Mecánica Racional
Dinámica

Julio Verdugo Cabrera

Universidad Politécnica Salesiana

Mecánica Racional: Dinámica

Julio Verdugo Cabrera

Mecánica Racional: Dinámica

ABYA YALA | UNIVERSIDAD POLITÉCNICA SALESIANA

2017

MECÁNICA RACIONAL: DINÁMICA

1ra edición:	Universidad Politécnica Salesiana Av. Turuhuayco 3-69 y Calle Vieja Casilla: 2074 P.B.X.: (+593 7) 2050000 Fax: (+593 7) 4088958 e-mail: rpublicas@ups.edu.ec www.ups.edu.ec Cuenca-Ecuador
	Área de Ciencia y Tecnología CARRERA DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA Y AUTOMATIZACIÓN Grupo de Investigación de Inteligencia Artificial y Tecnologías de Asistencia (GI-IA-TA-)
Revisor-colaborador:	Luis Enrique González Delgado
Diagramación, diseño y edición:	Editorial Universitaria Abya-Yala Quito-Ecuador
Derechos de autor: Depósito legal:	052032 005964
ISBN UPS:	978-9978-10-277-0
Tiraje:	300 ejemplares
Impresión:	Editorial Universitaria Abya-Yala Quito-Ecuador

Impreso en Quito-Ecuador, septiembre de 2017

Publicación arbitrada de la Universidad Politécnica Salesiana

Índice general

Prefacio

La mecánica racional o mecánica clásica nace con el planteamiento de Isacc Newton (1686) en su libro *Principios Filosóficos de las Ciencia*s en el que mediante un modelo matemático basado en las ecuaciones diferenciales, estudia el movimiento de los cuerpos, crea magnitudes que tratan de explicar los fenómenos naturales que conduce al movimiento, magnitudes que si bien aparecen como concepciones abstractas podemos asegurar que realmente existen en la naturaleza y han dado lugar al desarrollo científico y tecnológico del mundo hasta ahora.

Los estudios realizados en el siglo XVIII y XIX por los grandes matemáticos han contribuido para que esta ciencia sea la base del estudio matemático de los diferentes casos de movimiento. La concepción de que todo movimiento es producido por la magnitud Fuerza y partiendo de esas fuerzas se puede explicar muchos fenómenos naturales han elevado a la humanidad a un desarrollo realmente asombroso.

El objetivo de este texto es sistematizar el conocimiento de la ciencia , partiendo de lo mas básico y elemental del movimiento hasta llegar al análisis del movimiento complejo, organizando los conceptos de acuerdo a lo que consideramos indispensable en un programa básico de Dinámica para los estudiantes de Ingeniería.

El planteamiento de los temas tratados se realiza exponiendo de tal manera que el estudiante tome conciencia de lo que llamamos ciencia no es una verdad absoluta, sino planteamiento teórico propuesto por el hombre en su afán de explicar los fenómenos naturales y que deben ser comprobados y analizados bajo otras suposiciones o criterios nacidos de la investigación de los fenómenos en estudio.

La aplicación del modelo matemático a problemas teóricos tiene el propósito de generar en el estudiante deseos de seguir investigando bajo sus propias concepciones. Los problemas teóricos han sido tomados del texto que fueron elaborados, por autores muy reconocidos como la mecánica de Symon, Dinámica de Housner y Hudson, y otros textos muy recomendables que constan en la bibliografía.

Es importante recalcar que se usa en el texto solo el Sistema Internacional de unidades (SI) o sistema (MKS) a fin de insistir en su conocimiento y aplicación eliminando otros sistemas no aceptados actualmente en muchos países y con el afán de llagar a homogeneizar su utilización.

Introducción

La mecánica racional es la ciencia que de alguna manera trata de explicar los fenómenos naturales basándose en la razón del hombre. Es una ciencia que estudia las magnitudes, llamando magnitud a todo ente que pueda ser comparado, valorado, es decir, que pueda ser medido.

La mecánica racional comprende el estudio de la estática y de la dinámica.

La estática aparece desde la época de los filósofos griegos, trata de análisis de los cuerpos en reposo, si bien es una ciencia que se estudia independiente, en si misma, es parte de la dinámica ya que es un caso particular del movimiento en general de los cuerpos.

La dinámica es el estudio o análisis del movimiento en general de los cuerpos y de las causas que lo producen. Su estudio es consustancial a la existencia del mismo hombre y aparece como una ciencia desde 1500 con Galileo y Newton que crean o proponen conceptos que permitirán predeterminar hechos físicos de la naturaleza y que se les llama ciencia.

Cuando la dinámica se ocupa solo del movimiento y su geometría se llama cinemática, y en general cuando estudia el movimiento y sus causas se llama dinámica, y puede decirse que la dinámica incluye la cinemática.

El presente texto propone un estudio que va desde el concepto de magnitud hasta llegar a los conceptos y modelos matemáticos de la dinámica de Lagrange de la siguiente manera:

1. Dinámica de la partícula o cuerpos sin rotación.

2. Dinámica de un sistema finito de partículas.

3. Dinámica de sólido rígido, considerando la traslación y rotación del cuerpo.

4. Dinámica de sólido deformable: fluidos.

Capítulo 1

Cinemática de la partícula

1.1. Magnitudes

En la naturaleza existen o percibimos la realidad mediante sensaciones, las cuales pueden ser o no ser comparables entre si. El dolor percibimos que existe pero no es posible comparar dolores, en cambio la longitud por ejemplo, es una sensación o percepción que puede ser comparable con otra como más grande igual o más pequeña. Los entes de la naturaleza que pueden ser comparados entre sí se llaman magnitudes.
La magnitud es todo ente comparable entre sí, es decir, comparar con otra de la misma naturaleza corresponde al arte de medir (medir es comparar).

Luego todo ente medible es una magnitud, y la física en general es la ciencia que trata de las magnitudes o que busca las magnitudes en la naturaleza.
Para comparar o medir se define una magnitud de la misma especie que se llama unidad. La unidad debe ser accesible invariable y universal, es decir que sirva para todo, y conocido por todos.

1.2. Magnitudes básicas

La dinámica propuesta por Isacc Newton en el año de 1654 parte de aceptar la existencia en la naturaleza de tres magnitudes fundamentales: la longitud, el tiempo y la masa. Estas magnitudes existen, y son invariantes, es decir, iguales para todo observador, y en cierta manera justifican la existencia del ser o de la persona. No es posible definirlas y aceptamos su existencia.

1.2.1. La longitud

Crea el espacio en el que existimos y percibimos. Un espacio de 3 dimensiones: alto, ancho y una profundidad, creado por la visión de los dos ojos del hombre. Consideramos por lo tanto la existencia de un espacio tridimensional y para su referencia creamos un sistema de ejes ortogonales que parten de un origen (O) y son infinitamente largos. Cada punto del espacio quedará determinado por una longitud en cada eje llamada coordenada.

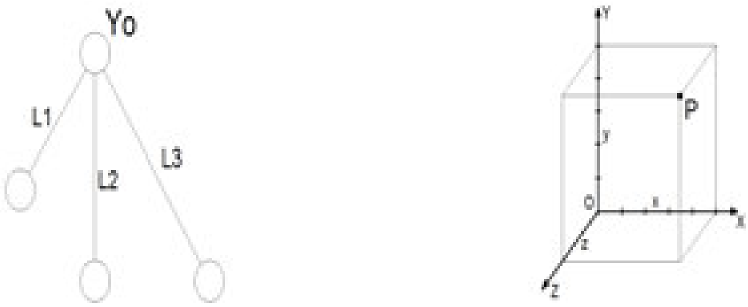


Figura 1.2.1: Sistema de coordenadas rectangular

$$P(x, y, z)$$

Existen otros sistemas de coordenadas que se verán más adelante. Se puede estudiar el movimiento en un eje (unidimensión), en un plano (bidimensional) o en el espacio (tridimensional). La unidad de longitud es el metro (Sistema Internacional) y se le define como la distancia entre dos señales en una barra de platino que se halla en la oficina de Pesas y Medidas de Paris-Francia.

Longitud unidad: Metro (m)
Área unidad: Metro cuadrado (m^2)
Volúmen unidad: Metro cúbico (m^3)

$$1m^3 = 1000(lt)$$

1.2.2. El tiempo

La magnitud el tiempo aparece ante nosotros para darnos conciencia de nuestra existencia. Se relaciona con el recuerdo que tiene nuestra memoria y crea la sensación que existimos. Al igual que la longitud, no lo podemos difinir y consideramos que es invariante, igual para todos los observadores e independiente de los mismos.

La unidad está relacionada con un hecho repetitivo que se mantiene en el recuerdo, el día por ejemplo, o las estaciones, o los movimientos de la luna.

El periodo de un péndulo es una buena alternativa y de ahí nace la unidad del Sistema Internacional llamado segundo.

Un segundo es la 86400ava parte del día solar medio y en base a esto se tienen los relojes y los cronómetros.

1día tiene 12 horas

1 hora 60 minutos
1 minuto 60 segundos

1.2.3. La masa

Se la asigna como magnitud fundamental para iniciar el proceso de búsqueda de magnitudes en la naturaleza. Tiene que ver con la existencia física del cuerpo, y a veces se dice que es la materia de los cuerpos.

Su unidad es el kilogramo que es la masa de un cuerpo que se halla en la oficina de Pesas y Medidas de París y equivale aproximadamente a la masa de un decímetro cúbico (litro) de agua.

Se discutirá la masa en el capítulo que se estudia las leyes de la Dinámica de Newton.

1.3. Movimiento rectilíneo de partículas

1.3.1. Concepto de partícula

Se llama partícula un punto con masa. Este concepto permite estudiar el movimiento de un cuerpo independiente de su forma o sin considerar la rotación del mismo. Después se demostrará que todo cuerpo puede ser considerado como una partícula asumiendo que su masa total se encuentra en su centro de masa.

Concepto de movimiento: Un cuerpo o una partícula se mueve con respecto a un sistema de coordenadas cuando varían sus coordenadas en un tiempo determinado. La existencia de movimiento requiere tres condiciones:

a) Sistema de referencia: por lo que se establece que el movimiento es una magnitud relativa.
b) Que exista variación de espacio determinado por la variación de coordenadas.
c) Que exista variación de tiempo.

En general la curva que describe el cuerpo a lo largo de su movimiento se llama trayectoria y de acuerdo a la trayectoria el movimiento puede ser:

- Movimiento unidimensional
- Movimiento bidimensional o en el plano.
- Movimiento tridimensional o en el espacio.

1.3.2. Movimiento rectilíneo

Una partícula (P) se mueve en línea recta y podemos asignarle un eje coordenada (x, y ó z), o una variable cualquiera (s, ó r). Usaremos el eje (os).

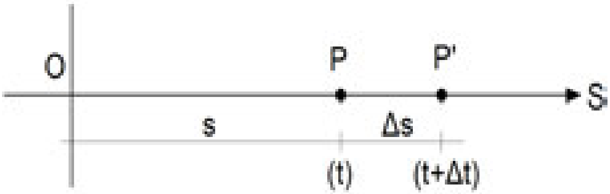


Figura 1.3.1: Movimiento Unidimensional

Si (s_1)es la coordenada posición de (P) en un tiempo (t_1) y se mueve a la posición (s_2) en un tiempo (t_2), se define como velocidad media:

$$v_m = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\triangle s}{\triangle t}$$

La velocidad por lo tanto es la relación del espacio recorrido sobre el tiempo empleado en recorrerlo.

$$\text{Unidad de velocidad} = \frac{\text{unidad de espacio}}{\text{unidad de tiempo}} = \frac{m}{s}$$

La velocidad es la longitud recorrida en la unidad de tiempo. La velocidad en un punto no puede ser determinada porque el punto no tiene dimensión, por lo que Newton crea el cálculo infinitesimal y genera un modelo matemático de velocidad.

La velocidad de (P) instantánea, o en un punto de su trayectoria es:

$$v = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle s}{\triangle t} = \frac{ds}{dt}$$

$$v = \frac{ds}{dt}$$

La velocidad tiene signo de acuerdo a su dirección.

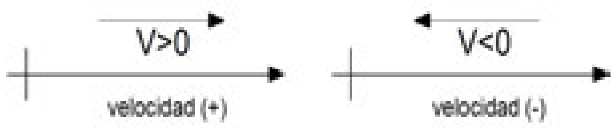


Figura 1.3.2: Signo de velocidad

La velocidad puede ser constante si (s) no depende del tiempo luego

$$v = \frac{s}{t}$$

o

$$s = vt$$

y se llama movimiento rectilíneo uniforme.

Si la velocidad varía con el tiempo, la variación de velocidad $\triangle v$ en el tiempo determinado se llama aceleración.

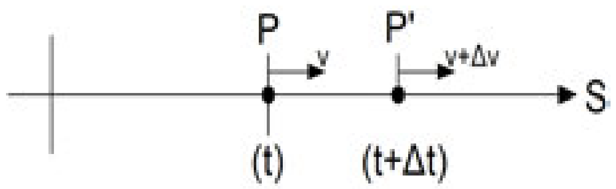


Figura 1.3.3: Variación de velocidad

Si v_1 es la velocidad en el tiempo t_1 y v_2 es la velocidad en el tiempo t_2:

$$\triangle v = v_2 - v_1$$

$$\triangle t = t_2 - t_1$$

aceleración media:

$$a_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\triangle v}{\triangle t} \tag{1.3.1}$$

que es la variación de velocidad por unidad de tiempo.
La aceleración instantánea:

$$a = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle v}{\triangle t} = \frac{dv}{vt}$$

$$a = \frac{dv}{dt} \tag{1.3.2}$$

La unidad de la aceleración será

$$Unidad\, de\, aceleración\ = \frac{unidad\, de\, velocidad}{unidad\, de\, tiempo} = \frac{m}{s^2}$$

como la velocidad es:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$dt = \frac{ds}{v}$$

la aceleración puede escribirse matemáticamente como:

$$a = \frac{dv}{dt} \tag{1.3.3}$$

$$a = v\frac{dv}{ds} \tag{1.3.4}$$

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} \tag{1.3.5}$$

El signo de la aceleración dependerá de las direcciones de la velocidad, tomando en cuenta que:

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

por lo general (t_1) se toma igual a cero $(t_1 = 0)$ es decir, se inicia el movimiento con tiempo cero.

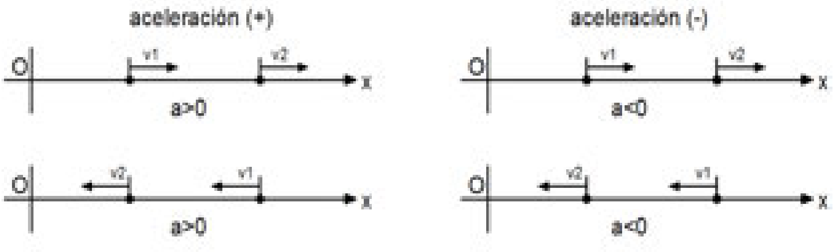


Figura 1.3.4: Signo de la aceleración

Nótese que el movimiento con aceleración negativa, si se considera el eje vertical o (y) es el movimiento de los cuerpos en caída libre.

1.3.3. Estudio del movimiento en una dimensión

Estudiar el movimiento de una partícula es determinar su posición, velocidad y aceleración en cualquier punto de la trayectoria y en un determinado tiempo para lo cual pueden presentarse dos casos.

1.3.3.1. Conociendo la posición en un determinado tiempo

- Se conoce la función :

$$s = f(t)$$

- La velocidad será:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

y la aceleración,

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Se determina la velocidad y aceleración en función del tiempo y se sustituyen las condiciones del problema en las ecuaciones correspondientes.

1.3.3.2. Conociendo la aceleración (a)

La aceleración puede ser de diferente manera:

- Aceleración cero

$$a = 0$$

- Aceleración constante

$$a = constante$$

- Aceleración función del tiempo

$$a = f(t)$$

- Aceleración función de la posición

$$a = f(s)$$

- Aceleración función de la velocidad

$$a = f(v)$$

Analizando cada caso:

a) Aceleración cero:

$$a = 0$$

luego

$$\frac{dv}{dt} = 0$$

luego

$$v = constante$$

$$\frac{ds}{dt} = v$$

separando variables

$$ds = vdt$$

e integrando entre límites

$$s - s_0 = vt \tag{1.3.6}$$

siendo

$$t_0 = 0$$

el movimiento se llama uniforme.

b) Aceleración constante; a=cte

Si la aceleración es constante se puede aplicar a cualquiera de las tres fórmulas de la aceleración para calcular la velocidad

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$dv = adt$$

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{0}^{t} adt$$

$$v - v_0 = at \qquad (1.3.7)$$

siendo (v_0) la velocidad inicial. Se puede aplicar también:

$$a = v\frac{dv}{ds}$$

$$vdv = a \cdot ds$$

$$\int_{v_0}^{v} v \cdot dv = \int_{s_0}^{s} a \cdot ds$$

$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = as - as_0$$

para calcular el espacio se aplicará la relación:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

y separando variables e integrando se calcula la velocidad

$$v = v_o + at$$

$$\frac{ds}{dt} = v_o + at$$

separando variables e integrando

$$\int_{s_0}^{s} ds = \int_{0}^{t} (v_o + at)dt$$

$$s - s_o = v_o t + \frac{at^2}{2}$$

c) La aceleración como función del tiempo; $a = f(t)$

Como $a = f(t)$ se puede usar $a = \frac{dv}{dt}$ para determinar la velocidad

$$dv = adt$$

sustituyendo e integrando;

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{0}^{t} f(t)dt$$

$$v - v_o = \int_{0}^{t} f(t)dt$$

para el espacio puede usarse;

$$v = \frac{ds}{dt}$$

d) La aceleración como función del espacio; $a = f(s)$

Como $a = f(s)$ se puede usar $a = v\frac{dv}{ds}$

$$vdv = ads$$

sustituyendo e integrando;

$$\int_{v_0}^{v} vdv = \int f(s)ds$$

$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = \int f\,(s)\,ds$$

se sustituye y se integra la expresión. En este caso puede también usarse la ecuación diferencial de segundo orden para la aceleración

$$a = \frac{d^2s}{dt^2}$$

$$f(s) = \frac{d^2s}{dt^2}$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} - f(s) = 0$$

se resuelve la ecuación diferencial de segundo orden y se determina

$$s = f(t)$$

e) La aceleración como función de la velocidad; a=f(v)

Se usará la relación $a = v\frac{dv}{ds}$ o $a = \frac{dv}{dt}$
sustituyendo,

$$f(v) = v\frac{dv}{ds}$$

separando variables;

$$\int_{v_0}^{s} ds = \int_{v_0}^{v} \frac{vdv}{f(v)}$$

se determina,

$$v = f(s)$$

también se puede usar;

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$f(v) = \frac{dv}{dt}$$

separando variables e integrando;

$$\int_{0}^{t} dt = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{f(v)}$$

se determina;

$$v = f(t)$$

1.4. Movimiento relativo de varias partículas

Cuando se tienen varias partículas en movimiento se puede calcular la velocidad relativa de una partícula respecto a la otra, es decir se cambia a otro sistema de referencia y se calcula la velocidad de una de ellas.

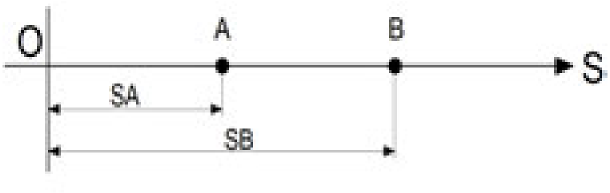


Figura 1.4.1: Movimiento Relativo

lo importante o lo básico consiste en establecer la relación de espacio entre las partículas

$$s_{B/A} = s_B - s_A$$

$S_{B/A}$ =es el espacio de B respecto a A, y luego se deriva para determinar la velocidad y la aceleración

velocidad

$$v_{B/A} = v_B - v_A$$

aceleración

$$a_{B/A} = a_B - a_A$$

en este caso la relación de espacios es igual a la relación de velocidad y aceleración.

En el caso de poleas, se establece la relación de las mismas considerando la longitud de la cuerda que es constante[3].

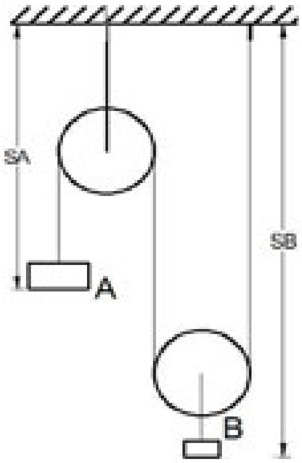


Figura 1.4.2: Poleas

la relación de los espacios considerando la longitud de la cuerda es:

$$s_A + 2s_B = L$$

L =longitud de la cuerda = constante
y derivando se establece la relación de velocidad y aceleración:

$$v_a + 2v_B = 0$$

aceleración:

$$a_A + 2a_B = 0$$

1.5. Estudio gráfico del movimiento

El movimiento puede ser analizado y estudiado en gráficas, considerando ejes espacio-tiempo, velocidad-tiempo, y aceleración-tiempo dando valores en cada caso a las magnitudes y graficando las curvas correspondientes.

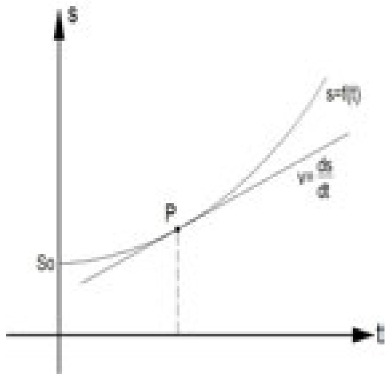


Figura 1.5.1: Gráfico espacio - tiempo (s-t)

En el gráfico (s-t) la velocidad está representada por la tangente en el punto considerado

$$v = \frac{ds}{dt}$$

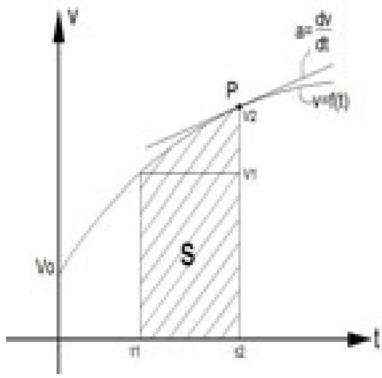


Figura 1.5.2: Gráfico velocidad - tiempo (v-t)

En un gráfico (v-t) la aceleración es la tangente en el punto considerado

$$a = \frac{dv}{dt}$$

y como

$$ds = vdt$$

$$s - s_o = \int_{t_1}^{t_2} vdt$$

El espacio está representado por el área bajo la curva (v-t) entre los tiempos considerados. Este gráfico visualiza el espacio recorrido, la velocidad y la aceleración en un tiempo determinado.

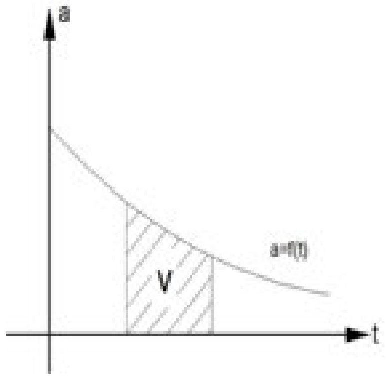


Figura 1.5.3: Gráfico aceleración - tiempo (a-t)

como

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$dv = adt$$

integrando

$$v_2 - v_1 = \int_{t_1}^{t_2} adt$$

la velocidad está representada por el área bajo la curva (a-t) entre los tiempos considerados.

1.6. Movimiento curvilíneo de partículas

El movimiento curvilíneo de partículas puede estudiarse en dos o tres dimensiones para lo cual es necesario tener como referencia los diferentes sistemas existentes.

La curva que describe la partícula cuando se mueve en un determinado tiempo se llama trayectoria.

En general cualquiera que sea el sistema de referencia utilizado, la posición de una partícula está determinada por un vector posición.

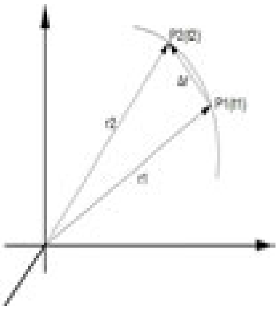


Figura 1.6.1: Movimiento de una partícula

En un tiempo (t_1) la partícula se halla en el punto (P_1), determinado por el vector $\overrightarrow{r_1}$.

En un tiempo (t_2) la partícula se mueve al punto (P_2), y el vector posición varió y ahora vale $\overrightarrow{r_2}$.

La variación de posición está determinada por el vector $\triangle\vec{r}$ y de acuerdo al calculo vectorial

$$\triangle\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$$

se define velocidad media:

$$\overrightarrow{v_m} = \frac{\triangle\vec{r}}{\triangle t}$$

y velocidad instantánea en un punto determinado:

$$\vec{v} = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle\vec{r}}{\triangle t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{1.6.1}$$

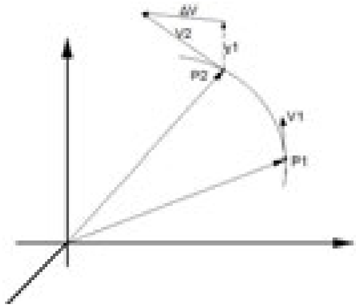


Figura 1.6.2: Variación de velocidad

La velocidad es una magnitud vectorial representada por un vector que es tangente a la trayectoria, que tiene como módulo $v = \frac{ds}{dt}$. Como en cada punto existe una velocidad

en P_1la partícula tiene $\vec{v_1}$;
en P_2la partícula tiene $\vec{v_2}$,
existe variación de velocidad porque el vector $(\overrightarrow{v_1})$ cambia de dirección o de módulo o ambos a la vez.

La aceleración media será:

$$\vec{a_m} = \frac{\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}}{\triangle t}$$

si trasladamos $\vec{v_1}$ al punto P_2 se puede observar que el vector ($\vec{v_2}$-$\vec{v_1}$) se representa graficamente por $\vec{\triangle v}$ y que

$$\overrightarrow{a_m} = \frac{\triangle \vec{v}}{\triangle t}$$

y la aceleración instantánea:

$$\vec{a} = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle \vec{v}}{\triangle t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

la aceleración no es tangente a la trayectoria y puede tener cualquier dirección y sentido. Las derivadas vectoriales siguen las mismas reglas que las derivadas escalares. El tiempo y el espacio son magnitudes escalares y la velocidad y aceleración son magnitudes vectoriales porque para su representación requieren de módulo, dirección y sentido; las escalares solo requieren módulo que consta de la cantidad y la unidad.

En resumen:

velocidad

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{1.6.2}$$

aceleración

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{1.6.3}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \tag{1.6.4}$$

$$\vec{a} = v\frac{dv}{d\vec{r}} \tag{1.6.5}$$

1.6.1. Movimiento en coordenadas rectangulares o cartesianas

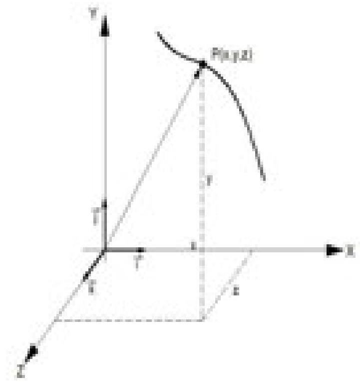


Figura 1.6.3: Movimiento en coordenadas rectangulares

El vector posición en coordenadas rectangulares viene dado como:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \tag{1.6.6}$$

siendo $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vectores unitarios de los ejes x,y,z.
La velocidad será:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

y aplicando la regla de la cadena para derivación;

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + x\frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{k} + z\frac{d\vec{k}}{dt}$$

como los vectores unitarios $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ no varían con el tiempo sus derivadas son cero, luego la velocidad es:

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \tag{1.6.7}$$

la velocidad tiene tres componentes en x, en y , y en z , y puede escribirse como:

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

de igual manera la aceleración se expresa como:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

y derivando la velocidad:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} \tag{1.6.8}$$

que puede expresarse como:

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

Se observa que la velocidad y aceleración tienen tres componentes y pueden estudiarse cada componente en forma independiente logrando tres ecuaciones de velocidad y tres ecuaciones escalares de aceleración

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt}$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt}$$

En todo caso las ecuaciones tienen solución solo si las aceleraciones son constantes o si:

a_x, depende solo de t, de x o de v_x
a_y, depende solo de t, de y o de v_y; y
a_z, depende solo de t, de z o de v_z

porque se posibilita la resolución de la ecuación diferencial establecida.

Con las ecuaciones pueden estudiarse movimientos en una dimensión, en dos dimensiones o en tres dimensiones.

Por ejemplo analizaremos el movimiento de un proyectil en dos dimensiones (x-y)

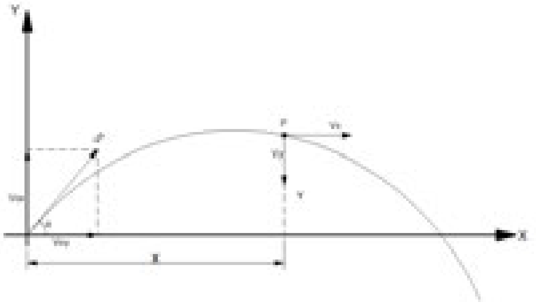


Figura 1.6.4: Movimiento del proyectil

Los datos son las aceleraciones, la velocidad inicial (v_o) y el ángulo (α).

$$a_x = 0$$

$$a_y = -g(constante)$$

cualquier punto de la trayectoria tiene una posición $P(x, y)$ determinada por el vector posición:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

una velocidad:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$$

y una aceleración;

$$\vec{a} = -g\vec{j}$$

Velocidades iniciales;

$$v_{ox} = v_o cos\alpha$$

$$v_{oy} = v_o sen\alpha$$

luego el movimiento para cada eje queda determinado:
Así, en (ox):

$$\frac{dv_x}{dt} = 0$$

$$v_x = constante = v_{ox}$$

$$\frac{dx}{dt} = v_{ox}$$

$$x = v_{ox}t$$

en (oy), la aceleración:

$$\int_{Voy}^{Vy} dv_y = \int_0^t -g dt$$

$$v_y = v_{oy} - gt$$

como

$$v_y = \frac{dy}{dt}$$

separando variables e integrando,

$$y = v_{oy}t - \frac{gt^2}{2}$$

En resumen obtenemos

posición :

$$x = v_{ox}t$$

$$y = v_{oy}t$$

velocidad:

$$v_x = v_{ox}$$

$$v_y = v_{oy} - gt$$

aceleración:

$$a_x = 0$$

$$a_y = -g$$

puede también usarse la relación :

$$a_y = -g$$

$$v_y \frac{dv_y}{dy} = -g$$

separando variables e integrando;

$$\int_{v_{oy}}^{v_y} v_y dv_y = \int_{y_1}^{y_2} - g dy$$

$$\frac{v_y^2}{2} - \frac{v_{oy}^2}{2} = gy_1 - gy_2$$

Estas fórmulas pueden usarse para determinar cualquier variable en función de datos entregados.

1.6.2. Movimiento relativo

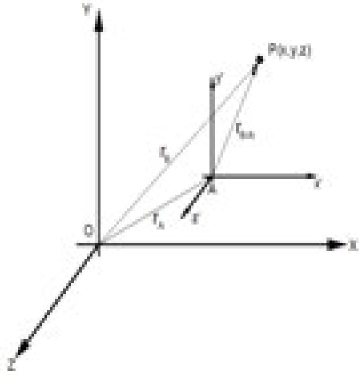


Figura 1.6.5: Movimiento relativo

El sistema de coordenadas rectangular es apto para estudiar movimientos relativos, es decir cuando se desea calcular espacio, velocidad y aceleración de una partícula (B) con respecto a un sistema diferente.

Se puede estudiar y conocer el movimiento de la partícula (B) con respecto al sistema fijo (xyz), pero se quiere estudiar el movimiento de B con respecto a otro sistema $(x'y'z')$ que tiene una velocidad de traslación (v_A) es decir que el sistema no rota, solo se traslada (Sistema Inercial)

Se debe relacionar los vectores posición:
$\vec{r_B}$ vector posición de B respecto al sistema fijo(x y z)
$\vec{r_A}$ vector posición de A respecto al sistema fijo(x y z)
$\vec{r_{B/A}}$ vector posición de B respecto al sistema (x' y' z')

De la figura:

$$\overrightarrow{r_{B/A}} = \overrightarrow{r_B} - \overrightarrow{r_A}$$

y derivando;

$$\frac{d\overrightarrow{r_{B/A}}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{r_B}}{dt} - \frac{d\overrightarrow{r_A}}{dt}$$

es decir

$$\overrightarrow{v}_{\frac{B}{A}} = \overrightarrow{v}_B - \overrightarrow{v}_A$$

siendo:
$\overrightarrow{v_{B/A}}$=velocidad de B respecto a A (al sistema x' y' z')
$\overrightarrow{v_B}$ =velocidad de B respecto a 0 (sistema fijo x y z)
$\overrightarrow{v_A}$ =velocidad del sistema móvil (x y z)

La aceleración igual

$$\vec{a}_{\frac{B}{A}} = \vec{a}_B - \vec{a}_A \tag{1.6.9}$$

Ejemplo 1. Un carro se mueve en la lluvia con velocidad v_A (respecto a la tierra) y la lluvia cae con velocidad v_B respecto también a la tierra. Calcular la velocidad de la lluvia respecto al carro.

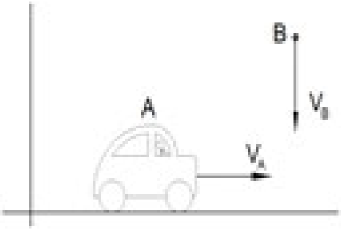


Figura 1.6.6:

Pide la velocidad de B respecto a A

$$\vec{v}_{\frac{B}{A}} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$$

realizando gráficamente la resta de vectores se calcula lo solicitado

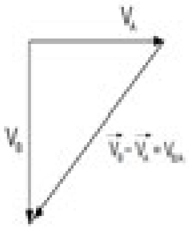


Figura 1.6.7:

se puede realizar el tratamiento en coordenadas rectangulares y calcular numéricamente la diferencia vectorial.

1.6.3. Coordenadas normal y tangencial

La velocidad es tangente a la trayectoria, pero la aceleración no lo es. A veces se conoce la velocidad en magnitud y sentido y se desea calcular la aceleración, para esto se usa un sistema móvil que se acopla a la velocidad en uno de sus ejes. Este sistema es el normal y tangencial.

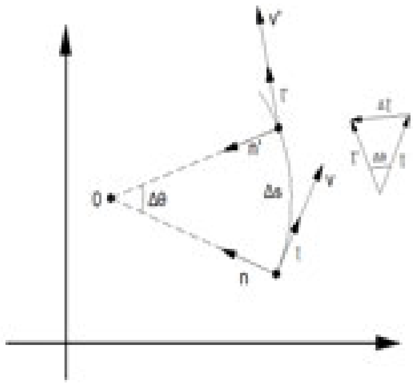


Figura 1.6.8: Sistema Normal y Tangencial

los vectores unitarios son
($\overrightarrow{\tau}$)en dirección de la velocidad ,
($\overrightarrow{n}$) perpendicular a la velocidad.

El sistema varía de posición con el tiempo, luego los vectores unitarios tienen derivadas respecto al tiempo (t).

