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} z^2 D \hat{\varepsilon}_f dz = \hat{D}_f \hat{\varepsilon}_f \quad (3.12)$$

Donde:

\hat{D}_f : la matriz constitutiva de flexión y equivale a:

$$\widehat{D}_f = \frac{t^3}{12} D \quad (3.13)$$

$\hat{\varepsilon}_f$: vector de deformaciones generalizadas de flexión o vector de curvaturas:

$$\hat{\varepsilon}_f = \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]^T \quad (3.14)$$

La relación entre vectores de deformación (ec. 3.7)) y la deformación generalizada (ec. (3.14)) es inmediata.

$$\varepsilon_f = z \hat{\varepsilon}_f \quad (3.15)$$

3.2. TEORIA DE REISSNER-MILDLIN

3.2.1. Hipótesis fundamentales

Las tres primeras hipótesis sobre las que se basa la teoría de placas de Reissner-Mindlin coincide con las de Kirchhoff, solo cambia la hipótesis de ortogonalidad.

- Los puntos del plano medio solo se mueven verticalmente
($u = v = 0$)
- Todos los puntos contenidos en una normal al plano medio tienen el mismo desplazamiento vertical
- La tensión normal σ_z es despreciable
- Los puntos que antes de la deformación estaban sobre la normal al plano medio de la placa, permanecen al deformarse sobre una misma recta, sin que ésta tenga que ser necesariamente ortogonal a la deformada del plano medio.

3.2.2. Campo de desplazamientos

Teniendo en cuenta las hipótesis anteriores:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= -z\theta_x(x, y) \\
 v(x, y, z) &= -z\theta_y(x, y) \\
 w(x, y, z) &= w(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{3.16}$$

Donde:

θ_x, θ_y : son los ángulos que definen el giro de la normal.

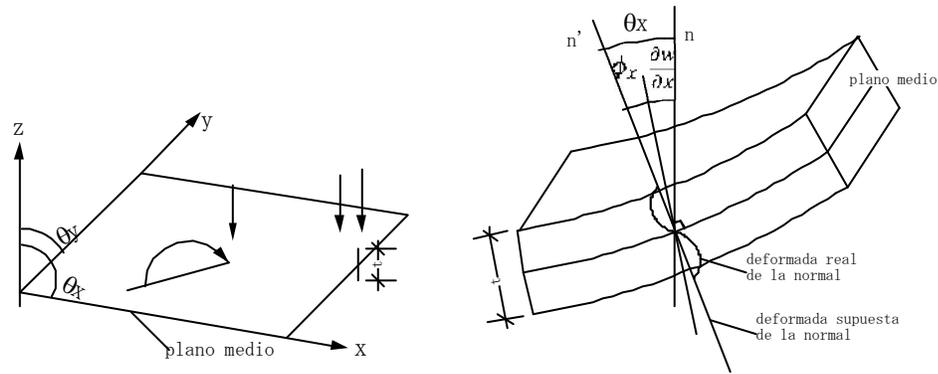
El vector de movimientos se define de igual forma que en la teoría de Kirchhoff y se tiene:

$$\mathbf{u} = \left[w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \right]^T
 \tag{3.17}$$

De la hipótesis cuarta sobre el giro de la normal y en base a la figura 3.4 se obtiene:

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x \quad \theta_y = \frac{\partial w}{\partial y} + \phi_y
 \tag{3.18}$$

En este caso los giros de la normal en un punto se componen de dos términos, el del cambio de pendiente al plano medio $\frac{\partial w}{\partial x}$ o $\frac{\partial w}{\partial y}$ y el giro adicional ϕ_x o ϕ_y de la normal debido a que no permanece ortogonal a la deformada del plano medio. Siendo esta la diferencia fundamental entre las dos teorías.



$$\text{Plano } xz: \theta_x = \frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x$$

$$\text{Y en plano } yz: \theta_y = \frac{\partial w}{\partial y} + \phi_y$$

Figura 3.4 Convenio de signos para los movimientos y giro de la normal en la teoría de Reissner-Mindlin [fuente_4].

3.2.3. Campo de deformaciones, tensiones y esfuerzos

La hipótesis de no ortogonalidad de la normal se traduce en que las deformaciones transversales o la distribución de tensiones γ_{xz} y γ_{yz} **es constante sobre el espesor (no sean nulas)**, las normales inicialmente rectas se distorsionan durante la deformación, siendo dicha distorsión más importante cuanto mayor es el espesor de la placa.

Para obtener el campo de las deformaciones partimos de la definición general de las deformaciones y sustituyendo el campo de movimientos (ec. (3.16)), se obtiene:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -z \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} = -\phi_x$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} = -\phi_y$$

Se aprecia en estas ecuaciones (ec. 3.19) que la hipótesis de no ortogonalidad de la normal se traduce en que las deformaciones transversales γ_{xz} y γ_{yz} **no son nulas**, siendo precisamente su valor el de los giros ϕ_x y ϕ_y , respectivamente y que dichas deformaciones y por consiguiente las respectivas tensiones son independientes de la coordenada z .

Puesto que por la hipótesis tres de la teoría de Kirchhoff la tensión normal σ_z es nula, se puede definir el vector de tensiones no nula por

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \dots \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_f \\ \dots \\ \sigma_c \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

Donde:

σ_f y σ_c : vectores de tensiones debidas a efectos de flexión y cortante transversal.

El criterio de los signos para las tensiones de flexión σ_x , σ_y y τ_{xy} coinciden con el de la figura 3.3; y los signos positivos para las tensiones de cortante transversal τ_{xz} y τ_{yz} se muestra en la siguiente figura:

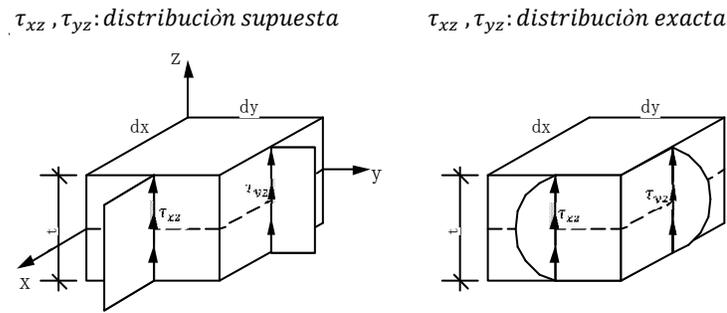


Figura 3.5 Convenio de signos para las tensiones τ_{xz} y τ_{yz} [fuente_4].

El vector de deformaciones asociado al de tensiones (ec. 3.19):

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ -z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ -z \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \\ \dots \dots \dots \\ -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ -\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_f \\ \dots \\ \varepsilon_c \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

Donde:

ε_f : representa el vector de deformación de flexión y
 ε_c : el vector de cortante transversal.

Partiendo de la ecuación constitutiva de la elasticidad y haciendo uso de que σ_z es nula, se puede encontrar la relación entre las tensiones no nulas y sus deformaciones asociadas

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_f \\ \dots \\ \sigma_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_f & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & D_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_f \\ \dots \\ \varepsilon_c \end{Bmatrix} = D \varepsilon \quad (3.22)$$

Donde:

D_f y D'_c : son las matrices constitutivas a flexión y a cortante

En el caso de elasticidad ortótropa se escribe así:

$$D_f = \frac{1}{1 - \nu_{yx}\nu_{xy}} \begin{bmatrix} E_x & \nu_{xy}E_x & 0 \\ \nu_{yx}E_y & E_y & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu_{yx}\nu_{xy})G_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$D'_c = \begin{bmatrix} G_{xz} & 0 \\ 0 & G_{yz} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Para un material isótropo:

$$\begin{aligned} E_x &= E_y = E \nu_{xy} = \nu_{yx} = \nu \\ G_{xy} &= G_{xz} = G_{yz} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Obsérvese que la matriz D_f coincide con la utilizada en la teoría de placas de Kirchhoff. Y la distribución de las deformaciones γ_{xz} y γ_{yz} es constante a lo largo del espesor y lo mismo sucede con las correspondientes tensiones τ_{xz} y τ_{yz} (figura 3.5).

Además, que de acuerdo con la teoría de la elasticidad, la distribución “exacta” de tensiones tangenciales transversales no es constante a través del espesor. Generalmente dicha distribución tiene forma polinómica con valores nulos en los planos superiores e inferiores de la placa [fuente __6].

La teoría de Reissner-Mindlin hereda esta distribución de tensiones constantes debido al campo de desplazamientos supuestos. Para sortear este problema se afecta a las tensiones transversales de un coeficiente de manera que el trabajo de deformación de la misma coincida con el realizado por las tensiones transversales “exactas”. En la práctica el vector σ_c de la ec. (3.22) se escribe como

$$\sigma_c = \begin{bmatrix} \alpha_1 G_{xz} & 0 \\ 0 & \alpha_2 G_{yz} \end{bmatrix} \varepsilon_c = D_c \varepsilon_c \quad (3.26)$$

Donde:

α_1 y α_2 : son los coeficientes de distorsión transversal. En placas de espesor constante y material homogéneo es normal tomar $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{5}{6}$ (como en vigas de sección rectangular)

3.2.4. Campo de esfuerzos y deformaciones generalizadas

Se define el vector de esfuerzos $\hat{\sigma}$ en un punto del plano medio por

$$\hat{\sigma} = \begin{Bmatrix} \hat{\sigma}_f \\ \dots \\ \hat{\sigma}_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ \dots \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} z \sigma_x \\ z \sigma_y \\ z \tau_{xy} \\ \dots \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz = \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} z \sigma_f \\ \dots \\ \sigma_c \end{Bmatrix} dz \quad (3.27)$$

Donde:

$\hat{\sigma}_f$ y $\hat{\sigma}_c$: son los vectores de momentos flectores y esfuerzos cortantes.

Se observa que en dicha ecuación (ec. 3.27) que los momentos flectores M_x , M_y y M_{xy} se obtiene integrando a través del espesor el momento con respecto al plano medio de tensiones σ_x , σ_y y τ_{xy} , respectivamente, y los esfuerzos cortantes Q_x y Q_y son la resultante sobre el espesor de las tensiones tangenciales transversales τ_{xz} , τ_{yz} , respectivamente. En la figura 2.6 se muestra el convenio de signos para los esfuerzos.

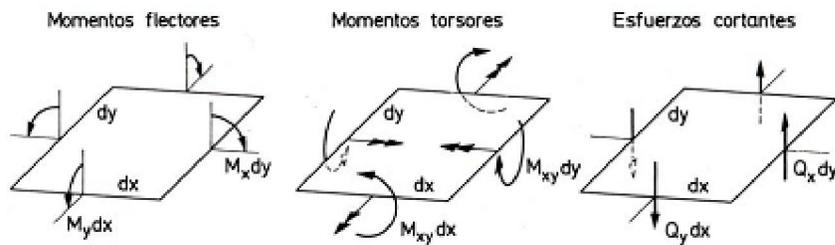


Figura 3.6 Convenio de signos para los esfuerzos en una placa [fuente _4].

Operando la ecuación (3.27) y relacionando con las ecuaciones (3.22) y (3.26)

$$\hat{\sigma} = \begin{Bmatrix} \hat{\sigma}_f \\ \dots \\ \hat{\sigma}_c \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} z D_f \varepsilon_f \\ \dots \\ D_c \varepsilon_c \end{Bmatrix} dz \quad (3.28)$$

Reemplazando ε_f y ε_c

$$\hat{\sigma} = \begin{Bmatrix} \hat{\sigma}_f \\ \dots \\ \hat{\sigma}_c \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} z D_f \begin{Bmatrix} -z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ -z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ -z \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} \\ \dots \dots \dots \\ D_c \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} dz =$$

$$= \begin{Bmatrix} \left(\int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} z^2 dz \right) D_f \begin{Bmatrix} -z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ -z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ -z \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} \\ \dots \dots \dots \\ \left(\int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} z dz \right) D_c \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{t^3}{12} D_f \hat{\varepsilon}_f \\ \dots \\ t D_c \hat{\varepsilon}_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{D}_f \hat{\varepsilon}_f \\ \dots \\ \hat{D}_c \hat{\varepsilon}_c \end{Bmatrix} \quad (3.29)$$

Donde:

\hat{D}_f y \hat{D}_c : la matrices constitutivas generalizadas de flexión y cortante, y equivalen a:

$$\hat{D}_f = \frac{t^3}{12} D_f \quad y \quad \hat{D}_c = t D_c \quad (3.30)$$

$\hat{\varepsilon}_f$ y $\hat{\varepsilon}_c$: vectores de deformaciones generalizadas de flexión y cortante, o también vectores de curvatura y de cizallamientos transversales de un punto de la superficie media de la placa.

$$\hat{\varepsilon}_f = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial\theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial\theta_y}{\partial y} \\ -\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial y} + \frac{\partial\theta_y}{\partial x}\right) \end{Bmatrix} y \hat{\varepsilon}_c = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \end{Bmatrix} \quad (3.31)$$

La relación entre los vectores de deformación y los de deformación generalizada es inmediata comparando las ecuaciones (3.21) y (3.31)

$$\varepsilon_f = z\hat{\varepsilon}_f \quad y \quad \varepsilon_c = \hat{\varepsilon}_c \quad (3.32)$$

Finalmente, a partir de la ecuación (3.29) se escribirá la relación constitutiva entre el vector de esfuerzos $\hat{\sigma}$ y el de deformaciones generalizadas $\hat{\varepsilon}$, que es análoga a la que hay entre el vector tensiones σ y el de deformaciones ε (ec. (3.22))

$$\hat{\sigma} = \begin{Bmatrix} \hat{\sigma}_f \\ \dots \\ \hat{\sigma}_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{D}_f & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & \hat{D}_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\varepsilon}_f \\ \dots \\ \hat{\varepsilon}_c \end{Bmatrix} = \hat{D}\hat{\varepsilon} \quad (3.33)$$

3.3. FORMULACION DE REISSNER – MINDLIN EN BANDA FINITA

A partir de las ideas presentadas y con las hipótesis de Reissner – Mindlin, se va a presentar la formulación particular para placas rectangulares.

3.3.1. Discretización y ecuaciones de rigidez

El primer paso es dividir la placa en bandas longitudinales, cada banda tendrá, en general n nodos en la dirección transversal x . Los desplazamientos y giros del plano medio de cada banda se expresará utilizando una interpolación de elementos finitos unidimensionales en la dirección transversal (x) de la placa (producto de

funciones de forma). En la dirección longitudinal de la placa, dirección y , se desarrollo los movimientos en series de Fourier

Sea la placa de la figura 3.7; la primera etapa del cálculo es desarrollar los movimientos de un punto en series de Fourier a lo largo de la dirección longitudinal en la que las propiedades geométricas y mecánicas son constantes. El campo de desplazamientos es entonces:

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \sum_{l=1}^m w^l(x) Y_l(y) \\ \theta_x(x, y) &= \sum_{l=1}^m \theta_x^l(x) X_l(y) \\ \theta_y(x, y) &= \sum_{l=1}^m \theta_y^l(x) Z_l(y) \end{aligned} \quad (3.34)$$

Donde:

$$\begin{aligned} Y_l &= X_l = \sin(\lambda y) \\ Z_l &= \cos(\lambda y) \quad \text{con } \lambda = \frac{l\pi}{b} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Siendo:

- m : el número de armónicos utilizados en el análisis y
- $w^l, \theta_x^l, \theta_y^l$: las amplitudes nodales de los movimientos para el armónico l ,
- b : la longitud de la placa.

Las funciones armónicas presentadas en la ecuación (3.35) son escogidas para que cumplan las condiciones de contorno de la figura 3.7. con bordes simplemente apoyados.

$$\left. \begin{aligned} w = \theta_x = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial \theta_x}{\partial x} = \frac{\partial \theta_y}{\partial x} = 0 \end{aligned} \right\} \text{para } y = 0 \text{ e } y = b \quad (3.36)$$

Entonces:

$$w(x, y) = \sum_{l=1}^m w^l(x) \sin\left(\frac{l\pi}{b} y\right) \quad (3.37)$$

$$u(x, y) = \sum_{l=1}^m S^l(y) u^l(x) \quad (3.38)$$

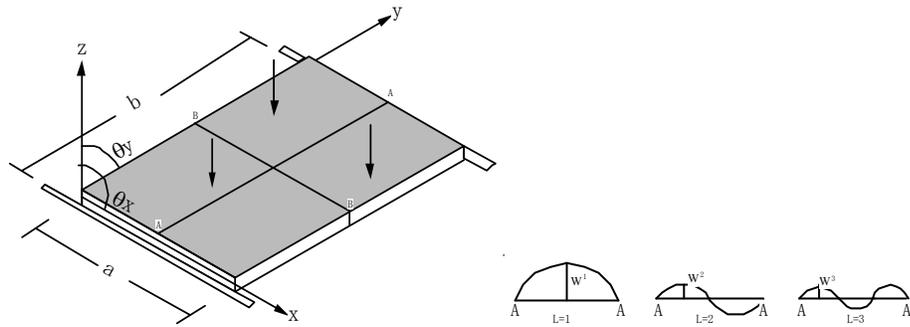


Figura 3.7 Placa simplemente apoyada [fuente_4].

El segundo paso es discretizar las amplitudes de los movimientos a lo largo de la sección transversal; es importante destacar, que las amplitudes de los movimientos se independizan de la dirección y , que depende de las funciones armónicas, que al mismo tiempo no dependen de la dirección x . Esto nos permite discretizar de forma independiente la dirección transversal de la placa como si de elementos finitos unidimensionales se tratara, utilizando las funciones de forma clásicas.

Entonces en un elemento unidimensional de n nodos las amplitudes de los movimientos se expresa por:

$$u^l(x) = \sum_{i=1}^n N_i(x) a_i^l \quad (3.39)$$

Donde:

$N_i(x)$: las funciones de forma de Lagrange unidimensional

a_i^l : vector de amplitudes modales de los movimientos del nodo i para el armónico l .

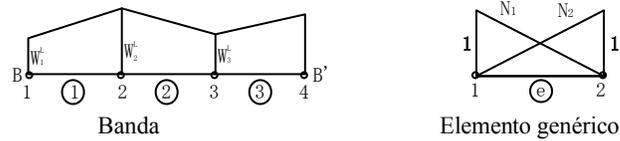


Figura 3.8 Funciones de forma [fuente_4].

De forma sintética se puede decir que, el campo de movimientos se define longitudinalmente por los desarrollos en series de Fourier (ec. 3.34) y transversalmente por interpolación de elementos finitos (ec. 3.39). Uniendo estas dos definiciones, el campo de desplazamientos queda:

$$u(x, y) = \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^n S^l(y) N_i(x) a_i^l \quad (3.40)$$

Donde:

$$u = [w, \theta_x, \theta_y]^T$$

$$a_i^l = [w_i^l, \theta_{xi}^l, \theta_{yi}^l]^T$$

$$N_i = N_i(x) I_3$$

$$S^l = \begin{bmatrix} S^l & & 0 \\ & S^l & \\ 0 & & C^l \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} S^l &= \text{sen } \gamma y \\ C^l &= \text{cos } \gamma y \end{aligned}$$

El campo de desplazamientos de forma matricial:

$$u = \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^n C_i^l a_i^l \quad (3.41)$$

La matriz de funciones de forma C_i^l , que relaciona a y a_i^l se escribe ahora como:

$$C_i^l = \{ \bar{N}_i Y_l, \bar{\bar{N}}_i Y_l \} \quad (3.42)$$

$$a_i^l = \{ w_i^l, \frac{\partial w_i^l(x)}{\partial x} \}^T$$

Y las funciones de forma \bar{N}_i , $\bar{\bar{N}}_i$ asociadas con el nodo i de una banda (e), vienen dadas por:

$$N_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad N_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (3.43)$$

$$\bar{N}_i = \frac{1}{4}(2 - 3\xi + \xi^3) \quad \bar{\bar{N}}_i = \frac{1}{4}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3)$$

Con

$$\xi = \frac{2}{l(e)}(x - x_m) \quad x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad (3.44)$$

3.3.2. Deformaciones generalizadas y esfuerzos

Las deformaciones generalizadas y esfuerzos en una banda se obtienen sustituyendo la ec. 3.40 en las expresiones de los campos de deformaciones y esfuerzos, entonces:

$$\hat{\varepsilon} = \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^n B_i^l(x) a_i^l \quad (3.45)$$

En la que la matriz de deformación del nodo i para el armónico l , $B_i^l(x)$ viene ahora dado por la expresión:

$$B_i^l(x) = \begin{Bmatrix} B_{fi}^l \\ \dots \\ B_{ci}^l \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & N_i \gamma \\ 0 & N_i \gamma & -\frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} & -N_i & 0 \\ N_i \gamma & 0 & -N_i \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Donde:

B_{fi}^l y B_{ci}^l : matrices de deformación generalizadas de flexión y cortante del nodo i para el armónico l

En un análisis de elasticidad, en base de la energía potencial o de acuerdo al principio de los trabajos virtuales

3.3.3. Desacoplamiento de la ecuación de rigidez

Las ecuaciones de rigidez pueden obtenerse usando el análisis por elasticidad la ecuación de la energía potencial de la placa, pero en este caso el PTV (Principio Trabajos Virtuales) en forma usual.

$$\int_0^b \delta \varepsilon_i^T \sigma_j dy = \int_0^b \delta u_i^T q_j dy + \delta a_i^T f_j \quad (3.47)$$

Sustituyendo las expresiones u (ec. 3.40), ε (ec. 3.45) y el equivalente de σ y q , tenemos:

$$\delta a_i^T \int_0^b B_i^T S^l D S^l B_j dy = \delta a_i^T \int_0^b N_i^T (S^l)^T q_j dy + \delta a_i^T f_j \quad (3.48)$$

Y haciendo uso de las propiedades ortogonales de las funciones de la ec. 2.9, nos da:

$$\delta a_i^T \frac{b}{2} \int_0^b B_i^T D B_j dy = \delta a_i^T \frac{b}{2} \int_0^b N_i^T q_j dy + \delta a_i^T f_j \quad (3.49)$$

Entonces la rigidez para cada banda, será:

$$K_{ij}^l = \frac{b}{2} \int_0^b [B_i^l]^T D B_j^l dy \quad (3.50)$$

quedando el sistema desacoplado, que permite formar para cada armónico l – *simo* una ecuación de equilibrio en la que intervienen exclusivamente la matriz de rigidez, el vector de amplitudes de los movimientos nodales y las fuerzas nodales equivalentes correspondientes a dicho armónico.

$$K^{ll} a^l = f^l$$

$$\begin{bmatrix} & & K^{11} & & \\ & K^{22} & & 0 & \\ & & \dots & & \\ & & & K^{ll} & \\ 0 & & & & \dots \\ & & & & & K^{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \dots \\ a^l \\ \dots \\ a^m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f^1 \\ f^2 \\ \dots \\ f^l \\ \dots \\ f^m \end{Bmatrix} \quad (3.51)$$

3.3.4. Vector de fuerzas nodales equivalentes

El vector de fuerzas nodales equivalentes de un elemento de banda (e), para el armónico l (ec. 3.49), viene dado por

$$[f_i^l]^{(e)} = \frac{b}{2} \int_0^b N_i^T [q^l, 0, 0]^T dy \quad (3.52)$$

Siendo q^l una fuerza vertical uniformemente distribuida:

$$q^l = \frac{\int_{y_1}^{y_2} S^l q \partial y}{\int_0^b [S^l]^2 \partial y} = \frac{\int_{y_1}^{y_2} q \text{sen} \lambda y \partial y}{\int_0^b \text{sen}^2 \lambda y \partial y} = \frac{2q}{l\pi} (\text{cos} \lambda y_0 - \text{cos} \lambda y_1) \quad (3.53)$$

Con y_0 e y_1 límites longitudinales de aplicación de la carga (figura 3.9). En el caso de cargas puntuales el vector f_i^l es:

$$f_i^l = \begin{pmatrix} W_i \text{sen} \lambda y_i \\ M_{xi} \text{sen} \lambda y_i \\ M_{yi} \text{cos} \lambda y_i \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

Donde:

W_i , M_{xi} , M_{yi} : son las intensidades de carga vertical y de los dos momentos puntuales que actúan en el nodo i de una banda a una distancia y_i del extremo apoyado (figura 3.9).

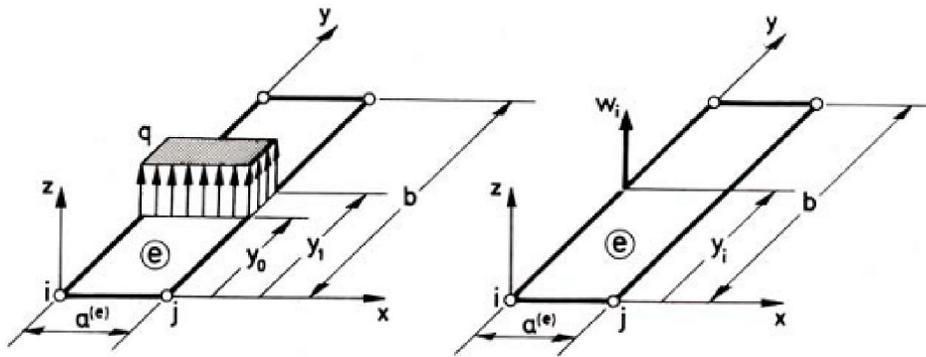


Figura 3.9 Cargas repartidas y puntuales sobre un elemento de banda finita de dos nodos [fuente_4].

Hay que destacar que el desacoplamiento de las matrices de rigidez y los vectores de fuerzas nodales para cada armónico es una consecuencia directa de los desarrollos en series utilizados en ec. (3.35). Finalmente se debe añadir que la evaluación de las integrales de la matriz de rigidez (ec. 3.50) y de la fuerza nodal (ec. 3.52) puede efectuarse analíticamente; únicamente hay que integrar términos polinómicos sencillos, no obstante, en la práctica es más conveniente utilizar integración numérica con una cuadratura de Gauss-Legendre unidimensional.

4. MODELACION NUMERICA DEL METODO DE LA BANDA FINITA

4.1. Aplicación del método numérico

La existencia actual de potentes modelos de análisis estructurales basados en el método de los elementos finitos permite reproducir comportamientos estructurales complejos con ecuaciones constitutivas no lineales e incluyendo no linealidad geométrica, a partir de ecuaciones finitas de solución numérica aproximada.

La utilización de los modelos permite efectuar estudios preliminares previos a la realización de una prueba experimental para analizar el problema a investigar y conocer los parámetros que van a gobernar dicho problema. Obteniendo de forma aproximada los resultados previsibles en el ensayo (cargas máximas, flechas, deformaciones, reacciones o estados tensionales singulares). Dicho estudio preliminar solo puede aplicarse mediante la utilización de un modelo numérico que tenga en cuenta todas las variables que intervienen en el problema.

El modelo numérico permite a posteriori, comparar los resultados del modelo con los resultados experimentales o de un software comercial, verificar la adaptación de dicho modelo y proporcionar valores de variables no medidas experimentalmente. Se utiliza además para la posterior realización de estudios paramétricos derivados del análisis de los resultados experimentales, de manera que permita reproducir la experimentación de manera sistemática, con una amplia variación de los parámetros más importantes. Es importante saber, que para poder obtener resultados fiables y comparables con la experimentación, con el uso de un método numérico, es necesario modelizar los ensayos de la manera más rigurosa posible.

Los métodos o modelos numéricos como es el caso el método de los elementos finitos, han adquirido una gran importancia en la solución de problemas ingenieriles, físicos, y otros, ya que permiten resolver casos que hasta hace poco eran imposibles de resolver mediante otros métodos matemáticos tradicionales.

Esta circunstancia obliga a realizar prototipos, ensayarlos e ir mejorando de forma iterativa, lo que trae consigo un elevado costo tanto económico como en tiempo de desarrollo. Sin embargo no deja de ser un método aproximado de cálculo debido a las hipótesis básicas del método. Los prototipos, por lo tanto, siguen siendo necesarios, pero en menor número, ya que el primero puede acercarse bastante más al diseño óptimo.

También es importante destacar que gracias a estos modelos matemáticos se han realizado programas poderosos que nos acercan bastante a la realidad de lo que sucede en una estructura aunque no dejen de ser métodos aproximados.

Como conclusión se puede decir que los modelos matemáticos son de gran utilidad hoy en día debido a que con su empleo se es capaz de realizar la discretización de cualquier elemento para así poder saber el comportamiento si quisiéramos de cualquier punto o nodo del elemento, las leyes que rigen en la estructura como tal y fenómenos físicos.

4.2. El método de los elementos finitos

Con la excepción de las estructuras de barras, la mayor parte de las estructuras en ingeniería son de naturaleza continua, y por tanto, su comportamiento no puede expresarse en forma precisa en función de un número pequeño de variables discretas.

A nivel conceptual, el método de los elementos finitos consiste en la descomposición de un elemento físico continuo en un número discreto de partes o elementos que se hayan conectado entre sí en número discreto de puntos denominados nodos. Los movimientos de estos nodos constituyen las incógnitas fundamentales del problema. Dentro de cada elemento, los movimientos de cualquier punto se obtienen a partir de los movimientos de los nodos del elemento.

Conocido el movimiento de un punto dentro del elemento, estableciendo las condiciones de equilibrio y compatibilidad y dadas las relaciones constitutivas de los materiales, pueden obtenerse las deformaciones, tensiones y esfuerzos en cualquier punto del elemento.

A continuación se describe de forma muy breve la formulación del método de los elementos finitos.

El método de manera simplificada es el siguiente:

1. El continuo se divide mediante líneas o superficies imaginarias en un número de elementos finitos.
2. Se supone que los elementos están conectados entre sí mediante un número discreto de puntos denominados nodos. Los desplazamientos de estos nodos serán las incógnitas fundamentales del problema.
3. **Campo de desplazamientos.** Se definen los desplazamientos de un punto cualquiera del elemento en función de los desplazamientos de los nodos del mismo, de manera única, a través de un conjunto de funciones polinómicas, llamadas funciones de forma.

$$u^e = N^e a^e \quad (4.1)$$

Donde:

u^e : los desplazamientos en cualquier parte del elemento (e) ,

a^e : los desplazamientos nodales del elemento y

N^e : las funciones de forma.

4. **Campo de deformación.** Las funciones de forma definirán de manera única el estado de deformación dentro del elemento en función de los desplazamientos nodales. Una vez conocidos los desplazamientos para todos los puntos del elemento, pueden determinarse las deformaciones en cualquier punto. Estas darán siempre por resultado una relación que podrá escribirse en forma matricial, como:

$$\varepsilon^e = L^e u^e = L^e N^e a^e = B^e a^e \quad (4.2)$$

Donde:

L: es un operador diferencial lineal.

5. **Campo de tensiones.** Conocidas las deformaciones, a partir de las ecuaciones constitutivas, pueden determinarse las tensiones. Para un material elástico lineal, la relación entre tensiones y deformaciones viene dada por la matriz D^e que es la matriz constitutiva del material.

$$\sigma^e = D^e \varepsilon^e \quad (4.3)$$

Sustituyendo la ecuación (4.2) se obtiene que:

$$\sigma^e = D^e B^e a^e \quad (4.4)$$

6. Se determina un sistema de fuerzas concentradas en los nodos, tal que equilibre las tensiones y las cargas repartidas que actúan en el elemento. El procedimiento para establecer dicho equilibrio y relacionar las fuerzas actuantes en los nodos con los desplazamientos en dichos nodos se basa en la explicación del Principio de los Trabajos Virtuales.

Dicho principio establece que una estructura está en equilibrio bajo la acción de un sistema de fuerzas exteriores si al imponer a la misma unos desplazamientos arbitrarios (virtuales) compatibles con las condiciones en los apoyos, el trabajo realizado por las fuerzas exteriores sobre los desplazamientos virtuales es igual al trabajo que realizan las tensiones sobre las deformaciones producidas por los desplazamientos virtuales. Y que puede escribirse como:

$$\iiint_V \delta \varepsilon^T \sigma dV = \iiint_V \delta u^T b dV + \oint \delta u^T t dS + \delta a^T q \quad (4.5)$$

Donde:

- q: vector de fuerzas nodales
- b: vector de fuerzas por unidad de volumen y
- t: fuerzas por unidad de superficie

Si se tiene que:

$$\delta u^T = \delta a^T N^T \quad \delta \varepsilon^T = \delta a^T B^T \quad (4.6)$$

Reemplazando las igualdades (ec. 4.6) en la ecuación (4.5) y simplificando δa^T nos da:

$$\iiint_V B^T DB a dV = \iiint_V N^T b dV + \oint_S N^T t dS + q \quad (4.7)$$

Con lo que, finalmente se obtiene la ecuación de equilibrio del elemento:

$$q^e = K^e a^e - f^e \quad (4.8)$$

Donde:

K^e : la matriz rigidez del elemento.

$$K^e = \iiint_V B^T DB dV \quad (4.9)$$

f^e : el vector de fuerzas de volumen y superficie.

$$f^e = \iiint_V N^T b dV + \oint_S N^T t dS \quad (4.10)$$

7. La ecuación global de la estructura se obtiene estableciendo que la suma de las fuerzas nodales debe ser igual a la fuerza nodal exterior.

Tras el ensamblaje de todas las partes, se llega a la ecuación matricial global de la estructura:

$$K a = f \quad (4.11)$$

En esta ecuación:

K: la matriz rigidez

-
- a: el vector de desplazamientos nodales y
 - f: vector de fuerzas nodales equivalentes de toda la estructura

Al resolver este sistema y hallar los desplazamientos nodales, podemos determinar las tensiones y deformaciones en cualquier punto del elemento a partir de las expresiones definidas anteriormente.

Cabe destacar la importancia que tienen en el desarrollo del método de los elementos finitos aspectos como el tipo de problema a resolver (unidimensional-vigas, bidimensional-tensión plana, deformación plana, placas, láminas), las funciones de forma utilizadas para la interpolación en cada caso, la linealidad o no linealidad del problema (no linealidad del material, no linealidad geométrica), el método de resolución del sistema de ecuaciones resultante y la integración numérica utilizada, entre otras cosas.