La variación entre dos puntos muy próximos del vector $\vec{\tau}$ puede graficarse y calcularse.

$$\triangle\tau = 2sen\left(\frac{\triangle\theta}{2}\right)$$

y derivando

$$\lim_{\triangle\theta\to 0}\frac{\triangle\tau}{\triangle\theta} = lim\frac{sen\left(\frac{\triangle\theta}{2}\right)}{\frac{\triangle\theta}{2}} = 1$$

pero la dirección es la del vector $\overrightarrow{n}$, lo que significa que

$$\frac{d\overrightarrow{\tau}}{d\theta} = \overrightarrow{n}$$

$\overrightarrow{n}$ es el vector que se orienta al centro instantáneo de curvatura y el radio de curvatura es (ρ).

Por lo tanto si la velocidad , que se conoce viene dada por

$$\overrightarrow{v} = v\vec{\tau} \tag{1.6.10}$$

El valor de la aceleración, derivando:

$$\vec{a} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{\tau} + v\frac{d\overrightarrow{\tau}}{dt}$$

pero el valor de $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$ puede calcularse como:

$$\frac{d\overrightarrow{\tau}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{\tau}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

donde:

$$\frac{ds}{dt} = v$$

y

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho}$$

luego, sustituyendo:

$$\overrightarrow{a} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\overrightarrow{n} \tag{1.6.11}$$

la aceleración total = aceleración tangencial + aceleración centrípeta.

aceleración tangencial:

$$a\tau = \frac{dv}{dt}$$

aceleración normal(centrípeta):

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

1.6.4. Movimiento en coordenadas polares

Las coordenadas polares son útiles para estudiar el movimiento en dos dimensiones o movimiento en el plano

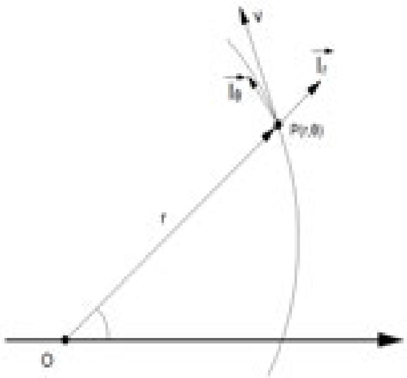


Figura 1.6.9: Coordenadas polares

El punto en el plano queda definido por el vector posición $\overrightarrow{r}$ con dos componentes:
r = distancia del punto O al punto P

θ= ángulo que describe el radio vector.

La velocidad y la aceleración tendrán componentes en la dirección de los vectores unitarios

$\overrightarrow{i_r}$ =en la dirección de r (radial)

$\overrightarrow{i_\theta}$ =en la dirección perpendicular a r (transversal)

Los vectores unitarios varían con el tiempo y sus derivadas pueden ser calculadas considerando las componentes de los vectores unitarios en coordenadas rectangulares.(Método alternativo al usado en la subsección 1.6.3)

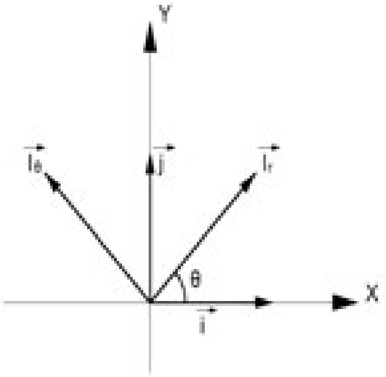


Figura 1.6.10: Vectores unitarios

$$\overrightarrow{i_r} = cos\theta\,\overrightarrow{i} + sen\theta\,\overrightarrow{j}$$
$$\overrightarrow{i_\theta} = -sen\theta\,\overrightarrow{i} + cos\theta\,\overrightarrow{j}$$

derivando con respecto al tiempo;

$$\frac{d\overrightarrow{i_r}}{dt} = -sen\theta(\dot{\theta})\,\overrightarrow{i} + cos\theta(\dot{\theta})\,\overrightarrow{j} = \dot{\theta}(-sen\theta\,\overrightarrow{i} + cos\theta\,\overrightarrow{j}\,) = \dot{\theta}\overrightarrow{i_\theta}$$
$$\frac{d\overrightarrow{i_\theta}}{dt} = -cos\theta(\dot{\theta})\,\overrightarrow{i} - sen\theta(\dot{\theta})\,\overrightarrow{j} = -\dot{\theta}(cos\theta\,\overrightarrow{i} + sen\theta\,\overrightarrow{j}\,) = -\dot{\theta}\overrightarrow{i_r}$$
$$\frac{d\overrightarrow{i_r}}{dt} = \dot{\theta}\overrightarrow{i_\theta}$$
$$\frac{d\overrightarrow{i_\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\overrightarrow{i_r}$$

Para el análisis del movimiento partimos del vector posición;

vector posición $\overrightarrow{r} = r\overrightarrow{i_r}$, r puede ser dado como $r = f(\theta)$ que sería la trayectoria del movimiento o en forma paramétrica;

$$r = f(t)$$

$$\theta = f(t)$$

la velocidad;

$$\overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{i_r} + r\frac{d\overrightarrow{i_r}}{dt}$$

sustituyendo:

$$\overrightarrow{v} = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{i_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{i_\theta}$$

$$\overrightarrow{v} = \dot{r}\overrightarrow{i_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{i_\theta} \tag{1.6.12}$$

la velocidad tiene dos componentes:

velocidad radial $v_r = \dot{r}$

velocidad transversal $v_T = r\dot{\theta}$

Nótese que se incorpora un nuevo concepto de velocidad que es el de la velocidad angular

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \omega$$

Que sería la variación del ángulo por unidad de tiempo, descrito por el vector posición; se le asigna como (ω)

La aceleración será la derivada de la velocidad, aplicando la regla de la cadena

$$\overrightarrow{v} = \dot{r}(\overrightarrow{i_r}) + r\dot{\theta}(\overrightarrow{i_\theta})$$

$$\overrightarrow{a} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \ddot{r}\overrightarrow{i_r} + \dot{r}\frac{d\overrightarrow{i_r}}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\overrightarrow{i_\theta} + r\ddot{\theta}\overrightarrow{i_\theta} + r\dot{\theta}\frac{d\overrightarrow{i_\theta}}{dt}$$

sustituyendo:

$$\overrightarrow{a} = \ddot{r}\overrightarrow{i_r} + \dot{r}\dot{\theta}\overrightarrow{i_\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\overrightarrow{i_\theta} + r\ddot{\theta}\overrightarrow{i_\theta} - r\dot{\theta}^2\overrightarrow{i_r}$$

agrupando:

$$\overrightarrow{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{i_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\overrightarrow{i_\theta} \tag{1.6.13}$$

Existen dos aceleraciones

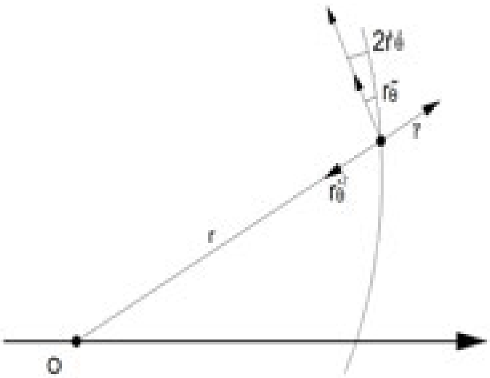


Figura 1.6.11: Aceleraciones en coordenadas polares

la aceleración radial compuesta a su vez por dos aceleraciones:
$ar = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^{2})$
$r\dot{\theta}^{2} = centrípeta$
como

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \omega$$

la aceleración cetrípeta $= r\omega^2$
y la aceleración transversal $a_T = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$
siendo:

$$r\ddot{\theta} = \text{aceleración angular}$$

y

$$2\dot{r}\dot{\theta} = \text{aceleración de colioris}$$

1.6.5. Movimiento en coordenadas esféricas

En coordenadas esféricas el punto en el espacio queda determinado por tres parámetros o coordenadas[6]:

r = radio que determina la distancia del origen (O) al punto al referencia (P)

θ= ángulo entre el radio vector y el eje (z)

ϕ= ángulo entre la proyección del radio vector en el plano (x o y) y el eje x.

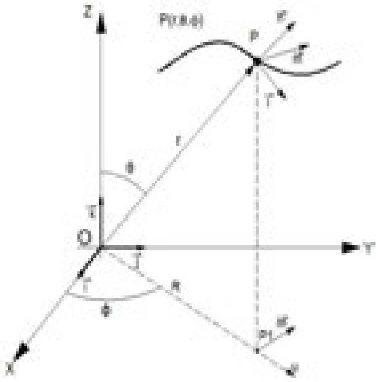


Figura 1.6.12: Coordenadas en el espacio

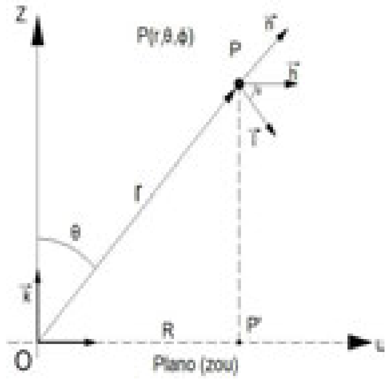


Figura 1.6.13: Plano (ZOU)

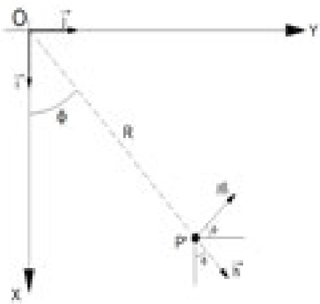


Figura 1.6.14: Proyeccion en el XOY

Los vectores unitarios

$\overrightarrow{n}$ = es la dirección de (r)

$\overrightarrow{l}$ = perpendicular a $\overrightarrow{n}$ y en el plano que contiene a (r) y su proyección (R) en el (x o y).

$\overrightarrow{m}$ = perpendicular a los dos anteriores

utilizamos el vector auxiliar unitario $\left(\vec{h}\right)$ que pueden escribirse en función de $\overrightarrow{i}$ y $\overrightarrow{j}$, como

$\overrightarrow{h} = (cos\phi)\overrightarrow{i} + (sen\phi)\overrightarrow{j}$ en (x o y)

que también puede escribirse en función de $(\vec{n})$ y $\left(\vec{l}\right)$

$\overrightarrow{h} = (sen\theta)\overrightarrow{n} + (cos\theta)\overrightarrow{l}$ en (z o u)

los vectores unitarios en coordenadas rectangulares serán:

$\overrightarrow{n} = (cos\theta)\overrightarrow{k} + (sen\theta)\overrightarrow{h}$ en el (z o u)

$\overrightarrow{l} = -(sen\theta)\overrightarrow{k} + (cos\theta)\overrightarrow{h}$ en el (z o u)

$\overrightarrow{m} = -(sen\phi)\overrightarrow{i} + (cos\phi)\overrightarrow{j}$ en el (x o y)

derivando con respecto a θ;

$$\frac{\overrightarrow{\partial n}}{\partial\theta} = -(sen\theta)\overrightarrow{k} + (cos\theta)\overrightarrow{h} = \overrightarrow{l}$$

$$\frac{\overrightarrow{\partial l}}{\partial\theta} = -(cos\theta)\overrightarrow{k} - (sen\theta)\overrightarrow{h} = -\overrightarrow{n}$$

$$\frac{\overrightarrow{\partial m}}{\partial\theta} = 0, \text{ porque (m) no varía respecto a } \theta$$

derivando con respecto a ϕ;

$$\frac{\overrightarrow{\partial n}}{\partial\phi} = sen\theta(\frac{\overrightarrow{\partial h}}{\partial\phi}) = sen\theta\left[-(sen\phi)\overrightarrow{i} + (cos\phi)\overrightarrow{j}\right] = \overrightarrow{m}sen\theta$$

$$\frac{\overrightarrow{\partial l}}{\partial\phi} = cos\theta\left(\frac{\overrightarrow{\partial h}}{\partial\phi}\right) = cos\theta\left[-(sen\phi)\overrightarrow{i} + (cos\phi)\overrightarrow{j}\right] = \overrightarrow{m}cos\theta$$

$$\frac{\overrightarrow{\partial m}}{\partial\phi} = -(cos\phi)\overrightarrow{i} - (sen\phi)\overrightarrow{j} = -\overrightarrow{h} = -(sen\theta)\overrightarrow{n} - (cos\theta)\overrightarrow{l}$$

para calcular la velocidad y aceleración particular del radio vector

$$\overrightarrow{r} = r\cdot\overrightarrow{n}_{(\theta,\phi)}$$

el valor de (r) puede expresarse como función de (θ) y (ϕ) o en forma paramétrica, La velocidad será:

$$\overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{r}}{dt}$$

$$\overrightarrow{r} = f(\theta, \phi)$$

$$\overrightarrow{v} = \frac{\overrightarrow{dr}}{dt} = \dot{r}\overrightarrow{n} + r\frac{\overrightarrow{\partial n}}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial t} + r\frac{\overrightarrow{\partial n}}{\partial \phi}\cdot\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

sustituyendo,

$$\overrightarrow{v} = \dot{r}\overrightarrow{n} + r\dot{\theta}\overrightarrow{\ell} + r\dot{\phi}sen\theta\overrightarrow{m} \tag{1.6.14}$$

y la aceleración,

$$\overrightarrow{a} = \frac{\overrightarrow{dv}}{dt} = \ddot{r}\overrightarrow{n}+\dot{r}\frac{\partial\overrightarrow{n}}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial t}+\dot{r}\frac{\overrightarrow{\partial n}}{\partial\phi}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial t}+\dot{r}\dot{\theta}\overrightarrow{\ell}+r\ddot{\theta}\overrightarrow{\ell}+r\dot{\theta}\frac{\overrightarrow{\partial\ell}}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial t}+r\dot{\theta}\frac{\overrightarrow{\partial\ell}}{\partial\phi}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial t}+\dot{r}\dot{\phi}sen\theta\overrightarrow{m}+r\ddot{\phi}sen\theta\overrightarrow{m}+$$

$$r\dot{\phi}cos\theta\cdot\dot{\theta}\overrightarrow{m} + r\dot{\phi}sen\theta\frac{\partial\overrightarrow{m}}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial t} + r\dot{\phi}sen\theta\frac{\partial\overrightarrow{m}}{\partial\phi}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

sustituyendo las derivadas de los vectores unitarios,

$$\overrightarrow{a} = \ddot{r}\overrightarrow{n}+\dot{r}\dot{\theta}\overrightarrow{\ell}+\dot{r}\dot{\phi}sen\theta\overrightarrow{m}+\dot{r}\dot{\theta}\overrightarrow{\ell}+r\ddot{\theta}\overrightarrow{\ell}-r\dot{\theta}^2\overrightarrow{n}+r\dot{\theta}\dot{\phi}cos\theta\overrightarrow{m}+\dot{r}\dot{\phi}sen\theta\overrightarrow{m}+r\ddot{\phi}sen\theta\overrightarrow{m}+$$

$$r\dot{\phi}\dot{\theta}cos\theta\overrightarrow{m} + r\dot{\phi}^2 sen\theta(-\overrightarrow{n}sen\theta - \overrightarrow{\ell}cos\theta)$$

y agrupando,

$$\overrightarrow{a} = (\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\dot{\phi}^2 sen^2\theta)\overrightarrow{n}+(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}-r\dot{\phi}^2 sen\theta cos\theta)\overrightarrow{\ell}+(2\dot{r}\dot{\phi}sen\theta+r\ddot{\phi}sen\theta+2r\dot{\phi}\dot{\theta}cos\theta)\overrightarrow{m} \tag{1.6.15}$$

1.6.6. Movimiento en coordenada cilíndricas

Las coordenadas cilíndricas pueden considerarse como coordenadas polares, en el espacio ya que las mismas incrementan una coordenada adicional a las coordenadas polares

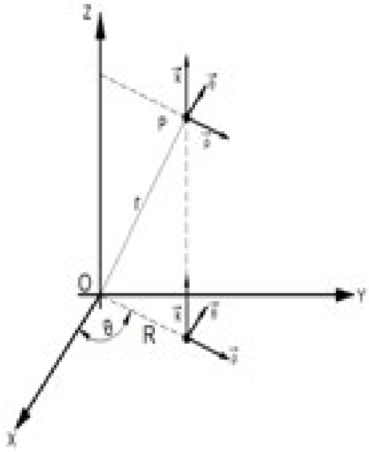


Figura 1.6.15: Coordenadas cilíndricas

Las coordenadas del punto $P(R, \theta, z)$
R =proyección del vector posición ($\overrightarrow{r}$) en el (x o y)
θ =ángulo de la proyección con el eje (ox)
z =coordenada cartesiana

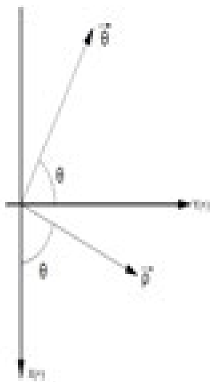


Figura 1.6.16:

Los vectores unitarios pueden expresarse en coordenadas rectangulares

$$\overrightarrow{\rho} = cos\theta \overrightarrow{i} + sen\theta \overrightarrow{j}$$

$$\overrightarrow{\theta} = -sen\theta \overrightarrow{i} + cos\theta \overrightarrow{j}$$

derivando con respecto al tiempo,

$$\frac{d\overrightarrow{\rho}}{dt} = (-sen\theta \overrightarrow{i} + cos\theta \overrightarrow{j})\dot{\theta} = \dot{\theta}\overrightarrow{\theta}$$

$$\frac{d\overrightarrow{\theta}}{dt} = (-cos\theta\overrightarrow{i} - sen\theta\overrightarrow{j})\dot{\theta} = -\dot{\theta}\overrightarrow{\rho}$$

El vector posición esta dado como,

$$\overrightarrow{r} = R\overrightarrow{\rho} + z\overrightarrow{k}$$

que puede ser dada en forma paramétrica,

$$R = f(t)$$
$$\theta = f(t)$$

$$z = f(t)$$

la velocidad:

$$\overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \dot{R}\overrightarrow{\rho} + R\frac{d\overrightarrow{\rho}}{dt} + \dot{z}\overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{v} = \dot{R}\overrightarrow{\rho} + R\dot{\theta}\overrightarrow{\theta} + \dot{z}\overrightarrow{k} \tag{1.6.16}$$

la aceleración ;

$$\overrightarrow{a} = \ddot{R}\overrightarrow{\rho} + \dot{R}\frac{d\rho}{dt} + \dot{R}\dot{\theta}\overrightarrow{\theta} + R\ddot{\theta}\overrightarrow{\theta} + R\dot{\theta}\frac{d\overrightarrow{\theta}}{dt} + \ddot{z}\overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{a} = \ddot{R}\overrightarrow{\rho} + \dot{R}\dot{\theta}\overrightarrow{\theta} + \dot{R}\dot{\theta}\overrightarrow{\theta} + R\ddot{\theta}\overrightarrow{\theta} - R\dot{\theta}^{2}\overrightarrow{\rho} + \ddot{z}\overrightarrow{k}$$

agrupando;

$$\overrightarrow{a} = (\ddot{R} - R\dot{\theta}^{2})\overrightarrow{\rho} + (R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta})\overrightarrow{\theta} + \ddot{z}\overrightarrow{k} \tag{1.6.17}$$

Obsérvese que los dos primeros términos tanto de la velocidad como de la aceleración corresponden a las expresiones del movimiento en coordenadas polares, es decir cuando z=0.

1.7. Movimiento circular

La partícula se halla en movimiento circular cuando su trayectoria es un circulo. El movimiento puede ser estudiado en cualquier sistema de coordenadas, analizaremos los más importantes.

1. **Movimiento circular en coordenadas polares:**

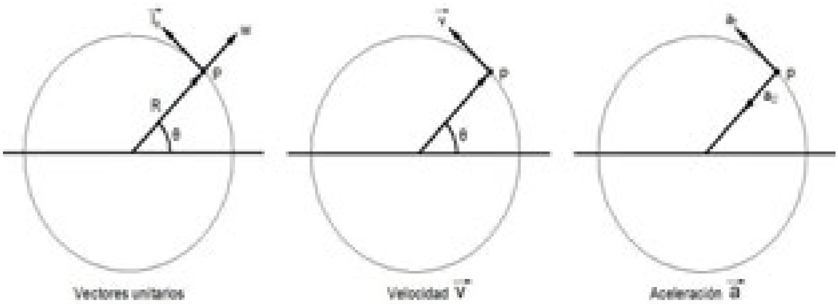


Figura 1.7.1: Movimiento circular

la velocidad en coordenadas polares;

$$\overrightarrow{v} = \dot{r}\overrightarrow{i_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{i_\theta}$$

con el círculo $r = R(constante)$ luego

$$\overrightarrow{v} = R\dot{\theta}\overrightarrow{i_\theta}(\text{velocidad tangente}) \tag{1.7.1}$$

el módulo de la velocidad

$$v = R\dot{\theta} = R\omega$$

siendo

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{R}$$

La aceleración:

siento r=R(constante) la aceleración vale

$$\overrightarrow{a} = (-R\dot{\theta}^2)\overrightarrow{i_r} + (R\ddot{\theta})\overrightarrow{i_\theta} \tag{1.7.2}$$

aceleración normal

$$a_N = R\dot{\theta}^2 = R\omega^2 = \frac{v^2}{R} \tag{1.7.3}$$

aceleración tangencial

$$a_T = R\ddot{\theta} = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha \tag{1.7.4}$$

Nótese que la aceleración normal es la aceleración centrípeta de las coordenadas normal y tangencial, es decir los resultados son iguales con los dos tipos de sistemas de coordenadas. $\overrightarrow{\omega}$ es el vector velocidad angular y es perpendicular al plano de $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{R}$.El concepto es útil si se estudia el movimiento circular en coordenadas rectangulares y en el espacio.

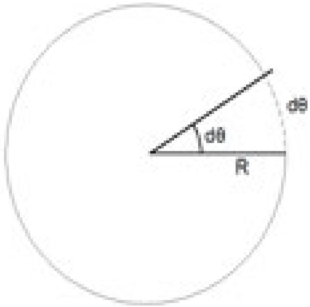


Figura 1.7.2:

Tambien la velocidad puede determinarse a partir del arco subtendido por el ángulo $d\theta$

$$ds = Rd\theta$$
$$\frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt}$$
$$v = R\omega$$

y la aceleración tangencial será su derivada

$$a_T = R\ddot{\theta} = R\alpha$$

El valor

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \omega = \text{velocidad angular} \tag{1.7.5}$$

y la aceleración puede ser expresada como:

$$\ddot{\theta} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \omega\frac{d\omega}{d\theta} = \text{ aceleración tangencial} \tag{1.7.6}$$

Ecuaciones que pueden ser utilizadas para estudiar el movimiento circular en coordenadas rectangulares conociendo la aceleración.

2. **Movimiento Circular en coordenadas rectangulares**

En coordenadas rectangulares y en el espacio pueden usarse las siguientes relaciones vectoriales

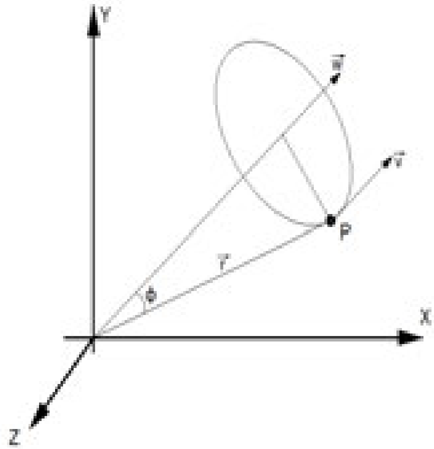


Figura 1.7.3: Movimiento circular en el espacio

La partícula P rota en trayectoria circular y se conoce su velocidad angular ($\overrightarrow{\omega}$) y su radio vector ($\overrightarrow{r}$)

la velocidad tangencial

$$v = R\omega$$

pero

$$R = rsen\phi$$

luego ;

$$v = r\omega sen\phi$$

que es el módulo del producto vectorial

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r} \tag{1.7.7}$$

y la aceleración

$$\overrightarrow{a} = \frac{\overrightarrow{dv}}{dt} = \frac{\overrightarrow{d\omega}}{dt} \times \overrightarrow{r} + \overrightarrow{\omega} \times \frac{\overrightarrow{dr}}{dt}$$

$$\overrightarrow{a} = \dot{\overrightarrow{\omega}} \times \overrightarrow{r} + \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{v} \tag{1.7.8}$$

$$\overrightarrow{a} = \dot{\overrightarrow{\omega}} \times \overrightarrow{r} + \overrightarrow{\omega} \times (\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}) \tag{1.7.9}$$

$\overrightarrow{a}$ =aceleración tangencial +aceleración centrípeta

si se conoce el vector de posición $\overrightarrow{r} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$, y la velocidad angular $\overrightarrow{\omega} = w_x\overrightarrow{i} + w_y\overrightarrow{j} + w_z\overrightarrow{k}$, puede calcularse la velocidad y aceleración en coordenadas rectangulares.

Capítulo 2

Fuerza , masa y aceleración

«La gran carga de la filosofía parece consistir en que de los fenómenos del movimiento trata de investigar las fuerzas de la naturaleza, y partiendo de estas fuerzas demostrar los otros fenómenos», I. Newton: Principia Philosophiae (1686).

En el capítulo anterior se estudió el movimiento de una partícula a partir de las magnitudes espacio y tiempo, generando a su vez los conceptos de velocidad y aceleración.

En este capítulo se estudiará el movimiento con las causas que producen dicho movimiento. Newton propone que la causa de la aceleración es la magnitud Fuerza y plantea para explicar el movimiento mediante tres principios:

1. **Principio de inercia** .- Todo cuerpo permanece en estado de reposo o de movimiento uniforme rectilíneo a menos que exista una causa que modifique ese estado.

2. **Principio de la fuerza**.- La variación de la velocidad respecto del tiempo es proporcional a la fuerza que lo produce e inversamente proporcional a la masa
$$a = \frac{F}{m} \tag{2.0.1}$$

3. **Principio de acción y reacción**.- Para toda fuerza acción existe una fuerza de reacción igual y opuesta, es decir las acciones mutuas entre dos cuerpos son siempre iguales y de sentido contrario.

La primera ley establece que los cuerpos ofrecen resistencia al cambio de estado en el que se encuentran. Esta resistencia que se experimenta realmente se llama inercia y la magnitud que mide esta inercia es la masa del cuerpo.

Los conceptos pueden ser considerados como definiciones y también como declaraciones de hechos experimentales.

La unidad de la masa es el kilogramo masa (kg) y por convenio internacional se le define como la masa de un cilindro especial platino - iridio , que se encuentra en la Comisión Internacional de Pesas y Medidas en Sevres Francia.

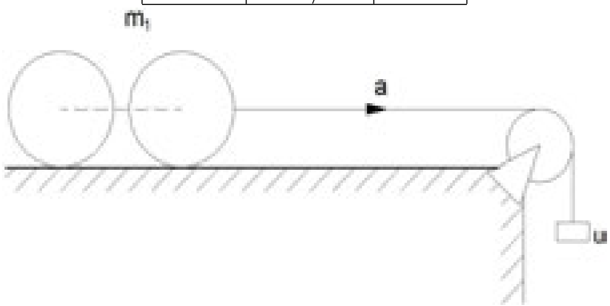
$1kg = 1000gramos$ (gr)
$1000kg = 1tonelada$ (ton)

2.1. La fuerza

El concepto más importante de la dinámica es la fuerza y se le atribuye la causa de la aceleración de los cuerpos . Se discute mucho si el concepto es definición o existe realmente la fuerza como magnitud real.

Si experimentamos con una masa dada, que es medible y que se mueve con una aceleración (a), cualquiera que sea la causa que produce esta aceleración y que también es medible, al relacionar la aceleración producida variando las masas del cuerpo se tiene:

$m(kg)$	$a(m/s^2)$	ma
m_1	a_1	m_1a_1
$2m_1$	$a_{1/2}$	m_1a_1
$3m_1$	$a_{1/3}$	m_1a_1



Si se varía la masa, la aceleración varía en forma inversamente proporcional y se establece que su producto es constante. Esta constante se llama fuerza y actúa en la misma dirección de la aceleración, luego se puede establecer que la fuerza es:

$$\vec{F} = m\overrightarrow{a}$$

donde:

$$\overrightarrow{a} = \frac{\overrightarrow{dv}}{dt}$$

La ecuación que planteó Newton es:

$$\overrightarrow{F} = \frac{d}{dt}(m\overrightarrow{v}) \qquad (2.1.1)$$

La fuerza es la variación respecto al tiempo de la magnitud de $(m\overrightarrow{v})$. Solo si la masa es constante la ecuación será;

$$\vec{F} = m\overrightarrow{a}$$

la unidad de fuerza será

$$\overrightarrow{F} = (kg)\left(\frac{m}{s^2}\right) = kg\frac{m}{s^2}$$

y se llama Newton (N).

$1N$ = fuerza que produce la aceleración de $1\frac{m}{s^2}$ en una masa de $1kg$

submúltiplo:

1dina $= 1gr \cdot \frac{1cm}{s^2} = \frac{gr \cdot cm}{s^2}$

para transformar unidades de igual magnitudes se sustituye las relaciones de las magnitudes básicas en las compuestas.

$$1New = \frac{kg \cdot m}{s^2} = \frac{(1000gr) \cdot (100cm)}{s^2} = 10^5\frac{gr \cdot cm}{s^2} = 10^5 dinas$$

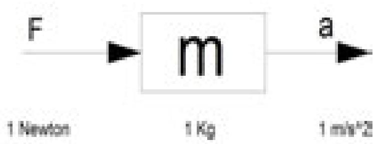


Figura 2.1.1:

El sistema de referencia al cual se mide la aceleración $\overrightarrow{a}$ debe ser un sistema no acelerado respecto a otro, o ser un sistema fijo. Este sistema se llama Sistema Newtoniano o Sistema Inercial

La ecuación de la fuerza es;

$$\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$$

como la aceleración puede ser expresada como:

$$\overrightarrow{a} = \frac{\overrightarrow{dv}}{dt}$$

$$\overrightarrow{a} = v\frac{dv}{\overrightarrow{dr}}$$

$$\overrightarrow{a} = \frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2}$$

lo que significa que la ecuación diferencial de la fuerza puede estar expresada de tres maneras:

$$\overrightarrow{F} = m\frac{\overrightarrow{dv}}{dt} \tag{2.1.2}$$

$$\overrightarrow{F} = mv\frac{dv}{\overrightarrow{dr}} \tag{2.1.3}$$

$$\overrightarrow{F} = m\frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2} \tag{2.1.4}$$

la ecuación representa el modelo matemático que permite estudiar el movimiento en función de las fuerzas que intervienen en el proceso. La fuerza es una magnitud vectorial y su vector representativo tiene la misma dirección que la aceleración o viceversa.

Si existen varias fuerzas actuando en la partícula se considera la resultante vectorial de las mismas en la dirección de la aceleración.

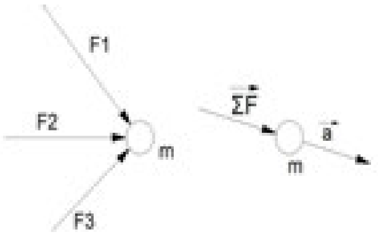


Figura 2.1.2:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$$

o simplemente

$$\sum\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$$

como la aceleración puede depender de varias variables

$$a = f(t)$$

$$a = f(v)$$

$$a = f(r)$$

$$a\text{=constante o } a = 0$$

la fuerza también puede depender de:

$$F = f(t)$$

$$F = f(v)$$

$$F = f(r)$$

$$F = constante$$

$$F = 0$$

Para cada caso se determinará la ecuación que permita solución y se aplicará para la determinación o estudio del movimiento de la misma forma que se estudió el movimiento en una dimensión Capitulo I numeral 3.3 y en lugar de aceleración ahora se conoce su valor que es la fuerza sobre la masa

$$\frac{F}{m} = a$$

2.2. Las fuerzas de la naturaleza

a) **Fuerza gravitatoria**

Newton conoció las leyes del movimiento de los planetas que fue presentado por Kleper y buscaba la fuerza que determine ese movimiento. Al analizar la caída de los cuerpos estableció que la "caída" es igual a la "atracción" y planteó la ley de Gravitación universal que establece:

Dos cuerpos de masa m_1y m_2 se atraen con una fuerza que es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa.

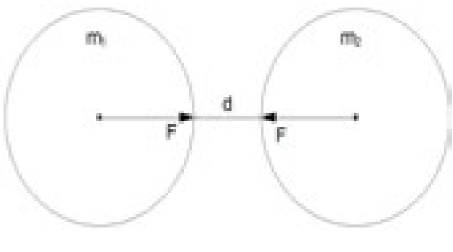


Figura 2.2.1:

la fuerza será:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{2.2.1}$$

(G) es la constante de proporcionalidad que dimensionalmente permite que el producto de masas divididas por (r^2) sea magnitud fuerza . El valor de G fue determinado por Henry Cavendish en 1780 mucho después de Newton

$$G = 6{,}67 \times 10^{-11} \left[\frac{Nm^2}{kg^2}\right]$$

luego los cuerpos en la tierra caen por la fuerza de la atracción gravitatoria.

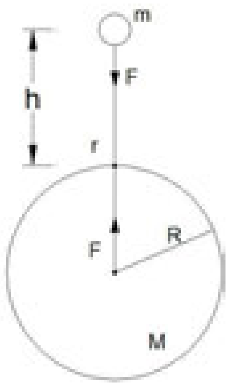


Figura 2.2.2:

Si
$M=$ masa de la tierra
$m=$ masa de un cuerpo

$$F = G \cdot M \frac{m}{r^2}$$

a nivel de la tierra r = R.

$$F = G \cdot M \frac{m}{R^2}$$

que sería el peso del cuerpo. Si agrupamos:

$$F = \left(\frac{G \cdot M}{R^2}\right) m$$

$\left(\frac{G \cdot M}{R^2}\right)$sería la aceleración de caída de los cuerpos y se llama aceleración a la gravedad y la fuerza peso P= mg, que actúa en el centro de gravedad del cuerpo. La aceleración de la gravedad a nivel tierra será

$$g = \frac{G \cdot M}{R^2} \tag{2.2.2}$$

y se llama gravedad normal y fue determinada por Galileo mucho antes de Newton

Como la tierra tiene diferente radio en los polos y en el ecuador su gravedad varía

Polos

$$g = 9{,}83 m/s^2$$

Ecuador

$$g = 9{,}72 m/s^2$$

a 45º latitud

$$g = 9{,}81 m/s^2$$

con la aceleración de la gravedad y con el valor de G se puede calcular la masa de la Tierra. A una distancia r, la gravedad será:

$$g_r = \left(\frac{G \cdot M}{r^2}\right) = \left(\frac{G \cdot M}{R^2}\right) \cdot \frac{R^2}{r^2} = \frac{g \cdot R^2}{r^2} \tag{2.2.3}$$

siendo g = gravedad normal.
y considerando respecto a (h)altura sobre la superficie de la tierra

$$g_h = \frac{gR^2}{(R+h)^2} = \frac{gR^2}{R^2\left(1+\frac{h}{R}\right)^2} = \frac{g}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2} \tag{2.2.4}$$

b) **Fuerzas eléctricas y magnéticas**

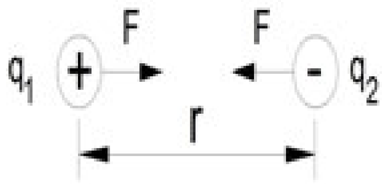


Figura 2.2.3:

Coulumb propone que las fuerzas eléctricas de atracción entre dos cargas diferente o de repulsión entre cargas iguales son directamente proporcionales a las cargas e inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia que las separa.

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{2.2.5}$$

$$k = 9 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{Cul^2}$$

siendo q = carga eléctrica medida en culombios.
De la misma manera las fuerzas de atracción o repulsión de los polos magnéticos de un imán pueden expresarse como una expresión similar a la fuerzas eléctricas.

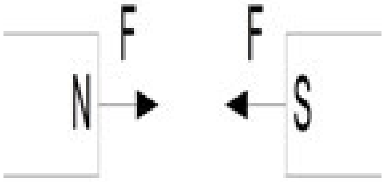


Figura 2.2.4:

$$F = H\frac{m_1' m_2'}{r^2} \tag{2.2.6}$$

siendo m$_1$' y m$_2$' las masas magnéticas de los polos, una especie de abstracción comparable a la masa inercial.

H se mide en $\left(\frac{N}{A \cdot m}\right)$siendo el Ampere la relación $\left(\frac{Culombio}{tiempo}\right)$.

Lo importante de las tres fuerzas naturales, la gravitatoria, la eléctrica y la magnética es que pueden ser expresadas de la siguiente manera:

Gravitatoria:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} = \left(\frac{Gm_1}{r^2}\right) m_2 = \overrightarrow{g} m_2 \tag{2.2.7}$$

Eléctrica:

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2} = \left(\frac{kq_1}{r^2}\right) q_2 = \overrightarrow{E} q_2 \tag{2.2.8}$$

Magnética:

$$F = H\frac{m_1' m_2'}{r^2} = \left(\frac{Hm_1'}{r^2}\right) m_2' = \overrightarrow{B} m_2' \tag{2.2.9}$$

es decir crear una magnitud alrededor de la masa, de la carga, y del polo magnético que depende de la misma y de la distancia a ella y se llama intensidad de campo.

$$\overrightarrow{g} = \text{intensidad de campo gravitatorio} \left(\frac{m}{s^2}\right)$$

$$\overrightarrow{E} = \text{intensidad de campo eléctrico} \left(\frac{N}{Coul}\right)$$

$$\overrightarrow{B} = \text{intensidad de campo magnético} \left(\frac{N}{A \cdot m}\right)$$

y se puede estudiar la interacción de las partículas o cargas con los respectivos campos.

Finalmente existe una fuerza creada por la interacción de una carga eléctrica que se mueve con velocidad (v)en un campo magnético. La fuerza es perpendicular a las dos magnitudes y se expresa como:

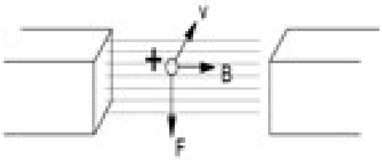


Figura 2.2.5:

$$\overrightarrow{F} = q\left(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}\right) \tag{2.2.10}$$

con la que se puede estudiar el movimiento de una partícula dentro de un campo magnético. Esta fuerza se llama fuerza electromagnética.

c) **Fuerzas de rozamiento**

Un cuerpo arrojado con velocidad inicial en un plano horizontal al cabo de un tiempo se detiene, el cuerpo experimenta una aceleración y la causa de esta aceleración es una fuerza que actúa paralelamente entre las superficies en contacto. Esta fuerza que se opone al movimiento se llama fuerza de fricción o de rozamiento.

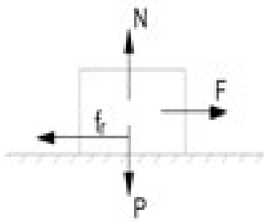


Figura 2.2.6:

La fuerza de rozamiento se manifiesta:

1. Para iniciar el movimiento del cuerpo (fuerza de rozamiento estática)

2. Durante el movimiento del cuerpo (fuerza de rozamiento cinética)

La fuerza se determina de forma totalmente experimental así: la máxima fuerza de rozamiento estática que se crea entre las dos superficies es la fuerza mínima necesaria para poner en movimiento el cuerpo y depende de la fuerza de reacción de la superficie (N) a la fuerza peso, llamada Fuerza Normal

$$f_r = \mu \cdot N \tag{2.2.11}$$

μ = coeficiente de rozamiento estático
N = fuerza de reacción, normal a la superficie de contacto.

Una vez en movimiento las fuerzas de fricción disminuyen de tal manera que se requiere una fuerza menor para mantenerlo en movimiento uniforme.

Podría usarse la misma forma de la fuerza de rozamiento estática, pero varios autores y experimentación determina que la fuerza se aproxima más a la relación

$$f_c = bv^n \tag{2.2.12}$$

siendo
b = coeficiente de rozamiento cinético.
v = velocidad del cuerpo
n = exponente experimental

Stokes en la caída de un cuerpo esférico en un medio viscoso propone que

$$f_c = bv, \text{ siendo } b = 6\pi\eta r$$

$$f_c = (6\pi\eta r)\, v$$

en donde:
η = coeficiente de viscosidad del líquido
r = radio del cuerpo
ν= velocidad de caída

d) **Fuerza del resorte**

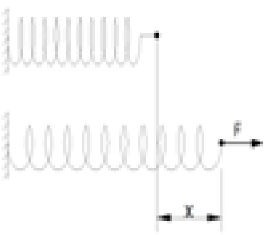


Figura 2.2.7:

En un resorte común al aplicar una fuerza se produce un desplazamiento (x), y al quitar la fuerza vuelve a su posición inicial. Si esto ocurre se dice que la deformación se halla dentro del límite elástico. Luego dentro del límite elástico, experimentalmente se prueba que la deformación es proporcional a la fuerza.

Expresado como:

$$F = kx \text{ siendo } k = \text{constante del resorte}$$

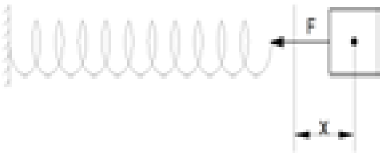


Figura 2.2.8:

Si la fuerza se aplica a un cuerpo, se estira un desplazamiento x, y el valor de la fuerza se expresa como:

$$F = -kx \tag{2.2.13}$$

porque se opone a la dirección del desplazamiento, y aplicando las ecuaciones del movimiento se puede analizar el mismo, como se verá más adelante.

Capítulo 3

Movimientos en diferentes sistemas

3.1. Diagrama de cuerpo libre

Para estudiar cualquier tipo de movimiento en primer lugar se debe dibujar un esquema que contenga el cuerpo y las fuerzas que actúan en el mismo. Este esquema se llama un diagrama de cuerpo libre y debe analizarse para cada cuerpo que intervenga en el movimiento.

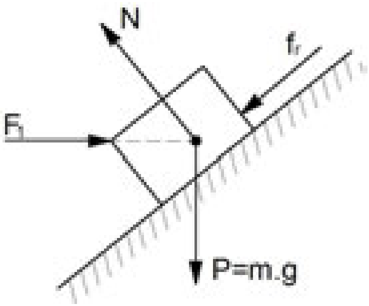


Figura 3.1.1:

En un cuerpo rígido las fuerzas se consideran actuando en el centro de masa del cuerpo. Estas fuerzas son:

1. El peso del cuerpo que actúa en el centro de masa.

$$\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$$

2. La fuerza normal para cuerpos que están asentados o en contacto con otros y es perpendicular a la superficie de contacto $\left(\overrightarrow{N}\right)$.

3. Las fuerzas externas $\left(\overrightarrow{F_i}\right)$naturales o de otro tipo. En caso de cables las fuerzas actúan en dirección de esos cables.
4. La fuerza de rozamiento $\left(\overrightarrow{f_r}\right)$,que se dibuja con dirección opuesta a la velocidad del cuerpo.

Una vez que se tiene el diagrama de fuerzas se introduce el sistema de referencia que se usará. La elección del sistema: Rectagular, Polar, Normal y Tangencial, ó cualquier otro dependera de la naturaleza de las fuerzas, tal que permita obtener ecuaciones diferenciales con solución.

3.2. Fuerza y aceleración en coordenadas rectangulares

Dada la ecuación

$$\sum \overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$$

la fuerza coordenadas rectangulares se expresan como:

$$\overrightarrow{F} = F_x \overrightarrow{i} + F_y \overrightarrow{j} + F_z \overrightarrow{k}$$

o para la suma

$$\sum \overrightarrow{F} = \sum F_x \overrightarrow{i} + \sum F_y \overrightarrow{j} + \sum F_z \overrightarrow{k}$$

la velocidad y la aceleración

$$\overrightarrow{v} = \dot{x}\overrightarrow{i} + \dot{y}\overrightarrow{j} + \dot{z}\overrightarrow{k} = v_x \overrightarrow{i} + v_y \overrightarrow{j} + v_z \overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{a} = \ddot{x}\overrightarrow{i} + \ddot{y}\overrightarrow{j} + \ddot{z}\overrightarrow{k} = a_x \overrightarrow{i} + a_y \overrightarrow{j} + a_z \overrightarrow{k}$$

anotando que

$$\ddot{x} = \frac{dv_x}{dt} = v_x \frac{dv_x}{dx} = \frac{d^2x}{dt^2} \tag{3.2.1}$$

$$\ddot{y} = \frac{dv_y}{dt} = v_y \frac{dv_y}{dy} = \frac{d^2y}{dt^2} \tag{3.2.2}$$

$$\ddot{z} = \frac{dv_z}{dt} = v_z \frac{dv_z}{dz} = \frac{d^2z}{dt^2} \tag{3.2.3}$$

por lo que tenemos tres componentes:

$$\sum F_x = ma_x \tag{3.2.4}$$

$$\sum F_y = ma_y \tag{3.2.5}$$

$$\sum F_z = ma_z \tag{3.2.6}$$

La aplicación es posible si

$$F_x = f(t),\ F_x = f(x),\ F_x = f(v_x),\ F_x = \text{const},\ F_x = 0$$

$$F_y = f(t),\ F_y = f(y),\ F_y = f(v_y),\ F_y = \text{const},\ F_y = 0$$

$$F_z = f(t),\ F_z = f(z),\ F_z = f(v_z),\ F_z = \text{const},\ F_z = 0$$

3.2.1. Lanzamiento de cuerpos

Se establece el origen del sistema de coordenadas rectangulares en el punto donde se lanza la partícula.

Si se considera el movimiento en una dimensión.

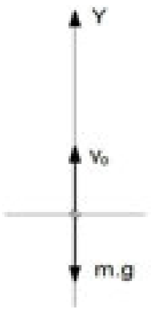


Figura 3.2.1:

$$F_y = -mg$$

$$m\frac{dv_y}{dt} = -mg$$

$$\int_{v_0}^{v} dv_y = -\int_{0}^{t} mgdt$$

$$v - v_0 = gt$$

$$v = v_0 - gt$$

e integrando nuevamente

$$y = v_0 y - \frac{gt^2}{2}$$

si el lanzamiento es inclinado.- solo actúa la fuerza F_y y $F_x = 0$.- movimiento en 2 dimensiones.

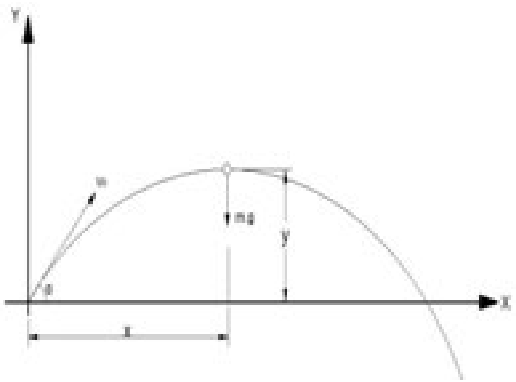


Figura 3.2.2:

Condiciones:
$v_{ox} = v_0 cos\alpha$
$v_{oy} = v_0 sen\alpha$

Aplicando en (ox)

$$F_x = 0 \tag{3.2.7}$$

$$ma_x = 0 \tag{3.2.8}$$

$$a_x = 0 \tag{3.2.9}$$

$$v_{ox} = v_0 \cos(\alpha) \tag{3.2.10}$$

$$x = v_{0x} t \tag{3.2.11}$$

Aplicando en (oy)

$$F_y = -mg \tag{3.2.12}$$

$$m\frac{dv_y}{dt} = -mg$$

$$v_y - v_{0y} = -gt$$

$$v_y = v_{0y} - gt \tag{3.2.13}$$

$$y = v_{oy}t - \frac{gt^2}{2} \tag{3.2.14}$$

3.2.2. Caída de un cuerpo en un medio viscoso

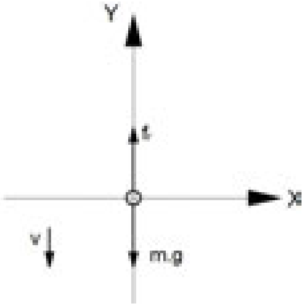


Figura 3.2.3:

En el movimiento de caída actúa la fuerza de rozamiento del medio viscoso, aire, agua, aceite, etc.

La fuerza de rozamiento cinética [fr = b(-v)] es decir actúa en sentido contrario a la velocidad [6].

Stokes propone que para partículas esféricas

$$b = 6\pi\eta r$$

pero analizaremos en forma general. Aplicando

$$\sum \overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$$

$$-mg - bv = m\frac{dv}{dt},$$

Ecuación diferencial con solución

$$\frac{m}{b}dv = \left(\frac{mg}{b} + v\right)dt$$

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v + \left(\frac{mg}{b}\right)} = -\int_{0}^{t} \frac{b}{m}dt$$

$$v = -\frac{mg}{b}(1 - e^{-\frac{bt}{m}})$$

para tiempos grandes

$$e^{-\frac{bt}{m}} \approx 0 \text{ y } v_l = -\frac{mg}{b}$$

es decir la velocidad se vuelve constante o existe una velocidad límite. Los cuerpos que caen en medios viscosos llegan a una velocidad límite que es constante y de acuerdo a la ecuación resulta cuando se iguala el peso a la fuerza de rozamiento en el límite.

$$bv_\ell = -mg$$

Si se desarrolla el exponencial en serie:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}$$

la velocidad será:

$$v = gt + \frac{1}{2}\frac{bg}{m}t^2 + ...$$

y nótese que solo para tiempos muy pequeños la velocidad es acelerada como caída libre

$$v \approx gt$$

cuando integramos la velocidad, calculamos el espacio

$$y = \frac{m^2 g}{b^2}\left(1 - \frac{bt}{m} - e^{-\frac{bt}{m}}\right)$$

3.2.3. Tiro en el aire

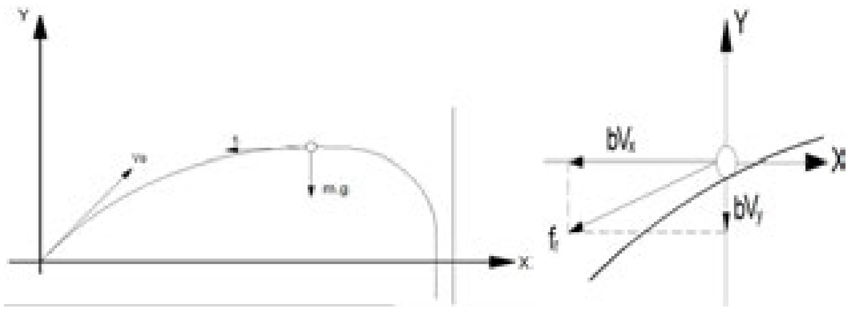


Figura 3.2.4:

Se puede analizar varios planteamientos para obtener el modelo matemático del movimiento el mismo que para ser aceptado deberían experimentarse.

Un planteamiento es considerar que la fuerza de rozamiento es de la forma (bv) y actúa en cada eje [6]

$$\overrightarrow{fr} = -bv_x \overrightarrow{i} - bv_y \overrightarrow{j}$$

y en cada eje las ecuaciones serian:
En el eje (ox)

$$\sum Fx = ma_x$$

$$-bv_x = m\ddot{x}$$

$$-bv_x = m\frac{dv_x}{dt}$$

$$\int_{v_{ox}}^{v_x} \frac{dv_x}{v_x} = \int_0^t -\frac{b}{m}t$$

En el eje (oy)

$$\sum Fy = ma_y$$

$$-mg - bv_y = m\ddot{y}$$

$$-mg - bv_y = m\frac{dv_y}{a}$$

$$\int_{v_{0y}}^{v_y} \frac{dv_y}{v_y + \left(\frac{mg}{b}\right)} = -\int_0^t \frac{b}{m}dt$$

lo que daran 2 ecuaciones:
En la coordenada (x):

$$v_x = v_{0x}e^{-\frac{bt}{m}}$$

$$x = \frac{mv_{0x}}{b}\left(1 - e^{-\frac{bt}{m}}\right) \tag{3.2.15}$$

y en la coordenada (y):

$$v_y = \left(\frac{mg}{b} + v_{0y}\right)e^{-\frac{bt}{m}} - \frac{mg}{b}$$

$$y = \left(\frac{m^2g}{b^2} + \frac{mv_{0y}}{b}\right)\left(1 - e^{-\frac{bt}{m}}\right)\frac{mg}{b}t \tag{3.2.16}$$

si se quiere la trayectoria se despejará tiempo de la ecuación (1) y se sustituirá en la ecuación (2)

Nótese que para t grandes $v_x \approx 0$

y el valor de x tiene un límite

$$x_{max} = \frac{mv_{0x}}{b}$$

y la velocidad en y es la velocidad de caida limite

$$v_y = -\frac{mg}{b}$$

Un segundo planteamiento para el estudio del movimiento y que puede ser más cercano a la realidad es suponer la fuerza de resistencia proporcional a v^2 HAUSSNER Y HUDSON[1] [1]

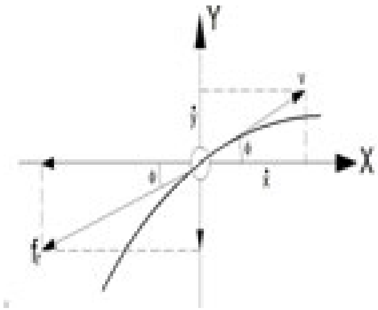


Figura 3.2.5:

$$fr = -kv^2$$

y las ecuaciones de fuerza serían

$$m\ddot{x} = -kv^2 \cos\phi$$

$$m\ddot{y} = -kv^2 \sin\phi - mg$$

existen muchas formas de solución si se establecen ciertas condiciones. En nuestro caso

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$$

$$\cos\phi = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$$

[1] Ver Mecánica Aplicada: Haussner y Hudson, 4ta Edición, CECSA.

$$\sin\phi = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$$

sustituyendo

$$m\ddot{x} = -k\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$$

$$m\ddot{y} = -k\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} - mg$$

simplificamos

$$m\ddot{x} = -k\dot{x}\sqrt{\dot{x}^2\left(1 + \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2\right)}$$

$$m\ddot{y} = -k\dot{y}\dot{x}\sqrt{\left(1 + \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2\right)} - mg$$

las ecuaciones tienen solución muy compleja. Se pueden obtener soluciones simples para casos en que el valor $\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)$ sea muy pequeño, es decir para tiros de largo alcance donde la velocidad en y es pequeña comparada con la velocidad en x, en ese caso:

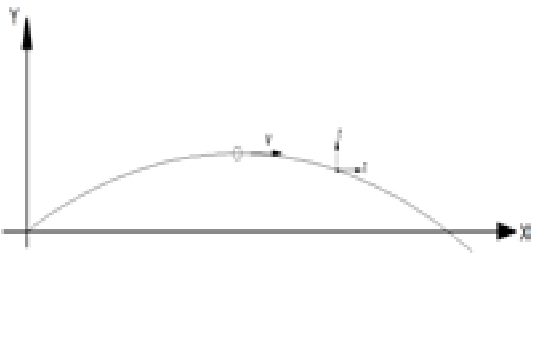


Figura 3.2.6:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 0$$

quedando

$$m\ddot{x} = -k\dot{x}^2$$

$$m\ddot{y} = -k\dot{y}\dot{x} - mg$$

la solución, si:

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}$$

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = -\frac{k\dot{x}^2}{m}$$

$$\frac{d\dot{x}}{\dot{x}^2} = -\frac{k}{m}dt$$

e integrando

$$-\frac{1}{\dot{x}} = -\frac{kt}{m} + C_1$$

$$t = 0$$

$$\dot{x} = \dot{x}_0$$

sustituyendo

$$\dot{x} = \frac{\dot{x}_0}{\frac{kt}{m}\dot{x}_0 + 1}, \text{ valor de la velocidad en x}$$

sustituyendo este valor en la ecuación de (y)

$$\ddot{y} + \frac{\dot{y}}{t + \frac{m}{\dot{x}_0}} = -g \tag{3.2.17}$$

Ecuación diferencial de segundo orden no homogénea cuya solución es igual a la solución general de la homogénea más la solución particular de la completa.

La homogénea

$$\ddot{y} + \frac{\dot{y}}{t + \frac{m}{k\dot{x}_0}} = 0$$

por separación de variables

$$\frac{d\dot{y}}{dt} = -\frac{\dot{y}}{t + \frac{m}{k\dot{x}_0}}$$

$$\frac{d\dot{y}}{\dot{y}} = -\frac{dt}{t + \frac{m}{k\dot{x}_0}}$$

solución en

$$ln\dot{y} = -ln\left(t + \frac{m}{k\dot{x}_0}\right) + lnC_2$$

$$\dot{y} = \frac{C_2}{t + \frac{m}{k\dot{x}_0}} \text{ que es la solución de la homogenea}$$

para la solución particular, suponer:

$$\dot{y} = C_3\left(t + \frac{m}{k\dot{x}_0}\right) \tag{3.2.18}$$

sustituyendo en la ecuación (5):

$$\ddot{y} + C_3 = -g$$

derivando la ecuación (6) y sustituyendo

$$C_3 + C_3 = -g$$

$$C_3 = -\frac{g}{2}$$

Luego la solución de la completa

$$\dot{y} = \frac{C_2}{t + \frac{m}{k\dot{x}_0}} - \frac{g}{2}\left(t + \frac{m}{k\dot{x}_0}\right)$$

para t=0

$$\dot{y} = \dot{y}_0$$

$$C_2 = \frac{m}{k\dot{x}_0}\left(\dot{y}_0 + \frac{g}{2}\frac{m}{k\dot{x}_0}\right)$$

y sustituyendo

$$\dot{y} = \frac{\dot{y}_0 + \frac{g}{2}(\frac{m}{k\dot{x}_0})}{\frac{k\dot{x}_0}{m}t + 1} - \frac{g}{2}\left(t + \frac{m}{k\dot{x}_0}\right) \tag{3.2.19}$$

los valores de (x) y de (y) pueden calcularse volviendo a integrar las ecuaciones de velocidad.

3.2.4. Oscilaciones mecánicas

Las oscilaciones de partículas sometidas a fuerzas del resorte pueden ser: simples, amortiguadas si actúa la fuerza de rozamiento y forzadas con un oscilador adicional [1].

Consideremos el sistema más simple que contenga las características de un problema de vibración, sobre una masa (m) y que se mueve solo en una dirección, en el eje (ox)

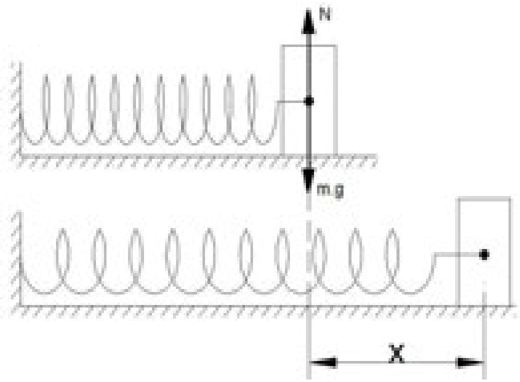


Figura 3.2.7: Resorte

En equilibrio, la fuerza normal se anula con el peso

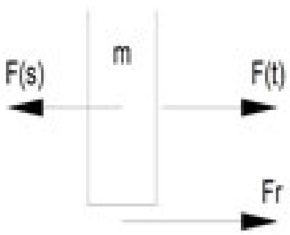


Figura 3.2.8:

Con el resorte estirado, la masa esta sujeta a

$$F_S = \text{fuerza del resorte } F_S = -kx$$

$$F_r = \text{fuerza de rozamiento } F_r = c\left(-\dot{x}\right) = -c\dot{x}$$

$$F(t) = \text{fuerza exitatoria dependiente del tiempo } t$$

- Con la fuerza solo del resorte, el movimiento es simple o libre de amortiguamiento.

- Con la fuerza de resorte y de rozamiento es el movimiento oscilatorio amortiguado.

- Con las tres fuerzas es el movimiento oscilatorio forzado. La ecuación general será:

$$\sum \overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$$

$$F_s + F_r + F(t) = m\ddot{x} \tag{3.2.20}$$

Analizaremos cada caso

3.2.4.1. Movimiento oscilatorio simple

La ecuación que representa el movimiento será:

$$F_s = m\ddot{x} \tag{3.2.21}$$

$$-kx = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x \quad = \quad 0$$

Ecuación diferencial del movimiento oscilatorio armónico simple. Si se escribe la ecuación como:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

siendo

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

El diferencial establece que la segunda derivada de una función es la misma función cambiada de signo y esa función solo puede ser seno o coseno, y por lo tanto la suma de las dos soluciones es la solución general de la homogenea.

$$x = C_1 \sin(pt) + C_2 \cos(pt)$$

$$\dot{x} = C_1 P \cos(pt) - C_2 P \sin(pt)$$

donde C_1, C_2y (p) con constantes de integración que deben ser evaluadas según condiciones iniciales

$$t = 0 \ ; \ x = A \ ; \ \dot{x} = 0$$

$$C_2 = A$$

$$C_1 = \frac{\dot{x}_0}{p}$$

luego,

$$x = \frac{\dot{x}_0}{p} \sin pt + A \cos pt$$

$$x = A \cos pt$$

si derivamos dos veces y sustituímos en la ecuación inicial

$$\ddot{x} = -Ap^2 \cos pt = -p^2 k$$

$$-p^2 x = -\omega^2 x$$

$$\omega = p$$

$$\omega = \frac{k}{m}$$

y la solución es:

$$x = A \cos \omega t \tag{3.2.22}$$

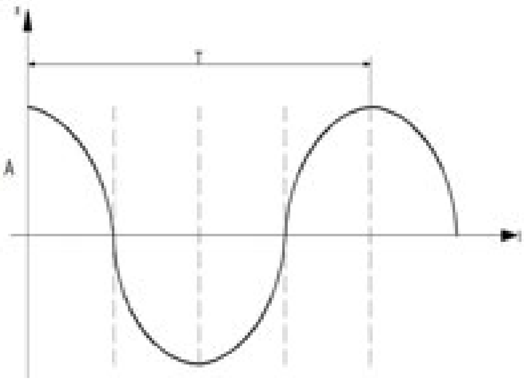


Figura 3.2.9:

si aumentamos el tiempo en un valor

$$\frac{2\pi}{\omega}$$

$$x = A\cos\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = A\cos(\omega t + 2\pi) = A\cos\omega t$$

es decir el tiempo que regresa nuevamente a la posición inicial y este tiempo se llama periodo

$$\text{Periodo } T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{3.2.23}$$

(ω) tiene dimensión $\left(\frac{1}{s}\right)$como una velocidad angular y se llama frecuencia angular

El inverso del periodo, es el número de periodos por unidad de tiempo o por segundo y se llama frecuencia.

$$\text{Frecuencia } f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \text{ y } \omega = 2\pi f$$

como

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

el periodo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{3.2.24}$$

3.2.4.2. Movimiento oscilatorio amortiguado

Las fuerzas que actúan en el cuerpo son las fuerzas del resorte y la fuerza de rozamiento

$$\sum \overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$$

$$-kx - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \tag{3.2.25}$$

Ecuación diferencial del movimiento oscilatorio amortiguado

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

y llamado:

$$\frac{c}{m} = 2n$$

$$\frac{k}{m} = p^2$$

por comodidad, queda:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2x = 0 \tag{3.2.26}$$

Ecuación diferencial de segundo orden lineal homogénea. La solución general es la suma de dos soluciones particulares por lo que se tantea la solución haciendo

$$x = Ce^{\lambda t}(1)$$

derivamos y sustituímos

$$C\lambda^2 e^{\lambda t} + 2Cn\lambda e^{\lambda t} + p^2 Ce^{\lambda t} = 0$$

simplificando

$$\lambda^2 + 2n\lambda + p^2 = 0 \ (2)$$

Llamada ecuación característica. La ecuación (1) es una solución cuya constante λ está condicionada por la ecuación (2). La ecuación tiene 2 soluciones para λ

$$\lambda_1 = -n + \sqrt{n^2 - p^2}$$

$$\lambda_2 = -n - \sqrt{n^2 - p^2}$$

luego como existen dos valores de λ, la solución general será:

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

Casos:

1. Si $n^2 > p^2$ los valores de λ, son reales negativos $(-\alpha_1, -\alpha_2)$y la solución será:

$$x = C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t}$$

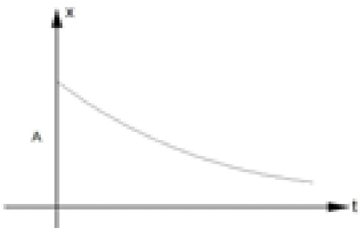


Figura 3.2.10:

Físicamente se interpreta como que el movimiento no es oscilatorio y llega a cero en el infinito tal como dice la curva de desplazamiento.

El movimiento se llama sobreamortiguado porque debido al factor de rozamiento alto experimentalmente el cuerpo no llega a la posición de equilibrio.

El caso práctico sería introducir el cuerpo en grasa muy viscosa, y ocurre cuando:

$$\left(\frac{c}{2m}\right)^2 > \frac{k}{m}$$

2. Si $n^2 = p^2$, es decir:

$$\left(\frac{c}{2m}\right)^2 = \frac{k}{m}$$

$$\frac{c}{2m} = p = c_c$$

y en estas condiciones el valor de

$$\frac{c}{2m} = c_c \text{ , coeficiente de amortiguamiento crítico}$$

La ecuación característica tiene una sola raiz

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -n$$

$$x_1 = Ae^{-pt}$$

y para la otra solución utilizaremos metodo del parametro obteniendo:

$$x = (A + Bt)\, e^{-pt}$$

la ecuación del amortiguamiento crítico, es decir que el cuerpo llega a la posición de equilibrio donde se detiene sin oscilar. Las constantes A y B serán determinadas con las condiciones del problema correspondiente.

3. Si $n^2 < p^2$, es decir

$$\left(\frac{c}{2m}\right)^2 < \frac{k}{m}$$

entonces tenemos dos raíces imaginarias

$$\lambda_1 = -n + i\sqrt{p^2 - n^2}$$

$$\lambda_2 = -n - i\sqrt{p^2 - n^2}$$

y la solución general es

$$x = C_1 e^{\left(-n+i\sqrt{p^2-n^2}\right)t} + C_2 e^{\left(-n-i\sqrt{p^2-n^2}\right)t}$$

$$x = e^{-nt}\left(C_1 e^{i\sqrt{p^2-n^2}t} + C_2 e^{-i\sqrt{p^2-n^2}t}\right)$$

y considerando la relacion de euler

$$e^{\imath\theta} = \cos\theta + \imath sen\theta$$

$$e^{-\imath\theta} = \cos\theta - \imath sen\theta$$

el valor de x es

$$x = e^{-nt}\left[(C_1 + C_2)\cos\sqrt{p^2-n^2}t + i\,(C_1 - C_2)\,sen\sqrt{p^2+n^2}t\right]$$

como C_1 y C_2son constantes arbitrarias determinadas por condiciones iniciales, podemos introducir nuevas constantes

$$i\,(C_1 - C_2) = C_1', \text{ o simplemente } C_1$$

$$(C_1 + C_2) = C_2', \text{ o simplemente } C_2$$

queda

$$x = e^{-nt}\left[C_1 sen\sqrt{p^2-n^2}t + C_2\cos\sqrt{p^2-n^2}t\right] \qquad (3.2.27)$$

donde si ($n = 0$), es decir no existe rozamiento, el movimiento es el armónico simple ya estudiado

$$x = C_1 senpt + C_2\cos pt$$

La gráfica del movimiento oscilatorio amortiguado será

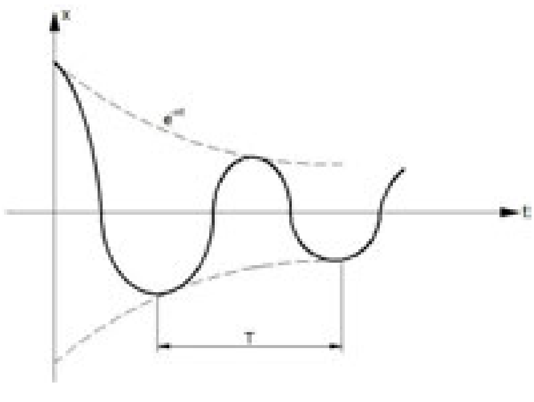


Figura 3.2.11:

El periodo

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{p^2 - n^2}}$$

$$n = \frac{c}{2m}$$

aumenta el tiempo de vibración y la amplitud disminuye exponencialmente con el tiempo. Las ecuciones pueden reducirse aún más

$$x = C_1 senpt + C_2 \cos pt$$

La suma de seno más coseno da una función también sinusoidal, es decir si

$$C_1 = Asen\phi$$

$$C_2 = A\cos\phi$$

$$x = Asen\left(pt + \phi\right), \text{ movimiento simple, o:}$$

$$x = Ae^{-nt} sen\left(\sqrt{p^2 - n^2}t + \phi\right), \text{ movimiento amortiguado}$$

donde

$$n = \frac{c}{2m}$$

$$p = \frac{k}{m}$$

3.2.4.3. Oscilaciones forzadas

La ecuación de fuerzas incluye una fuerza externa F(t) excitatriz que puede ser de diferente tipo pero dependiente del tiempo, como impactos sucesivos o fuerzas alternativas no equilibradas que presentan variación sinusoidal como es, por ejemplo la superposición de 2 resortes . Para nuestro caso usaremos la fuerza

Figura 3.2.12:

$$F_s = F_0 sen\omega t$$

$$\omega = \text{frecuencia externa}$$

$$p = \text{frecuencia interna}$$

la ecuación de fuerzas será

$$-kx - c\dot{x} + F_0 sen\omega t = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 sen\omega t \tag{3.2.28}$$

Ecuación diferencial del movimiento oscilatorio forzado

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m} sen\omega t$$

y llamando

$$\frac{c}{m} = 2n$$

$$\frac{k}{m} = p^2$$

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2 x = \frac{F_0}{m}\sin\omega t \ (1)$$

Es una ecuación diferencial de segundo orden lineal no homogénea o completa. La solución general de la no homogénea es igual a la solución general de la homogénea más una solución particular de la completa es decir como tenemos la solución de la homogénea, la solución general será:

$$x = e^{-nt}\left[C_1 sen\sqrt{p^2 - n^2}t + C_2\cos\sqrt{p^2 - n^2}t\right] + f(t)$$

siendo f(t) la solución particular de la completa. La solución particular puede ser tomada por tanteo

$$x_p = Asen\omega t + B\cos\omega t \ (2)$$

determinaremos las condiciones bajo las cuales esta solución es una solución particular de la completa, derivando

$$\dot{x}_p = A\omega\cos\omega t - B\omega sen\omega t$$

$$\ddot{x}_p = -A\omega^2 sen\omega t - B\omega^2\cos\omega t$$

sustituyendo en la ecuación (1)

$$A\omega^2 sen\omega t - B\omega^2\cos\omega t + 2nA\omega\cos\omega t - 2nB\omega sen\omega t + p^2 Asen\omega t + p^2 B\cos\omega t = \frac{F_0}{m} sen\omega t$$

agrupando

$$(-A\omega^2 - 2nB\omega + p^2A)sen\omega t + \left(-B\omega^2 + 2nA\omega + p^2B\right)\cos\omega t = \frac{F_0}{m}sen\omega t$$

igualando funciones seno y coseno en los dos miembros porque es condición para que la ecuación sea idénticamente satisfecha:

$$\left(p^2 - \omega\right)A + (-2n\omega)B = \frac{F_0}{m}$$

$$(2n\omega)\,A + (p^2 - \omega^2)B = 0$$

tenemos dos ecuaciones que determinarían los valores de A y B de la ecuación (2) para que la misma sea una solución.