4.3. Aplicación del Método de la Banda Finita

A continuación trataremos sobre la forma de abordar el método de la banda finita mediante las dos teorías tanto la de Kirchhoff como la de Reissner - Mindlin, y que es muy similar a la planteada en el epígrafe anterior, con la diferencia de que en la banda finita se trabaja con la placa como un todo, es decir, que no se subdivide la placa en elementos finitos.

4.3.1. Formación de la matriz de rigidez

Sea la banda finita genérica de espesor delgado y se comporta como una placa de Kirchhoff o de Reissner - Mindlin, representada en la figura 3.1, aplicando las hipótesis respectivas tenemos:

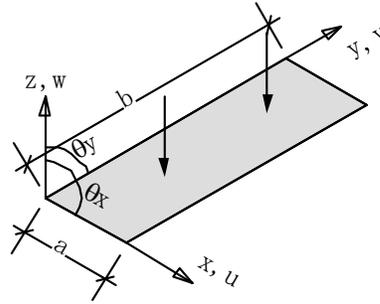


Figura 4.1 Banda finita genérica. [fuente _4]

- Campo de desplazamientos: los desplazamientos que tienen lugar en cualquier punto genérico de la misma son:
 - Desplazamientos membranales:

$$\bar{U}(x, y) = \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^2 N_i(x) \sin\left(\frac{l\pi}{b} y\right) \bar{u}_i^l \quad (4.12)$$

$$\bar{V}(x, y) = \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^2 N_i(x) \cos\left(\frac{l\pi}{b} y\right) \bar{v}_i^l$$

- Desplazamientos debido a flexión: de las ecuaciones ec (3.34) y ec (3.37) tenemos:

$$W(x, y) = \sum_{l=1}^m W^l \text{sen } \alpha_l y \quad \text{siendo } \alpha_l = \frac{l\pi}{b}$$

$$\theta_x(x, y) = \sum_{l=1}^m \theta_x^l \text{sen } \alpha_l y \quad (4.13)$$

$$\theta_y(x, y) = \sum_{l=1}^m \theta_y^l \alpha_l \text{cos } \alpha_l y$$

En el sentido x se propone la siguiente consideración de las funciones de forma (figura 4.2):

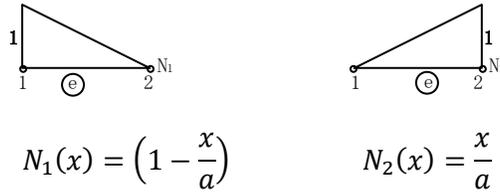


Figura 4.2 Funciones de forma (ley de variación de los desplazamientos) [fuente __4]

$$\begin{Bmatrix} w^l(x) \\ \theta^l(x) \\ \theta^l(y) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^2 \begin{bmatrix} N_i(x) & 0 & 0 \\ 0 & N_i(x) & 0 \\ 0 & 0 & N_i(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i^l \\ \theta_{ix}^l \\ \theta_{iy}^l \end{Bmatrix} \quad (4.14)$$

A partir de los desplazamientos (ec. 4.12 y ec.4.13), el vector de desplazamientos $u(x, y)$ se transforma en la siguiente forma (similar a la ecuación 3.40):

$$U(x, y) = \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^2 S^l(y) N_i(x) u_i^l \quad (4.15)$$

En el cual:

$$U'(x, y) = \langle \bar{U}(x, y), \bar{V}(x, y), W(x, y), \theta_x(x, y), \theta_y(x, y) \rangle \quad (4.16)$$

$$(U_i^l)' = \langle \bar{u}_i^l, \bar{v}_i^l, w_i^l, \theta_{ix}^l, \theta_{iy}^l \rangle$$

$$S^l = \begin{bmatrix} \text{sen}\alpha_l y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{cos}\alpha_l y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{sen}\alpha_l y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \text{sen}\alpha_l y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \text{cos}\alpha_l y \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_i(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_i(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_i(x) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{N}_i(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{N}_i(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_l \mathbf{N}_i(x) \end{bmatrix}$$

- Campo de las deformaciones: de igual forma el vector esta compuesto por la parte membranal y la flexión tanto pura como por cortante:

- Membranal:

$$\varepsilon = \left\langle \frac{\partial \bar{U}}{\partial x}; \frac{\partial \bar{V}}{\partial y}; \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right\rangle \quad (4.17)$$

- Flexión Pura

$$\left\langle -\frac{\partial}{\partial x} \theta_x; -\frac{\partial}{\partial y} \theta_y; -\left(\frac{\partial}{\partial x} \theta_y + \frac{\partial}{\partial y} \theta_x\right) \right\rangle \quad (4.18)$$

- Flexión por cortante (solo para la teoría de Reissner-Mindlin):

$$\left\langle \frac{\partial W}{\partial x} - \theta_x; \frac{\partial W}{\partial y} - \theta_y \right\rangle \quad (4.19)$$

Desarrollando las derivadas de las ecuaciones respectivas tenemos en cada caso:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^2 \mathbf{N}'_i \operatorname{sen} \alpha_l y u_i^l \\ \varepsilon_y &= \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^2 -\mathbf{N}_i \alpha_l \operatorname{sen} \alpha_l y v_i^l \\ \gamma_{xy} &= \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^2 (\mathbf{N}'_i \operatorname{cos} \alpha_l y v_i^l + \mathbf{N}_i \alpha_l \operatorname{cos} \alpha_l y u_i^l) \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial \theta_x}{\partial x} &= -\sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^2 N'_i \operatorname{sen} \alpha_l y \theta_{ix}^l \\
-\frac{\partial \theta_y}{\partial y} &= -\sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^2 N_i \alpha_l \operatorname{sen} \alpha_l y \theta_{iy}^l \\
-\left(\frac{\partial}{\partial y} \theta_x + \frac{\partial}{\partial x} \theta_y\right) &= -\sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^2 (N_i \alpha_l \operatorname{cos} \alpha_l y \theta_{ix}^l + N'_i \operatorname{cos} \alpha_l y \theta_{iy}^l)
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Las siguientes ecuaciones son para la teoría de Reissner –Mindlin en base a la cuarta hipótesis:

$$\left. \begin{aligned}
\gamma_{xz} &= \frac{\partial W}{\partial x} - \theta_x = \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^2 (N'_i \operatorname{sen} \alpha_l y W_i^l - N_i \operatorname{sen} \alpha_l y \theta_{ix}^l) \\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial W}{\partial y} - \theta_y = \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^2 (N_i \alpha_l \operatorname{cos} \alpha_l y W_i^l - N_i \operatorname{cos} \alpha_l y \theta_{iy}^l)
\end{aligned} \right\} \tag{4.22}$$

$$\varepsilon = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \\ \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} \\ \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial x} \theta_y + \frac{\partial}{\partial y} \theta_x \\ \frac{\partial W}{\partial x} - \theta_x \\ \frac{\partial W}{\partial y} - \theta_y \end{array} \right\} = \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^2 S^l(y) B_i(x) U_i^l \quad (4.23)$$

De la ecuación anterior los dos últimos términos no son validos o son nulos para la teoría de Kirchhoff, esto es, en base a la cuarta hipótesis sobre la ortogonalidad. Por tanto la ecuación escrita en forma vectorial es similar a la ecuación 3.45. En donde se tiene que:

$$S^l(y) = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

$$B_i(x) = \begin{bmatrix} N' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha N & 0 & 0 & 0 \\ \alpha N & N' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha N \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha N & -N' \\ 0 & 0 & N' & -N & 0 \\ 0 & 0 & \alpha N & 0 & -N \end{bmatrix}$$

- **Matriz de rigidez del material:**

- en su análisis membranal (ec 3.22):

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Como t es el espesor de la placa, se definen las fuerzas interiores como:

$$N_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_x dz = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) = \frac{Et}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \nu \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} \right)$$

$$N_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_y dz = \frac{Et}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + \nu \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right)$$

$$N_{xy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xy} dz = \frac{Et}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right)$$

En forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{Et}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \\ \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} \\ \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.25)$$

- Teniendo en cuenta la flexión pura: las fuerza interiores correspondientes (ec. 3.11):

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \\ -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \\ D(1-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.26)$$

Siendo D la rigidez cilíndrica.

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

La ecuación 3.26 escrita en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.27)$$

- Flexión por cortante determinamos las cargas Q, esto nos sirve para la teoría de Reissner -Mindlin:

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= G\gamma_{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial W}{\partial x} - \theta_x \right) \\ \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \theta_y \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_x &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xz} dz = \frac{Et}{2(1+u)} \left(\frac{\partial W}{\partial x} - \theta_x \right) \\
 Q_y &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{yz} dz = \frac{Et}{2(1+u)} \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \theta_y \right)
 \end{aligned}
 \tag{4.28}$$

Por lo tanto las ecuaciones constitutivas en función de las ecuaciones (4.25, 4.27, 4.28):

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \\ \bar{\sigma} \end{Bmatrix}}_{\bar{\sigma}} = \frac{E}{12(1-u^2)} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{12}{t^2} & u \frac{12}{t^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u \frac{12}{t^2} & \frac{12}{t^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-u) \frac{6}{t^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-u) \frac{6}{t^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-u) \frac{6}{t^2} \end{bmatrix}}_{\bar{D}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \\ \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} \\ \gamma_{xy} \\ \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x \partial y} \\ \bar{\varepsilon} \end{Bmatrix}}_{\bar{\varepsilon}}$$

Ecuación (4.29)

En forma compacta sería:

$$\bar{\sigma} = \bar{D} \bar{\varepsilon}$$

- **Matriz de rigidez teniendo en cuenta el efecto de la flexión y de la acción membranal:** donde se define la matriz del armónico k para una banda finita (similar a la ecuación 3.50)

$$K_{ij}^l = \int_A [B_i^l]^T [S^l]^T D S^l B_j^l dA
 \tag{4.30}$$

Y la matriz K_{ij}^l es de cinco filas y cinco columnas, y que la matriz final de una banda finita cualquiera es una matriz formada por cuatro matrices del tipo K_{ij}^l , donde sus diferencias están en la variación de los sub índices ij que son los puntos 1 y 2 de cualquier banda (como el de la figura 4.1).

Luego la matriz de rigidez de una banda finita cualquiera queda de la siguiente forma:

$$K_{ij} = \begin{bmatrix} K_{11}^l & K_{12}^l \\ K_{21}^l & K_{22}^l \end{bmatrix}_{10 \times 10} \quad (4.31)$$

Donde:

$$K_{21}^l = [K_{12}^l]^t \text{ (transpuesta)}$$

Para desarrollar otras condiciones de borde tenemos que modificar las matrices S^l y sus derivadas.

La solución numérica del modelo de la matriz de rigidez se presenta en el siguiente algoritmo; este algoritmo está escrito en pseudocódigo y es:

Algoritmo: matriz de rigidez por banda

Entrada: c, a, b, t, l, u

Salida: K11, K12, K21, K22

syms c y b l q

c=l*pi/b;

Ingresar la matriz S en función de senos y cosenos en su diagonal principal

Determinar su transpuesta St

Aplicar las funciones de forma

$N1=1-x/a;diff(N1,x);$

$N2=x/a;diff(N2,x);$

Determinar la matriz B en función de las funciones de forma y sus diferenciales

$Bt=B.';$

Ingresar la matriz D (matriz constitutiva)

Aplicar:

$i=1:2$

$j=1:2$

$Pij=Bt*St*D*S*B;$

$Pxij=int(Pij,x);$

$Pyij=int(Pxij,y);$

End

End

Con los datos de a, b, t, l, u determinar

$i=1:2$

$j=1:2$

$subs(c)$

$Kij=subs(Pyij)$

End

End

4.3.2. Transformación de ejes coordenados: para lo cual se determina la matriz de rigidez en ejes generales.

La expresión de la matriz de rigidez (ec. 4.31) corresponde a ejes locales y para ensamblar dicha matriz es necesario determinar en ejes generales, y dicha matriz K_{ij}^e sera:

$$K_{ij}^e = (L_i^e)^T K_{ij}^l L_i^e \quad (4.31)$$

Siendo:

L_i^e : matriz de rotación de ejes locales a generales

$$L_i^e = \begin{bmatrix} \lambda_{3x3}^e & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}_{3x3}^e \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Donde:

$$\lambda^e = \begin{bmatrix} \lambda_{x'x} & \lambda_{x'y} & \lambda_{x'z} \\ \lambda_{y'x} & \lambda_{y'y} & \lambda_{y'z} \\ \lambda_{z'x} & \lambda_{z'y} & \lambda_{z'z} \end{bmatrix} \quad \bar{\lambda}^e = \begin{bmatrix} -\lambda_{y'y} & \lambda_{y'x} & \lambda_{y'z} \\ \lambda_{x'y} & -\lambda_{x'x} & -\lambda_{x'z} \\ \lambda_{z'y} & \lambda_{z'x} & \lambda_{z'z} \end{bmatrix}$$

Los términos de las matrices λ^e y $\bar{\lambda}^e$ se determinan en base a la figura 4.3 y con las expresiones siguientes:

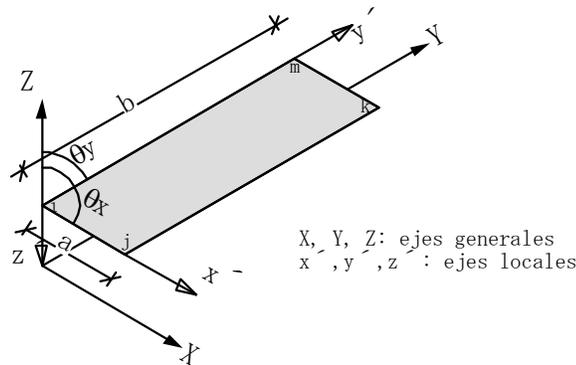


Figura4.3 Banda finita con ejes generales y locales [fuente_4]

$$\lambda_{x'x} = \frac{Xj - Xi}{Lij} = \frac{Xij}{Lij} \quad \lambda_{x'y} = \frac{Yj - Yi}{Lij} = \frac{Yij}{Lij} \quad \lambda_{x'z} = \frac{Zj - Zi}{Lij} = \frac{Zij}{Lij}$$

$$\lambda_{y'x} = \frac{Xm - Xi}{Lim} = \frac{Xim}{Lim} \quad \lambda_{y'y} = \frac{Ym - Yi}{Lim} = \frac{Yim}{Lim} \quad \lambda_{y'z} = \frac{Zm - Zi}{Lim} = \frac{Zim}{Lim}$$

$$\lambda_{z'x} = \frac{Yij \cdot Zim - Yim \cdot Zij}{dz'} \quad \lambda_{z'y} = \frac{Xim \cdot Zij - Xij \cdot Zim}{dz'} \quad \lambda_{z'z} = \frac{Xij \cdot Yim - Xim \cdot Yij}{dz'}$$

Donde:

X(): son las coordenadas de los puntos respectivos de la banda,

L() y dz': la distancia de dichos puntos.

Se considera la adición de una matriz rotacional ficticia para evitar la singularidad de la misma, entonces para cualquier banda finita será:

$$K_{ij}^e{}_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} K_{ij}^e{}_{5 \times 5} & 0_{5 \times 1} \\ 0_{1 \times 5} & K_{0Z}{}_{1 \times 1} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Nótese que es una ampliación en una fila y una columna de la matriz $K_{ij}^e{}_{5 \times 5}$, y la matriz K_{0Z} es un número cualquiera, preferiblemente del orden de cualquiera de los términos no nulos de $K_{ij}^e{}_{5 \times 5}$.

$K_{ij}^l{}_{6 \times 6}$: son las matrices que forman a $K_{ij}{}_{12 \times 12}$

En base a las matrices de rigidez de cada banda en ejes locales, se transforma a ejes generales, para lo cual se utiliza el siguiente algoritmo:

Algoritmo: matriz de rigidez a ejes generales

Entrada: K11, K12, K21, K22

Salida: Kij en ejes generales (i,j=1 a 4)

Ingresar las matrices de transformación de ejes L_{ij} (dos matrices de rotación).