Calculando A y B por determinantes

$$A = \frac{\begin{bmatrix} \frac{F_0}{m} & (-2n\omega) \\ 0 & (p^2 - \omega^2) \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} (p^2 - \omega^2) & (-2n\omega) \\ (2n\omega) & (p^2 - \omega^2) \end{bmatrix}} = \frac{\frac{F_0}{m}\left(p^2 - \omega^2\right)}{\left(p^2 - \omega^2\right)^2 + 4n^2\omega^2}$$

$$B = \frac{\begin{bmatrix} (p^2 - \omega^2) & \left(\frac{F_0}{m}\right) \\ 2n\omega & 0 \end{bmatrix}}{\left(p^2 - \omega^2\right)^2 + 4n^2\omega^2} = \frac{-2n\omega\frac{F_0}{m}}{\left(p^2 - \omega^2\right)^2 + 4n^2\omega^2}$$

en las expresiones

$$\omega = \text{frecuencia exitatriz o externa}$$

$$p = \text{frecuencia propia del sistema}$$

A y B son los coeficientes de la ecuación solución particular

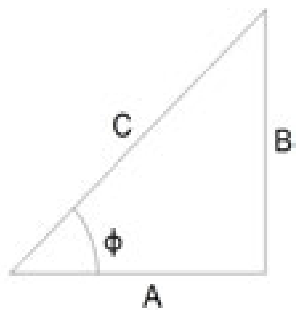


Figura 3.2.13:

$$x_p = A\sin\omega t + B\cos\omega t$$

cambiando coeficientes

$$A = C\cos\phi$$

$$B = Csen\phi$$

$$x_p = Csen\left(\omega t + \phi\right)$$

pero

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$x_p = \sqrt{A^2 + B^2} sen\left(\omega t + \phi\right)$$

$$x_p = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(p^2 - \omega^2\right)^2 + 4n^2\omega^2}} sen\left(\omega t + \phi\right)$$

donde

$$\phi = \tan^{-1}\left(-\frac{B}{A}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2n\omega}{p^2 - \omega^2}\right)$$

luego la solución general de la no homogénea o completa, será

$$x = e^{-nt}\left[C_1 sen\sqrt{p^2 - n^2}t + C_2 \cos\sqrt{p^2 - n^2}t\right] + \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(p^2 - \omega^2\right)^2 + 4n^2\omega^2}} sen\left(\omega t + \phi\right)$$

que representa la superposición de dos movimientos oscilatorios de frecuencias (f_1) y (f_2)

f_1 =frecuencia del sistema propio

$$f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{p^2 - n^2}$$

f_2 =frecuencia del sistema excitatriz

$$f_2 = \frac{1}{2\pi}\omega$$

Cuando t es grande el valor e^{-nt}tiende a cero por lo tanto el primer término de la ecuación va decreciendo y desaparece, llamándose movimiento transitorio y permanece solo el movimiento que describe el segundo término llamándose estado constante o permanente. El movimiento oscilatorio forzado termina siendo un movimiento oscilatorio simple.

$$x = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(p^2 - \omega^2\right)^2 + 4n^2\omega^2}} sen\left(\omega t + \phi\right) = Asen\left(\omega t + \phi\right)$$

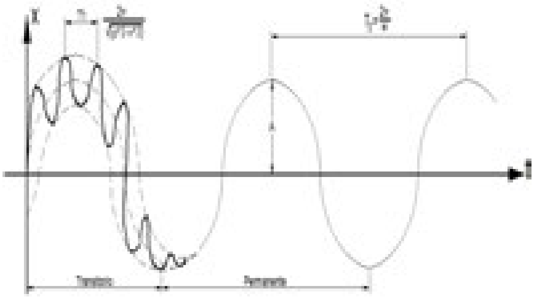


Figura 3.2.14:

La amplitud que tiene el movimiento en régimen permanente es la del movimiento oscilatorio simple y vale:

$$A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(p^2 - \omega^2\right)^2 + 4n^2\omega^2}}$$

y dividiendo el numerador y el denominador por p^2y sabiendo que $p^2 = \frac{k}{m}$

$$A = \frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{p}\right)^2\right]^2 + \left[2\left(\frac{n}{p}\right)\left(\frac{\omega}{p}\right)\right]^2}}$$

ecuación que establece que la amplitud del movimiento permanente resultante depende de las relaciones

$$\frac{\omega}{p} = \frac{\text{frecuencia externa}}{\text{frecuencia propia}}$$

$$\frac{n}{p} = \frac{\text{factor de amoriguamiento}}{\text{frecuencia propia}}$$

cuando $\omega = p$ la condición se dice de resonancia (frecuencia externa=frecuencia propia del en este caso si n=0 (sin rozamiento) la amplitud sería infinita es decir que el sistema se rompería. Todas las otras condiciones determinan una amplitud resultante como se expresa en la gráfica.

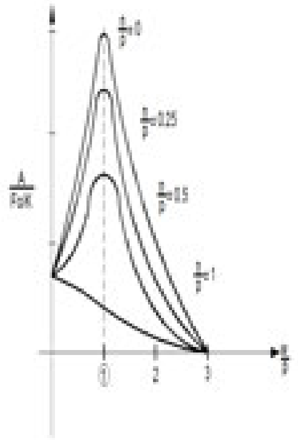


Figura 3.2.15: Amplitud del movimiento forzado

3.3. Fuerza y aceleración en coordenadas normal y tangencial

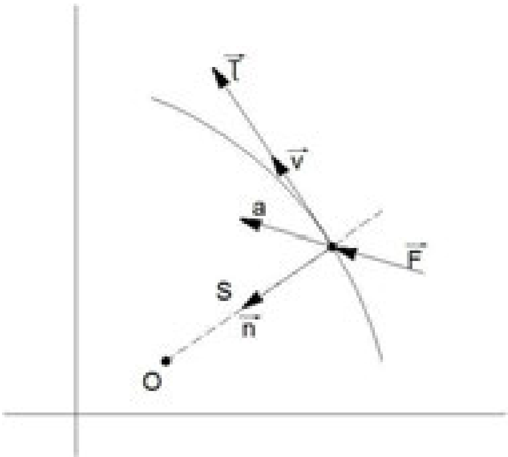


Figura 3.3.1: Coordenadas Normal y Tangencial

La fuerza en coordenadas normal y tangencial tendrá dos componentes según la tangente ($\overrightarrow{\tau}$) y según la normal ($\overrightarrow{n}$)

$$\overrightarrow{F} = F_{\tau}\overrightarrow{\tau} + F_n\overrightarrow{n}$$

se conoce la dirección de la velocidad:

$$\overrightarrow{v} = v\overrightarrow{\tau}$$

y la aceleración

$$\overrightarrow{a} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\overrightarrow{n}$$

$$\rho = \text{radio instantáneo de curvatura}$$

$$\vec{a} = \text{aceleración tangencial} + \text{aceleración centrípeta}$$

luego la ecuación

$$\sum \overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$$

se escribe como

$$\sum \left(F_\tau \overrightarrow{\tau} + F_n \overrightarrow{n}\right) = m\left(\frac{dv}{dt}\overrightarrow{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\overrightarrow{n}\right)$$

e igualando en cada dirección

$$\sum F_\tau = m\frac{dv}{dt} \text{ (Fuerza tangencial)}$$

$$\sum F_n = m\frac{v^2}{\rho} \text{ (Fuerza centrípeta)}$$

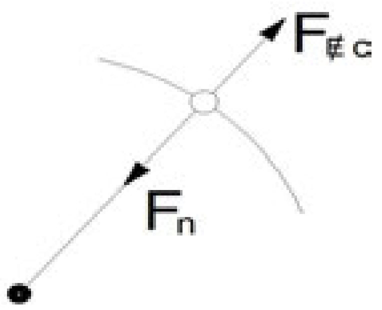


Figura 3.3.2: Fuerza centrípeta y Fuerza centrífuga

La reacción a la fuerza centrípeta en cuerpos atados o en contacto se llama fuerza centrífuga

Por ejemplo un carro que toma una curva de radio R, aparece la fuerza como centrífuga es decir tiende a virarlo, por eso se construye el peralte o inclinación de la carretera y el ángulo dependerá de la velocidad del vehículo, para que la resultante sea perpendicular a la carretera.

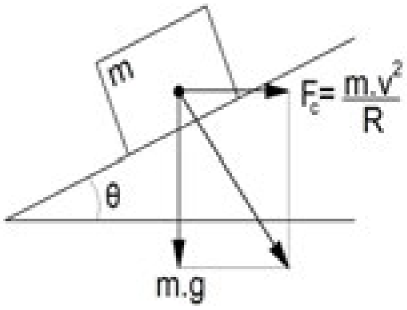


Figura 3.3.3: Fuerza centrífuga

3.4. Fuerza y aceleración en coordenadas polares.

La fuerza en coordenadas polares, tendrá dos componentes:

F_r en la dirección del radio vector $\overrightarrow{i_r}$

F_θ en la dirección perpendicular al radio vector $\left(\overrightarrow{i_\theta}\right)$

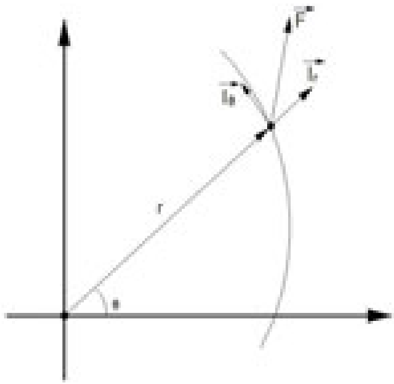


Figura 3.4.1: Fuerza en coordenadas polares

$$\overrightarrow{F} = F_r \overrightarrow{i_r} + F_\theta \overrightarrow{i_\theta}$$

la aceleración también tiene dos componentes

$$\overrightarrow{a} = a_r \overrightarrow{i_r} + a_\theta \overrightarrow{i_\theta}$$

$$\overrightarrow{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) \overrightarrow{i_r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right) \overrightarrow{i_\theta}$$

luego la ecuación de fuerza

$$\sum \overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$$

se puede escribir en los dos componentes

$$\sum F_r = m\left[\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right] = m\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]$$

$$\sum F_\theta = m\left[r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right] = m\left[r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\left(\frac{dr}{dt}\right)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\right]$$

las ecuaciones son muy útiles para estudiar el movimiento de partículas, sometido a fuerzas central y particularmente el movimiento de planetas.

3.4.1. Movimiento por fuerza central

En general son fuerzas centrales, aquella que actúan siempre orientados a un punto fijo (O). Estas fuerzas son fundamentalmente fuerzas de atracción o repulsión como la gravitatoria, la eléctrica o la fuerza magnética. Si se coloca un sistema de coordenadas polares con el polo coincidiendo en uno de los cuerpos

$$O = \text{punto fijo}$$

aplicando

$$F_r = F$$

$$F_\theta = 0$$

el signo lo analizaremos después

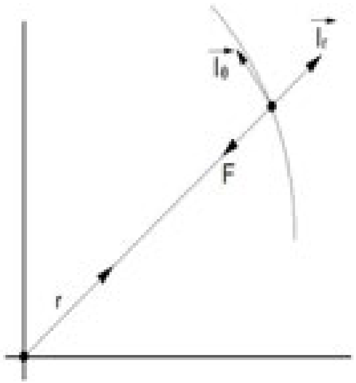


Figura 3.4.2: Fuerza central

Las ecuaciones de movimiento son:

$$\frac{F}{m} = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \ (1)$$

$$0 = r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)(2)$$

analizando la ecuación (2), la misma puede escribirse como

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = 0$$

lo que conduce a establecer que

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = h$$

$$h = \text{constante}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}\ (3)$$

para calcular $\frac{d^2r}{dt^2}$ realizaremos lo siguiente:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -h\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dr}{dt}\right)\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dr}{dt}\right) = \frac{h}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left[-h\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right]$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{h^2}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)\ (4)$$

y sustituyendo (3) y (4) en la ecuación (1)

$$-\frac{h^2}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) - r\left(\frac{h}{r^2}\right)^2 = \frac{F}{m}$$

cambiando variable

$$\frac{1}{r} = u$$

y haciendo

$$\text{Fuerza de atracción } = -F$$

$$\text{Fuerza repulsión } = +F$$

para nuestro caso con la fuerza de atracción, y multiplicando por $\left(\frac{r^2}{h^2}\right)$

$$-\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r} = -\frac{Fr^2}{mh^2}$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{F}{mh^2u^2} \tag{3.4.1}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2} \tag{3.4.2}$$

que son las ecuaciones diferenciales del movimiento por fuerza central.

3.4.2. Aplicación al movimiento planetario

La aplicación más importante de la ecuación del movimiento por fuerza central, la realizó el mismo Newton cuando planteó la ecuación para explicar mediante el modelo matemático propuesto por él, las leyes del movimiento planetario que fueron expuestos por Kepler en 1609 publicados en su libro "Nueva Astronomía" antes de que Newton proponga su teoría.

Kepler establece que los planetas giran al rededor del sol y se rigen por tres leyes:

1. Los planetas describen órbitas elípticas alrededor del sol que se ubica en uno de los focos de la elipse.

2. El radio vector que une el sol con un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.

3. Los cuadrados de los períodos de revolución de los planetas alrededor del sol son proporcionales a los cubos de sus distancias medias al sol (o semi ejes mayores).

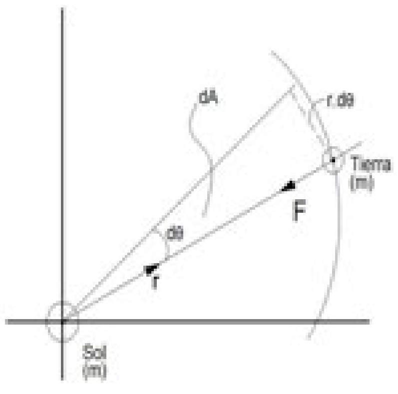


Figura 3.4.3: Movimiento Planetario

Newton plantea que la misma fuerza con que la tierra atrae a los cuerpos (Peso) es la misma que debe actuar entre todos los cuerpos y particularmente entre el sol y la tierra.

Sin considerar las fuerzas de interacción entre planetas se puede estudiar el movimiento de un planeta con las ecuaciones de fuerza central [3].

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}$$

$$h = \text{constante}$$
$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{F}{mh^2u^2}$$
$$u = \frac{1}{r}$$

de la figura, el área barrida por el radio vector (r)

$$dA = r \cdot \frac{rd\theta}{2} = r^2\frac{d\theta}{2}$$

y el área barrida por unidad de tiempo

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{r^2}{2} \cdot \frac{h}{r^2} = \frac{h}{2} = \text{constante}$$

el área barrida por unidad de tiempo es constante (velocidad aerolar) y es la segunda ley de Kepler.

La segunda ecución del movimiento

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{F}{mh^2u^2}$$

tiene solución de ecuación lineal no homogénea, solo si la fuerza tiene la forma

$$F = G\frac{Mm}{r^2} = GMmu^2$$

que sustituyendo da

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{h^2}$$

y la solución es una cónica (círculo, elipse, parábola, hipérbola) dependiendo de las constantes; es decir, Newton acopló la ecuación de la fuerza gravitatoria al resultado que Kepler determinó solo con observaciones y modelos físicos.

Por lo tanto la solución de la ecuación no homogénea es la suma de 2 soluciones

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{h^2}$$

solución general de la homogénea

$$u_1 = C\cos(\theta - \theta_0)$$

solución particular de la completa

$$u_2 = \frac{GM}{h^2}$$

luego la solución general será:

$$u = \frac{1}{r} = C\cos\theta + \frac{GM}{h^2}$$

para

$$\theta_0 = 0$$

ecuación de una curva cónica (círculo, elipse, parábola, hipérbola) dependiendo de la relación de las constantes

$$\varepsilon = \frac{C}{\frac{GM}{h^2}}$$

que define el tipo de curva

1. Si $\varepsilon = 0$, $C = 0$, $r = \frac{h^2}{GM}$, radio constante; círculo
2. Si:
$$\varepsilon < 1 \ , \ C < \frac{GM}{h^2} \ \text{, radio finito; elipse}$$
3. Si:
$$\varepsilon = 1 \ , \ C = \frac{GM}{h^2} \ \text{, radio infinito; parábola (límites entre elipse e hipérbola)}$$
4. Si
$$\varepsilon > 1 \ , \ C > \frac{GM}{h^2} \ \text{, radio infinito; hipérbola}$$

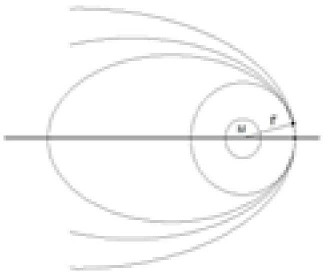


Figura 3.4.4: Órbitas del movimiento por Fuerza Central

Cavendish, en 1780 determinó el valor de G, y la ecuación permite estudiar órbitas de cuerpos o satélites alrededor de la tierra.

$$G = 6{,}67x10^{-11}\left[\frac{Nm^2}{kg^2}\right]$$

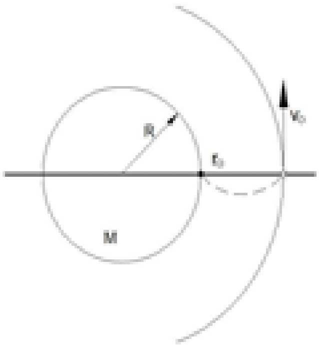


Figura 3.4.5: Movimiento de satélite

El cálculo de constantes, si:

$$M = \text{masa de la tierra}$$

para

$$\theta = 0^{\circ}$$

$$r = r_0$$

$$v_0 = r_0 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0$$

como

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0 = \frac{h}{r_0^2}$$

$$h = r_0 v_0$$

$$C = \frac{1}{r_0} - \frac{GM}{h^2} = \frac{1}{r_0} - \frac{GM}{(r_0 v_0)^2} \tag{3.4.3}$$

análisis para trayectoria parabólica

$$C = \frac{GM}{h^2}$$

sustituyendo

$$\frac{1}{r_0} = \frac{2GM}{h^2}$$

$$h = r_0 v_0$$

$v_0 = \sqrt{\dfrac{2GM}{r_0}}$, velocidad mínima para que el cuerpo salga de la atracción de la tierra(v_e)

y se llama velocidad de escape

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}, \text{ pero } GM = gR^2$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2gR^2}{r_0}}$$

si

$$r_0 = R \text{ , desde la superficie de la tierra}$$

$$v_e = \sqrt{2gR}$$

en general si:

$$v_0 > v_e - \text{trayectoria hiperbólica}$$

$$v_0 = v_e - \text{ trayectoria parabólica}$$

$$v_0 < v_e - \text{ trayectoria eliptica}$$

Un caso particular es el movimiento circular

$$C = 0$$

la ecuación (6)

$$\frac{1}{r_0} = \frac{GM}{(r_0 v_0)^2}$$

$$v_{cir} = \sqrt{\frac{GM}{r_0}} = \sqrt{\frac{GR^2}{r_0}}$$

La tercera ley de Kepler puede ser determinada a partir de las fuerzas que intervienen en el movimiento circular.

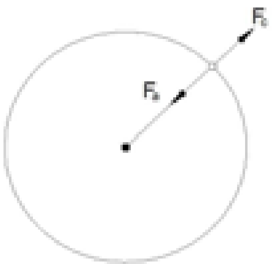


Figura 3.4.6: Fuerzas en el Movimiento Circular

La fuerza centrípeta es igual a la fuerza de atracción
fuerza centripeta

$$F_c = \frac{mv^2}{r} = mr\omega^2 = mr\left(\frac{4\pi^2}{T^2}\right)$$

siendo T el periodo del movimiento.

La Fuerza de atracción

$$Fa = \frac{GMm}{r^2}$$

igualando se obtendra el periodo

$$\frac{GMm}{r^2} = mr\left(\frac{4\pi^2}{T^2}\right)$$

$$T^2 = \frac{4\pi r^3}{GM}$$

y relacionando periodos T_1y T_2, de dos planetas o cuerpos

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$$

que es la tercera ley de Kepler.

Capítulo 4

Trabajo y energía

En el Capítulo II se ha analizado las ecuaciones que permite estudiar un movimiento dependiendo de las fuerzas que lo producen. Estas ecuaciones son opciones de cálculo dependiendo de cómo se expresa la aceleración, es decir parten de la misma ecuación general

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

y son :

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \tag{4.0.1}$$

$$\vec{F} = mv\frac{dv}{d\vec{r}} \tag{4.0.2}$$

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \tag{4.0.3}$$

Sin embargo la búsqueda de Newton de magnitudes conservativas en los procesos mecánicos del movimiento llevó a plantear magnitudes que hasta hoy se discuten si realmente existen o son solo definiciones matemáticas.

En la segunda ecuación

$$\vec{F} = mv\frac{dv}{d\vec{r}}$$

si la fuerza es constante o depende de la posición

$$F = f(r)$$

puede separarse variables

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = mvdv$$

e integrando

$$\int \vec{F} d\vec{r} = \int mvdv \tag{4.0.4}$$

El primer término se llama trabajo de una fuerza y al ser un producto escalar da como resultando un escalar.

El segundo término es también escalar y lo llamamos energía cinética. Usando esta relación los problemas de movimiento pueden ser analizados solo con magnitudes escalares y para determinar la velocidad no se requiere conocer la aceleración. En este capítulo analizaremos las nuevas magnitudes propuestas.

4.1. Trabajo de una fuerza

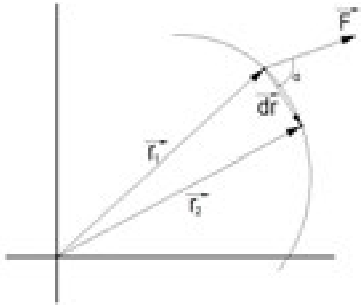


Figura 4.1.1: Trabajo de una Fuerza

Debido a la fuerza $\overrightarrow{F}$, la partícula en la posición $(\overrightarrow{r_1})$ se desplaza desde el punto (1), recorriendo la trayectoria (ds) y llega al punto (2) definido por$(\overrightarrow{r_2})$. El desplazamiento producido lo define el vector $(d\overrightarrow{r})$.

Se llama trabajo de la fuerza $\overrightarrow{F}$, al producto escalar de la fuerza por el desplazamiento producido $(d\overrightarrow{r})$. Si (U) es el trabajo , (dU) el trabajo infinitesimal.

$$dU = \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} \tag{4.1.1}$$

nótese que la fuerza no está necesariamente orientada segun d$\overrightarrow{r}$. Como es un producto escalar

$$dU = Fds \cdot \cos\alpha$$

si la fuerza es constante

$$\int_1^2 dU = \int_0^s (F\cos\alpha)\, ds$$

$$U_{1-2} = Fs\cos\alpha = (Fcos\alpha)\, s \tag{4.1.2}$$

Que es el producto de (s) por la componente de la fuerza en esa dirección.

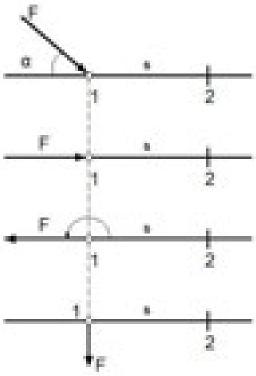


Figura 4.1.2: Trabajo de Fuerza constante

La unidad de trabajo será igual a la unidad de fuerza (N) multiplicada por la unidad de distancia (m).

$$U = Fd = \text{Newton x metro} = Nm = \frac{kgm^2}{s^2} = Julio$$

1 Julio es el trabajo desarrollado por la fuerza de 1N en la distancia de 1m.

Como submúltiplo

$$U = \text{Dina} \times \text{cm} = \text{Din cm} = \text{ERGIO}$$

En general para fuerzas dependientes de (r) el trabajo será:

$$U_{1-2} = \int_1^2 \overrightarrow{F} d\overrightarrow{r} = \int_{s1}^{s2} (F\cos\alpha)\, ds = \int_{s1}^{s2} F\tau \cdot ds$$

Siendo F_τ la fuerza tangencial al desplazamiento.

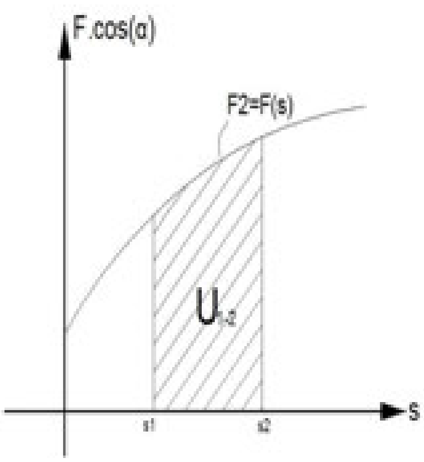


Figura 4.1.3: Trabajo de una Fuerza

Esto puede entenderse que si graficamos el valor de $(F\cos\alpha)$ o la fuerza tangencial, con respecto a S, el área bajo la curva

$$F\tau = f(s)$$

representa el trabajo realizado por la fuerza entre los valores de S_1y S_2.

El trabajo en coordenadas rectangulares podemos calcular sustituyendo las expresiones de Fuerza y desplazamiento en dichas coordenadas, en efecto:

Fuerza en coordenadas rectangulares

$$\overrightarrow{F} = F_x\overrightarrow{i} + F_y\overrightarrow{j} + F_z\overrightarrow{k}$$

desplazamiento

$$d\overrightarrow{r} = d_x\overrightarrow{i} + d_y\overrightarrow{j} + d_z\overrightarrow{k}$$

Realizando el producto escalar

$$\int_1^2 \overrightarrow{F} d\overrightarrow{r} = \int_1^2 \left(F_x\overrightarrow{i} + F_y\overrightarrow{j} + F_z\overrightarrow{k}\right)\left(d_x\overrightarrow{i} + d_y\overrightarrow{j} + d_z\overrightarrow{k}\right)$$

$$U_{1-2} = \int_1^2 (Fxdx + Fydy + Fzdz)$$

$$U_{1-2} = \int_{x_1}^{x_2} Fxdx + \int_{y_1}^{y_2} Fydy + \int_{z_1}^{z_2} Fzdz \tag{4.1.3}$$

donde se nota que para integrar las fuerzas deben ser dependientes solo de (x), de (y) o de (z) (De la posición).

Como aplicación calcularemos trabajo de algunas fuerzas naturales.

a) Trabajo de la fuerza peso

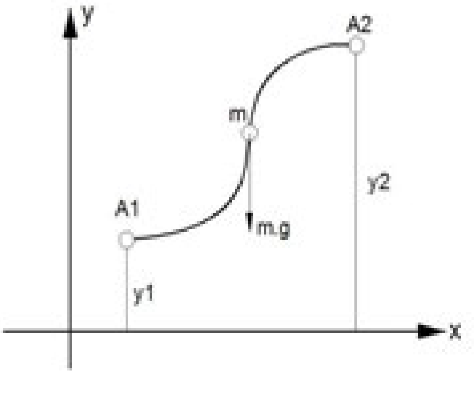


Figura 4.1.4: Trabajo del peso

La partícula de masa m y peso P=mg, se mueve en una trayectoria A_1- A_2. La fuerza peso se expresa como:

$$\overrightarrow{F} = -mg\overrightarrow{j}$$

$$Fx = 0$$

$$Fz = 0$$

por lo tanto el trabajo será:

$$U_{1-2} = \int_{y_1}^{y_2} Fydy = \int_{y_1}^{y_2} -mgdy = -mg\,(y_2 - y_1) = mgy_1 - mgy_2 \qquad (4.1.4)$$

nótese que el trabajo es independiente de la trayectoria que sigue la partícula; solo depende de su posición inicial y final.

Si $(y_2 > y_1)$ el trabajo es negativo

Si $(y_2 < y_1)$ el trabajo es positivo

b) Trabajo de la fuerza en el resorte

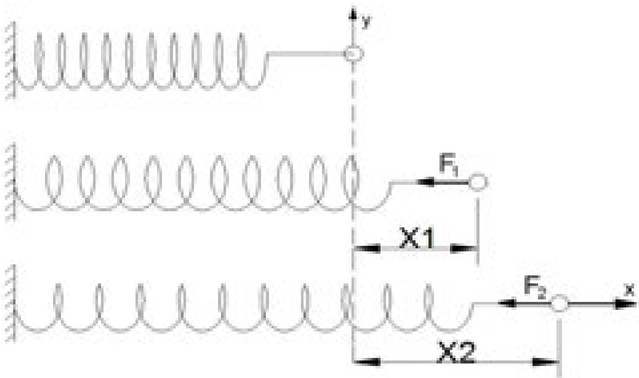


Figura 4.1.5:

La fuerza es

$$\overrightarrow{F} = -kx\overrightarrow{i}$$

$$Fy = 0$$

$$Fz = 0$$

luego el trabajo

$$U_{1-2} = \int_{x_1}^{x_2} Fxdx = \int_{x_1}^{x_2} -kxdx$$

$$U_{1-2} = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2} \tag{4.1.5}$$

el trabajo es positivo si $x_2 < x_1$,es decir la fuerza y el desplazamiento tienen el mismo sentido.

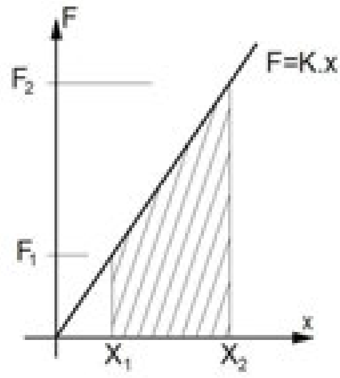


Figura 4.1.6: Trabajo en el resorte

si se grafica F con x, sin considerar el signo, el trabajo de la fuerza es el área bajo la recta (F=kx) entre las coordenadas(x_1) y (x_2) ,y es la resta del área de dos triángulos.

c) Trabajo de la fuerza gravitatoria

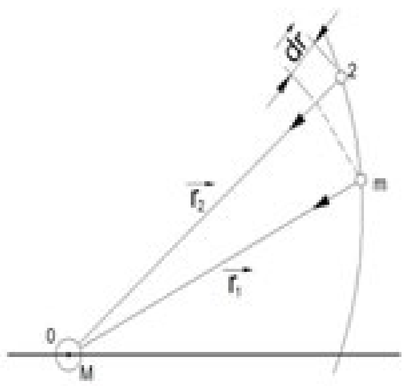


Figura 4.1.7: Trabajo Fuerza Gravitatoria

Se utiliza el sistema de coordenadas polares. Para toda fuerza central la fuerza gravitatoria

$$\overrightarrow{F} = -\left(\frac{GMm}{r^2}\right)\overrightarrow{i_r}$$

$$d\overrightarrow{r} = dr \cdot \overrightarrow{ir}$$

por lo tanto

$$U_{1-2} = \int_1^r F dr = \int_{r_1}^{r_2} -\frac{GMm}{r^2} dr$$

$$U_{1-2} = \frac{GMm}{r_2} - \frac{GMm}{r_1}$$

nótese que en una trayectoria circular ($\mathrm{r}_1 = r_2$) y el trabajo es cero.

4.2. Trabajo y energía cinética

La ecuación que relaciona el trabajo de una fuerza y la energía cinética de la partícula dada por la ecuación que se llama segunda integral de movimiento

$$\int \overrightarrow{F} d\overrightarrow{r} = \int_{v_1}^{v_2} mvdv$$

integrando

$$\int_1^2 \overrightarrow{F} d\overrightarrow{r} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$$

y llamando energía cinética de la partícula la cantidad.

$$T = \frac{mv^2}{2}$$

la ecuación nos dice: El trabajo desarrollado por una fuerza sobre una partícula es igual a la variación de la energía cinética de la misma (teorema de las fuerzas vivas)

$$U_{1-2} = T_2 - T_1$$

- La ecuación es válida para sistemas Newtonianos.
- Las magnitudes son escalares
- Las fuerzas que no realizan trabajo se descartan
- La energía cinética es siempre positiva

Se entiende claramente que una fuerza produce variación de velocidad, que la energía cinética de un cuerpo depende de la velocidad al cuadrado y que la magnitud ENERGÍA CINÉTICA determina la posibilidad de realizar un trabajo al variar su velocidad.

Energía cinética en general será la posibilidad de realizar un trabajo mecánico debido al cambio de velocidad.

La magnitud energía cinética tendrá la misma unidad que el trabajo.

$$T = \frac{mv^2}{2} = kg\left(\frac{m}{g}\right)^2 = \frac{kgm^2}{s^2} = Julio$$

La ecuación también puede escribirse como

$$T_1 + U_{1-2} = T_2$$

Energía cinética inicial + trabajo desarrollado por una fuerza = energía cinética final

$$\frac{mv_1^2}{2} + U_{1-2} = \frac{mv_2^2}{2}$$

Ejemplo:

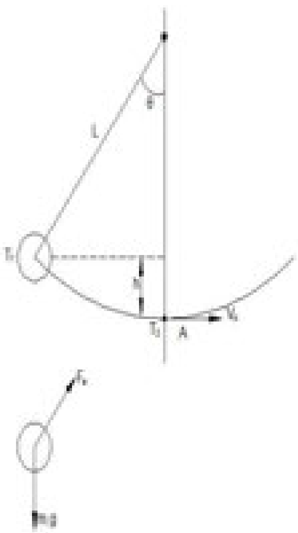


Figura 4.2.1: Trabajo en el péndulo Físico

Una masa (m) oscila como péndulo. Si se suelta el cuerpo de la posición determinada en la figura, calcular la velocidad de la masa en el punto A.

- Las fuerzas que actúan en (m) son la tensión de la cuerda (F) y la fuerza peso (P=mg)

Energía cinética en (1) si v_1=0 , T_1=0

El trabajo desarrollado, es solo de la fuerza peso por que la tensión es perpendicular al desplazamiento y no realiza trabajo.

$$U_{1-2} = mgh = mg(\ell - \ell\cos\theta)$$

Enegía cinética en (2)

$$T_2 = \frac{mv^2}{2}$$

aplicando

$$T_1 + U_{1-2} = T_2$$

$$mg(\ell - \ell\cos\theta) = \frac{mv^2}{2}$$

y se calcula la velocidad

$$v_A = \sqrt{2g\ell(1 - \cos\theta)}$$

la velocidad es tangente a la trayectoria. Nótese que se calcula el módulo de la velocidad como escalar y no se determina ni dirección ni sentido, y en el planteamiento se descartan las fuerzas que no producen trabajo.

El trabajo de la fuerza peso es positivo por que Fuerza y desplazamiento están en la misma dirección. Para calcular la tensión deberá aplicarse los métodos de fuerza y aceleración.

4.3. Energía potencial de una fuerza

La energía potencial de una fuerza, llamada también potencial de una fuerza o función de energía potencial, es una función que permite calcular el trabajo desarrollado por la fuerza.

Las fuerzas que pueden generar potencial o la función de energía potencial son las fuerzas cuyo trabajo no depende de la trayectoria, es decir depende solo de su posición inicial y final; estas fuerzas se llaman fuerzas conservativas.

Matemáticamente se puede establecer esta condición diciendo que fuerzas conservativas son aquellas cuyo trabajo en trayectoria cerrada es cero

$$\oint \vec{F}d\vec{r} = 0$$

Se define como Función de Energía Potencial, el trabajo de una fuerza, cambiado de signo.

$$V = -\int \overrightarrow{F}.dr$$

Es decir que el trabajo entre los puntos puede ser calculado mediante la variación de la función energía potencial.

$$U_{1-2} = V_1 - V_2$$

por ejemplo, la energía potencial de la fuerza peso será:

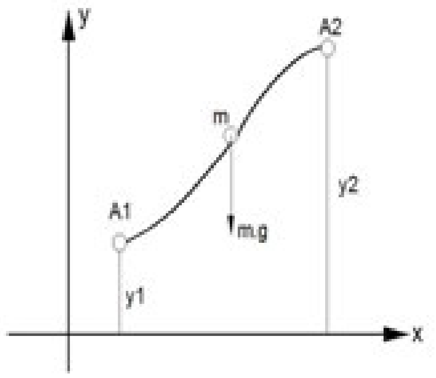


Figura 4.3.1:

$$\overrightarrow{F} = -mg\overrightarrow{j}$$

$$F_y = -mg$$

$$V = -\int_{y_1}^{y_2} Fydy = \int_{y_1}^{y_2} mgdy = mgy_2 - mgy_1$$

La función que se repite entre los dos valores límites (y_1) y (y_2) es:

$$V = mgy \qquad (4.3.1)$$

y es la energía potencial de la fuerza peso. El trabajo desarrollado se calculará como la variación de la energía potencial.

$$U_{1-2} = V_1 - V_2 = mgy_1 - mgy_2$$

Nótese en la energía potencial que si el trabajo es negativo la energía potencial aumenta y si el trabajo es positivo, la energía potencial disminuye. La energía potencial en el resorte se genera por la fuerza

$$\overrightarrow{F} = -kx\overrightarrow{i}$$

$$F_x = -kx$$

luego

$$V_r = -\int_1^2 Fxdx = -\int_{x_1}^{x_2} -kx = \frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2}$$

la función potencial es:

$$V_r = \frac{kx^2}{2}$$

y el trabajo

$$U_{1-2} = V_1 - V_2 = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2} \tag{4.3.2}$$

4.4. Fuerzas conservativas

La condición para generar potencial o la función de energía potencial, es que la fuerza sea conservativa es decir que la fuerza desarrolle trabajo independiente de la trayectoria o mejor que dependa solo de condiciones de posición inicial y final. Considerando la definición de potencial (V), el trabajo en tres dimensiones será:

$$dU_{(x,y,z)} = -dV_{(x,y,z)}$$

considerando en coordenadas rectangulares

$$dU = Fxdx + Fydy + Fzdz$$

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz\right)$$

sustituyendo:

$$Fxdx + Fydy + Fzdz = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz\right)$$

igualando

$$Fx = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$Fy = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$Fz = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

como la fuerza es

$$\overrightarrow{F} = F_x \overrightarrow{i} + F_y \overrightarrow{j} + F_z \overrightarrow{k}$$

se puede expresar como

$$\overrightarrow{F} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\overrightarrow{k}\right) \tag{4.4.1}$$

$$\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\nabla} V \tag{4.4.2}$$

Matemáticamente la fuerza es igual al gradiente de la energía potencial cambiado de signo y es la condición de la fuerza para ser conservativa.

El valor del operador gradiente

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{k}$$

tiene características vectorial, por lo que

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{\nabla} = 0$$

aplicando a la ecuación 4.4.2

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{F} = \overrightarrow{\nabla} \times \left(-\overrightarrow{\nabla} V\right)$$

el segundo miembro es cero, luego la condición de fuerza conservativa puede expresar como

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{F} = 0$$

Que matemáticamente se usa para comprobar que una fuerza es conservativa y que puede generar potencial. Realizando el proceso vectorial

$$\nabla \times \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \overrightarrow{i}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{dz}\right) + \overrightarrow{j}\left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right) + \overrightarrow{k}\left(\frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x}\right) = 0$$

y la condición se expresa como

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{dz} \tag{4.4.3}$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z} \tag{4.4.4}$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \tag{4.4.5}$$

o sea que las derivadas cruzadas deben ser iguales. Si la fuerza viene dada solo en dos dimensiones $F_z = 0$ y solo se aplicara la tercera igualdad.

Ejemplo 1: Dada la fuerza

$$\overrightarrow{F} = \left(y^2 - x^2\right)\overrightarrow{i} + 3xy\overrightarrow{j}$$

calcular el trabajo realizado al desplazarse desde el punto $P_1\,(0,0)$al punto. Analizamos si la fuerza es conservativa

$$F_x = y^2 - x^2$$

$$F_y = 3xy$$

aplicando la condición

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = 3y$$

la fuerza no es conservativa, no puede generar potencial y su trabajo depende de la trayectoria.

Calculemos el trabajo por varias trayectorias

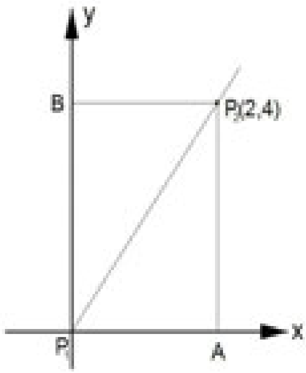


Figura 4.4.1:

1) **Trayectoria** $(P_1 - A - P_2)$

$$U_{1-2} = \int_{p_1}^{A} Fxdx + \int_{A}^{p_2} Fydy = \int_{p_1}^{A} \left(y^2 - x^2\right) dx + \int_{A}^{p_2} 3xydy$$

las integrales no serían posibles si no se determinan las condiciones que tiene en cada componente las trayectorias usadas

$$U_{1-2} = \int_{0}^{2} \left(y^2 - x^2\right) dx + \int_{0}^{4} 3xydy$$

Condición: el primer integral la fuerza se mueve entre P_1y A es decir con $y = 0$ y en la segunda integral la fuerza se mueve entre A y P_2, es decir matemáticamente x=2. De esta manera es posible integrar

$$U_{1-2} = \int_{0}^{2} - x^2 dx + \int_{0}^{4} 6ydy = \left[-\frac{x^3}{3}\right]_0^2 + \left[3y^2\right]_0^4 = 45{,}335J$$

2) **Trayectoria** $(P_1 - B - A)$

$$U_{1-2} = \int_{p_1}^{B} Fydy + \int_{B}^{p_2} Fxdx = \int_{0}^{4} 3xydy + \int_{0}^{2} \left(y^2 - x^2\right) dx =$$

Condición: en el primer integral $(x = 0)$ y en el segundo integral $(y = 4)$

$$U_{1-2} = \int_{0}^{2} \left(16 - x^2\right) dx = \left[16x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 32 - \frac{8}{3} = 29{,}35$$

3) **Trayectoria recta**(P_1P_2)

la ecuación de la recta es

$$y = 2x$$

el trabajo

$$U_{1-2} = \int Fxdx + \int Fydy = \int_{0}^{2} \left(y^2 - x^2\right) dx + \int_{0}^{4} 3xydy$$

Condición: en el primer integral $(y = 2x)$ y en el segundo integral $\left(x = \frac{y}{2}\right)$

$$U_{1-2} = \int_{0}^{2} \left(3x^2\right) dx + \int_{0}^{4} \frac{3y^2}{2} dy = \left[x^3\right]_0^2 + \left[\frac{y^3}{2}\right]_0^2 = 8 + 32 = 405$$

Ejemplo 2

Dada la fuerza $\overrightarrow{F} = 2xy\overrightarrow{i} + x^2\overrightarrow{j}$ demuestre que es conservativo, calcular la función potencial y el trabajo desarrollado entre $P_1(0{,}0)$ y $P_2(2{,}4)$

las componentes

$$F_x = 2xy$$

$$Fy = x^2$$

condición de conservativa :

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = 2x$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = 2x$$

Se deduce que la fuerza es conservativa, que su trabajo no depende de la trayectoria y que por lo tanto puede generar potencial.

Comprobemos que el trabajo no depende de la trayectoria

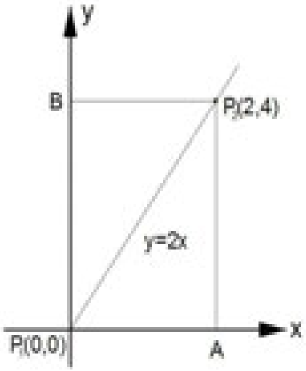


Figura 4.4.2:

1) **Trayectoria** $(P_1 - A - P_2)$

$$U_{1-2} = \int_{P_1}^{A} Fxdx + \int_{A}^{p_2} Fydy =$$

$$= \int_{0}^{2} 2xydx + \int_{0}^{4} x^2dy$$

Condición: en el primer integral $(y = 0)$ y en el segundo integral $(x = 2)$

$$U_{1-2} = \int_{0}^{4} 4dy = 16J$$

2) **Trayectoria recta (y=2x)**

$$U_{1-2} = \int_{0}^{2} 2xydx + \int_{0}^{4} x^2dy = \int_{0}^{2} 4x^2dx + \int_{0}^{4} \frac{y^2}{4}dy =$$

Condición: en el primer integral $(y = 2x)$ y en el segundo integral $\left(x = \frac{y}{2}\right)$

$$= \left[\frac{4x^3}{3}\right]_0^2 + \left[\frac{y^3}{12}\right]_0^2 = 10{,}6 + 5{,}4 = 16J$$

El trabajo es igual, por lo tanto se puede generar la funcion potencial para lo cual se lleva la fuerza entre dos puntos,cualquiera por una trayectoria que posibilite la integración.

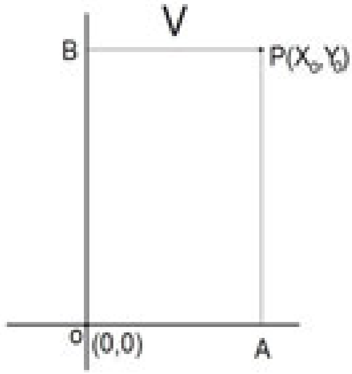


Figura 4.4.3:

$$V = -\int_0^A Fxdx - \int_A^P Fydy =$$

$$= -\int_0^{x_0} 2xydx - \int_A^{y_0} x^2 dy$$

Condición: en el primer integral $(y = 0)$ y en el segundo integral $(x = x_0)$

$$V = \int_0^{y_0} x_0^2 dy = \left[-x_0^2 y\right]_0^{y_0} = -x_0^2 y_0$$

y generalizando

$$V = -x^2 y$$

que es la función potencial. El trabajo podrá ser calculado como:

$$U_{1-2} = V_1 - V_2 = -\left(x_1^2 y_1 - x_2^2 y_2\right)$$

entre cualquier par de puntos

Si

$$P_1 = (0, 0)$$

$$P_2 = (2, 4)$$

$$U_{1-2} = x_2^2 y_2 = 4(4) = 16J$$

4.5. Principio de la conservación de la energía

En el apartado 4.2 se analizó la relación entre trabajo y energía cinética

$$U_{1-2} = T_2 - T_1$$

$$T = \frac{mv^2}{2}$$

El trabajo de una fuerza sobre una partícula de masa (m) es igual a la variación de la energía cinética de la misma.

Por otro lado, el trabajo de una fuerza conservativa puede ser expresada como la variación de la energía potencial de la fuerza

$$U_{1-2} = V_1 - V_2$$

Si igualamos los trabajos tenemos

$$T_2 - T_1 = V_1 - V_2$$

Que es igual a

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \tag{4.5.1}$$

Donde se lee: la suma de la energía cinética más la energía potencial de una partícula permanece constante en el movimiento de la misma, y se conoce como el principio de conservación de la energía.
Tambien se puede llamar por energía total de la partícula en un punto cualquiera de su trayectoria (E)

$$E = T + V$$

$$T = \text{energía cinética} = \frac{mv^2}{2}$$

$$V = \text{energia potencial}$$

y la energía total del sistema permanece constante siempre que las fuerzas sean conservativas

El principio de la conservación de la energía sirve para encontrar velocidad conociendo la energia potencial

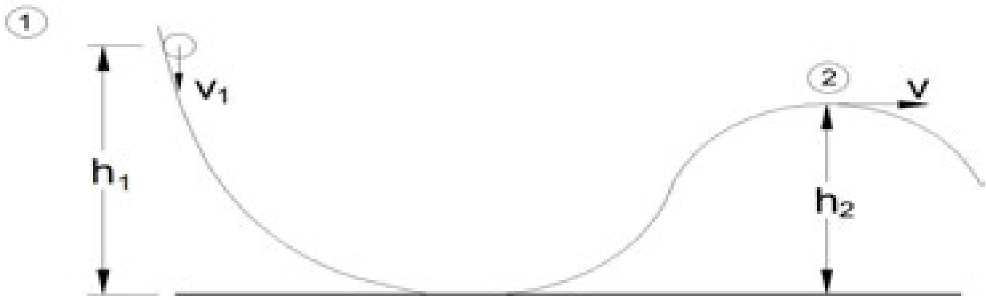


Figura 4.5.1:

por ejemplo calcular la velocidad (v_1) que debe tener la partícula de masa (m), para superar la altura (h_2) en el punto 2

En (1)

energía cinética

$$T_1 = \frac{mv_1^2}{2}$$

Energía potencial

$$V_1 = mgh_1$$

en (2)

Energía cinética

$$T_2 = \frac{mv_2^2}{2}$$

Energía potencial

$$V_2 = mgh_2$$

aplicando el principio

$$\frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2$$

se despeja el valor que quiera determinarse

4.6. Estudio del movimiento en función de la energía total

La ecuación de la energía total esta dada por:

$$E = T + V$$

$$E = \frac{mv^2}{2} + V$$

Si se conoce la función potencial que depende de (x), por ejemplo, y la energía total, la velocidad puede ser expresada como:

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_x\right)}$$

y la posición de la partícula mediante la relación:

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}}\left(E - V_x\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_0}^{x}\left(E - V_x\right)^{-\frac{1}{2}}dx$$

Supongamos por ejemplo el estudio del movimiento de una partícula sometida a la fuerza recuperadora lineal del resorte [6].

$$F = -kx$$

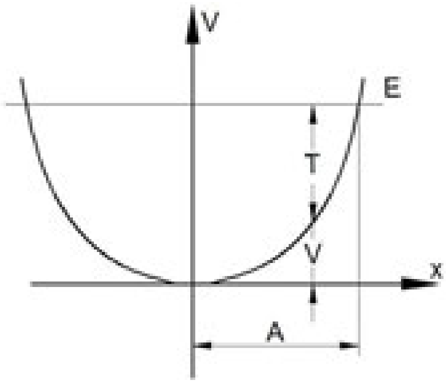


Figura 4.6.1: Función de energía potencial Resorte

La energía potencial

$$V_x = \frac{kx^2}{2}$$

sustituyendo en la ecuación

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{kx^2}{2}\right)}$$

y se puede calcular la velocidad en cualquier (x) de la trayectoria.

El valor del tiempo sea:

$$t=\sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{E-\frac{kx^2}{2}}}=\sqrt{\frac{m}{2E}}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{kx^2}{2E}}}$$

cambiando variable

$$\frac{kx^2}{2E}=sen^2\theta$$

$$x=\sqrt{\frac{2E}{k}}sen\theta$$

$$dx=\sqrt{\frac{2E}{k}}\cos\theta d\theta$$

Sustituyendo

$$t=\sqrt{\frac{m}{k}}\int_{\theta_1}^{\theta} d\theta$$

si

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$t=\frac{1}{\omega}\left(\theta-\theta_0\right)$$

de donde

$$\theta=\omega t+\theta_0$$

y sustituyendo en la ecuación del seno

$$sen\theta=x\sqrt{\frac{k}{2E}}$$

$$x=\sqrt{\frac{2E}{k}}sen\theta=Asen\left(\omega t+\theta_0\right)$$

es decir la amplitud máxima es:

$$A=\sqrt{\frac{2E}{k}}$$

de donde la energía total

$$E=\frac{kA^2}{2}$$

La partícula esta confinada entre el valor A y (-A) y en el caso que la integral no pueda ser fácil de calcular, el diagrama de energía nos proporciona información útil para estudiar un movimiento cualquiera o para intuir soluciones especiales.

4.7. Las ecuaciones de Lagrange en función de la energía

No se pretende analizar la dinámica de Lagrange, si no solo presentar brevemente la base para iniciar el estudio más amplio de los movimientos aplicando el método de Lagrange, basado en los conceptos de la energía cinética y la energía potencial. Este método es muy útil en el análisis de movimiento vibratorios complejos mecánicos y eléctricos que con la mecánica común, es decir con las ecuaciones vectoriales de movimiento presentan, mucha dificultad tanto en el planteamiento del problema como en la solución de las ecuaciones.

Analizaremos el caso para una sola dimensión y para fuerzas conservativas.

La ecuación de Newton:

$$F = \frac{d}{dt}(mv) \tag{4.7.1}$$

Se expresa para una dimensión como:

$$F_x = \frac{d}{dt}\left(m\dot{x}\right)$$

como la energía cinética está dada por:

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\dot{x}^2}{2}$$

derivando con respecto a $\dot{x}$:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

la condición de fuerza conservativa

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$V = \text{energia potencial}$$

sustituyendo en la ecuación de Newton:

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)$$

Quedando como:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) + \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

Que es la ecuación de Lagrange en 1 dimensión. Una de las principales ventajas, de este método es que puede usarse para cada problema el sistema de coordenadas que describa más convenientemente el movimiento y a estas coordenadas se las llama sistema de coordenadas generalizadas y de acuerdo a este sistema de coordenadas elegidas se tendrá un número igual de ecuaciones diferenciales de movimiento.

Coordenadas generalizadas

$$q_1, q_2, \ldots\ldots\ldots q_n$$

que pueden ser cualquiera de las ya utilizadas.

La ecuación en general como :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0$$
$$i = 1, 2, 3, 4 \ldots\ldots\ldots, n.$$

Como ejemplo, apliquemos al movimiento de un péndulo simple de longitud (ℓ) y masa (m).

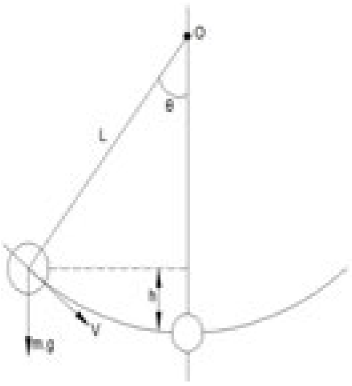


Figura 4.7.1:

consideramos una sola coordenada. $q_1 = \theta$ y la energía cinética y potencial se expresa en función de θ

La ecuación aplicarse

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) + \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$$

la energía cinética

$$T = \frac{mv^2}{2}$$

como

$$v = \omega\ell = \dot{\theta}\ell$$
$$T = m\ell^2\dot{\theta}^2$$

La energía potencial

$$V = mgh = mg\,(\ell - \ell\cos\theta) = mg\ell\,(1 - \cos\theta)$$

aplicando la ecuación de Lagrange

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = m\ell^2\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = m\ell^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = mg\ell sen\theta$$

y sustituyendo

$$m\ell^2\ddot{\theta} + mg\ell sen\theta = 0$$

para pequeñas oscilaciones es

$$sen\theta \approx \theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$$

Ecuación diferencial del movimiento armónico simple donde:

$$\theta = Asen\omega t$$

y

$$\omega = \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

4.8. Potencia y rendimiento

En las máquinas que transforman diferentes tipos de energía: eléctrica, calórica, etc en energía mecánica, se usa el concepto de potencia.

Se llama potencia al trabajo desarrollado por una fuerza en la unidad de tiempo

$$dW = \frac{dU}{dt} = \frac{\overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}}{dt} = \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{v}$$

$$W = \int \frac{dU}{dt} = \int \overrightarrow{F} \cdot dv$$

para una fuerza constante la Potencia es:

$$W = \frac{U}{t} = F \cdot v$$

$$\text{La unidad de potencia} = \frac{\text{unidad de trabajo}}{\text{unidad de tiempo}} = \frac{\text{Julio}}{\text{segundo}} = \text{Watio}$$

$$1\text{wat} = \frac{N.m}{s} = \frac{kgm^2}{s^3}$$

como múltiplos se usa
1 KW = 10^3W
1CV=736 W
1HP=746 W
En electricidad se usa la unidad de Trabajo en función de la unidad de potencia (Kw) y de la unidad de tiempo la Hora.

El Trabajo es:

$$U_{1-2} = Wt$$

$$\text{Unidad de Trabajo} = \text{KWH(Kilowatio Hora)}$$

$1KWH =$ El trabajo desarrollado por la máquina de 1KW de potencia en 1 hora

rendimiento de una máquina es la relación entre el trabajo producido por una maquina y el trabajo absorbido por la misma

$$\eta = \frac{\text{Trabajo Producido}}{\text{Trabajo Absorbido}} = \frac{\text{Potencia Producida}}{\text{Potencia Absorbida}}$$

Capítulo 5

Impulso y cantidad de movimiento

5.1. Impulso y cantidad de movimiento

En el capítulo 4 se analizó la ecuación de Newton para fuerzas que dependían de la posición y se llegó a definir magnitudes como trabajo y energía que permitían analizar los movimientos en forma más sencilla que usando conceptos vectoriales.

En este capítulo se analizará la misma ecuación de Newton para fuerzas que dependen del tiempo, es decir un método que estudia el movimiento en función de la fuerza, la masa, su velocidad y el tiempo.

Si partiéramos de la ecuación general de Newton:

$$\overrightarrow{F} = \frac{d}{dt}\left(m\overrightarrow{v}\right)$$

donde solo si m es constante

$$\overrightarrow{F} = m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt}$$

De acuerdo a la ecuación de Newton, la fuerza produce una variación respecto al tiempo de la expresión$(m\overrightarrow{v})$, esta expresión constituye una nueva magnitud y se le llama Cantidad de Movimiento Lineal de una Partícula. En algunos textos suele llamarse Ímpetu.

De acuerdo a la forma de Newton, la fuerza es por lo tanto la derivada de la cantidad de movimiento respecto al tiempo

$$\overrightarrow{F} = \frac{d}{dt}\left(m\overrightarrow{v}\right) \tag{5.1.1}$$

Newton siempre buscó magnitudes conservativas en el fenómeno del movimiento del cuerpo y la magnitud (mv), es una magnitud conservativa bajo ciertas consideraciones que se analizará después.

$$\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v}, \text{ cantidad de movimiento} \tag{5.1.2}$$

Si F es constante o es función del tiempo (t)la ecuación puede integrarse, separando variables se crean dos magnitudes.

$$\int \overrightarrow{F}dt = \int_{v_1}^{v_2} d\left(m\overrightarrow{v}\right)$$

Impulso lineal = Variación de la cantidad de movimiento

Integrando

$$\int \overrightarrow{F}dt = m\overrightarrow{v_2} - m\overrightarrow{v_1} \tag{5.1.3}$$

Las magnitudes impulso lineal y cantidad de movimiento son vectores. Las unidades serán:

unidad de cantidad de movimiento = unidad de masa × unidad de velocidad

$$\text{Unidad}\,(mv) = (kg)\left(\frac{m}{s}\right) = \frac{kg \cdot m}{s}$$

La expresión puede escribirse como:

$$m\overrightarrow{v_1} + \int \overrightarrow{F}dt = m\overrightarrow{v_2} \tag{5.1.4}$$

cantidad de movimiento inicial+ impulso lineal = cantidad de movimiento final

Esta igualdad determina que dada una partícula con una cantidad de movimiento inicial $(m\overrightarrow{v_1})$, al aplicar la Fuerza en un tiempo determinado (impulso), se produce variación de la cantidad de movimiento dando como resultado $(m\overrightarrow{v_2})$

Graficando los vectores se puede observar el proceso.

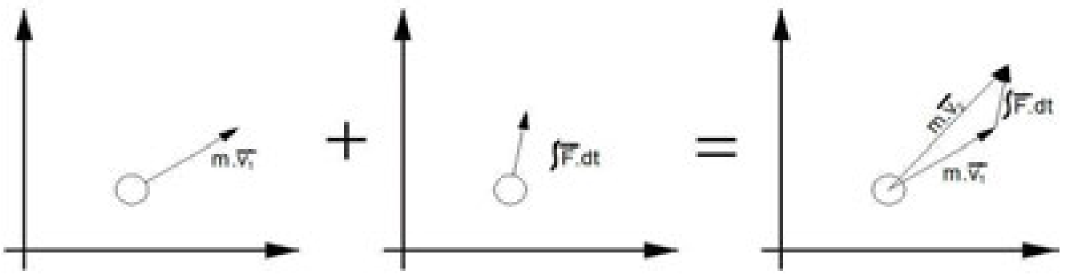


Figura 5.1.1:

En caso de existir varias fuerzas actuando, se determina la resultante del sistema o se sumarían vectorialmente los impulsos de cada fuerza.

$$m\overrightarrow{v_1} + \sum \int_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{F} dt = m\overrightarrow{v_2}$$

La expresión puede aplicarse en coordenadas rectangulares

$$\overrightarrow{v_1} = v_{1x}\overrightarrow{i} + v_{1y}\overrightarrow{j} + v_{1z}\overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{v_2} = v_{2x}\overrightarrow{i} + v_{2y}\overrightarrow{j} + v_{2z}\overrightarrow{k}$$

y el impulso

$$Imp = \int_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{F} dt = \overrightarrow{i} \int F_x dt + \overrightarrow{j} \int F_y dt + \overrightarrow{k} \int F_z dt$$

e igualando en cada eje
en ox

$$mv_{1x} + \int_{t_1}^{t_2} F_x dt = mv_{2x}$$

en oy

$$mv_{1y} + \int_{t_1}^{t_2} F_y dt = mv_{2y}$$

en oz

$$mv_{1z} + \int_{t_1}^{t_2} F_z dt = mv_{2z}$$

Ejemplo 2. Una pelota de beisbol, cuya masa es de 200g es golpeada por un bate durante un tiempo de 0.055 seg. Rebota con un ángulo de 40°, y con velocidad de $60\frac{m}{s}$. Calcular la fuerza que actúa durante el impacto.

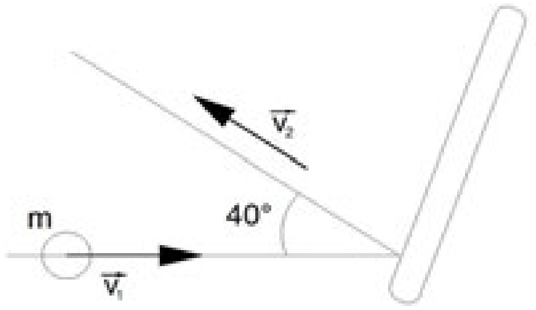


Figura 5.1.2:

El problema se resuelve planteando la ecuación de Impulso y cantidad de movimiento.

$$m\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{F}t = m\overrightarrow{v_2}\begin{cases} mv_1 = 0{,}2 \times 25 = 5kg\frac{m}{s} \\ mv_2 = 0{,}2 \times 60 = 12kg\frac{m}{s} \end{cases}$$

Y su aplicación puede realizarse de 2 maneras.

1. Dibujando el diagrama de la suma vectorial, ya que se conoce dirección y sentido de las cantidades de movimiento

   aplicando trigonometría

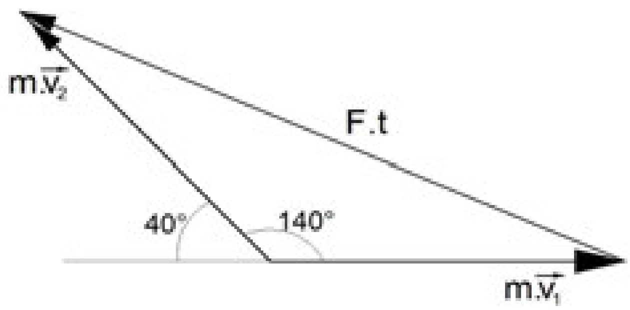


Figura 5.1.3:

$$(Ft)^2 = (mv_1)^2 + (mv_2)^2 - 2\,(mv_1)\,(mv_2)\,cos140°$$

$$(Ft)^2 = 16{,}13kg^2\frac{m^2}{s^2}$$

$$F = \frac{4{,}13}{0{,}055s} = 293N$$

Se puede calcular el ángulo que hace la Fuerza con el eje x.

2. Aplicando la ecuación en sistema de coordenadas rectangulares.

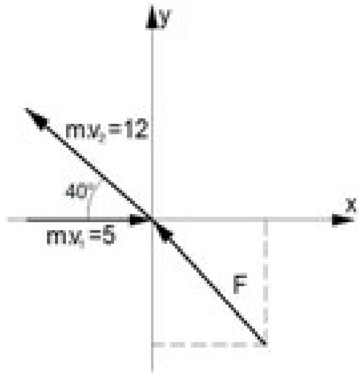


Figura 5.1.4:

$$m\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{F}t = m\overrightarrow{v_2}$$

Las ecuaciones de cada eje serán:
en x:

$$mv_1 + F_x t = -\left(mv_2\right)cos40°$$

en y:

$$0 + F_y t = -\left(mv_2\right)sen40°$$

de aquí:

$$F_x t = -12cos40 - 5 = -14{,}19$$

$$F_x = -\frac{14{,}19}{0{,}055s} = -258N$$

$$F_y t = 12sen40 = 7{,}71$$

$$F_y = \frac{7{,}71}{0{,}055} = 140{,}2N$$

La fuerza será:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(258)^2 + (140)^2} = 293N$$

El ángulo con el eje x, puede calcularse con

$$tag\theta = \frac{F_y}{F_x}$$

5.2. Aplicaciones en 2 partículas

Existen algunos problemas de movimiento de un sistema formado por 2 partículas entre las cuales interaccionan fuerzas que los ligan o llamadas fuerzas internas del sistema, por ejemplo:

- Dos partículas unidas por una cuerda.

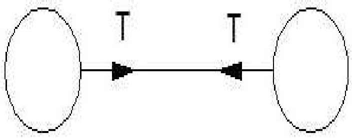


Figura 5.2.1:

- Dos partículas con fuerza central.

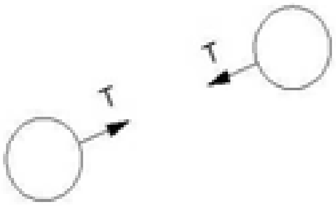


Figura 5.2.2:

- Dos partículas unidas por un resorte.

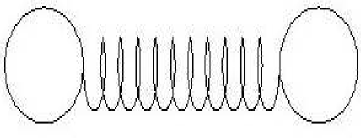


Figura 5.2.3:

- Dos partículas en choque.

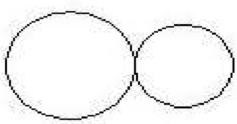


Figura 5.2.4:

En todos estos casos las fuerzas que ligan actúan como acción y reacción y la suma de los mismos es cero.

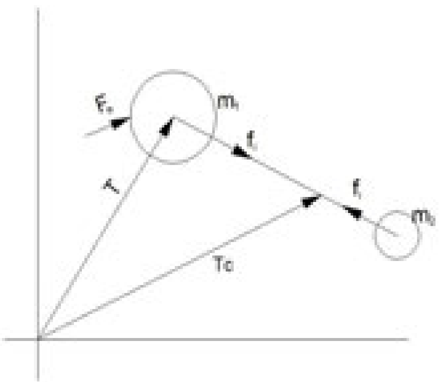


Figura 5.2.5:

El movimiento puede ser estudiado aplicando la ecuación de Newton a cada masa siendo:

$$\overrightarrow{F_e} = \text{Fuerza externa}$$

$$\overrightarrow{f_i} = \text{Fuerza interna}$$

en la masa 1

$$\int \left(\overrightarrow{F_{e1}} + \overrightarrow{f_{i1}}\right) dt = m_1\overrightarrow{v_2} - m_1\overrightarrow{v_1}$$

en 2

$$\int \left(\overrightarrow{F_e} + \overrightarrow{f_i}\right) dt = m_2\overrightarrow{v_2} - m_2\overrightarrow{v_1}$$

Si se suman las ecuaciones y escribiendo que la suma de fuerzas internas es cero:

$$\sum \overrightarrow{f_i} = 0$$

se puede escribir

$$\sum \int \overrightarrow{F_e} dt = \sum m_i\overrightarrow{v_2} - \sum m_i\overrightarrow{v_1} \tag{5.2.1}$$

Que establece que la suma de los impulsos de Fuerzas externas es igual a la variación de la suma de las cantidades de movimiento del sistema o llamado cantidad de movimiento total de las partículas.

Como la condición del centro de masa es:

$$\sum m\overrightarrow{r} = \left(\sum m\right)\overrightarrow{r_c}$$

siendo $\overrightarrow{r}$ el vector posición del centro de masa. Si derivamos

$$\sum m\overrightarrow{v} = \left(\sum m\right)\overrightarrow{v_c}$$

$\overrightarrow{v_c}$ = velocidad del centro de masa
luego sustituyendo

$$\sum \int \overrightarrow{F_e} dt = \left(\sum m\right)\overrightarrow{v_{c2}} = \left(\sum m\right)\overrightarrow{v_{c1}} \tag{5.2.2}$$

Es decir que la suma de impulsos de las fuerzas externas producen variación de la velocidad del centro de masa del sistema de partículas.

5.3. Principio de conservación de la cantidad de movimiento

Dada la ecuación

$$\int \overrightarrow{F_e} dt = \sum m\overrightarrow{v_1} - \sum m\overrightarrow{v_2}$$

si no existiesen fuerzas externas, el impulso es cero y queda:

$$\sum m\vec{v_1} = \sum m\vec{v_2} \tag{5.3.1}$$

Es decir si no actúan fuerzas externas, se conserva la cantidad de movimiento del sistema de partículas, y se conoce como el teorema de consevación de la cantidad de movimiento.

Y de acuerdo a la ecuación 5.2.2 si la fuerza es cero implica que se conserva la velocidad del centro de masa.

$$\vec{v_{c2}} = \vec{v_{c1}} \tag{5.3.2}$$

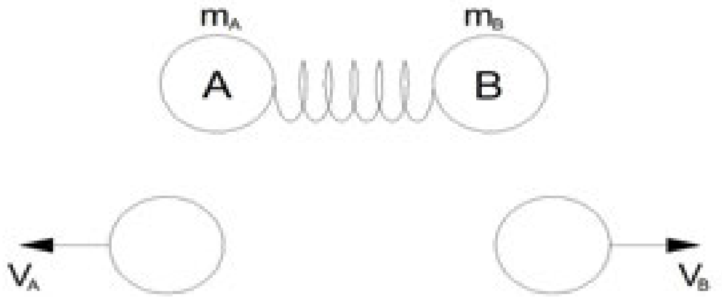


Figura 5.3.1:

Ejemplo 3. Se comprime un resorte con dos masas m_1y m_2; determinar la relación de velocidades al soltarlas.