Aplicar: operaciones con las matrices de rotación

$$K_{11g} = L_{i1}' * K_{11f} * L_{i1};$$

$$K_{12g} = L_{i1}' * K_{12f} * L_{i1};$$

$$K_{21g} = L_{i1}' * K_{21f} * L_{i1};$$

$$K_{22g} = L_{i1}' * K_{22f} * L_{i1};$$

$$K_{33g2} = L_{i2}' * K_{11f} * L_{i2};$$

$$K_{31g2} = L_{i2}' * K_{12f} * L_{i2};$$

$$K_{13g2} = L_{i2}' * K_{21f} * L_{i2};$$

$$K_{11g2} = L_{i2}' * K_{22f} * L_{i2};$$

4.3.3. Ensamblaje de la matriz de rigidez:

En base de la matriz de rigidez de una banda finita (ec. 3.33) se realiza el ensamblaje con el apoyo de la figura 3.4:

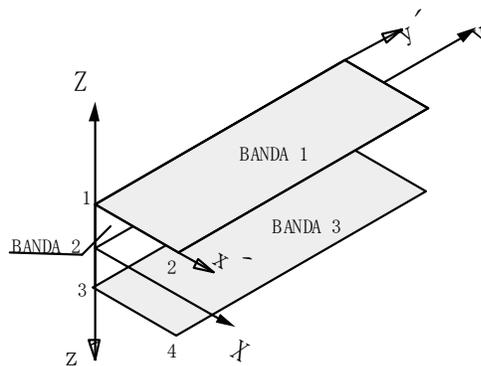


Figura 4.4 Estructura formada por tres bandas

La banda 1 y 3 son iguales hasta llevadas a sus ejes generales y la banda 2 es distinta debido a que al realizar su rotación a ejes generales cambian las coordenadas de los puntos, y la matriz de rigidez de cada banda será:

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 \end{bmatrix}_{12 \times 12} \Rightarrow \text{banda 1} \\ K_2 &= \begin{bmatrix} K_{33}^2 & K_{31}^2 \\ K_{13}^2 & K_{11}^2 \end{bmatrix}_{12 \times 12} \Rightarrow \text{banda 2} \\ K_3 &= \begin{bmatrix} K_{33}^3 & K_{34}^3 \\ K_{43}^3 & K_{44}^3 \end{bmatrix}_{12 \times 12} \Rightarrow \text{banda 3} \end{aligned} \right\} \quad (4.34)$$

Al ensamblar dichas matrices, hay que tener en cuenta los nudos que coinciden de cada banda y se procede sumando cada matriz K_{ij}^l que coincida en ese nudo (en base a la figura 4.4), hasta formar la matriz de rigidez de la estructura:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11}^1 + K_{11}^2 & K_{12}^1 & K_{13}^2 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & 0 & 0 \\ K_{31}^2 & 0 & K_{33}^2 + K_{33}^3 & K_{34}^3 \\ 0 & 0 & K_{43}^3 & K_{44}^3 \end{bmatrix}_{24 \times 24} \quad (4.35)$$

Si consideramos una viga cajón, aumentaría la matriz de rigidez de la banda 4, que es igual a la banda 2 y su ensamblaje sería:

$$K_4 = \begin{bmatrix} K_{44}^4 & K_{42}^4 \\ K_{24}^4 & K_{22}^4 \end{bmatrix}_{12 \times 12} \quad (4.36)$$

$$K = \begin{bmatrix} K_{11}^1 + K_{11}^2 & K_{12}^1 & K_{13}^2 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{22}^4 & 0 & K_{24}^4 \\ K_{31}^2 & 0 & K_{33}^2 + K_{33}^3 & K_{34}^3 \\ 0 & K_{42}^4 & K_{43}^3 & K_{44}^3 + K_{44}^4 \end{bmatrix}_{24 \times 24}$$

4.3.4. Vector de cargas nodales

Debido a que las cargas habituales en este tipo de bandas son las distribuidas a la superficie (x,y), estas cargas tendrán componente normal (qz) y tangenciales (qx, qy) entonces tenemos:

$$\begin{aligned} P_{iz}^l W_i^l + P_{ix}^l U_i^l + P_{iy}^l V_i^l &= \\ &= q_z(x, y) dA \cdot W(x, y) + q_x(x, y) dA \cdot U(x, y) \\ &+ q_y(x, y) dA \cdot V(x, y) \\ &= \int_A q_z(x, y) dA \cdot N_i(x) \text{sen } \alpha_l y W_i^l + \int_A q_x(x, y) dA \cdot N_i(x) \text{sen } \alpha_l y U_i^l \\ &+ \int_A q_y(x, y) dA \cdot N_i(x) \text{cos } \alpha_l y V_i^l \end{aligned}$$

Por lo tanto las cargas en cada eje serán (similar a la ec. 3.52):

$$\left. \begin{aligned} P_{ix}^l &= \int_A q_x(x, y) dA \cdot N_i(x) \text{sen } \alpha_l y = \int_0^a \int_0^b q_x(x, y) \cdot N_i(x) \text{sen } \alpha_l y dx dy \\ P_{iy}^l &= \int_A q_y(x, y) dA \cdot N_i(x) \text{cos } \alpha_l y = \int_0^a \int_0^b q_y(x, y) \cdot N_i(x) \text{cos } \alpha_l y dx dy \\ P_{iz}^l &= \int_A q_z(x, y) dA \cdot N_i(x) \text{sen } \alpha_l y = \int_0^a \int_0^b q_z(x, y) \cdot N_i(x) \text{sen } \alpha_l y dx dy \end{aligned} \right\} (4.37)$$

Los límites de las integrales están referidos a toda la banda, en caso de que sea solo una zona las integrales estarán delimitadas por éstas.

Algoritmo: vectores de cargas nodales

Entrada: a, b, c, l,q

Salida: vector de cargas (T, H)

Determinar las cargas en base a la ecuaciones de forma N1 y N2

i=1:5

T1i=int(q*N1*sin(c*y),x,0,a);

T1ir=int(T1i,y,0,b);

H1i=int(q*N2*sin(c*y),x,0,a);

H1ir=int(H1i,y,0,b);

end

APLICACIONES NUMERICAS

En este capítulo se muestra los resultados obtenidos de las dos teorías de banda finita aplicadas para el análisis de vigas rectangulares o de placas delgadas; estos son:

- Teoría de Kirchhoff
- Teoría de Reissner – Mindlin

La aplicación de las teorías depende de la relación que existe entre el espesor (t) de la placa o viga y la longitud de la viga (b). La primera teoría esta implementado para una relación menor a 0.1 y sus principales características se expusieron en el capítulo 3 (3.1) y los conceptos generales de la teoría de Reissner- Mindlin se trato la segunda parte del mismo capítulo (parte 3.2)

Para el estudio de dichas teorías se utilizaron aplicaciones algorítmicas (en lenguaje de MATLAB)siguiendo los pasos determinados en el capítulo 4 con las consideraciones establecidas para la teoría de Kirchhoff como para la de Reissner-Mindlin.

5.1. Análisis de las aplicaciones mediante las teorías de Kirchhoff y de Reissner-Mindlin

5.1.1. Problema de una viga rectangular C

La figura 5.1 representa una viga rectangular U, al cual se analiza con una carga aplicada uniformemente repartida en toda su longitud y con las siguientes características:

- Datos de la estructura:
 - Longitud $b=5\text{m}$.
 - Ancho $a=0.6\text{m}$
 - Espesor $t=0.01\text{m}$
 - Carga $q=150\text{ kg}$

- Propiedades del material:
 - Coeficiente $\nu=0.3$

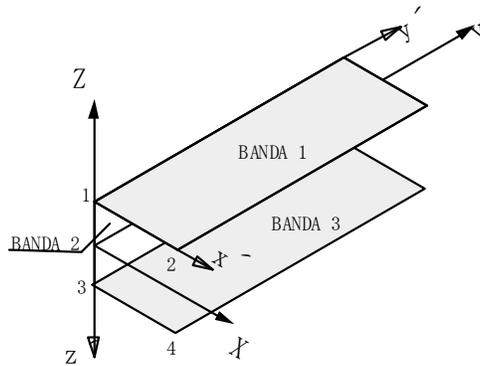


Figura 5.1 *Viga formada por tres bandas finas*

Para el análisis la viga se divide en tres bandas correspondientes a los lados de la viga, la banda se divide a lo ancho en dos nodos y a lo largo se utilizará hasta tres armónicos.

5.1.2. Resultados obtenidos

Los resultados del problema de la viga mediante la banda finita obtenidos al aplicar los métodos numéricos implementados se muestran en las figuras siguientes y en dichas figuras se muestran los desplazamientos obtenidos para las diferentes teorías.

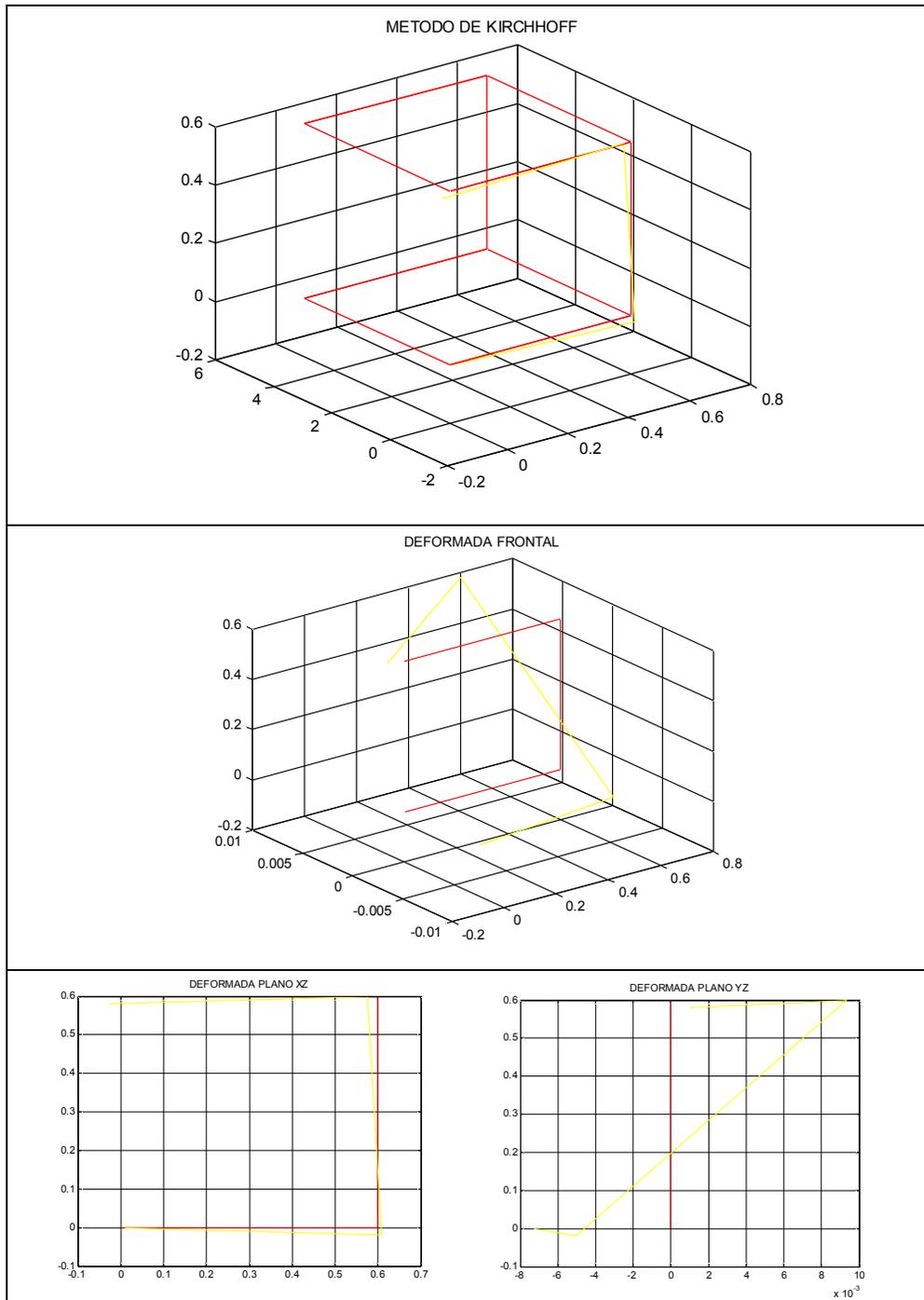


Figura 5.2 Gráfico de desplazamientos con la teoría de Kirchhoff con $l=1$ (armónico)

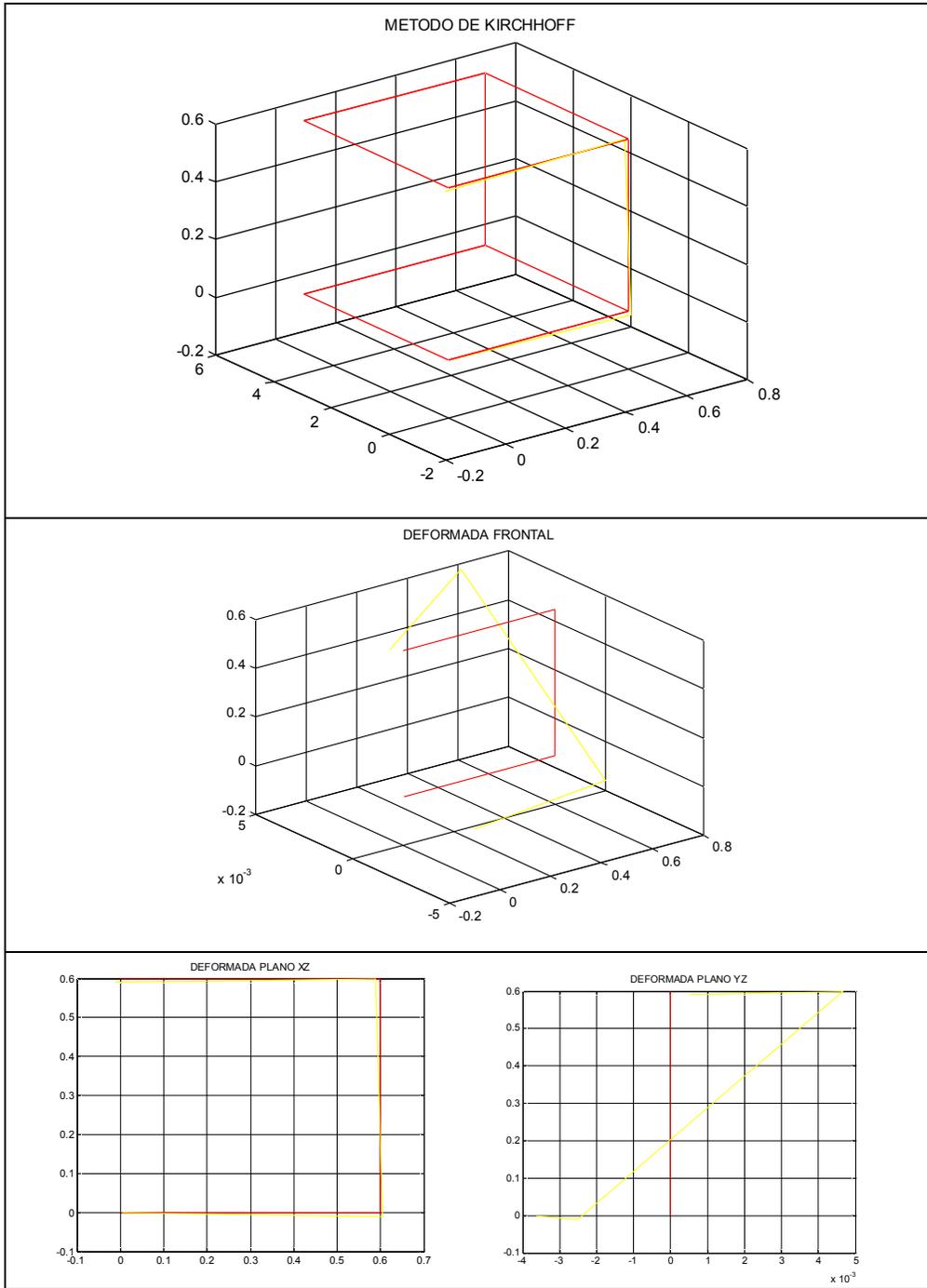


Figura 5.3 Gráfico de desplazamientos con la teoría de Kirchhoff con $l=2$ (armónico)

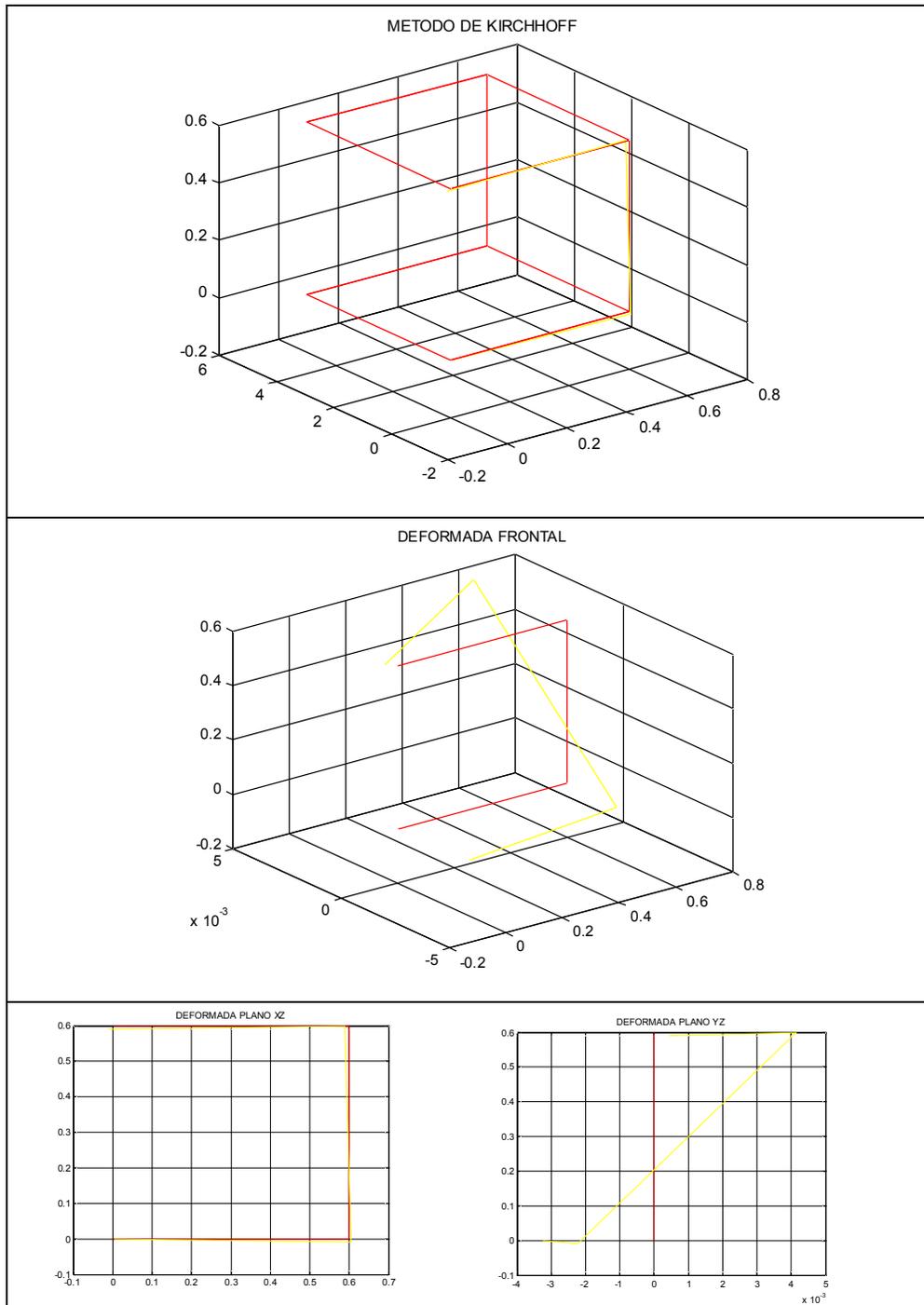


Figura 5.4 Gráfico de desplazamientos con la teoría de Kirchhoff con $l=3$ (armónico)

Datos del vector U para cada armónico:

L=1	L=2	L=3
-0,025635	-0,012818	-0,011394
0,001008	0,000504	0,000448
-0,019969	-0,009985	-0,008875
5,119804	2,559902	2,275469
-38,552223	-19,276111	-17,134321
-0,024842	-0,012421	-0,011041
0,009321	0,004661	0,004143
0,000000	0,000000	0,000000
13,240218	6,620109	5,884541
40,144745	20,072372	17,842109
0,009548	0,004774	0,004244
-0,005021	-0,002510	-0,002231
-0,019975	-0,009987	-0,008878
-11,404631	-5,702315	-5,068725
-39,329400	-19,664700	-17,479734
0,008777	0,004389	0,003901
-0,007275	-0,003638	-0,003233
0,000000	0,000000	0,000000
-19,914961	-9,957481	-8,851094
30,856308	15,428154	13,713915

Cuadro 5.1 Valores del vector U con la teoría de Kirchhoff con los 3 armónicos

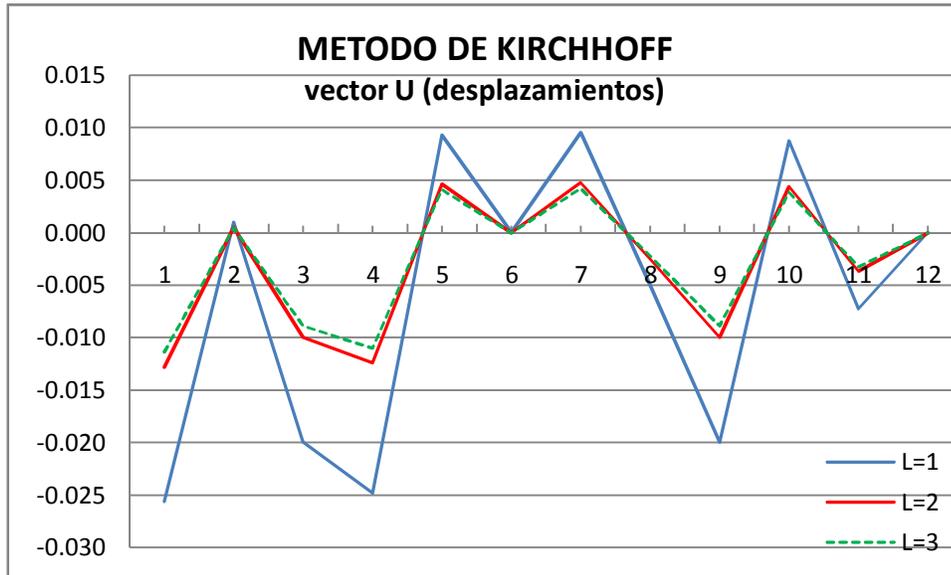


Figura 5.5 Gráfico del vector U con la teoría de Kirchoff con los tres armónicos

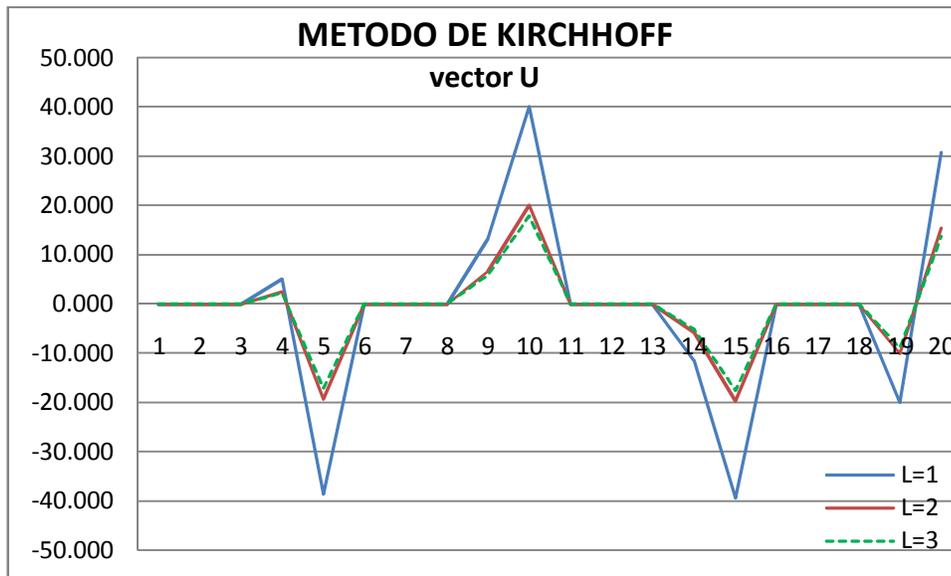


Figura 5.6 Gráfico del vector U (desplazamientos)

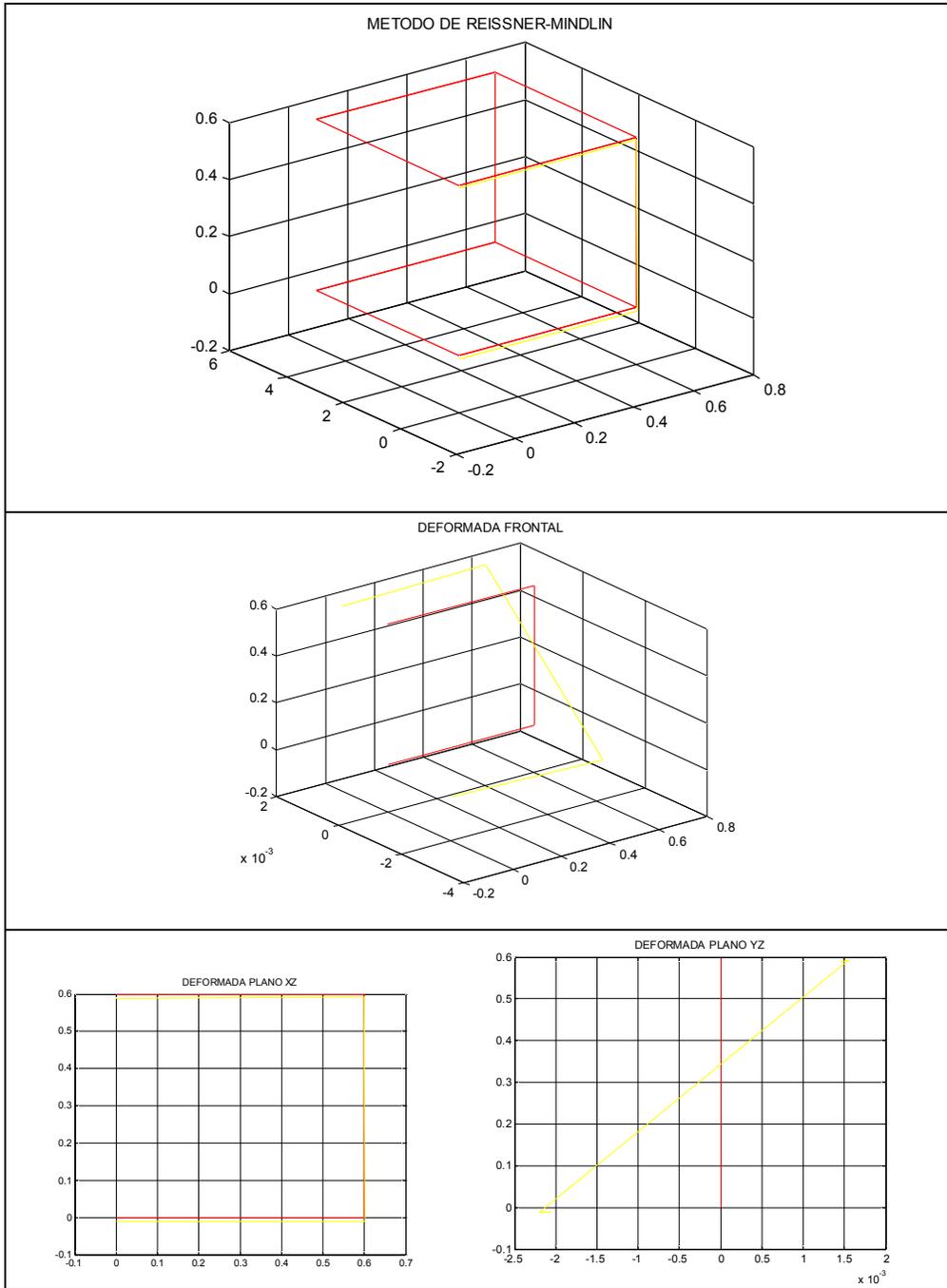


Figura 5.7 Gráfico de desplazamientos con la teoría de Reissner_Mindlin $l=1$

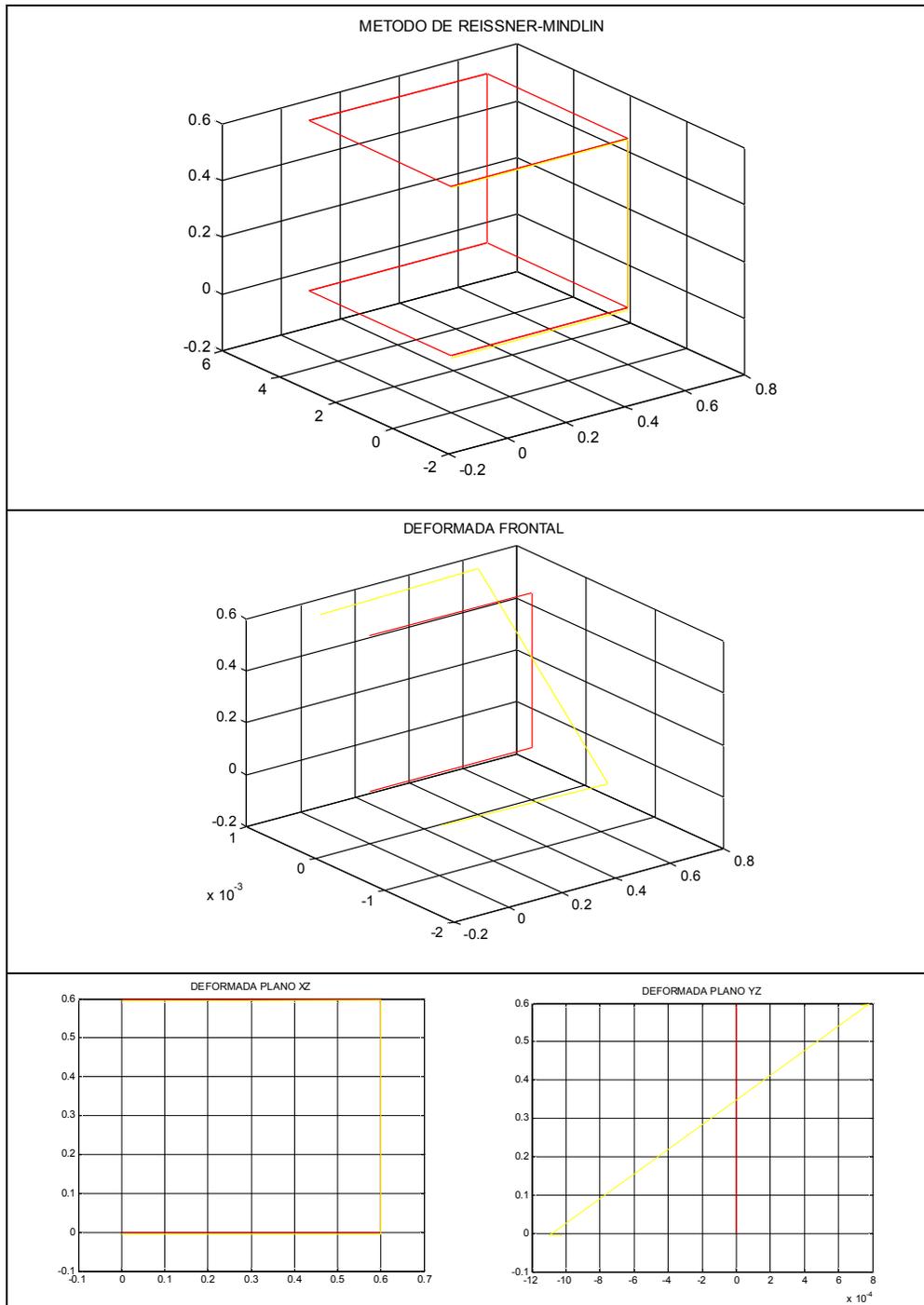


Figura 5.8 Gráfico de desplazamientos con la teoría de Reissner_Mindlin $l=2$

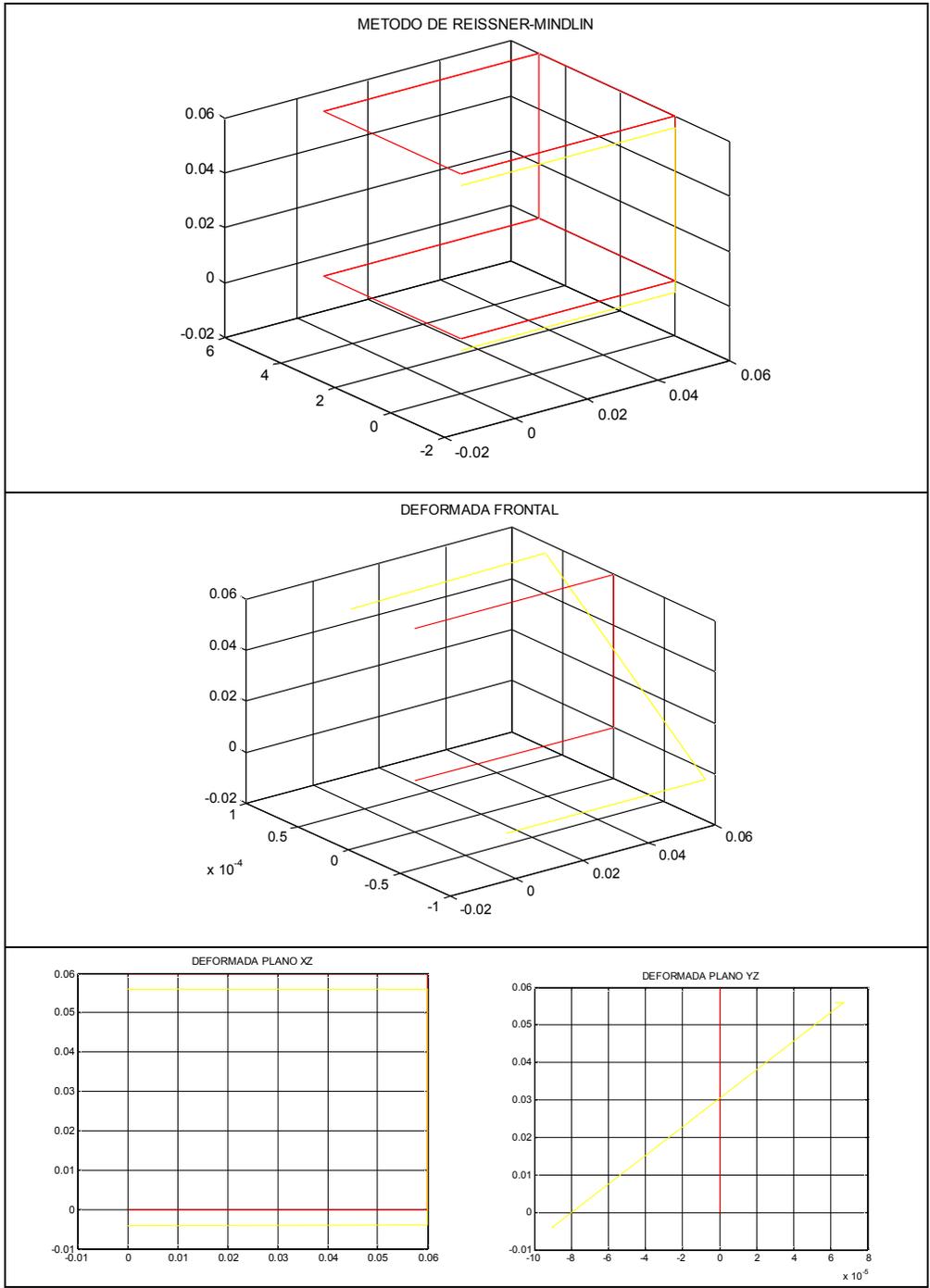


Figura 5.9 Gráfico de desplazamientos con la teoría de Reissner_Mindlin $l=3$

Datos del vector U con la teoría de Reissner-Mindlin:

L=1	L=2	L=3
-0,000993	-0,000496	-0,000133
0,001455	0,000727	0,000062
-0,010624	-0,005312	-0,004045
-0,008518	-0,004259	-0,004852
0,008756	0,004378	0,003255
-0,000740	-0,000370	-0,000132
0,001546	0,000773	0,000067
-0,007945	-0,003973	-0,003931
0,001206	0,000603	0,001121
0,003854	0,001927	0,001987
0,000838	0,000419	-0,000012
-0,002196	-0,001098	-0,000090
-0,010704	-0,005352	-0,004046
0,000581	0,000290	0,000743
-0,003211	-0,001605	-0,001419
0,000509	0,000255	-0,000013
-0,002045	-0,001022	-0,000090
-0,010866	-0,005433	-0,004090
0,000062	0,000031	0,000737
0,011632	0,005816	0,004477

Cuadro 5.2 Valores del vector U con la teoría de Reissner_Mindlin con los tres armónicos

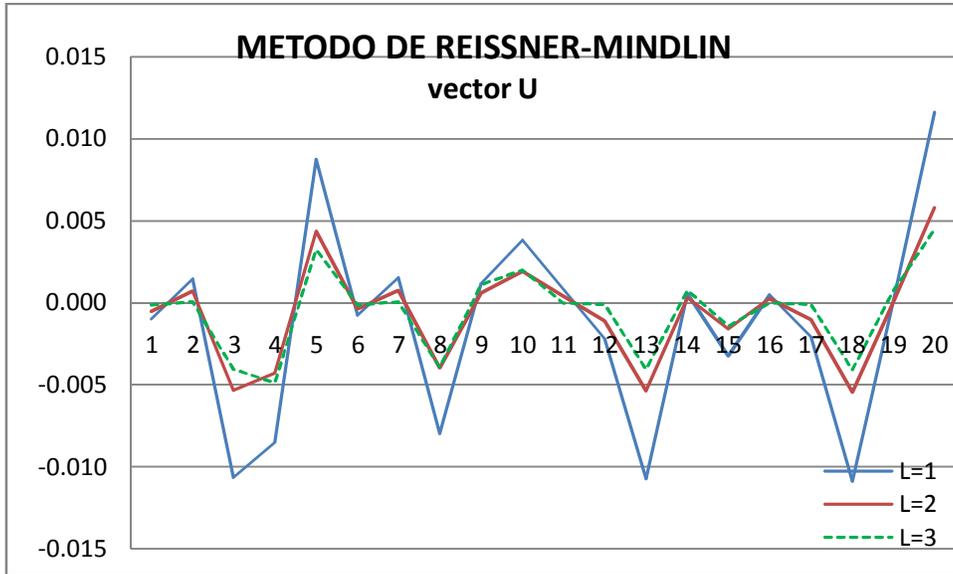


Figura 5.10 Gráfico del vector U con la teoría de Reissner-Mindlin

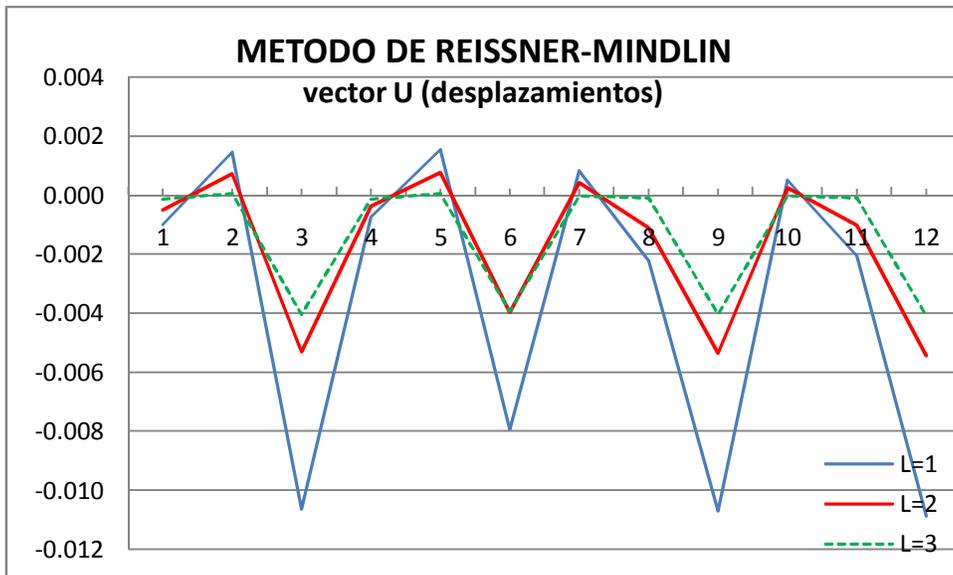


Figura 5.11 Gráfico del vector U (desplazamientos)

5.1.3. Análisis

El análisis será en la calidad de los resultados obtenidos en la aplicación de las teorías, considerando que el estudio de la teoría de Reissner-Mindlin se puede realizar a cualquier tipo de placa y no necesariamente a la consideraciones planteadas en los capítulos anteriores sobre la relación espesor/ancho medio; que para $\frac{t}{L} \leq 0.05$ o a veces $\frac{t}{L} < 0.1$ teoría de Kirchhoff y relación $\frac{t}{L} \geq 0.10$ para la teoría de Reissner-Mindlin, sin embargo, al contrario no es permitido aplicar el método de la banda finita con la teoría de Kirchhoff en la relación $\frac{t}{L} \geq 0.10$

En base a la aplicación de los métodos numéricos se obtuvieron los siguientes desplazamientos, como se indica

K_L=1	K_L=2	K_L=3	R_L=1	R_L=2	R_L=3
-0,025635	-0,012818	-0,011394	-0,000993	-0,000496	-0,000133
0,001008	0,000504	0,000448	0,001455	0,000727	0,000062
-0,019969	-0,009985	-0,008875	-0,010624	-0,005312	-0,004045
-0,024842	-0,012421	-0,011041	-0,000740	-0,000370	-0,000132
0,009321	0,004661	0,004143	0,001546	0,000773	0,000067
0,000000	0,000000	0,000000	-0,007945	-0,003973	-0,003931
0,009548	0,004774	0,004244	0,000838	0,000419	-0,000012
-0,005021	-0,002510	-0,002231	-0,002196	-0,001098	-0,000090
-0,019975	-0,009987	-0,008878	-0,010704	-0,005352	-0,004046
0,008777	0,004389	0,003901	0,000509	0,000255	-0,000013
-0,007275	-0,003638	-0,003233	-0,002045	-0,001022	-0,000090
0,000000	0,000000	0,000000	-0,010866	-0,005433	-0,004090

Cuadro 5.3 Desplazamientos obtenidos con las teorías de Kirchhoff y de Reissner_Mindlin

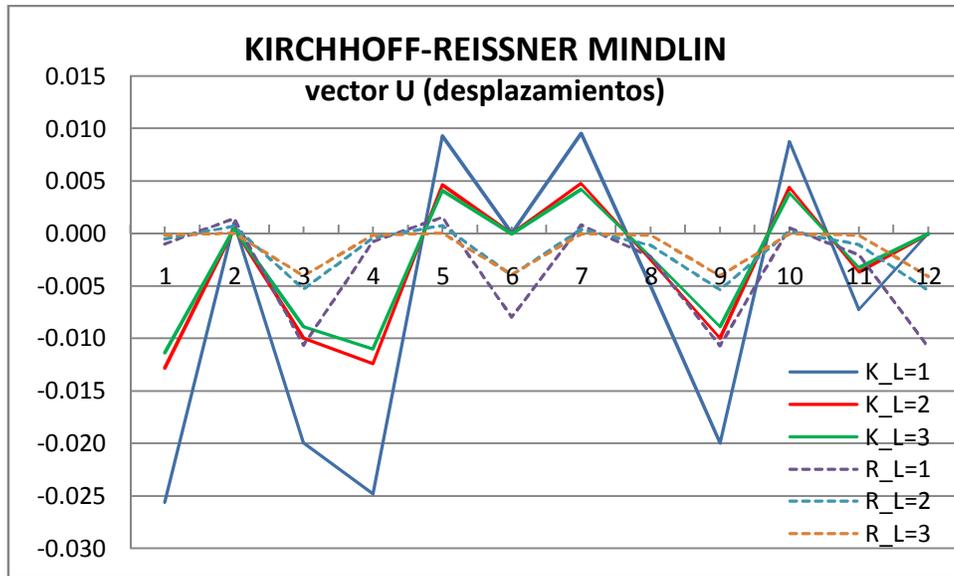


Figura 5.12 Gráfico del vector U (desplazamientos) con la dos teorías

El estudio se centra en los desplazamientos producidos en cualquier punto de la banda finita, en especial en el eje vertical.

5.1.4. Problema para una viga rectangular cerrada:

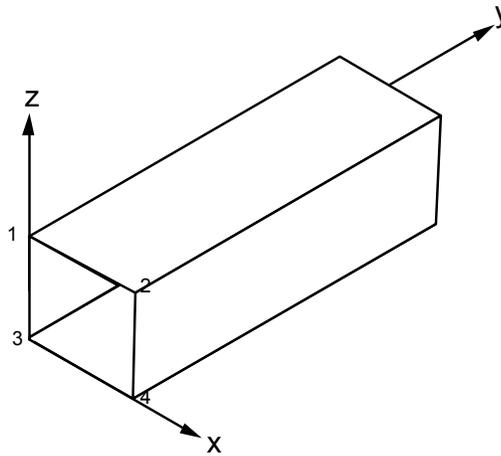


Figura 5.13 Estructura formada por cuatro bandas

Considerando los mismos datos del problema anterior, se tiene:

- Datos de la estructura:
 - Longitud $b=5\text{m}$.
 - Ancho $a=0.6\text{m}$
 - Espesor $t=0.01\text{m}$
 - Carga $q=150\text{ kg}$