- La suma de las fuerzas internas es cero.
- No existen fuerzas externas.
- Se conserva la cantidad de movimiento total.

Cantidad de movimiento inicial $= 0$

Cantidad de movimiento final

$$-m_A v_A + m_B v_B$$

Luego aplicamos el teorema

$$0 = -m_A v_A + m_B v_B$$

$$m_A v_A = m_B v_B$$

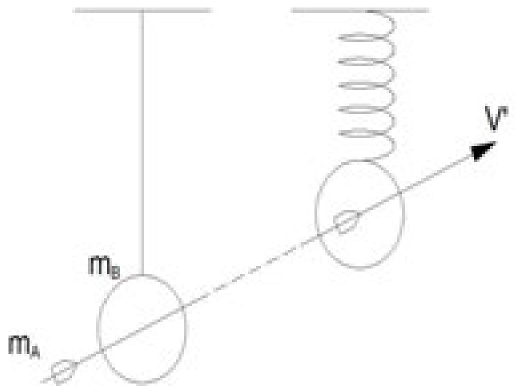


Figura 5.3.2:

Ejemplo 4. Se dispara una bala de masa (m_A) contra un cuerpo de masa (m_B), si la bala queda en el cuerpo determinar la velocidad final de la masa (m_B).

No existen fuerzas externas, luego se conserva la cantidad de movimiento.

Cantidad de movimiento inicial, despreciando el peso

$$m_A v_A$$

Cantidad de movimiento final

$$(m_A + m_B)\, v'$$

luego

$$m_A v_A = (m_A + m_B)\, v'$$

si se puede medir v', la ecuación permitiría medir la velocidad de la bala por ejemplo.

La cantidad de movimiento puede conservarse solamente en un eje, como sería el caso si la bala se dispara desde arriba.

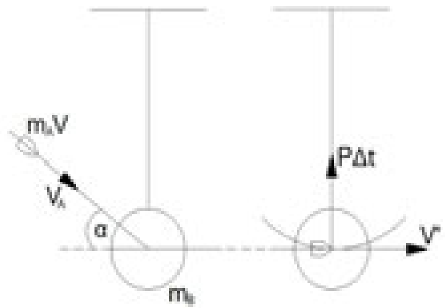


Figura 5.3.3:

En el eje x, conservación de $\overrightarrow{p}$ despreciando el peso

$$m_A v_A cos\alpha = (m_A + m_B)\, v' \ (1)$$

En el eje y, existe impulso

$$-m_A v_A sen\alpha + P\triangle t = 0 \ (2)$$

El impulso genera una sobretensión (P) en el cable ($\triangle t$) es el tiempo que duraría el impacto. Se resuelven las ecuaciones de acuerdo a los datos existentes.

5.4. Choque de partículas

El choque de partículas es una colisión de partículas en tiempos muy pequeños con fuerzas de impacto grandes.

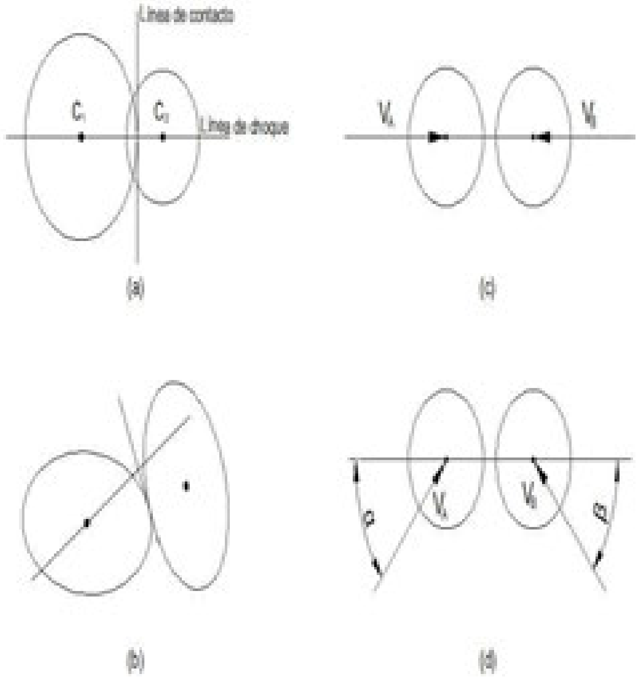


Figura 5.4.1: Choque de partículas

Línea de contacto, es la tangente a las superficies de contacto.

Línea de choque, es la normal a la linea de contacto.

a) Choque Central, si lo centros de masa están sobre la línea de choque.

b) Choque Excéntrico, si los centros de masa no están sobre la linea de choque.

c) Choque Directo, si las velocidades tienen la dirección de la linea de choque.

d) Choque Oblicuo, si las velocidades tienen inclinación respecto a la linea de choque.

5.4.1. Estudio del choque central directo

Consideramos dos partículas de masa (m_A) y (m_B) que al interaccionar siguen el siguiente proceso [3].

1. Antes del choque

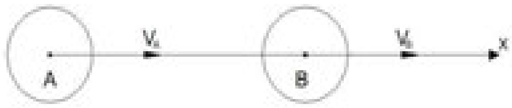


Figura 5.4.2:

2. Durante el choque

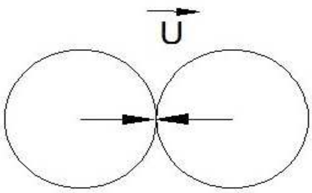


Figura 5.4.3:

Interacción de fuerzas internas (u= velocidad común en un tiempo dt)

3. Luego del choque

Figura 5.4.4:

Entre el proceso 1 y 3 existe conservación de la cantidad de movimiento porque no existen fuerzas externas, luego se cumple:

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B \tag{5.4.1}$$

Para una segunda ecuación se analizará lo que sucede en la interacción de masas durante el choque. Se puede entender lo que sucede en el choque si consideramos que las masas son elásticas y al interaccionar sufren efectos de deformación y recuperación, como si estuvieran interaccionando a través de resortes.

Analizando la interacción de la masa A.

Deformación

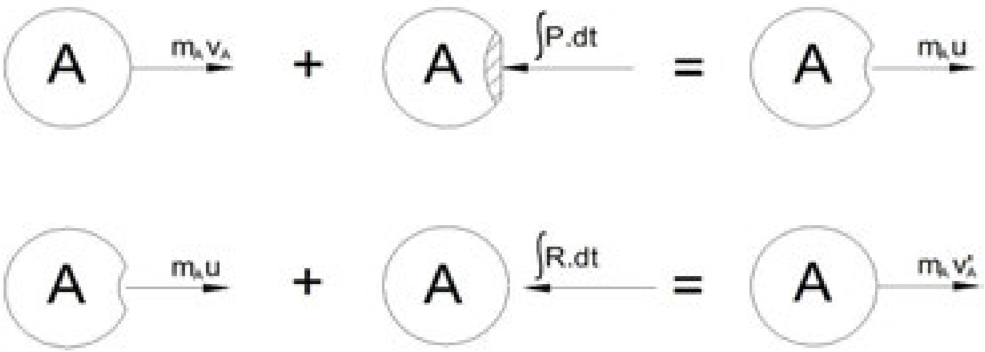


Figura 5.4.5:

$$m_A v_A - \int P dt = m_A u$$

Recuperación

$$m_A u - \int R dt = m_A v'_A$$

P y R son las fuerzas de deformación y recuperación que aparecen el momento de la interacción.

Estas fuerzas determinan el tipo de choque que ocurre. La relación de las mismas puede establecerse mediante el coeficiente de restitución (e).

$$e = \frac{\int R dt}{\int P dt} = \frac{\text{Impulso de restitución}}{\text{Impulso de deformación}}$$

si R=0, e=0 choque inelástico.

si R=P, e=1 choque elástico.

despejando y sustituyendo queda

$$e = \frac{m_A u - m_A v'_A}{m_A v_A - m_A u} = \frac{u - v'_A}{v_A - u}$$

y en la partícula B con igual análisis

$$e = \frac{v'_B - u}{u - v_B}$$

como son iguales sumamos miembro a miembro

$$e = \frac{(u - v_A') + (v_B' - u)}{(v_A - u) + (u - v_B)} = \frac{v_B' - v_A'}{v_A - v_B}$$

de donde

$$v_B' - v_A' = e\,(v_A - v_B) \tag{5.4.2}$$

es decir la velocidad relativa después del choque es igual a la velocidad relativa antes del choque multiplicado por el coeficiente de restitución.

Con la ecuación 5.4.1 y la ecuación 5.4.2 se puede resolver todos los problemas de choque, conociendo e (coeficiente de restitución), los casos extremos son:

1. choque totalmente inelástico (e=0)

   - no hay fuerzas de recuperación

   $v_B' = v_A' = v'$ las partículas permanecen unidas después del choque

   y sustituyendo en 5.4.1:

   $$m_A v_A + m_B v_B = (m_A + m_B)\,v'$$

2. choque elástico (e=1)

   Las dos ecuaciones para analizar el movimiento serían

   $$v_B' - v_A' = v_A - v_B$$

y de la conservación de la cantidad de movimiento

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v_A' + m_B v_B'$$

y se despeja de acuerdo a los requerimientos. Podemos analizar las dos ecuaciones y obtener una condición para el choque elástico. Las ecuaciones son:

$$v_B' - v_A' = v_A - v_B \Longrightarrow (v_A + v_A') = (v_B + v_B')$$

$$m_A\,(v_A - v_A') = m_B\,(v_B - v')$$

multiplicando miembro a miembro

$$m_A\left(v_A^2 - v_A'^2\right) = m_B\left(v_B'^2 - {v_B}^2\right)$$

que puede expresarse como

$$\frac{m_A v_A^2}{2} + \frac{m_B v_B^2}{2} = \frac{m_A v_A'^2}{2} + \frac{m_B v_B'^2}{2}$$

que es el principio de conservación de la energía. Por lo tanto para choques elásticos se cumplen los dos principios.

- se conserva la cantidad de movimiento.
- se conserva la energía cinética.

En caso de choque central oblicuo se busca las velocidades finales y los ángulos de salida.

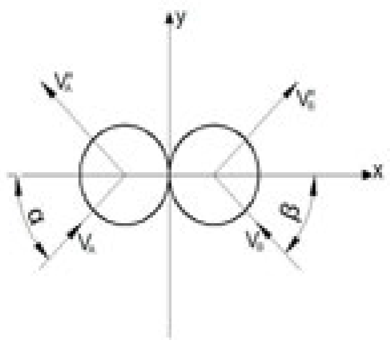


Figura 5.4.6:

Las ecuaciones son iguales a las anteriores estableciendo que las componentes de las velocidades en (y) son iguales, antes y después del choque.

$$(v_A)_y = (v_A')_y$$

$$(v_B)_y = (v_B')_y$$

y la solución se plantea solo en el eje (x), igual que el caso anterior, con las velocidades proyectadas en el eje (ox)

5.5. Movimiento con masa variable

Los problemas con movimientos de partículas o cuerpos con masa variable pueden ser analizados y estudiados con la ecuación general.

$$\overrightarrow{F} = \frac{d\overrightarrow{p}}{dt}$$

$$\overrightarrow{F} = \frac{d}{dt}\left(m\overrightarrow{v}\right) \tag{5.5.1}$$

considerando la masa variable, la ecuación a aplicarse es:

$$\overrightarrow{F} = m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} + v\frac{dm}{dt}$$

donde la relación $\frac{dm}{dt}$ expresa la variación de la masa por unidad de tiempo.
Un problema interesante es el análisis del movimiento de los cohetes que puede plantearse desde la ecuación del impulso y la cantidad del movimiento para calcular la fuerza que produce la emisión de gases [3].

Así, se llama:

$$m_i = \text{masa instantánea que sale}$$

$$v_e = \text{velocidad de salida del gas}$$

$$dm_e = \text{variación de la masa del gas}$$

$$dv = \text{variación de la velocidad}$$

Las cantidades de movimiento serán:

Figura 5.5.1:

$$\text{Cantidad de Movimiento Inicial} + \text{Impulso} = \text{Cantidad de Movimiento Final}$$

$$\sum mv_1 + \sum Fdt = \sum mv_2$$

$$mv - m_e v_e + \sum Fdt = (m - dm_e)(v + dv) - (m_e + dm_e)v_e$$

simplificando y despreciando (dm_e, dv)

$$\sum Fdt = mdv - (v + v_e)dm_e$$

$$(v + v_e) = v \text{ velocidad relativa de gases}$$

dividido por dt

$$\sum F = m\frac{dv}{dt} - (v + v_e)\,\frac{dm_e}{dt}$$

$$\sum F = m\frac{dv}{dt} - v_R\frac{dm_e}{dt}$$

que es igual a la ecuación 5.5.1

$$v\frac{dm_e}{dt} = \text{es la fuerza de empuje producida por la emisión de gases}$$

si se quiere aplicar a un cohete, y calcular la velocidad de ascenso para vencer la gravedad puede usarse la misma fórmula. Así, considerando

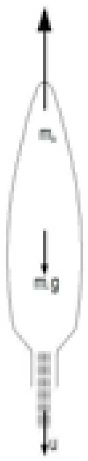


Figura 5.5.2:

m_o = masa inicial del cohete
$\frac{dm}{dt}$ = variación de la masa por unidad de tiempo(gas que sale)$=q$ constante
la masa (m) en cualquier momento será:

$$m = m_0 - qt$$

u = velocidad de salida del gas
$(u + v)$ = velocidad relativa del gas $= v_r$
aplicando en el eje y, la fuerza única es el peso

$$F = -mg$$

la ecuación sería:

$$F = m\frac{dv}{dt} - (u - v)\,\frac{dm}{dt}$$

despreciando la velocidad v (en los inicios)

$$F = m\frac{dv}{dt} - uq$$

$$-mg = m\frac{dv}{dt} - qu$$

$$-g = \frac{dv}{dt} - \frac{qu}{m}$$

$$dv = \left(\frac{qu}{m} - g\right) dt$$

integrando

$$v = \int\limits_0^t \left(\frac{qu}{m_0 - qt} - g\right) dt = u\int_0^t \frac{q}{m_0 - qt}dt - \int_0^t gdt$$

$$v = ln\left(\frac{m_0}{m_0 - qt}\right) - gt$$

5.6. Momento angular

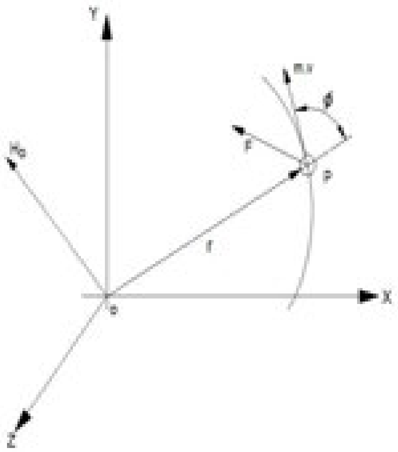


Figura 5.6.1:

Una partícula P tiene una masa (m) y una cantidad de movimiento $(m\vec{v})$ producido por la acción de la fuerza $\overrightarrow{F}$.

La ecuación de la fuerza se expresa como:

$$\overrightarrow{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \tag{5.6.1}$$

si se multiplica vectorialmente miembro por el vector posición $(\vec{r})$

$$\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F} = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{r} \times m\overrightarrow{v}) \tag{5.6.2}$$

el primer miembro es el momento estático de la fuerza con respecto a (o)

$$\overrightarrow{M_o} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F} \text{ Momento estático de F}$$

En el segundo miembro, la magnitud de $(\overrightarrow{r} \times m\overrightarrow{v})$se llama Momento Angular, que es el momento de la cantidad de movimiento

$$\overrightarrow{H_0} = \overrightarrow{r} \times m\overrightarrow{v} \text{ Momento angular} \begin{cases} H = rmv \\ H = rmv\sin\phi \end{cases} \tag{5.6.3}$$

La ecuación de Newton por lo tanto puede ser expresado de la siguiente manera:

$$\overrightarrow{M_o} = \frac{d\overrightarrow{H}}{dt} \tag{5.6.4}$$

Es decir, en un cuerpo en movimiento, el momento estático de la fuerza es igual a la derivada del momento angular respecto al tiempo. Este concepto se usará en el estudio del movimiento de rotación de las partículas en general.

La ecuación puede ser expresada como:

$$\overrightarrow{M_o}dt = d\overrightarrow{H}$$

e integrando

$$\int \overrightarrow{M_o}dt = \int_1^2 d\overrightarrow{H}$$

$$\int \overrightarrow{M_o}dt = \overrightarrow{H}_2 - \overrightarrow{H}_1 \tag{5.6.5}$$

$$\text{Impulso angular} = \text{variación del momento angular}$$

La ecuación indica que el momento estático aplicado a un cuerpo en un tiempo determinado produce un giro que está determinado por la variación del momento angular.

Por lo tanto existen 2 ecuaciones que pueden ser utilizadas en el movimiento en general:

Impulso Lineal y Cantidad de Movimiento:

$$\sum m\overrightarrow{v_1} + \sum \overrightarrow{F} dt = \sum m\overrightarrow{v_2} \tag{5.6.6}$$

Impulso Angular y Momento Angular:

$$\sum \overrightarrow{H_1} + \sum \int \overrightarrow{M_o} dt = \sum \overrightarrow{H_2} \tag{5.6.7}$$

5.7. Principio de conservación del momento angular

En la ecuación del impulso angular

$$\sum \overrightarrow{H_1} + \sum \int \overrightarrow{M_o} dt = \sum \overrightarrow{H_2}$$

si el momento es cero $\overrightarrow{M} = 0$ se conserva el momento angular

$$\sum \overrightarrow{H_1} = \sum \overrightarrow{H_2} \tag{5.7.1}$$

$\overrightarrow{M_o} = 0 \begin{cases} 1.\ \text{Cuando } F = 0 \\ 2.\ \text{Cuando } \overrightarrow{r} = 0 \end{cases}$

Y se llama el principio de conservación del momento angular.

5.8. Momento angular en coordenadas rectangulares

La ecuación

$$\overrightarrow{M_o} = \frac{d\overrightarrow{H}}{dt}$$

puede ser expresada en coordenadas rectangulares

$$\overrightarrow{M_o} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F}$$

siendo

$$\overrightarrow{r} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{F} = F_x\,\overrightarrow{i} + F_y\,\overrightarrow{j} + F_z\,\overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{v} = v_x\,\overrightarrow{i} + v_y\,\overrightarrow{j} + v_z\,\overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{M_o} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \vec{i}\,(yF_z - zF_y) + \vec{j}\,(zF_x - xF_z) + \vec{k}\,(xF_y - yF_x)$$

$$\overrightarrow{H_o} = \overrightarrow{r} \times m\overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix} = \vec{i}\,(ymv_z - zmv_y) + \vec{j}\,(zmv_x - xmv_z) + \vec{k}\,(xmv_y - ymv$$

e igualando

$$\overrightarrow{M_o} = \frac{d\vec{H}}{dt} \left\{ \begin{array}{l} yF_z - zF_y = \frac{d}{dt}\,(ymv_z - zmv_y) \\ zF_x - xF_z = \frac{d}{dt}\,(zmv_x - xmv_z) \\ xF_y - yF_x = \frac{d}{dt}\,(xmv_y - ymv_x) \end{array} \right. \tag{5.8.1}$$

La conservación del momento angular es útil en problemas de la mecánica espacial y cuando se vea la dinámica de un sistema de partículas.

Ejemplo 5. Un satélite de masa (m) comienza su vuelo en P_o, a una distancia y_o y un ángulo ϕ_o. Calcular r, v, ϕ en cualquier punto.

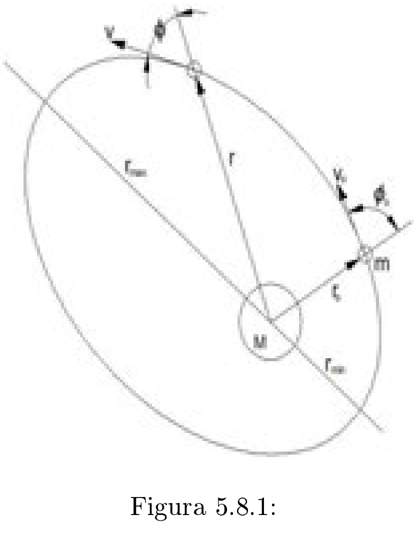


Figura 5.8.1:

Se aplican dos principios entre el punto (1) y el punto requerido (2).

1. Conservación de la energía.

$$\frac{1}{2}mv_o^2 - \frac{GMm}{r_o} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$$

2. Como la fuerza central no produce momento M=0 se conserva el momento angular

$$r_o m v_o sen\phi_o = rmvsen\phi$$

con las dos ecuaciones se calcula la velocidad.

Para los r_{max} y r_{min} se hace $\phi = 90°$ y eliminar v.

Capítulo 6

Dinámica de un sistema de partículas

Newton en su libro “Principios Filosóficos de la ciencia” 1686 escribe... “Las mismas leyes rigen en un sistema comprendido de muchos cuerpos que sobre un solo cuerpo. El movimiento progresivo ya sea de un solo cuerpo o un sistema de cuerpos siempre debe ser estimado como el movimiento del centro de gravedad.”

Las leyes de la dinámica de una partícula pueden aplicarse a sistemas de dos o más partículas, o a sistemas infinitos de partículas. Los sistemas de partículas infinitas son los sólidos que pueden ser rígidos o deformables como los líquidos y los gases.

6.1. Ecuaciones del movimiento para un sistema de partículas

Dos o más partículas forman un sistema rígido cuando actúan fuerzas entre ellas que mantienen el sistema sin deformación del mismo. Estas fuerzas actúan como acción y reacción y se llaman fuerzas internas.Pueden ser fuerzas de atracción, tensión de resorte, etc. que en todo caso actúan en parejas.

Además pueden actuar en la partícula fuerzas externas que provocan el movimiento de dicho sistema que será uno de traslación y otro de rotación del mismo [1].

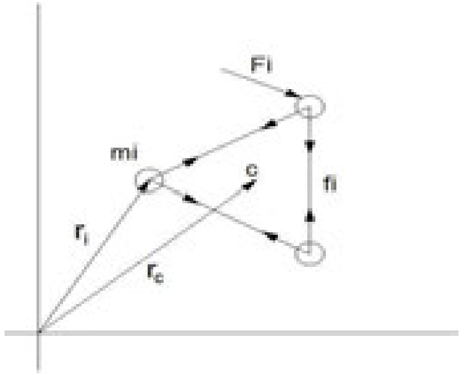


Figura 6.1.1: Sistema de Partículas

mi =Masa de la partícula $(i = 1, 2, 3, 4, ...n.)$
$\overrightarrow{r_i}$ =Vector posición de cada partícula.
$\overrightarrow{fi}$ =Fuerzas internas del sistema.
$\overrightarrow{Fi}$ =Fuerzas externas.
C =Centro de masa del sistema.
$\overrightarrow{r_c}$ =Vector posición del centro de masa.
La ecuación para una partícula.

$$m_i \ddot{\overrightarrow{r_i}} = \overrightarrow{F_i} + \overrightarrow{f_i}$$

$\overrightarrow{F_i}$ se origina fuera del sistema y representa la acción de otro cuerpo o dispositivo sobre el sistema.
$\overrightarrow{f_i}$ se origina dentro del sistema y la suma total será cero.

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{f_i} = 0$$

Luego para todo el sistema:

$$\sum \overrightarrow{F_i} = \sum m_i \ddot{\overrightarrow{r_i}} \tag{6.1.1}$$

Es decir la suma de las fuerzas externas es igual a la suma de las masas por la aceleración de cada partícula.
Como la condición del centro de masa es:

$$\overrightarrow{r_c} = \frac{\sum m_i \overrightarrow{r_i}}{\sum m_i}$$

de donde

$$\overrightarrow{r_c} \sum m_i = \sum m_i \overrightarrow{r_i}$$

Y derivando dos veces

$$\ddot{\vec{r_c}} \sum m_i = \sum m_i \ddot{\vec{r_i}}$$

Que sustituyendo en 6.1.1 nos da:

$$\sum \vec{F_i} = \ddot{\vec{r_c}} \sum m_i$$

y la $\sum m_i$ es la masa total del sistema (M)

$$\sum m_i = M$$

y la ecuación queda

$$\sum F_i = M\ddot{\vec{r_c}} \tag{6.1.2}$$

Que establece que el movimiento del centro de masa (c.d.m) de un sistema de partículas es el mismo que tendría una partícula con masa (M) igual a la masa total del sistema bajo la acción de la resultante de las fuerzas exteriores.

O de otra manera se entiende que la ecuación permite estudiar el movimiento de traslación del centro de masa del sistema, sin considerar el movimiento de rotación del sistema alrededor del centro de masa.

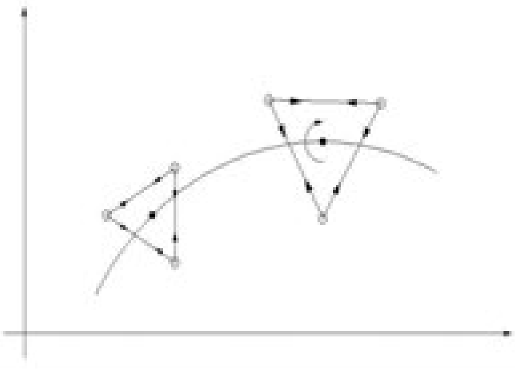


Figura 6.1.2: Movimiento del c.d.m

Por lo tanto todo movimiento de un sistema de partículas puede estudiarse como la suma de dos movimientos:

Traslación del centro de masa + movimiento de rotación de las partículas alrededor del centro de masa.

Una granada sin explotar al ser lanzada tendría una trayectoria parabólica. Si explota en el aire, como actúan fuerzas internas cuya suma es cero, el centro de masa seguiría en la trayectoria parabólica preestablecida.

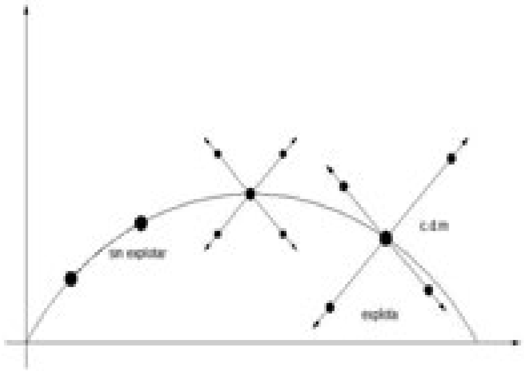


Figura 6.1.3: Movimiento de una granada

La ecuación 6.1.2 que estudia el movimiento del centro de masa puede aplicarse de la misma manera que se aplicó en el estudio del movimiento de una partícula.

6.1.1. Ecuación del impulso y cantidad de movimiento del centro de masa

$$\overrightarrow{F} = M\frac{d\overrightarrow{v_c}}{dt}$$

$$\int \overrightarrow{F} dl = M\overrightarrow{v}_c \Big|_1^2 \tag{6.1.3}$$

Y en caso de que no existan fuerzas externas $\overrightarrow{F} = 0$
Se conserva la cantidad de movimiento del centro de masa.

$$M\overrightarrow{v}_{c1} = M\overrightarrow{v}_{c2}$$

Que implica la conservación de la velocidad del centro de masa

$$\overrightarrow{v}_{c1} = \overrightarrow{v}_{c2} \tag{6.1.4}$$

También el principio de la conservación de la cantidad de movimiento puede aplicarse partiendo de la ecuación 6.1.1

$$\textstyle\sum \overrightarrow{F_i} = \sum m_i \ddot{\overrightarrow{r_i}}$$

$$\sum \overrightarrow{F_i} = \sum m_i \frac{d\overrightarrow{v}_i}{dt}$$

$$\textstyle\sum \overrightarrow{F_i} dt = \sum m_i d\overrightarrow{v_i}$$

$$\sum \overrightarrow{F_i} dt = \sum m_i v_i \Big|_1^2$$

Si no existe fuerzas externas se conserva la suma de las cantidades de movimiento de todas las partículas.

$$\sum m_1 \overrightarrow{v_1} = \sum m_2 \overrightarrow{v_2} \tag{6.1.5}$$

Ejemplo 6. Dos barcazas de masas (m) y (2m) están unidos por un cable. Si se acorta el cable a la mitad de su longitud tirando desde una de las barcazas, encontrar la distancia que se mueve la mayor barcaza despreciando el rozamiento.

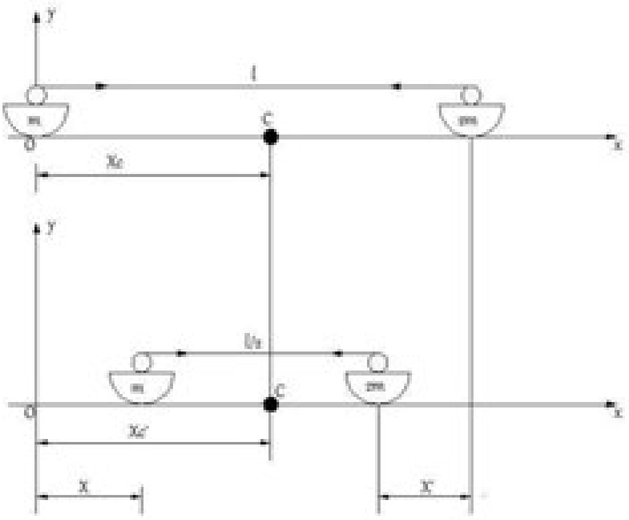


Figura 6.1.4:

Se acopla un sistema de referencia con origen en una barcaza y se anota.

- No existen fuerzas externas $\sum \overrightarrow{F_e} = 0$
- Las fuerzas internas del cable se anulan $\sum \overrightarrow{f_i} = 0$
- Luego existe conservación de la cantidad de movimiento que implica conservación de la velocidad del centro de masa.

La velocidad del centro de masa es cero $v_c = 0$ es decir no se mueve en las dos condiciones por lo tanto calculamos la posición del (c.d.m) en las dos condiciones e igualamos.

En la condición inicial.

$$x_c = \frac{0, m + l(2m)}{m + 2m} = \frac{2lm}{3m} = \frac{2l}{3}$$

En la condición final

$$X\acute{}_{\mathrm{c}} = \frac{xm + (l - x\acute{})2m}{3m} = \frac{x + 2l - 2x\acute{}}{3}$$

igualando

$$x_c = x\acute{}_c$$

$$2l = x{+}2l - 2x\acute{}$$

y como condición

$$x + \frac{l}{2} + x\acute{} = l$$

se calcula

$$x\acute{} = \frac{l}{6} \text{ distancia que se mueve la mayor barcaza}$$

6.1.2. Ecuación del trabajo y la energía cinética.

La ecuación 6.1.2 puede ser escrita como:

$$\overrightarrow{F} = M\frac{d\overrightarrow{vc}}{dt}$$

o

$$\overrightarrow{F} = Mv_c\frac{dv_c}{d\overrightarrow{r_c}}$$

de donde se determina

$$\overrightarrow{F}d\overrightarrow{r_c} = Mv_c dv_c$$

e integrando

$$\int \overrightarrow{F}d\overrightarrow{r_c} = \frac{1}{2}Mv_c^2 \Big|_1^2 \tag{6.1.6}$$

El trabajo de fuerzas externas = a la variación de la energía del centro de masa.

La ecuación de la energía cinética incluye solo la energía cinética de la masa total del sistema concentrada en el centro de masa y se llama energía cinética de traslación. Existe además otra energía que corresponde a la rotación del sistema alrededor del centro de masa que se analizará más adelante.

6.2. Energía total de un sistema de partículas

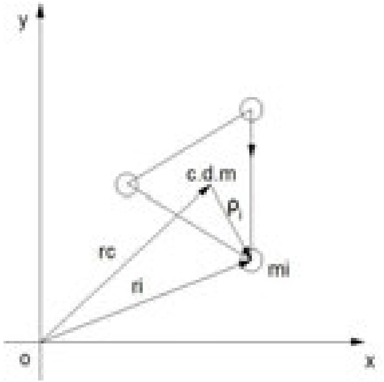


Figura 6.2.1: Sistema de Partículas

La energía cinética total del sistema es la suma de las energías cinéticas de cada partícula [1].

$$T = \sum \frac{1}{2} m \overrightarrow{v_i^2}$$

ó

$$T = \sum \frac{1}{2} m \dot{\overrightarrow{r_i^2}}$$

como

$$\overrightarrow{r_i} = \overrightarrow{r_c} + \overrightarrow{\rho_i}$$

siendo
$\overrightarrow{r_c}$= vector de posición del centro de masa.
$\overrightarrow{\rho}_i$ =vector de posición de la partícula respecto al centro de masa.
$\overrightarrow{r_i}$ =vector de posición absoluta respecto al sistema coordenado.
sustituyendo:

$$\overrightarrow{v_i^2} = (\dot{\overrightarrow{r_i}}) \cdot (\dot{\overrightarrow{r_i}}) = (\dot{\overrightarrow{r_c}} + \dot{\overrightarrow{\rho_i}}) \cdot (\dot{\overrightarrow{r_c}} + \dot{\overrightarrow{\rho_i}})$$

$$= \dot{r_c}^2 + 2\dot{r_c}\dot{\rho_i} + \dot{\rho_i}^2$$

y la energía cinética.

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i \dot{r_c}^2 + \dot{r_c} \sum m_i \dot{\overrightarrow{\rho_i}} + \sum \frac{1}{2} m_i \dot{\rho_i}^2$$

como la condición del centro de masa es:

$$\sum m_i \overrightarrow{\rho_i} = 0$$

derivando

$$\sum m_i \dot{\overrightarrow{\rho_i}} = 0$$

luego la energía cinética será

$$T = \frac{\dot{r_c}^2}{2} \sum m_i + \sum \frac{1}{2} m_i \dot{\rho_i}^2$$

$$\sum m_i = M$$

$$T = \frac{1}{2} M \dot{r_c}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i \dot{\rho_i}^2 \qquad (6.2.1)$$

La energía total del sistema es igual a la energía de traslación del centro de masa más la energía cinética del sistema, correspondiente al movimiento de rotación de las partículas respecto al centro de masa.

La ecuación del trabajo-energía para el sistema de partículas puede ponerse en forma conveniente de la siguiente manera.

$$\sum \int_1^2 (\overrightarrow{F_i} + \overrightarrow{f_i}) d\overrightarrow{r_i} = \int_1^2 \sum (\overrightarrow{F_i} + \overrightarrow{f_i})(d\overrightarrow{r_c} + d\overrightarrow{\rho_i})$$

$$\int_1^2 \overrightarrow{F_i} d\overrightarrow{r_c} + \int_1^2 \sum \overrightarrow{f_i} d\overrightarrow{r_c} + \int_1^2 \sum (\overrightarrow{F_i} + \overrightarrow{f_i}) d\overrightarrow{\rho_i}$$

el segundo término es cero, e igualando el trabajo a la energía cinética

$$\int_1^2 \overrightarrow{F} d\overrightarrow{r_c} + \int_1^2 \sum (\overrightarrow{F_i} + \overrightarrow{f_i}) d\overrightarrow{\rho_i} = \frac{1}{2} M \dot{r_c}^2 \Big|_1^2 + \sum \frac{1}{2} m_i \dot{\rho_i}^2 \Big|_1^2 \qquad (6.2.2)$$

como el primer término de la izquierda es igual al primero de la derecha se puede escribir dos ecuaciones independientes

$$\int_1^2 \overrightarrow{F} d\overrightarrow{r_c} = \frac{1}{2} M \dot{r_c}^2 \qquad (6.2.3)$$

$$\int_1^2 \sum (\overrightarrow{F_i} + \overrightarrow{f_i}) d\overrightarrow{\rho_i} = \sum \frac{1}{2} m_i \dot{\rho_i}^2 \qquad (6.2.4)$$

La ecuación 6.2.3 describe el movimiento del centro de masa del sistema y la ecuación 6.2.4 el movimiento de rotación del sistema respecto al centro de masa. Considerar la suma de las fuerzas internas es cero.