- Propiedades del material:
 - Coeficiente $\nu=0.3$

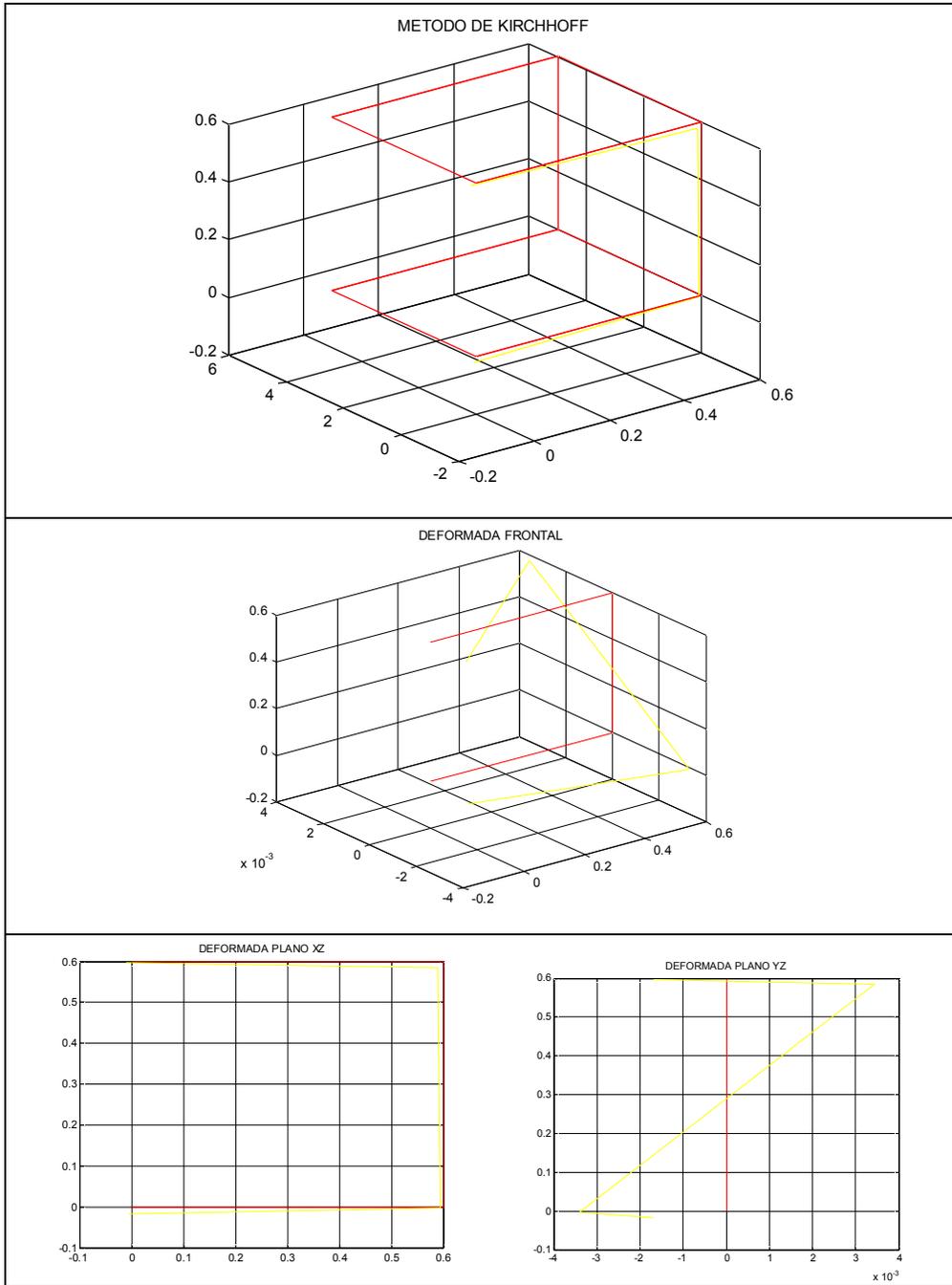


Figura 5.14 Gráfico de desplazamientos con la teoría de Kirchhoff y $l=1$

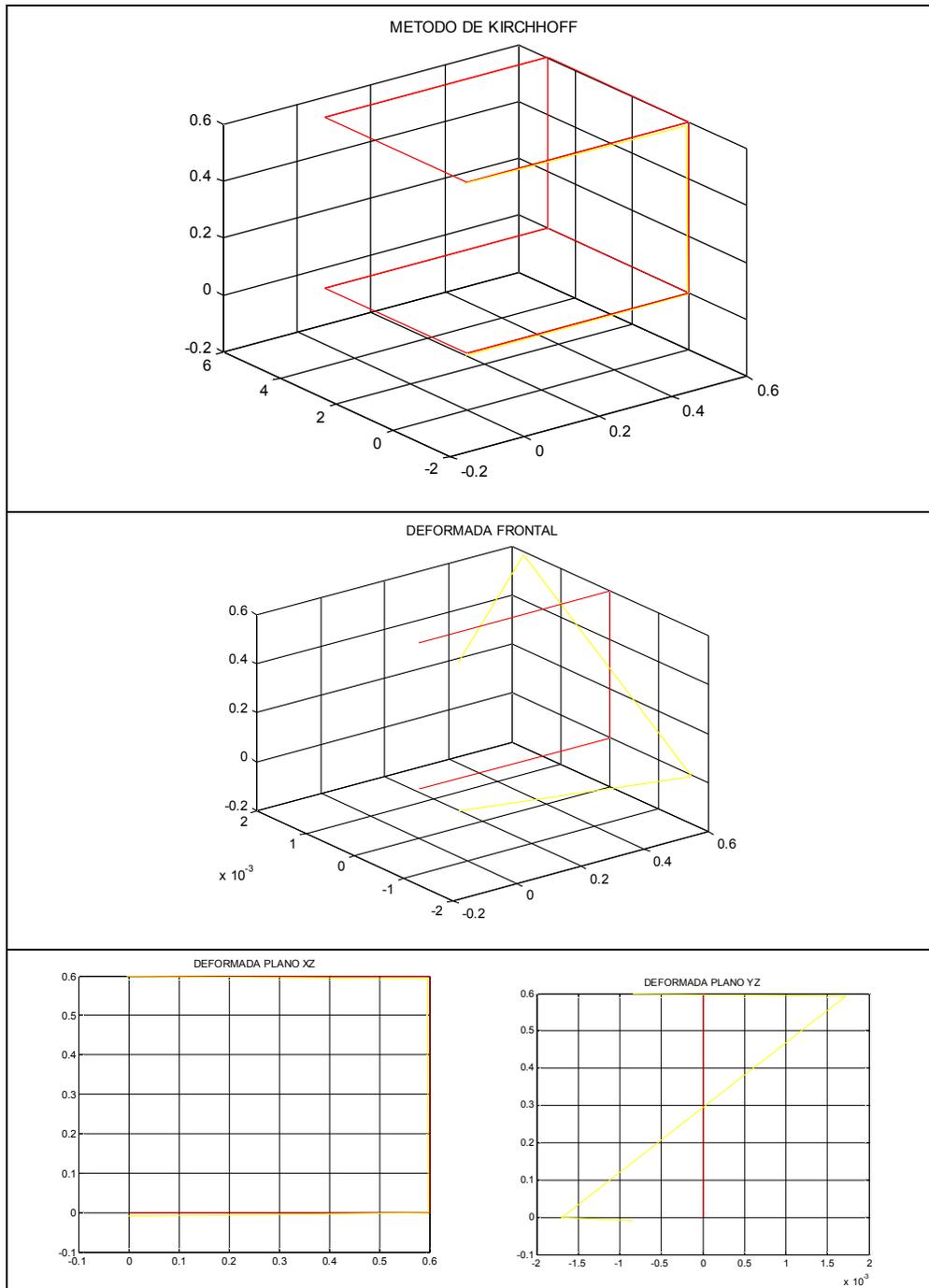


Figura 5.15 Gráfico de desplazamientos con la teoría de Kirchhoff y $l=2$

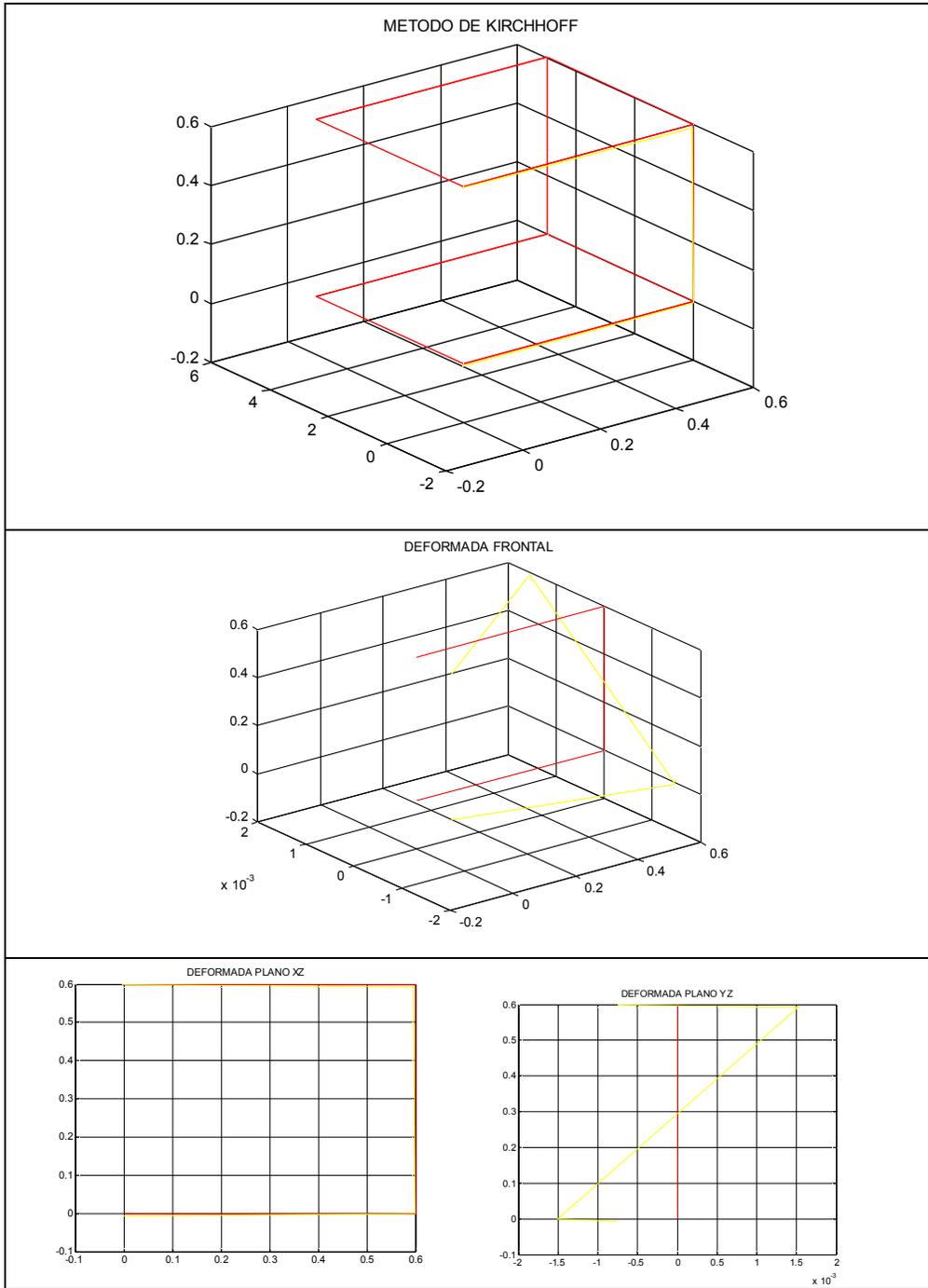


Figura 5.16 Gráfico de desplazamientos con la teoría de Kirchhoff y $l=3$

Se analizaron los datos obtenidos y se determinó el siguiente gráfico

L=1	L=2	L=3
-0,012482	-0,006241	-0,005547
-0,001684	-0,000842	-0,000748
-0,002846	-0,001423	-0,001265
4,391908	2,195954	1,951959
-31,355559	-15,677780	-13,935804
-0,012280	-0,006140	-0,005458
0,003435	0,001717	0,001527
-0,016265	-0,008132	-0,007229
4,210110	2,105055	1,871160
29,261229	14,630615	13,004991
-0,006649	-0,003325	-0,002955
-0,003396	-0,001698	-0,001509
-0,002648	-0,001324	-0,001177
-3,596071	-1,798035	-1,598254
-32,510081	-16,255041	-14,448925
-0,006880	-0,003440	-0,003058
-0,001682	-0,000841	-0,000747
-0,016567	-0,008283	-0,007363
-3,749705	-1,874853	-1,666536
29,151843	14,575921	12,956375

Cuadro 5.4 Valores del vector U de una viga cerrada con la teoría de Kirchhoff con los 3 armónicos

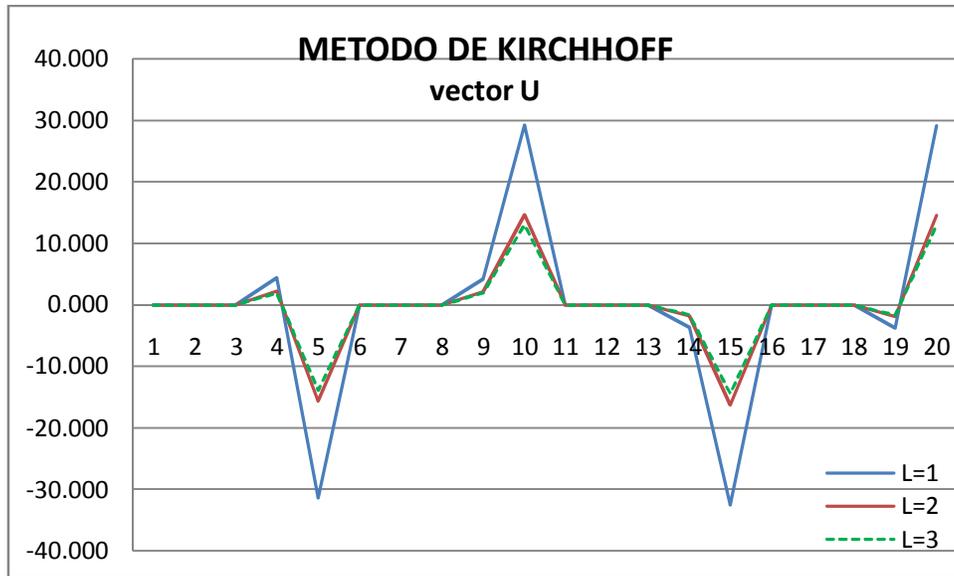


Figura 5.17 Gráfico del vector U con los tres armónicos de una viga cerrada

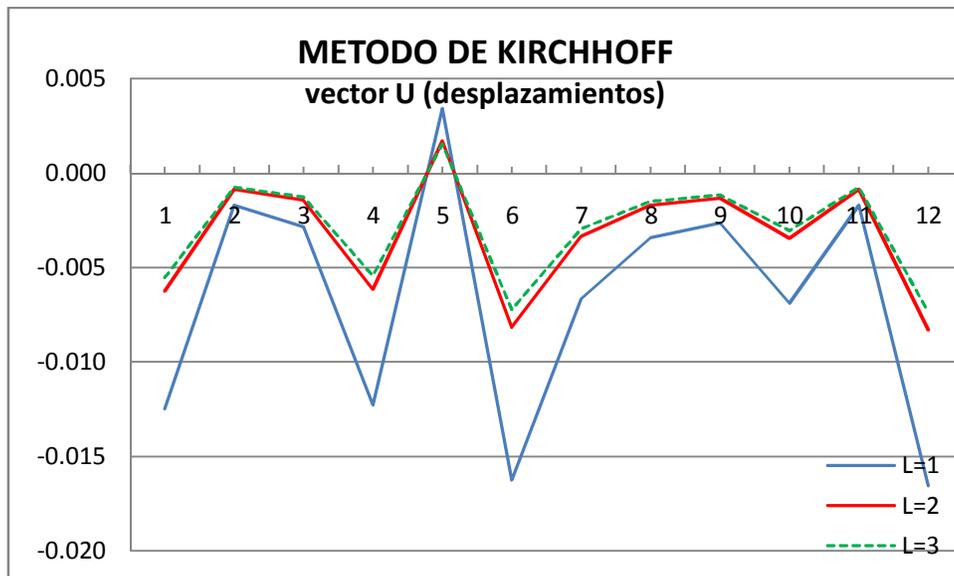


Figura 5.18 Gráfico del vector U (desplazamientos) con los tres armónicos de una viga cerrada

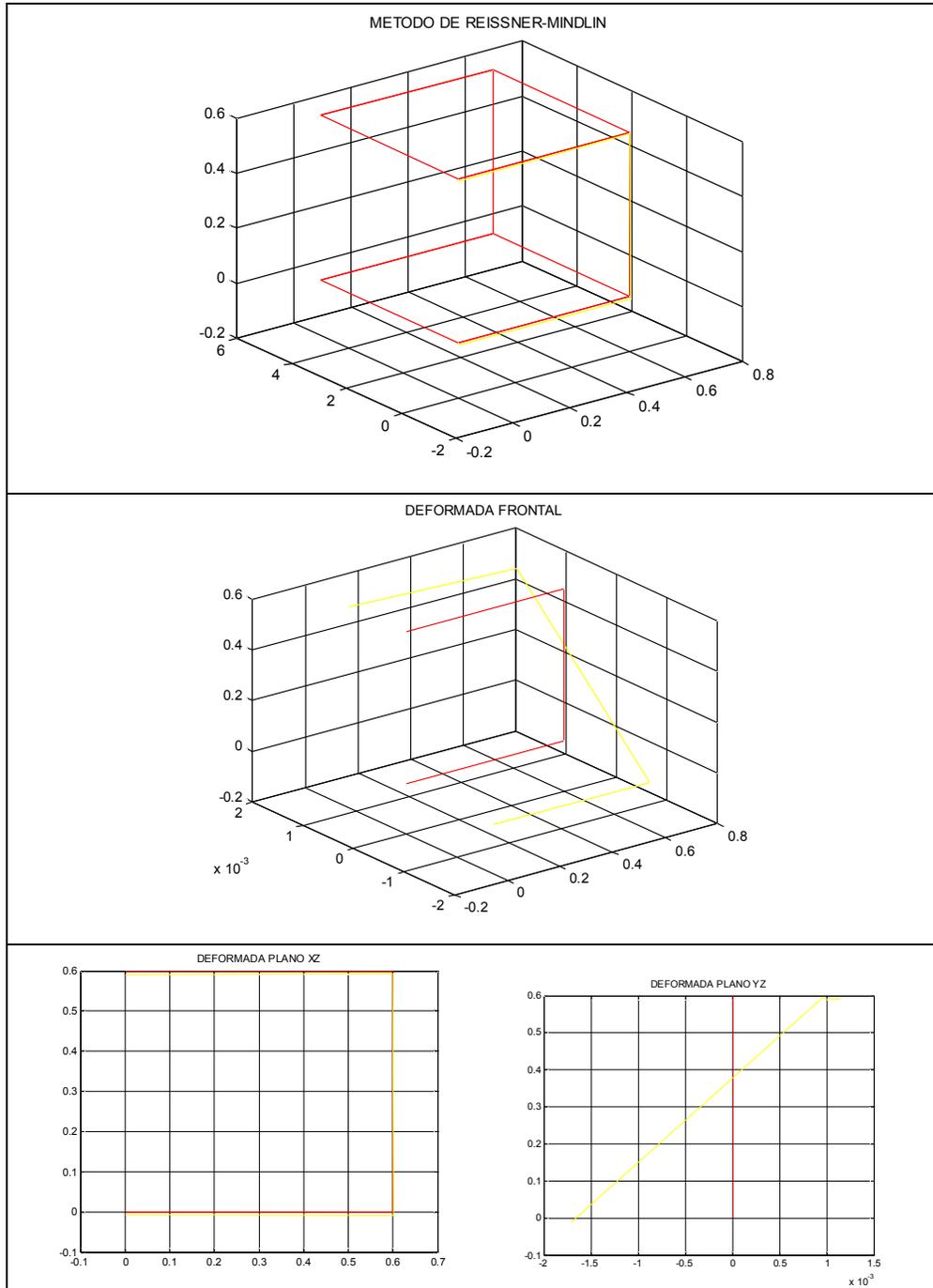


Figura 5.19 Gráfico de desplazamientos de una viga cerrada con la teoría de Reissner_Mindlin y $l=1$

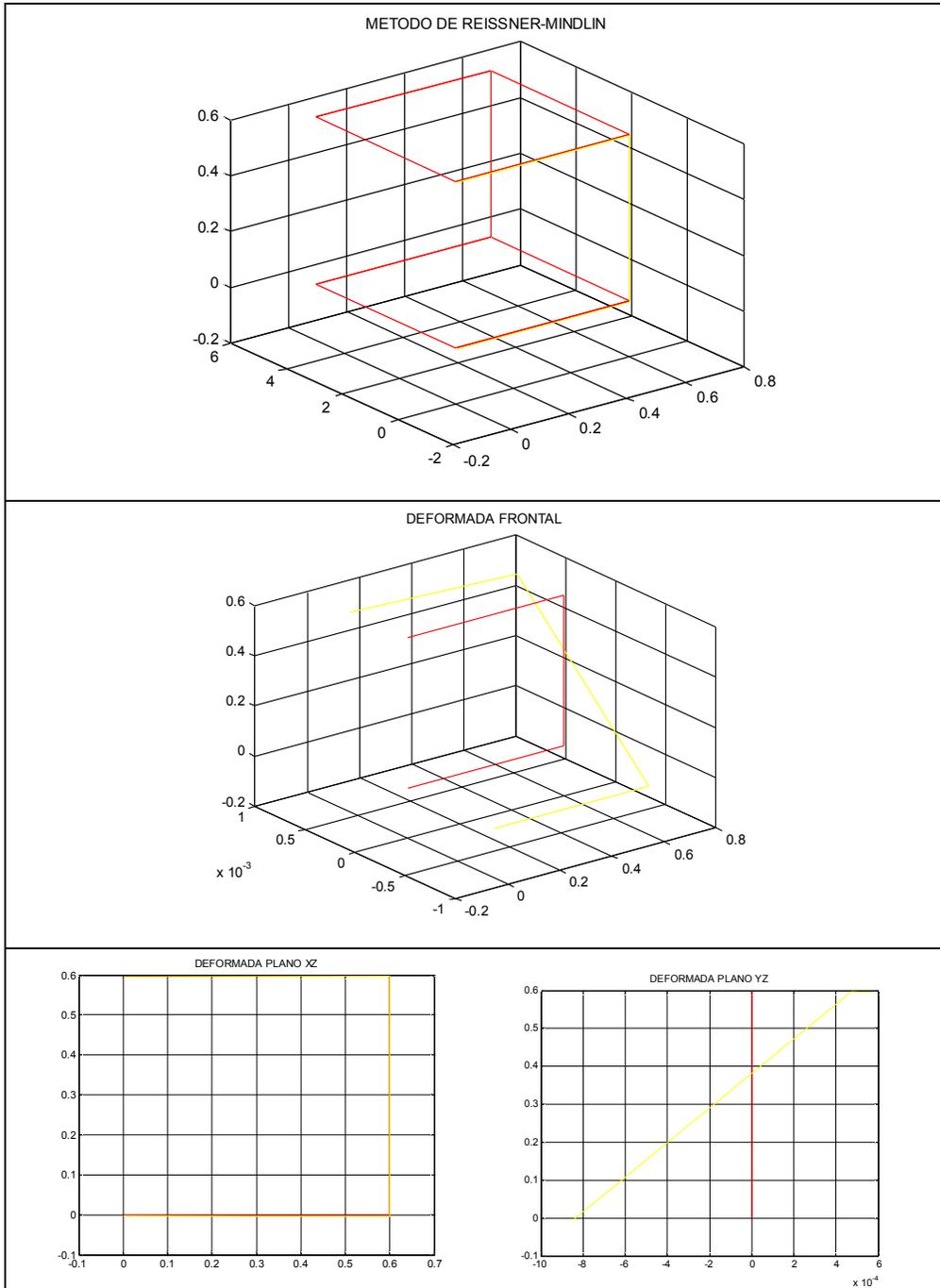


Figura 5.20 Gráfico de desplazamientos de una viga cerrada con la teoría de Reissner_Mindlin y $l=2$

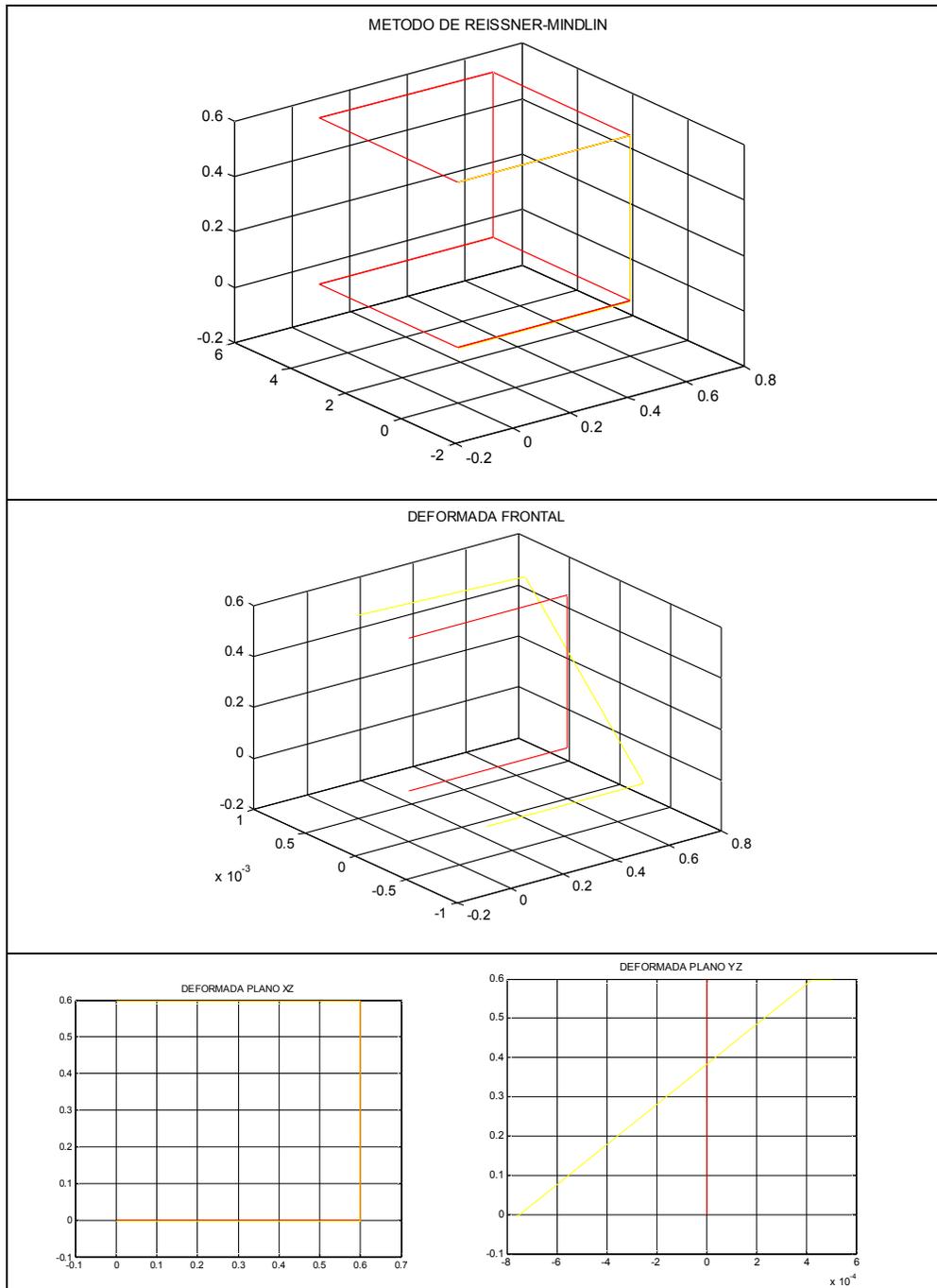


Figura 5.21 Grafico de desplazamientos de una viga cerrada con la teoria de Reissner_Mindlin y $l=3$

Datos del vector U para los diferentes armónicos:

L=1	L=2	L=3
-0,000020	-0,000010	-0,000009
0,001138	0,000569	0,000506
-0,008288	-0,004144	-0,003684
-0,003785	-0,001893	-0,001682
0,007756	0,003878	0,003447
-0,000076	-0,000038	-0,000034
0,000946	0,000473	0,000420
-0,007083	-0,003542	-0,003148
0,002188	0,001094	0,000973
-0,000262	-0,000131	-0,000116
0,000864	0,000432	0,000384
-0,001697	-0,000849	-0,000754
-0,008504	-0,004252	-0,003780
0,001956	0,000978	0,000869
-0,000523	-0,000262	-0,000233
0,000838	0,000419	0,000372
-0,001717	-0,000859	-0,000763
-0,007042	-0,003521	-0,003130
-0,008101	-0,004051	-0,003600
0,007384	0,003692	0,003282

Cuadro 5.5 Valores del vector U de una viga cerrada con la teoría de Reissner-Mindlin con los 3 armónicos

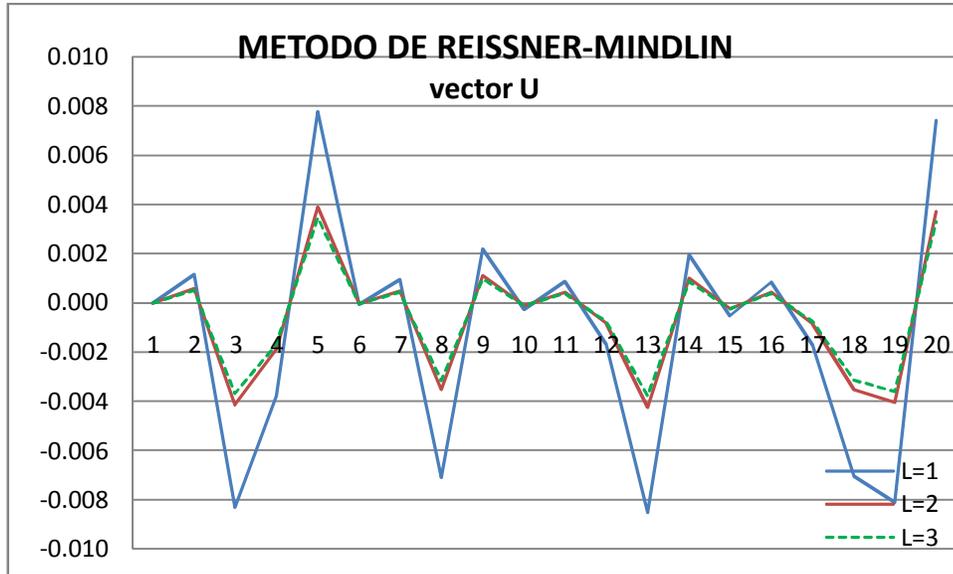


Figura 5.22 Gráfico de desplazamientos de una viga cerrada con la teoría de Reissner_Mindlin y $l=3$

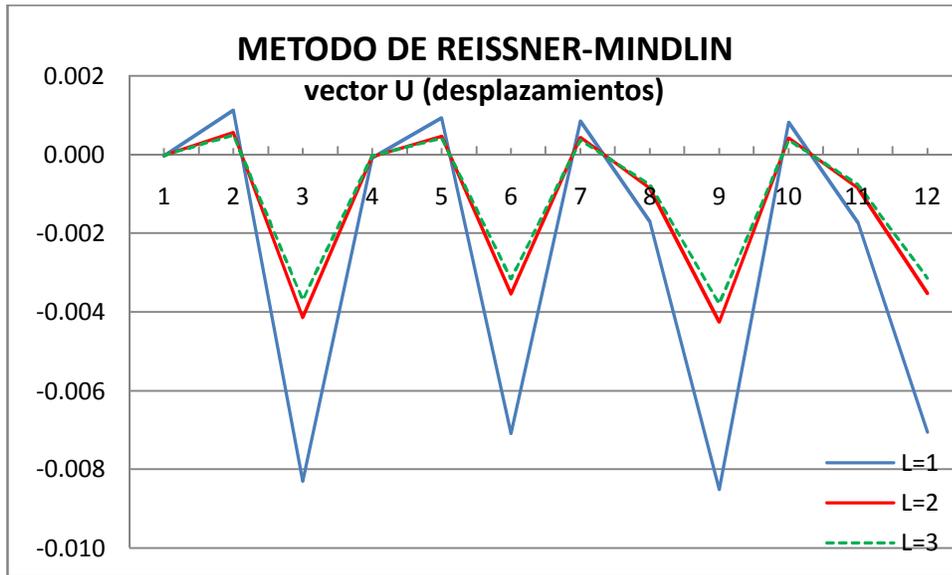


Figura 5.23 Gráfico de desplazamientos de una viga cerrada con la teoría de Reissner_Mindlin y $l=3$

Cuadro comparativo de los valores del vector U (desplazamientos) con las dos teorías aplicadas:

K_L=1	K_L=2	K_L=3	R_L=1	R_L=2	R_L=3
-0,012482	-0,006241	-0,005547	-0,000020	-0,000010	-0,000009
-0,001684	-0,000842	-0,000748	0,001138	0,000569	0,000506
-0,002846	-0,001423	-0,001265	-0,008288	-0,004144	-0,003684
-0,012280	-0,006140	-0,005458	-0,000076	-0,000038	-0,000034
0,003435	0,001717	0,001527	0,000946	0,000473	0,000420
-0,016265	-0,008132	-0,007229	-0,007083	-0,003542	-0,003148
-0,006649	-0,003325	-0,002955	0,000864	0,000432	0,000384
-0,003396	-0,001698	-0,001509	-0,001697	-0,000849	-0,000754
-0,002648	-0,001324	-0,001177	-0,008504	-0,004252	-0,003780
-0,006880	-0,003440	-0,003058	0,000838	0,000419	0,000372
-0,001682	-0,000841	-0,000747	-0,001717	-0,000859	-0,000763
-0,016567	-0,008283	-0,007363	-0,007042	-0,003521	-0,003130

Cuadro 5.6 Valores del vector U (desplazamientos) de una viga cerrada con las dos teorías y con los 3 armónicos

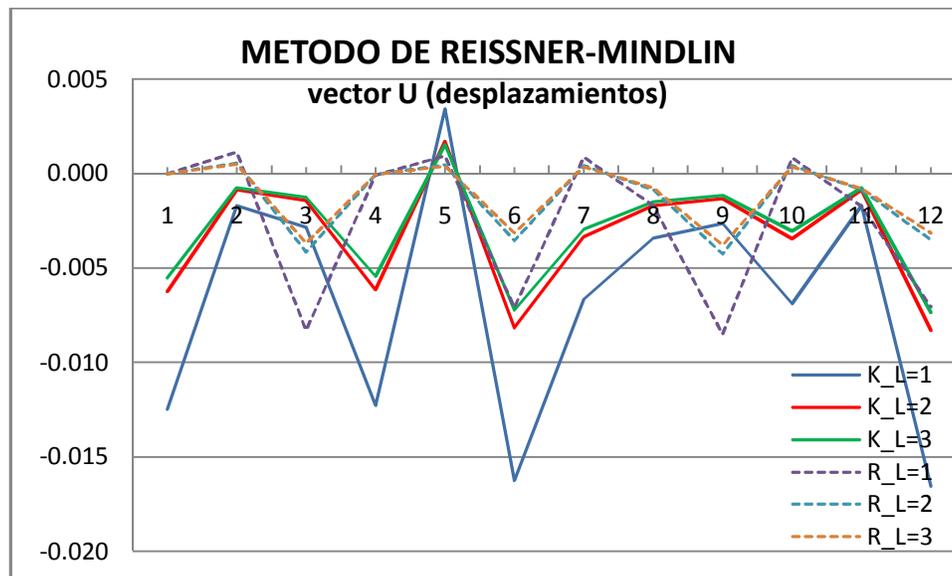


Figura 5.24 Gráfico de desplazamientos de una viga cerrada con las dos teorías y los tres armónicos

6

CONCLUSIONES

La nueva formulación con el método de la banda finita con las teorías de Kirchhoff y de Reissner – Mindlin para el análisis de estructuras rectangulares llega a cumplir con los objetivos trazados, de lo cual se plantea las siguientes conclusiones:

- Que el método de la banda finita, a pesar de ser un método semi-analítico que desarrolla en series trigonométricas o de Fourier el desplazamiento en una dirección, puede ser un modelo para abordar una estructura de viga cajón de secciones C o cerrada.
- El tamaño del sistema de ecuaciones del problema se reduce con la flecha como una variable y con una discretización en bandas finitas y también depende de las condiciones de contorno, ya que estas son determinados por series que satisfagan, a priori, dichas condiciones de contorno en los extremos de la banda.
- Las condiciones de contorno son fundamentales en la determinación de las matrices. Y la aplicación de las mismas series trigonométricas utilizadas en el campo de los desplazamientos es la mejor alternativa para el cumplimiento de la condición de contorno, en este caso simplemente apoyada.
- Se puede decir que para otras condiciones de contorno se necesitará en cada caso funciones en series diferentes.
- El comportamiento del método es aceptable, en el caso de placas o láminas rectangulares delgadas, vigas de cajón y otros elementos como cáscaras y en estructuras como puentes, analizando el detalle de considerar o no el cortante en elementos de espesor pequeños o mínimos pues en el análisis numérico la matriz de rigidez final de la estructura podría resultar singular, existiendo infinitas soluciones y además

considerando que la Teoría de Reissner – Mindlin es aplicada para todo tipo de placa, no así la teoría de Kirchhoff.

- Se analizó para vigas con secciones laminares con las dos teorías y con la relación espesor anchura menor a 0.5. No se consideró el análisis con las dos teorías para relaciones mayores, ya que la distorsión de la sección aumenta con la deformación de manera que se pierde la ortogonalidad entre la normal al plano medio y el plano medio y la teoría de Reissner – Mindlin representa una mejor aproximación de la deformación real de la placa.
- El campo de deformaciones en la teoría de Kirchhoff se reduce notablemente en base a que las deformaciones tangenciales que γ_{xz} y γ_{yz} **son nulas**, no es así en el caso de la teoría de Reissner-Mindlin esto debido a la cuarta hipótesis y en base a la tercera hipótesis conduce que el trabajo de **deformación $\sigma_z \epsilon_z$ sea nulo**, por lo que se prescinde de la deformación ϵ_z en el análisis. Por consiguiente el campo de deformaciones está compuesta por la parte membranal y la flexión pura para Kirchhoff y además de la flexión por cortante para la teoría de Reissner- Mindlin.
- El comportamiento del método es aceptable en el caso de vigas de cajón C o cerradas, ya que su convergencia es rápida dependiendo del número de armónicos a ser analizado.

BIBLIOGRAFIA

1. TIMOSHENKO – GOUDIER, “Theory of Elasticity”.
2. TIMOSHENKO – WOINOWSKY Krieger, “Theory of Plates and Shells”
3. ZIENKIEWICZ, O. C y TAYLOR, R. L., “El Método de los Elementos Finitos”, Primera Edición, Vol. I y II, Editorial Mc Graw – Hill, 1995.
4. OÑATE, Eugenio, “Cálculo de Estructuras por el Método de los Elementos Finitos”, Editorial CIMNE, Barcelona, España, 1995.
5. FORNONS, José María, “El Método de los Elementos Finitos”, Primera Edición, Editorial de la Universidad Politécnica de Catalunya, Bracelona, 1994.
6. JOVICEVIC, J. y OÑATE, E., “Anàlisis of Beams and Shells Using a Rotation –Free Finite Element-Finite Volume Formulation, Monograph CIMNE nº 43, 1999.

Direcciones electrónicas:

7. Placas delgadas:
[http://upcommons.upc.edu/pfc/bitstream/2099.1/3392/14/40891-... -](http://upcommons.upc.edu/pfc/bitstream/2099.1/3392/14/40891-...)
upcommons.upc.edu/pfc/bitstream/2099.1/3392/.../40891-12.pdf
<http://upcommons.upc.edu/pfc/bitstream/2099.1/3392/6/40891-6...>
8. *Inestabilidad*:
www.raco.cat/index.php/RevistaMetodosNumericos/article/.../101212

9. Ordenadores:

http://ropdigital.ciccp.es/public/detalle_articulo.php?regis...

SOFTWARE UTILIZADO:

- MATLAB, The Language of Technical Computing