6.3. Momento angular de un sistema rígido de partículas

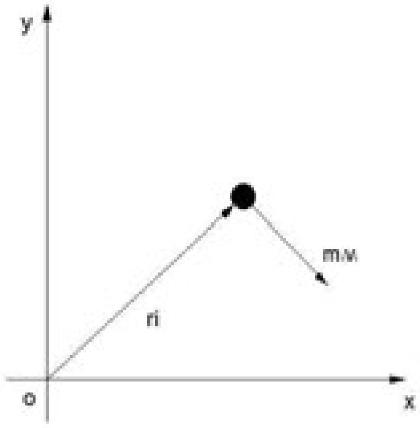


Figura 6.3.1: Partícula en movimiento

Considerando una partícula del sistema, de masa (m_i) y la cantidad de movimiento $(m\overrightarrow{v_i})$, se define como momento angular respecto al punto fijo (o) el momento de la cantidad de movimiento [1].

$$\overrightarrow{Ho} = \overrightarrow{r_i} \times m\dot{\overrightarrow{r_i}}$$

Y el momento angular del sistema será:

$$\overrightarrow{Ho} = \sum \overrightarrow{r_i} \times m\dot{\overrightarrow{r_i}}$$

derivando respecto al tiempo

$$\frac{d\overrightarrow{Ho}}{dt} = \sum \dot{\overrightarrow{r_i}} \times m\dot{\overrightarrow{r_i}} + \sum \overrightarrow{r_i} \times m\ddot{\overrightarrow{r}}_i$$

como

$$\dot{\overrightarrow{r_i}} \times \dot{\overrightarrow{r_i}} = 0, \text{ se anula el primer término}$$

y sabiendo que

$$m\ddot{\overrightarrow{r}}_i = (\overrightarrow{F_i} + \overrightarrow{f_i})$$

la ecuación queda:

$$\frac{d\overrightarrow{Ho}}{dt} = \sum(\overrightarrow{r_i} \times \overrightarrow{F_i})$$

como las fuerzas internas se presentan en parejas opuestas y colineales se anulan quedando:

$$\sum \overrightarrow{Mo} = \frac{d\overrightarrow{Ho}}{dt} \tag{6.3.1}$$

La suma de los momentos estáticos de las fuerzas externas respecto al punto fijo (o), es igual a la derivada el momento angular respecto al tiempo y considerando el mismo punto fijo.

Y la ecuación puede escribirse como:

$$\int \sum \overrightarrow{Mo}dt = \overrightarrow{H_2} - \overrightarrow{H_1} \tag{6.3.2}$$

El impulso angular = variación del momento angular del sistema.

El momento angular de las fuerzas externas del sistema es igual a la variación del momento angular del mismo, y si no existen fuerzas externas se conserva el momento angular si:

$$\sum \overrightarrow{Mo} = 0$$

$$\overrightarrow{H_2} = \overrightarrow{H_1}$$

Que es el teorema de conservación del momento angular.

Por lo tanto existen dos ecuaciones que pueden plantearse en función del impulso lineal y del impulso angular, y son utilizadas en el análisis del movimiento de un sistema de partículas.

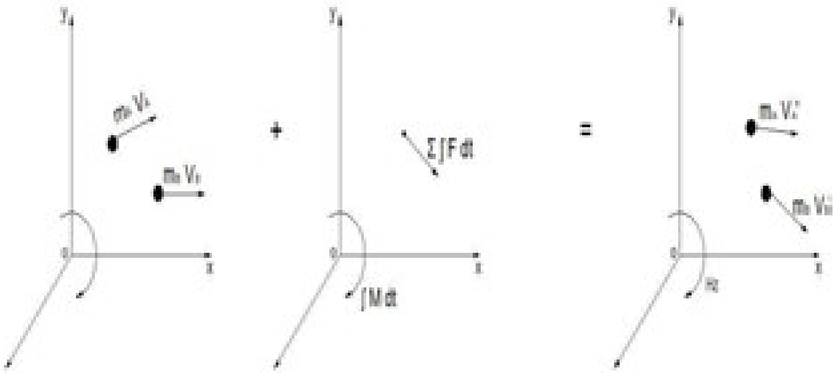


Figura 6.3.2: Impulso lineal e Impulso angular

Ecuación impulso lineal y cantidad de movimiento

$$\sum m\overrightarrow{v_i} + \sum \overrightarrow{F}dt = \sum m\overrightarrow{v2} \tag{6.3.3}$$

Ecuación impulso angular y momento angular.

$$\overrightarrow{H_1} + \sum \int \overrightarrow{Mo}dt = \overrightarrow{H_2} \tag{6.3.4}$$

como

$$\overrightarrow{Mo} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F}$$

Sí

$$\overrightarrow{Mo} = 0$$

puede darse dos casos

1. $\overrightarrow{r} = 0$ Existiendo fuerzas externas. Se conserva el momento angular pero no se conserva la cantidad de movimiento.
2. $\overrightarrow{F} = 0$ Se conserva el momento angular y se conserva la cantidad de movimiento.

Si la Fuerza es constante se eliminará los integrales de las ecuaciones 6.3.3 y 6.3.4.

La ecuación del momento angular

$$\overrightarrow{Mo} = \frac{dHo}{dt}$$

se consideró respecto a un punto fijo (o). Demostraremos que la ecuación es válida para cualquier punto cuya velocidad sea paralela a la velocidad del centro de masa del sistema.

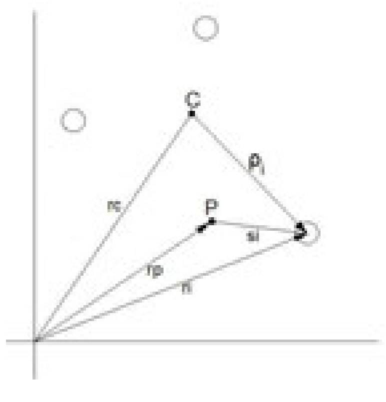


Figura 6.3.3: Sistema de Partículas

G = centro de masa del sistema.
P= punto móvil con respecto al cual se expresará la ecuación de momentos.
El momento angular respecto a P.

$$\overrightarrow{Hp} = \sum \vec{s_i} \times m_i \dot{\vec{r_i}}$$

Nótece que $\dot{\vec{r_i}}$ es la velocidad absoluta de la partícula.
Derivando

$$\frac{d\overrightarrow{Hp}}{dt} = \sum \vec{s_i} \times m \ddot{\vec{r}}_i + \sum \dot{\vec{s_i}} \times m_i \dot{\vec{r_i}}$$

como

$$\vec{s_i} = \vec{r_i} - \vec{r_p}$$

el segundo término

$$\sum \dot{\vec{s_i}} \times m_i \dot{\vec{r_i}} = \sum (\dot{\vec{r_i}} - \dot{\vec{r_p}}) \times m_i \dot{\vec{r_i}} = -\sum \dot{\vec{r_p}} \times m_i \dot{\vec{r_i}}$$

también

$$\vec{r_i} = \vec{r_c} + \vec{\rho_i}$$

sustituyendo

$$-\sum \dot{\vec{r_p}} \times m_i \dot{\vec{r_i}} = \sum \dot{\vec{r_p}} \times m_i (\dot{\vec{r_c}} + \dot{\vec{\rho_i}})$$

$$= \dot{\vec{r_p}} \times \dot{\vec{r_c}} \sum m_i - \dot{\vec{r_p}} \times \sum m_i \dot{\vec{\rho_i}}$$

como el segundo término es cero y sustituyendo

$$\frac{d\overrightarrow{Hp}}{dt} = \sum \vec{s_i} \times m \ddot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r_p}} \times \dot{\vec{r_c}} \sum m_i$$

si

$$\dot{\vec{r_p}} = \dot{\vec{r_c}}$$

el producto vectorial es cero. Es decir si la velocidad de P es igual a la velocidad del c.d.m.

$$\frac{d\overrightarrow{H_\rho}}{dt} = \sum \vec{s_i} \times m \ddot{\vec{r}}_i = \sum \vec{s_i} \times (\vec{F_i} + \vec{f_i})$$

como la suma de fuerzas internas es cero

$$\frac{d\overrightarrow{Hp}}{dt} = \overrightarrow{Mp}$$

y si el punto P, es el centro de masa si cumple también

$$\frac{d\overrightarrow{Hc}}{dt} = \overrightarrow{Mc}$$

Es decir que la derivada respecto al tiempo del momento angular respecto del centro de masa es igual al momento estático de las fuerzas respecto al centro de masa.

Por lo tanto se concluye: la ecuación $\dot{\overrightarrow{H}} = \overrightarrow{M}$ puede ser referida a un punto fijo arbitrario, al centro de masa móvil del sistema o a cualquier otro punto móvil cuya velocidad sea paralela al centro de masa.

La ecuación en coordenadas rectangulares puede escribirse:

$$\overrightarrow{H} = H_x \overrightarrow{i} + H_y \overrightarrow{j} + H_z \overrightarrow{k}$$

$$M = M_x \overrightarrow{i} + M_y \overrightarrow{j} + M_z \overrightarrow{k}$$

y la relación de momentos:

$$\frac{dHx}{dt} = Mx$$

$$\frac{dHy}{dt} = My$$

$$\frac{dHz}{dt} = Mz$$

Que se analizó en el capítulo(5)

En resumen se puede anotar

1. Los principios de la cantidad de movimiento y del momento angular son de aplicación general al movimiento de una o varias partículas, a los sólidos rígidos, a los sólidos deformables, a líquidos y gases.

2. El centro de masa de un sistema finito de partículas o infinitas como el sólido y fluidos se mueve como una partícula de masa igual a la suma de las masas de las partículas accionadas por la resultante de las fuerzas exteriores aplicadas al sistema.

3. La magnitud y dirección de la cantidad de movimiento total del sistema es igual a la masa total multiplicada por la velocidad del centro de masa.

4. El impulso total de las fuerzas externas es igual a la variación de la cantidad de movimiento total del sistema.

5. El principio del trabajo y la energía cinética se puede escribir como dos ecuaciones independientes.

a) Para el movimiento del centro de masa.

b) Para el movimiento del sistema respecto al centro de masa.

6. La ecuación del momento angular $\dot{\overrightarrow{H}} = \overrightarrow{M}$ puede escribir

a) Con relación a un punto fijo externo.

b) Con relación al centro de masa móvil.

c) Con respecto a otro punto de velocidad paralela a la del centro de masa.

Ejemplo 7. Una partícula de masa (m) describe una circunferencia como péndulo cónico sujeta con una cuerda que pasa por el orificio O. Si se aumenta la fuerza F acortándose la cuerda hasta que la partícula describe una circunferencia de $(\frac{r}{2})$. Encontrar la velocidad de la masa en función de la velocidad inicial.

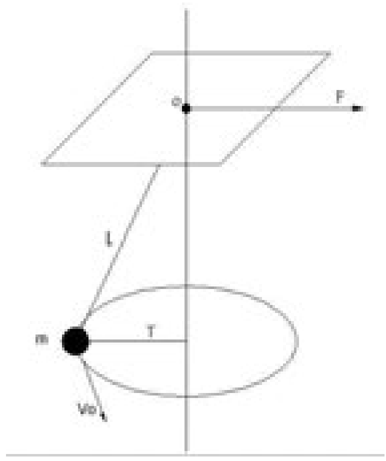


Figura 6.3.4:

El momento estático con respecto al punto (O) es cero.

$$\overrightarrow{Mo} = 0$$

luego de la ecuación

$$\int \overrightarrow{Mo}dt = \overrightarrow{H_2} - \overrightarrow{H_1}$$

se conserva el momento angular
Cuando la masa está en 1

$$H_1 = m_0 v_0 l$$

cuando está en 2

$$H_2 = m_0 v \frac{l}{2}$$

igualando

$$v = 2v_0$$

Capítulo 7

Dinámica del cuerpo rígido

Se conoce como cuerpo rígido al cuerpo formado por infinitas partículas agrupadas de la manera que la distancia entre ellas permanece constante, es decir el cuerpo no sufre deformaciones por altas que sean las fuerzas aplicadas en él.

En este capítulo se analizarán las ecuaciones de la velocidad y aceleración de un punto del cuerpo rígido, llamada la cinemática del cuerpo rígido y luego el movimiento en sí de todo el cuerpo con las fuerzas que actúan en el mismo.

7.1. Cinemática de un punto del cuerpo rígido

Analizaremos en primer lugar las ecuaciones de movimiento de una partícula referida, a través de un sistema que rota y se traslada [1].

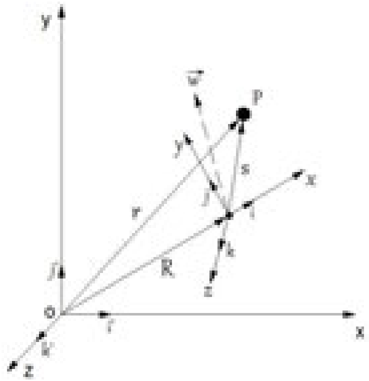


Figura 7.1.1: Sistema que rota y se traslada

(XYZ) Es el sistema fijo.

(xyz) es el sistema que se traslada con velocidad ($\dot{R}$) y rota con velocidad ($\dot{\omega}$) respecto al sistema fijo.

Es como decir el sol como sistema fijo y la tierra el sistema que rota y se traslada respecto al sol.

El movimiento de la partícula puede ser estudiado respecto al sistema móvil o al sistema fijo partiendo de su vector posición en cada cual.

En el sistema móvil (o sistema relativo)

$$\overrightarrow{\rho} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$$

En el sistema fijo (o sistema absoluto)

$$\overrightarrow{R} = X\,\overrightarrow{i}\,' + Y\,\overrightarrow{j}\,' + Z\,\overrightarrow{k}\,'$$

Si se expresa el movimiento absoluto en función del movimiento del sistema móvil tendremos de acuerdo al gráfico

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{R} + \overrightarrow{\rho} = \overrightarrow{R} + x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$$

y la velocidad

$$\dot{\overrightarrow{r}} = \dot{\overrightarrow{R}} + \dot{\overrightarrow{\rho}} = \dot{\overrightarrow{R}} + \dot{x}\,\overrightarrow{i} + x\,\dot{\overrightarrow{i}} + \dot{y}\,\overrightarrow{j} + y\,\dot{\overrightarrow{j}} + \dot{z}\,\overrightarrow{k} + z\,\dot{\overrightarrow{k}}$$

los vectores unitarios tienen derivada porque varían con respecto al tiempo.

Sus derivadas pueden calcularse en función de $\overrightarrow{\omega}$ partiendo de la igualdad que conocemos.

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}$$

es decir, matemáticamente:

$$\dot{\overrightarrow{r}} = \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}$$

si aplicamos este concepto que la derivada respecto al tiempo de un vector es igual a la velocidad angular por el vector dado, se tiene.

$$\dot{\overrightarrow{i}} = \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{i}$$

$$\dot{\overrightarrow{j}} = \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{j}$$

$$\dot{\overrightarrow{k}} = \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{k}$$

y sustituyendo

$$\dot{\overrightarrow{r}} = \dot{\overrightarrow{R}} + (\dot{x}\,\overrightarrow{i} + \dot{y}\,\overrightarrow{j} + \dot{z}\,\overrightarrow{k}) + \overrightarrow{\omega} \times (x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}) \tag{7.1.1}$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{\rho_r}} + \vec{\omega} \times \vec{\rho} \tag{7.1.2}$$

donde
$\dot{\vec{r}}$ =velocidad absoluta de P.
$\dot{\vec{R}}$ =la velocidad de la traslación del sistema móvil.
$\dot{\vec{\rho}}_r$ =velocidad relativa de P respecto al sistema móvil.
$\vec{\omega} \times \vec{\rho}$ =velocidad lineal del punto P debido a la rotación del sistema móvil.
Se observa que sobre la partícula actúan tres velocidades: la velocidad de traslación del sistema móvil, más la velocidad propia de la partícula en el sistema móvil y más la velocidad lineal debido al movimiento de rotación que provoca una trayectoria circular en la partícula.

La aceleración calculamos derivando nuevamente la ecuación 7.1.1 y agrupando.

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{R}} + (\ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j} + \ddot{z}\,\vec{k}) + (\dot{x}\,\dot{\vec{i}} + \dot{y}\,\dot{\vec{j}} + \dot{z}\,\dot{\vec{k}}) +$$

$$\dot{\vec{\omega}} \times (x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}) + \vec{\omega} \times (\dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j} + \dot{z}\,\vec{k}) +$$

$$\vec{\omega} \times (x\,\dot{\vec{i}} + y\,\dot{\vec{j}} + z\,\dot{\vec{k}})$$

sustituyendo las derivadas de los vectores unitarios y agrupando.

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{R}} + \ddot{\vec{\rho}} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{\rho}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})$$

y la aceleración será

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{R}} + \ddot{\vec{\rho}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho_r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) + 2\vec{\omega} \times \vec{\rho_r} \tag{7.1.3}$$

$\ddot{\vec{r}}$ =aceleración absoluta de la partícula.
$\ddot{\vec{R}}$ =aceleración de traslación del sistema móvil.
$\ddot{\vec{\rho}}$ =aceleración relativa de la partícula respecto al sistema móvil.
$\dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho_r}$ =aceleración tangencial debido a la rotación del sistema móvil.
$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})$ =aceleración centrípeta debido a la rotación del sistema móvil.
$2\vec{\omega} \times \vec{\rho_r}$ =aceleración de colioris debido a la rotación.

Aplicando ahora al cuerpo rígido, podemos considerar que (P) es un punto del cuerpo rígido y el mismo rota y se traslada respecto al sistema fijo XYZ, acoplando al cuerpo el sistema móvil que quedaría fijo al cuerpo rígido.

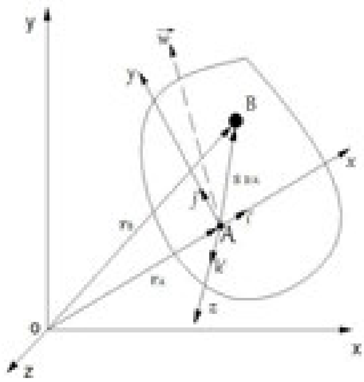


Figura 7.1.2: Movimiento del punto (B) del cuerpo rígido

El sistema (xyz) es fijo al cuerpo rígido y junto a él rota y se traslada.

El punto (A) es el origen del sistema propio del cuerpo rígido. Generalmente es el centro de masa del sistema porque su velocidad es conocida de acuerdo al análisis que se realizo en el capitulo anterior.

$\overrightarrow{\omega}$ =vector de rotación del cuerpo rígido. (velocidad angular)

B =punto del cuerpo rígido cuya velocidad queremos determinar.

Como el punto B esta fijo en el cuerpo rígido $\overrightarrow{\rho_{\frac{B}{A}}}$ es constante y en las ecuaciones

$\overrightarrow{\rho_r} = \overrightarrow{\rho_{\frac{B}{A}}}$ =constante

$\dot{\overrightarrow{\rho_r}} = 0$

$\ddot{\overrightarrow{\rho}} = 0$

Quedando de la siguiente manera:

Velocidad absoluta de B:

$$\dot{\overrightarrow{r_B}} = \dot{\overrightarrow{r_A}} + \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{\rho_{\frac{B}{A}}} \tag{7.1.4}$$

$\dot{\overrightarrow{r_A}}$ =velocidad de traslación de A.

$\overrightarrow{v_{\frac{B}{A}}} \left\{ \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{\rho_{\frac{B}{A}}} \right.$ = velocidad lineal producida por la rotación de B en la trayectoria circular.

Aceleración absoluta de B:

$$\ddot{\overrightarrow{r_B}} = \ddot{\overrightarrow{r_A}} + \dot{\overrightarrow{\omega}} \times \overrightarrow{\rho_{\frac{B}{A}}} + \overrightarrow{\omega} \times (\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{\rho_{\frac{B}{A}}}) \tag{7.1.5}$$

$\ddot{\overrightarrow{r_A}}$ =Aceleración de traslación de (A).

$$\overrightarrow{a_{\frac{B}{A}}} \left\{ \begin{array}{c} \dot{\overrightarrow{\omega}} \times \overrightarrow{\rho_{\frac{B}{A}}} = \text{Aceleración tangencial de (A) debido a la rotación} \\ \overrightarrow{\omega} \times (\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{\rho_{\frac{B}{A}}}) = \text{Aceleración centripeta debido a rotación} \end{array} \right.$$

Las expresiones pueden escribirse de la siguiente manera:
Posición:

$$\overrightarrow{r_B} = \overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_{\frac{B}{A}}} \tag{7.1.6}$$

Velocidad:

$$\overrightarrow{v_B} = \overrightarrow{v_A} + \overrightarrow{v_{\frac{B}{A}}} \tag{7.1.7}$$

Aceleración:

$$\overrightarrow{a_B} = \overrightarrow{a_A} + \overrightarrow{a_{\frac{B}{A}}} \tag{7.1.8}$$

donde

$$\overrightarrow{v_{\frac{B}{A}}} = \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r_{\frac{B}{A}}}$$

$$\overrightarrow{a_{\frac{B}{A}}} = \dot{\overrightarrow{\omega}} \times \overrightarrow{r_{\frac{B}{A}}} + \overrightarrow{\omega} \times (\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r_{\frac{B}{A}}}) = \dot{\overrightarrow{\omega}} \times \overrightarrow{r_{\frac{B}{A}}} + \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{v_{\frac{B}{A}}}$$

$\overrightarrow{\omega}$ =velocidad angular del cuerpo rígido.

El movimiento de un cuerpo rígido puede ser descrito como la suma de los movimientos de traslación y un movimiento de rotación (Teorema de Chasle).

Se recuerda que los valores de la velocidad angular y la aceleración angular puede ser expresados como:

Velocidad angular

$$\overrightarrow{\omega} = \frac{d\overrightarrow{\theta}}{dt}$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}$$

Aceleración angular

$$\dot{\overrightarrow{\omega}} = \frac{d^2\overrightarrow{\theta}}{dt^2} = \frac{d\overrightarrow{\omega}}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\overrightarrow{\theta}} = \overrightarrow{\alpha}$$

Las ecuaciones se pueden aplicar a puntos del cuerpo que se halle:

1. Con movimiento solo de traslación
2. Con movimiento solo de rotación
3. Con movimiento de rotación y traslación (Movimiento plano)
4. Con movimiento general en el espacio

7.1.1. Movimiento de traslación

Un cuerpo rígido se halla en movimiento de traslación cuando cualquier recta perteneciente al cuerpo conserva su orientación durante el movimiento, es decir, permanece paralela a la primera dirección. La traslación puede ser curvilínea y rectilínea, dependiendo de la trayectoria del centro de masa, la velocidad angular del cuerpo es cero,luego no tiene rotación.

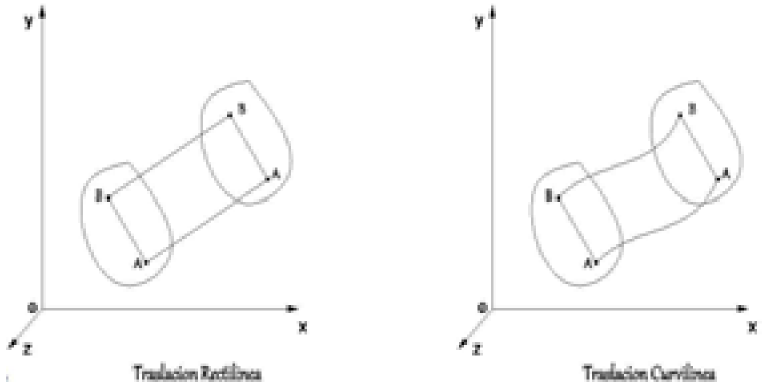


Figura 7.1.3: Cuerpo en movimiento de traslación

Para aplicar las ecuaciones 7.1.4 y 7.1.5 de la velocidad y aceleración de un punto del cuerpo rígido en movimiento de traslación establecemos que:

$$\overrightarrow{\omega} = 0$$

la velocidad:

$$\dot{\overrightarrow{r_B}} = \dot{\overrightarrow{r_A}}$$

$$\overrightarrow{v_B} = \overrightarrow{v_A} \tag{7.1.9}$$

la aceleración:

$$\ddot{\overrightarrow{r_B}} = \ddot{\overrightarrow{r_A}}$$

$$\overrightarrow{a_B} = \overrightarrow{a_A} \tag{7.1.10}$$

Es decir que todos los puntos del cuerpo tienen la misma velocidad y la misma aceleración instantánea. Si se conoce la velocidad y la aceleración del centro de masa, todos los puntos tienen esa misma velocidad y aceleración.

7.1.2. Movimiento de rotación alrededor de un eje fijo

En el cuerpo con rotación alrededor de un eje, sus condiciones serían.

- no tiene velocidad de traslación $\dot{\overrightarrow{r_A}} = 0$
- no tienen aceleración de traslación $\ddot{\overrightarrow{r_A}} = 0$

Como tiene solo velocidad angular $\overrightarrow{\omega}$, la misma que puede expresarse en coordenadas rectangulares en el sistema propio del cuerpo.

$$\overrightarrow{\omega} = \omega x \overrightarrow{i} + \omega y \overrightarrow{j} + \omega z \overrightarrow{k}$$

Además puede, si se desea, hacer coincidir un eje del sistema con la dirección de la velocidad angular y tendría solo una componente.

$$\overrightarrow{\omega} = \omega \overrightarrow{k}$$

Aplicando la ecuación 7.1.4 y 7.1.5 tenemos:
Velocidad:

$$\dot{\overrightarrow{r_B}} = \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{\rho_{\frac{B}{A}}} \tag{7.1.11}$$

Aceleración:

$$\ddot{\overrightarrow{r_B}} = \dot{\overrightarrow{\omega}} \times \overrightarrow{\rho_{\frac{B}{A}}} + \overrightarrow{\omega} \times (\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{\rho_{\frac{B}{A}}}) \tag{7.1.12}$$

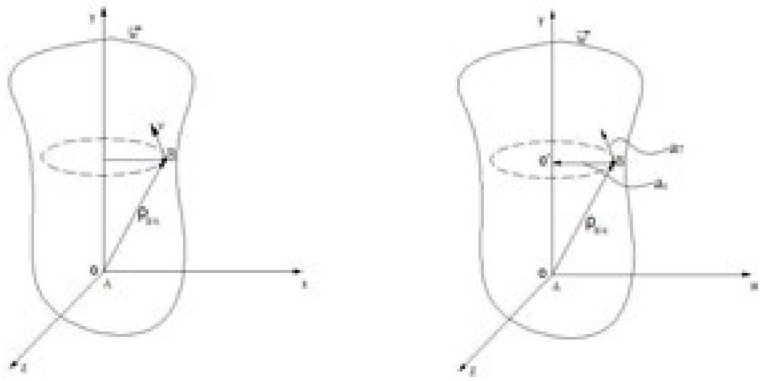


Figura 7.1.4: velocidad y aceleración del punto B

El movimiento se puede estudiar en coordenadas rectangulares.

$$\overrightarrow{\omega} = \omega \overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{\rho} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

velocidad

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{\rho} = \omega\overrightarrow{k} \times (x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}) = \omega x\overrightarrow{j} - \omega y\overrightarrow{i}$$

aceleración tangencial

$$\overrightarrow{a_T} = \dot{\overrightarrow{\omega}} \times \overrightarrow{\rho} = \dot{\omega}\overrightarrow{k} \times (x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}) = \dot{\omega} x\overrightarrow{j} - \dot{\omega} y\overrightarrow{i}$$

aceleración centrípeta

$$\overrightarrow{a_c} = \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{v} = \omega\overrightarrow{k} \times (\omega x\overrightarrow{j} - \omega y\overrightarrow{k}) = -\omega^2 x\overrightarrow{i} - \omega^2 y\overrightarrow{j}$$

Nótese que el movimiento del punto B puede ser analizado si el origen del sistema coincide con el centro de la trayectoria circular y el planteamiento se vuelve evidentemente escalar.

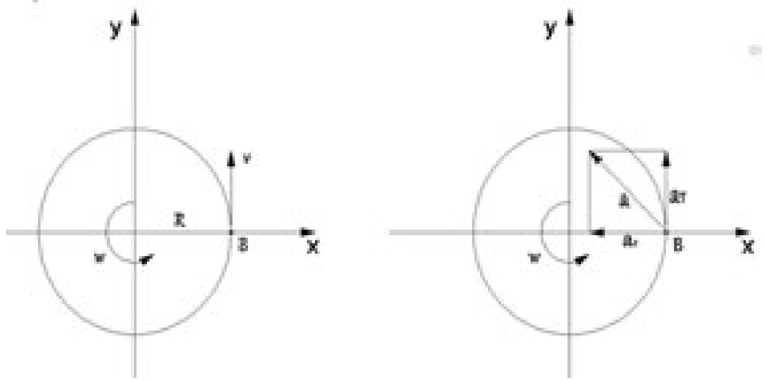


Figura 7.1.5: Punto B en movimiento de rotación alrededor del eje OZ

Velocidad:

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{\rho} = \overrightarrow{\omega}\overrightarrow{k} \times R\overrightarrow{i} = \omega R\overrightarrow{j}$$

$$v = \omega R$$

Aceleración tangencial

$$\overrightarrow{a_T} = -\dot{\omega} R\overrightarrow{j}$$

$$a_T = \dot{\omega} R \tag{7.1.13}$$

Aceleración centrípeta

$$\overrightarrow{a_c} = -\omega^2 R \overrightarrow{i}$$

$$a_c = \omega^2 R = \frac{v^2}{R} \tag{7.1.14}$$

El análisis puede también realizarse considerando las relaciones ya estudiadas anteriormente, en el movimiento circular, aplicando al movimiento del punto del cuerpo rígido.

$$v = \omega R \tag{7.1.15}$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \tag{7.1.16}$$

la aceleración

$$a_n = \dot{\omega} R = R\frac{d\omega}{dt} = R\omega\frac{d\omega}{d\theta} = \alpha R$$

7.1.3. Movimiento plano del sólido rígido

El cuerpo rígido se halla en el movimiento plano cuando todos los puntos del mismo se mueven paralelamente a un plano. Es decir el movimiento se reduce solo a dos dimensiones y el cuerpo se traslada y rota al mismo tiempo.

En los problemas, generalmente, se conoce la velocidad y la aceleración de un punto del cuerpo y se desea conocer el de otro punto cualquiera. Además de acuerdo a lo estudiado anteriormente es posible determinar la velocidad y la aceleración del centro de masa, y sería, la velocidad y aceleración conocida de un punto del cuerpo rígido.

Supondremos un cilindro de espesor constante que rota y se traslada.

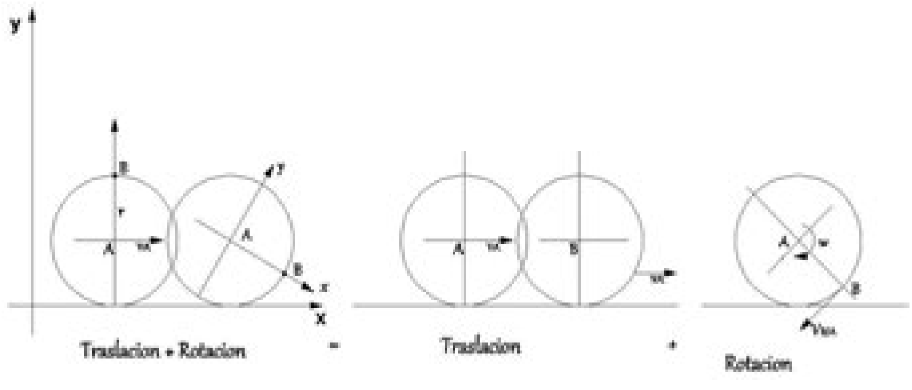


Figura 7.1.6: Cilindro en rota

Las ecuaciones expresan exactamente el fenómeno.

Velocidad

$$\overrightarrow{v_B} = \overrightarrow{v_A} + \overrightarrow{v_{\frac{B}{A}}}$$

Velocidad de B = velocidad de A(traslación) + velocidad de B respecto a A (rotación).

Aceleración

$$\overrightarrow{a_B} = \overrightarrow{a_A} + \overrightarrow{a_{\frac{B}{A}}}$$

En cada punto se superpone las dos velocidades y las dos aceleraciones.

Velocidad

$$\overrightarrow{v_B} = \overrightarrow{v_A} + \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r_{\frac{B}{A}}} \tag{7.1.17}$$

Aceleración

$$\overrightarrow{a_B} = \overrightarrow{a_A} + \dot{\overrightarrow{\omega}} \times \overrightarrow{r_{\frac{B}{A}}} + \overrightarrow{\omega} \times (\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r_{\frac{B}{A}}}) \tag{7.1.18}$$

o también

$$\overrightarrow{a_B} = \overrightarrow{a_A} + \dot{\overrightarrow{\omega}} \times \overrightarrow{r_{\frac{B}{A}}} + \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{v_{\frac{B}{A}}}$$

En coordenadas rectangulares las condiciones de aplicación sería

$$\overrightarrow{\omega} = \omega \overrightarrow{k}$$

$$\dot{\overrightarrow{\omega}} = \alpha \overrightarrow{k}$$

El vector posición tiene componentes en el sistema (x o y) propio del cuerpo, teniendo en cuenta además la relación

$$v = \omega r$$

Que es la condición de que el cuerpo no resbale.

Ejemplo 8. Un cilindro de radio R rueda sin resbalar en un plano horizontal, si la velocidad del centro del cilindro es v_0, calcular las velocidades de los puntos A, B, C y D.

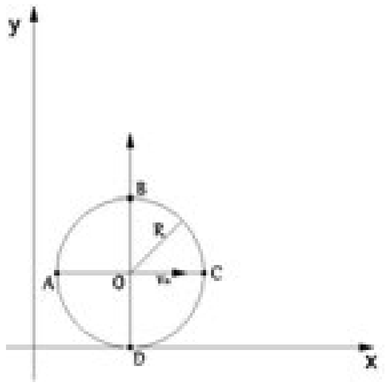


Figura 7.1.7:

Los datos que se tiene:
Condición de no resbalar.

$$v_0 = \omega R$$

Velocidad angular solo en la componente Z.

$$\overrightarrow{\omega} = -\omega \overrightarrow{k}$$

Se aplica para cada punto

$$\overrightarrow{v_B} = \overrightarrow{v_A} + \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r_{\frac{B}{A}}}$$

Para el punto A

$$\overrightarrow{r_{\frac{A}{O}}} = -R\overrightarrow{i}$$

$$\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{i}$$

$$\overrightarrow{v_A} = \overrightarrow{v_0} + \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r_{\frac{A}{O}}} = v_0\overrightarrow{i} + (-\omega\overrightarrow{k} \times -R\overrightarrow{i}) = v_0\overrightarrow{i} + v_0\overrightarrow{j}$$

$$v_A = \sqrt{v_0^2 + v_0^2} = \sqrt{2}v_0$$

Para el punto B

$$\overrightarrow{r_{\frac{B}{O}}} = R\overrightarrow{j}$$

$$\overrightarrow{v_B} = \overrightarrow{v_0} + \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r_{\frac{B}{O}}} = v_0\overrightarrow{i} + (-\omega\overrightarrow{k} \times R\overrightarrow{j}) = v_0\overrightarrow{i} + v_0\overrightarrow{i} = 2v_0\overrightarrow{i}$$

Para el punto C

$$\overrightarrow{r_{\frac{C}{O}}} = R\overrightarrow{i}$$

$$\overrightarrow{v_C} = \overrightarrow{v_0} + \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r_{\frac{C}{O}}} = v_0\overrightarrow{i} + (-\omega\overrightarrow{k} \times R\overrightarrow{i}) = v_0\overrightarrow{i} + v_0\overrightarrow{j}$$

$$v_B == \sqrt{2}v_0$$

y para el punto D

$$\overrightarrow{r_{\frac{D}{O}}} = -R\overrightarrow{j}$$

$$\overrightarrow{v_D} = \overrightarrow{v_0} + \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r_{\frac{D}{O}}} = v_0\overrightarrow{i} + (-\omega\overrightarrow{k} \times -R\overrightarrow{j}) = v_0\overrightarrow{i} - v_0\overrightarrow{i} = 0$$

Gráficamente: En cada punto actúan la velocidad de traslación y la velocidad lineal debido a la rotación.

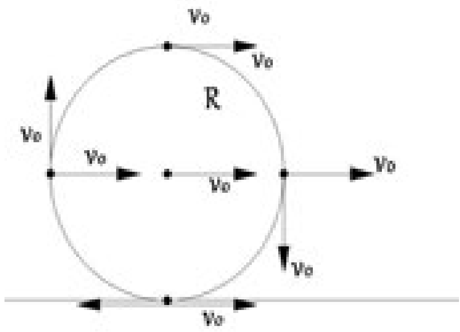


Figura 7.1.8:

Debe recordarse que los desplazamientos, velocidades y aceleraciones están definidos con respecto a un sistema de coordenadas y por lo tanto la frase "del punto B respecto al punto A" se refiere al movimiento de B respecto al sistema de coordenadas que se traslada con el cuerpo y cuyo origen coincide con el punto A.

7.1.4. Centro instantáneo de rotación

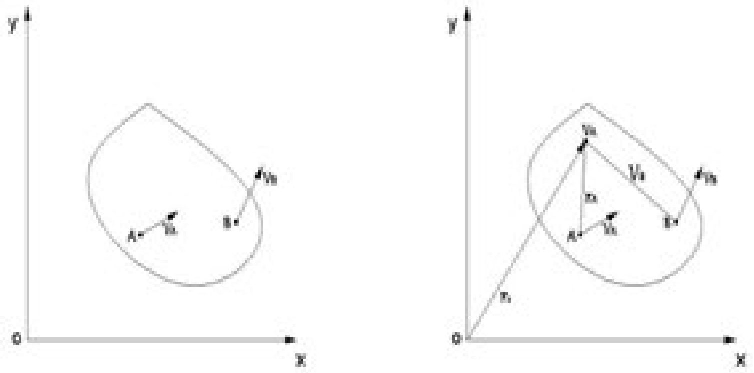


Figura 7.1.9: Centro instantáneo de rotación

Suponiendo un cuerpo que se encuentre en la posición que se muestra en la figura y se conoce las direcciones de las velocidades de dos puntos del cuerpo. $\overrightarrow{v_A}$ y $\overrightarrow{v_B}$.

Si se levantan perpendiculares a las velocidades $\overrightarrow{v_A}$ y $\overrightarrow{v_B}$ por los puntos A y B se determina el punto de intersección C y el radio vector $\overrightarrow{r_C}$. Al aplicar la ecuación 7.1.4 a cada punto en función de los radio vectores relativos al punto C, podemos escribir:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}_A$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}_B$$

Considerando que el cuerpo rota con velocidad ω en C.

Como $\vec{v}_A$ tiene el mismo valor que $(\vec{\omega} \times \vec{r}_A)$ el valor de $\vec{v}_C$ es cero y:

$$v_A = \omega r_A$$

$$v_B = \omega r_B$$

de donde

$$\omega = \frac{v_A}{r_A} = \frac{v_B}{r_B}$$

Es decir el punto C tiene una velocidad instantánea de cero y se le llama Centro Instantáneo de Rotación y en cualquier instante determinado, la velocidad de cualquier punto del cuerpo es la misma que sería si el cuerpo estuviese girando alrededor del centro instantáneo con velocidad angular (ω).

Se puede aplicar el método solo para determinación de velocidades de otros puntos. El punto C no tiene aceleración cero y por consiguiente las aceleraciones de las distintas partículas de la placa no se le puede calcular como si esta girara alrededor de C.

Ejemplo 9. Una escalera resbala en el piso, apegada a un muro inclinado 60° con respecto a la horizontal. Si la longitud de la escalera es (l). Encontrar la velocidad del borde inferior si el borde superior se mueve con velocidad uniforme (v), sobre el muro.

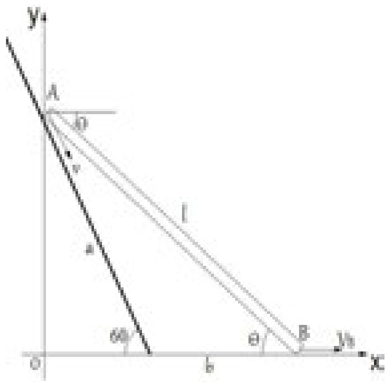


Figura 7.1.10:

Partiendo de las condiciones establecidas en la figura 7.1.10
Velocidad

$$\overrightarrow{v}_B = \overrightarrow{v}_A + \overrightarrow{v}_{\frac{B}{A}}$$

$$\overrightarrow{v}_B = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}_{\frac{B}{A}}$$

Condición

$$\overrightarrow{v}_B = v_B \overrightarrow{i}$$

Como:

$$\overrightarrow{v} = vcos(60)\overrightarrow{i} - vsen(60)\overrightarrow{j} = 0{,}5v\overrightarrow{i} - 0{,}86v\overrightarrow{j}$$

$$\overrightarrow{\omega} = \omega\overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{r}_{\frac{B}{A}} = lcos(\theta)\overrightarrow{i} - lsen(\theta)\overrightarrow{j}$$

$$cos(\theta) = \frac{acos(60) + b}{l} = \frac{0{,}5a + b}{l}$$

$$sen(\theta) = \frac{asen(60)}{l} = \frac{0{,}86a}{l}$$

$$\overrightarrow{r}_{\frac{B}{A}} = l \cdot (\frac{0{,}5a+b}{l})\overrightarrow{i} - l \cdot (\frac{0{,}86a}{l})\overrightarrow{j}$$

sustituyendo

$$v_B\overrightarrow{i} = 0{,}5v\overrightarrow{i} - 0{,}86v\overrightarrow{j} + \omega\overrightarrow{k} \times \left[(0{,}5a+b)\overrightarrow{i} - 0{,}86a\overrightarrow{j}\right]$$

igualando en $\overrightarrow{i}$ y en $\overrightarrow{j}$

$$v_B = 0{,}5v + 0{,}86a\omega$$

$$0 = 0{,}86v + \omega(0{,}5a+b)$$

se despeja ω y se sustituye, calculando la velocidad v_B
Como ejercicio debe calcular la aceleración de B ($\overrightarrow{a_B}$) conociendo la aceleración de A ($\overrightarrow{a_A}$)

7.2. Dinámica del cuerpo rígido

Para analizar el movimiento del cuerpo rígido lo consideraremos como un sistema infinito de partículas al que podemos aplicar las ecuaciones que permitan estudiar 2 movimientos, el de traslación y el de rotación [1].

1. Determinar el movimiento de traslación del centro de masas mediante la ecuación que relaciona las fuerzas externas que actúan en el cuerpo rígido y la aceleración producida en el centro de masa.

$$\sum \overrightarrow{F} = m\ddot{\overrightarrow{r}}_c \qquad (7.2.1)$$

   Siendo (m) la masa del cuerpo rígido.

2. Determinar el movimiento de rotación del cuerpo rígido alrededor del centro de masa mediante la ecuación del momento angular.

$$\overrightarrow{M} = \frac{d\overrightarrow{H}}{dt} \qquad (7.2.2)$$

   $\overrightarrow{M}$ =Momento estático de las fuerzas externas.
   $\overrightarrow{H}$ =Momento angular del cuerpo rígido.

7.2.1. Momento angular del cuerpo rígido, respecto al centro de masa

Se ha demostrado en el capítulo 5 que la ecuación del momento angular puede ser escrita con respecto a un punto fijo o con respecto al centro de masa del sistema. Deduciremos la ecuación respecto al centro de masa del cuerpo rígido.

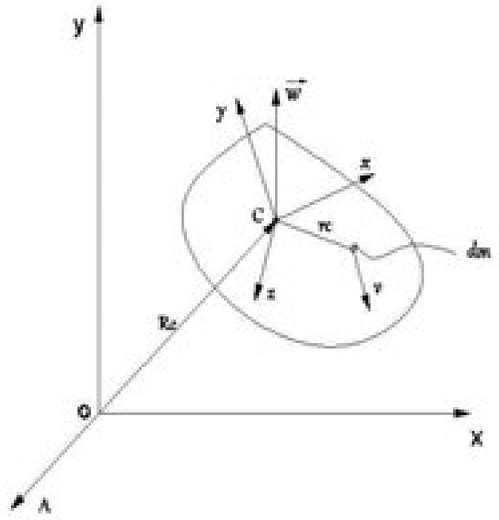


Figura 7.2.1: Cuerpo rígido en movimiento

Consideremos un sistema de coordenadas fijo (XYZ) con origen O y un sistema de coordenadas móvil (xyz) que se mueve con el cuerpo rígido y que su origen coincide con el centro de masas.

Elegimos un elemento infinitesimal de masa (dm) del cuerpo rígido.
$\overrightarrow{r}_c$ =vector de posición del elemento (dm).
v =velocidad absoluta del elemento (dm).
$dm = \rho dV$
siendo:
ρ =densidad del cuerpo.
dV =elemento infinitesimal de volumen.
$\overrightarrow{\omega}$ =vector rotación del cuerpo rígido.
El momento angular del cuerpo de masa (dm) respecto al centro de masa será:

$$d\overrightarrow{H}_c = \overrightarrow{r}_c \times \overrightarrow{v} dm$$

Y el momento angular del cuerpo rígido respecto al centro de masa será:

$$\vec{H}_c = \int (\vec{r}_c \times \vec{v})dm$$

Como la velocidad ($\vec{v}$) del elemento es velocidad absoluta se puede expresar en función de la velocidad del centro de masa.

$$\vec{v} = \dot{\vec{R}}_c + \vec{\omega} \times \vec{r}_c$$

y sustituyendo

$$\vec{H}_c = \int \vec{r}_c \times (\dot{\vec{R}}_c + \vec{\omega} \times \vec{r}_c)dm$$

$$= \int (\vec{r}_c \times \dot{\vec{R}}_c)dm + \int \vec{r}_c \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_c)dm$$

El primer término

$$\int (\vec{r}_c \times \dot{\vec{R}}_c)dm = \left(\int \vec{r}_c dm\right) \times \dot{\vec{R}}_c = 0$$

Por condición del centro de masa luego

$$\vec{H}_c = \int \vec{r}_c \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_c)dm \tag{7.2.3}$$

Que es el momento angular del cuerpo rígido referido al centro de masa.

7.2.2. Momento angular en coordenadas rectangulares

Partiendo de la ecuación dada en forma general

$$\vec{H}_c = \int \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r_c})dm$$

Considerando el sistema propio (xyz) con origen en cualquier punto del cuerpo rígido, generalizaremos la expresión y se puede expresar en esas coordenadas los vectores:

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

$$\vec{\omega} = \omega_x\,\vec{i} + \omega_y\,\vec{j} + \omega_z\,\vec{k}$$

por lo que

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= \overrightarrow{i}(z\omega_y - y\omega_z) + \overrightarrow{j}(x\omega_z - z\omega_x) + \overrightarrow{k}(y\omega_x - x\omega_y)$$

$$\overrightarrow{r} \times (\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x & y & z \\ (z\omega_y - y\omega_z) & (x\omega_z - z\omega_x) & (y\omega_x - x\omega_y) \end{vmatrix}$$

$$= \left[\omega_x(y^2 + z^2) - \omega_y \cdot xy - \omega_z \cdot xz\right] \overrightarrow{i} +$$

$$\left[-\omega_x \cdot yx + \omega_y(z^2 + x^2) - \omega_z \cdot yz\right] \overrightarrow{j} +$$

$$\left[-\omega_x \cdot zx - \omega_y \cdot zy + \omega_z(x^2 + y^2)\right] \overrightarrow{k}$$

Considerando que el momento angular puede ser expresado como:

$$\overrightarrow{H} = H_x \overrightarrow{i} + H_y \overrightarrow{j} + H_z \overrightarrow{k}$$

se tiene:

$$H_x = \omega_x \int (y^2 + z^2)dm - \omega_y \int xydm - \omega_z \int xzdm$$

$$H_y = -\omega_x \int yxdm + \omega_y \int (z^2 + x^2)dm - \omega_z \int yzdm$$

$$H_z = -\omega_x \int zxdm - \omega_y \int zydm + \omega_z \int (x^2 + y^2)dm$$

Los integrales son relaciones de tipo geométrico y serían constantes. Si llamamos:

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2)dm \tag{7.2.4}$$

$$I_{yy} = \int (z^2 + x^2)dm \tag{7.2.5}$$

$$I_{zz} = \int (x^2 + y^2)dm \tag{7.2.6}$$

$$I_{xy} = \int xydm$$

$$I_{xz} = \int xzdm$$

$$I_{yz} = \int yzdm$$

tenemos:

$$H_x = I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z \tag{7.2.7}$$

$$H_y = -I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z \tag{7.2.8}$$

$$H_z = -I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \tag{7.2.9}$$

I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}, se llaman momentos de inercia
I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}, se llaman productos de inercia

Los momentos y productos de inercia están definidos respecto a los ejes fijos en el cuerpo, por lo tanto son constantes durante el movimiento del cuerpo rígido. El cuerpo tiene tres momentos de inercia y tres productos de inercia y aparecen en una matriz simétrica que se llama Matríz de Inercia.

$$|I| = \begin{vmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{vmatrix}$$

$$I_{xy} = I_{yx}$$

$$I_{xz} = I_{zx}$$

$$I_{yz} = I_{zy}$$

Donde los momentos de inercia son positivos y los productos de inercia son negativos, El momento angular será igual a la matriz de inercia multiplicada por el vector momento angular

$$\overrightarrow{H} = |I| \cdot \overrightarrow{\omega} \tag{7.2.10}$$

7.2.3. Momentos y productos de inercia

Los momentos y productos de inercia, son calculados mediante integraciones sencillas, así en los momentos de inercia se observa que las distancias a la masa elemental (dm) son:

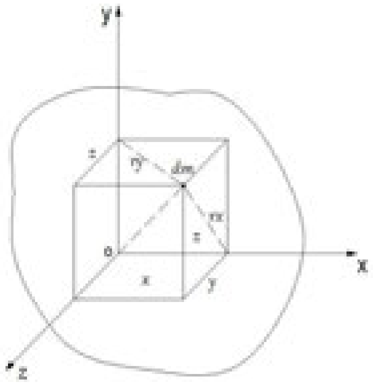


Figura 7.2.2: Momentos de Inercia

$$x^2 + y^2 = r_x^2$$

$$z^2 + x^2 = r_y^2$$

$$x^2 + z^2 = r_z^2$$

Siendo r_x, r_y, r_z las distancias de la masa (dm) a cada eje; luego los momentos de inercia son:

$$I_{xx} = \int r_x^2 dm \tag{7.2.11}$$

$$I_{yy} = \int r_y^2 dm \tag{7.2.12}$$

$$I_{zz} = \int r_z^2 dm \tag{7.2.13}$$

La unidad del momento de inercia y del producto de inercia es:

$$I = m \cdot r^2 = kg \cdot m^2$$

Los momentos de inercia representan geométricamente una masa por una distancia al eje, elevado al cuadrado y son siempre positivos. Es un momento de segundo orden como si el cuerpo rotara en torno al eje correspondiente.

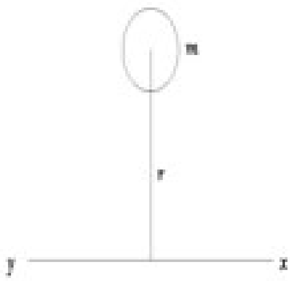


Figura 7.2.3: Momento de inercia Ixx

Si la masa es puntual y constante

$$I_{xx} = mr^2$$

de donde

$$r = \sqrt{\frac{I_{xx}}{m}} \tag{7.2.14}$$

r = radio de giro, que es la distancia a la que deberá colocar la masa concentrada en un punto para que tengamos el mismo momento de inercia de un cuerpo rígido.

Para el cálculo del integral el valor de (dm) puede ser:

$$dm = \rho dV$$

Para integral volumétrica.

Cuando el sólido es una placa de espesor constante (e)

$$dm = \rho e dA$$

dA = área elemental.

En muchas tablas aparecen como el momento de inercia de áreas de figuras geométricas. En este caso deberá ser multiplicado por el espesor y por la densidad para que dimensionalmente sean un momento de inercia.

La integral del producto de inercia tiene la forma:

$$I_{xy} = \int xydm$$

puesto que (x) y (y) puede ser positivo o negativo, el producto de inercia puede ser positivo o negativo y ademas valor cero.

En particular si el plano yz es un plano de simetría del cuerpo entonces hay un negativo (xydm) para cada positivo (xydm) y el producto de inercia es cero, es decir los cuerpos simétricos tienen productos de inercia nulos respecto a los ejes de simetría.

Los cálculos en general son simples pero deben seguirse tres observaciones que benefician los mismos.

1. Si los momentos y productos de inercia son conocidos para un sistema de ejes, pueden ser encontrados los correspondiente para cualquier sistema de coordenadas desplazadas y paralelamente. (Traslación de ejes)
2. Si los momentos y productos de inercia son conocidos para un sistema de ejes, pueden ser encontrados los correspondientes para el sistema de ejes rotados respecto al anterior. (Rotación de ejes)
3. Los momentos y productos de inercia de un cuerpo de forma complicada pueden ser hallados subdividiendo el cuerpo en partes sencillas, calculando los integrales para cada parte y luego sumándolas.

7.2.4. Integrales de inercia para ejes trasladados

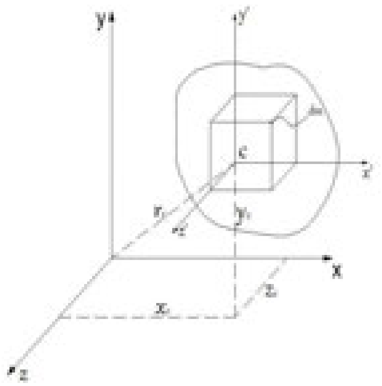


Figura 7.2.4: Traslación de ejes

Se conocen los momentos de inercia respecto a los ejes de x´, y´, z´, ubicados en el centro de masa.

$$I_{x´x´},\ I_{y´y´},\ I_{z´z´}$$

Calculamos el momento de Inercia respecto al eje trasladado paralelamente, por ejemplo.

$$I_{zz} = \int (x^2 + y^2) dm$$

y sustituyendo

$$x = x_c + x´$$

$$y = y_c + y\acute{}$$

se tiene

$$I_z = \int \left[(x_c + x\acute{})^2 + (y_c + y\acute{})^2 \right] dm$$

$$= \int (x_c^2 + x\acute{}^2 + 2x_c x\acute{} + y_c^2 + y\acute{}^2 + 2y_c y\acute{}) dm$$

$$= \int (x\acute{}^2 + y\acute{}^2) dm + (x_c^2 + y_c^2) \int dm + 2x_c \int x\acute{} dm + 2y_c \int y\acute{} dm$$

como

$$\int x\acute{} dm = \int y\acute{} dm = 0$$

y

$$x_c^2 + y_c^2 = r_{cz}^2$$

distancia del centro de masa al eje desplazado.

$$I_{zz} = I_{z'z'} + m r_{cz}^2 \tag{7.2.15}$$

El momento de inercia respecto a un eje trasladado es igual al momento de inercia respecto al eje por el centro de masa, más la masa por la distancia del eje trasladado, elevado al cuadrado. (Teorema de Steiner).

Para el caso de los productos de Inercia procedemos de igual manera:

$$I_{xy} = \int xy dm = \int (x_c + x\acute{})(y_c + y\acute{}) dm$$

$$= \int x\acute{y}\acute{} dm + x_c y_c \int dm + x_c \int y\acute{} dm + y_c \int x\acute{} dm$$

luego

$$I_{xy} = I_{x\acute{}y\acute{}} + m y_c x_c \tag{7.2.16}$$

7.2.5. Integrales de inercia para ejes rotados

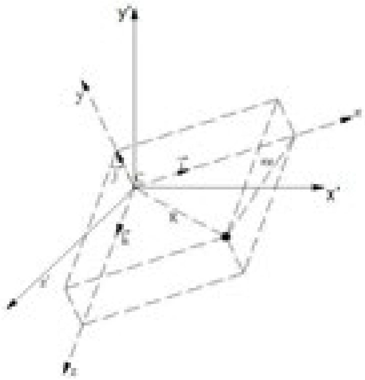


Figura 7.2.5: Rotación de ejes

Se conocen los momentos y productos de inercia respecto de los ejes (x´,y´,z´) que pasan por el centro de masa.

Momentos de Inercia

$$I_{x´x´}, I_{y´y´}, I_{z´z´}$$

Productos de Inercia

$$I_{x´y´}, I_{x´z´}, I_{y´z´}$$

Y se trata de calcular los correspondientes a los ejes (x,y,z), rotados respecto a los primeros.

Calculamos el momento de Inercia respecto a los ejes rotados (x,y,z)

$$I_{xx} = \int r_x^2 dm$$

de la figura se establece:

$$r_x^2 = R^2 - x^2 = x´^2 + y´^2 + z´^2 - x^2$$

El valor de x, puede calcularse como el producto escalar

$$x = \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{R} = \overrightarrow{i} \cdot (x´\overrightarrow{i´} + y´\overrightarrow{j´} + z´\overrightarrow{k´})$$

$$= x´(\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{i´}) + y´(\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j´}) + z´(\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{k´})$$

además se conoce que

$$\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{i´} = cos(\theta_{xx´}) = l_{xx´}$$

$$\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j}' = cos(\theta_{xy'}) = l_{xy'}$$

$$\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{k}' = cos(\theta_{xz'}) = l_{xz'}$$

siendo los cosenos directores de los ángulos que hace el eje OX con x´, y´ y z´ respectivamente.

Sustituyendo

$$x = x'l_{xx'} + y'l_{xy'} + z'l_{xz'}$$

y el momento de inercia será:

$$I_{xx} = \int \left[(x'^2 + y'^2 + z'^2) - x^2 \right] dm$$

$$I_{xx} = \int \left[(x'^2 + y'^2 + z'^2) - (x'l_{xx'} + y'l_{xy'} + z'l_{xz'})^2 \right] dm$$

como la propiedad de los cosenos directores es:

$$l^2_{xx'} + l^2_{xy'} + l^2_{xz'} = 1$$

Se puede escribir

$$I_{xx} = \int \left[(x'^2 + y'^2 + z'^2)(l^2_{xx'} + l^2_{xy'} + l^2_{xz'}) - (x'l_{xx'} + y'l_{xy'} + z'l_{xz'})^2 \right] dm$$

multiplicando y agrupando

$$I_{xx} = l^2_{xx'} \int (y'^2 + z'^2)dm + l^2_{xy'} \int (x'^2 + z'^2)dm + l^2_{xz'} \int (x'^2 + y'^2)dm$$

$$-2l_{xx'}l_{xy'} \int x'y'dm - 2l_{xx'}l_{xz'} \int x'z'dm - 2l_{xy'}l_{xz'} \int y'z'dm$$

o también

$$I_{xx} = l^2_{xx'} I_{x'x'} + l^2_{xy'} I_{y'y'} + l^2_{xz'} I_{z'z'} - 2l_{xx'}l_{xy'} I_{x'y'} - 2l_{xx'}l_{xz'} I_{x'z'} - 2l_{xy'}l_{xz'} I_{y'z'} \quad (7.2.17)$$

Igual para I_{yy}, I_{zz} cambiando en la expresión la letra (x) por (y); la letra (x) por (z) respectivamente.

Los productos de Inercia transformados pueden ser determinados de igual manera:

$$-I_{xy} = l_{xx'} l_{yx'} I_{x'x'} + l_{xy'} l_{yy'} I_{y'y'} + l_{xz'} l_{yz'} I_{z'z'}$$

$$-(l_{xx'} l_{yy'} + l_{xx'} l_{yx'}) I_{x'y'} - (l_{xy'} l_{yz'} + l_{xz'} l_{yy'}) I_{y'z'}$$

$$-(l_{xz'} l_{yx'} + l_{xx'} l_{yz'}) I_{z'x'} \qquad (7.2.18)$$

Se nota que para realizar la transformación de momentos y productos de inercia a ejes rotados se requiere conocer toda la matriz de inercia

dado

$$I' = \begin{vmatrix} I_{x'x'} & -I_{x'y'} & -I_{x'z'} \\ -I_{y'x'} & I_{y'y'} & -I_{y'z'} \\ -I_{z'x'} & -I_{z'y'} & I_{z'z'} \end{vmatrix}$$

se obtiene

$$I = \begin{vmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{vmatrix}$$

La matrices son simétricas respecto a la diagonal principal con momentos de inercia positivos y productos de inercia negativos y para obtener cada término de la matriz transformada puede usarse la siguiente aplicación llamada transformación tensorial.

$$I_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha'} \sum_{\beta'} l_{\alpha\beta'} l_{\beta\alpha'} I_{\alpha'\beta'} \qquad (7.2.19)$$

siguiendo el siguiente procedimiento:

1. Definir α y β (igual a x , y o z)
2. Sumar primero en β' variando cada vez $\beta' = x', y', z'$
3. Sumar en α' variando cada vez para $\alpha' = x', y', z'$

si $\alpha = \beta$ el término es (+)

si $\alpha \neq \beta$ el término es (-)

7.2.6. Ejes principales de inercia

En las transformaciones existen tres momentos de inercia y tres productos de inercia, sin embargo es posible escoger un sistema especial tal que se elimina los productos de inercia. Los ejes que satisfacen esta condición se llaman ejes principales de inercia, y los momentos se llaman momentos principales de inercia.

La matriz queda:

$$I'_p = \begin{vmatrix} I_{x'x'} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y'y'} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z'z'} \end{vmatrix}$$

Si los productos de inercia son cero, las transformaciones resultan más sencillas y las ecuaciones simplificadas quedan:

$$I_{xx} = l^2_{xx'} I_{x'x'} + l^2_{xy'} I_{y'y'} + l^2_{xz'} I_{z'z'} \tag{7.2.20}$$

$$I_{yy} = l^2_{yx'} I_{x'x'} + l^2_{yy'} I_{y'y'} + l^2_{yz'} I_{z'z'} \tag{7.2.21}$$

$$I_{zz} = l^2_{zx'} I_{x'x'} + l^2_{zy'} I_{y'y'} + l^2_{zz'} I_{z'z'} \tag{7.2.22}$$

$$I_{xy} = -(l_{xx'} l_{yx'} I_{x'x'} + l_{xy'} l_{yy'} I_{y'y'} + l_{xz'} l_{yz'} I_{z'z'}) \tag{7.2.23}$$

$$I_{yz} = -(l_{yx'} l_{zx'} I_{x'x'} + l_{yy'} l_{zy'} I_{y'y'} + l_{yz'} l_{zz'} I_{z'z'}) \tag{7.2.24}$$

$$I_{xz} = -(l_{zx'} l_{xx'} I_{x'x'} + l_{zy'} l_{xy'} I_{y'y'} + l_{zz'} l_{xz'} I_{z'z'}) \tag{7.2.25}$$

Si un cuerpo tiene dos planos de simetría perpendiculares y los ejes coinciden con la intersección de dichos planos, los ejes son ejes principales de inercia y los productos de inercia son cero.

Teoremas

1. El mayor momento principal de inercia es el mayor momento de inercia que puede tener respecto a cualquier eje rotado.
2. El menor momento principal de inercia es el menor momento de inercia que puede obtenerse para cualquier orientación de los ejes.
3. El momento principal de inercia mínimo con respecto a un sistema de ejes coordenados que pasan por el centro de masa del cuerpo es el mínimo momento de inercia para todos los ejes posibles.

7.2.7. Ecuaciones generales del movimiento de un cuerpo rígido

El movimiento de un cuerpo rígido puede ser estudiado como el de superposición de dos movimientos: Al movimiento de traslación del centro de masa más el movimiento de rotación del cuerpo respecto al centro de masa mediante las ecuaciones que ya se han analizado.

$$\sum \vec{F}_i = m\ddot{\vec{r}}_c \tag{7.2.26}$$

Movimiento del centro de masa siendo:

$\sum \overrightarrow{F}_i$ = Sumatoria de fuerzas externas en el cuerpo rígido.
$\overrightarrow{r}_c$ = Vector posición del centro de masa.
m = Masa del cuerpo rígido.

$$\sum \overrightarrow{M}_o = \frac{d\overrightarrow{H}_o}{dt} \tag{7.2.27}$$

Ecuación del momento de rotación alrededor del centro de masa siendo:

$\sum \overrightarrow{M}_o$ = Sumatoria de momentos estáticos respecto al centro de masa.
$\overrightarrow{H}_o$ = Momento angular del cuerpo.

Por lo tanto existirá un sistema (XYZ) fijo con respecto al cual se estudia el movimiento y un sistema en el centro de masa (xyz) fijo del cuerpo y giran con el cuerpo por lo que los momentos y productos de inercia son constantes.

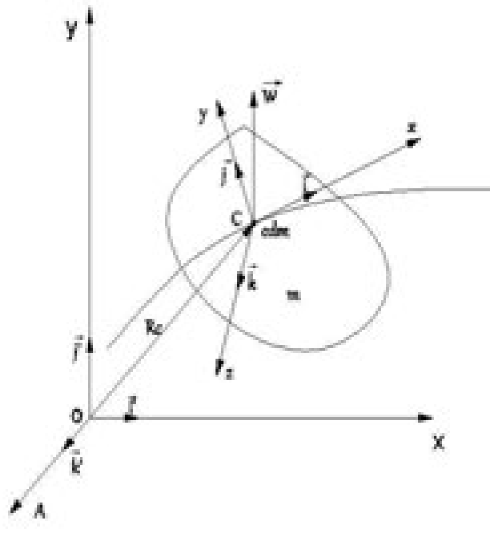


Figura 7.2.6: Movimiento de un cuerpo rígido

Momentos de Inercia I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}

Productos de Inercia I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}

Los vectores unitarios del sistema móvil $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$giran con el cuerpo por lo que sus derivadas no son constantes y finalmente se conocen las velocidad angulares del cuerpo rígido ($\overrightarrow{\omega}$).

Analizaremos el estudio del movimiento en coordenadas rectangulares que permiten simplificar en gran medida los diferentes casos de movimiento.

1. Ecuación de traslación del centro de masa

$$\sum \overrightarrow{F}_i = m\ddot{\overrightarrow{r}}_c$$

como

$$\overrightarrow{F} = F_x \overrightarrow{i}' + F_y \overrightarrow{j}' + F_z \overrightarrow{k}'$$

respecto a (XYZ) y

$$\ddot{\overrightarrow{r}}_c = \ddot{x} \overrightarrow{i}' + \ddot{y} \overrightarrow{j}' + \ddot{z} \overrightarrow{k}'$$

respecto a (XYZ)
igualando:

$$\sum F_x = m\ddot{x}_c \tag{7.2.28}$$

$$\sum F_y = m\ddot{y}_c \tag{7.2.29}$$

$$\sum F_z = m\ddot{z}_c \tag{7.2.30}$$

Que son las ecuaciones del movimiento del centro de masa respecto a los ejes (XYZ).

2. Ecuación del momento angular

$$\sum \overrightarrow{M} = \frac{d\overrightarrow{H}}{dt}$$

En coordenadas rectangulares:

$$\overrightarrow{M} = \frac{d}{dt}(H_x \overrightarrow{i} + H_y \overrightarrow{j} + H_z \overrightarrow{k})$$

donde:

$$H_x = I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z \tag{7.2.31}$$

$$H_y = -I_{xy}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z \tag{7.2.32}$$

$$H_z = -I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \tag{7.2.33}$$

Los momentos y productos de Inercia, así como las velocidades angulares son calculadas respecto a loes ejes propios del cuerpo, pero estos ejes se mueven respecto a los ejes fijos (XYZ) por lo que sus vectores unitarios (i,j,k) tienen derivadas respecto al sistema externo.

Aplicando

$$\overrightarrow{M} = \frac{d\overrightarrow{H}}{dt}$$

$$M = \frac{d}{dt}\left(H_x\overrightarrow{i} + H_y\overrightarrow{j} + H_z\overrightarrow{k}\right)$$

$$\overrightarrow{M} = \dot{H}_x\overrightarrow{i} + H_x\dot{\overrightarrow{i}} + \dot{H}_y\overrightarrow{j} + H_y\dot{\overrightarrow{j}} + \dot{H}_z\overrightarrow{k} + H_z\dot{\overrightarrow{k}}$$

las derivadas vectoriales en función de las velocidad angular se expresan como:

$$\dot{\overrightarrow{i}} = \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{i} = (\omega_x\overrightarrow{i} + \omega_y\overrightarrow{j} + \omega_z\overrightarrow{k}) \times \overrightarrow{i} = \omega_z\overrightarrow{j} - \omega_y\overrightarrow{k}$$

$$\dot{\overrightarrow{j}} = \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{j} = (\omega_x\overrightarrow{i} + \omega_y\overrightarrow{j} + \omega_z\overrightarrow{k}) \times \overrightarrow{j} = \omega_x\overrightarrow{k} - \omega_z\overrightarrow{i}$$

$$\dot{\overrightarrow{k}} = \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{k} = (\omega_x\overrightarrow{i} + \omega_y\overrightarrow{j} + \omega_z\overrightarrow{k}) \times \overrightarrow{k} = \omega_y\overrightarrow{i} - \omega_x\overrightarrow{j}$$

sustituyendo y agrupando

$$\overrightarrow{M} = \left(\dot{H}_x - \omega_z H_y + \omega_y H_z\right)\overrightarrow{i} + \left(\dot{H}_y - \omega_x H_z + \omega_z H_x\right)\overrightarrow{j} + \left(\dot{H}_z - \omega_y H_x + \omega_x H_y\right)\overrightarrow{j} \tag{7.2.34}$$

Que es la ecuación vectorial general del movimiento de rotación de un cuerpo rígido, que expresada en sus componentes son tres ecuaciones escalares.

$$M_x = \dot{H}_x - \omega_z H_y + \omega_y H_z \tag{7.2.35}$$

$$M_y = \dot{H}_y - \omega_x H_z + \omega_z H_x \tag{7.2.36}$$

$$M_z = \dot{H}_z - \omega_y H_x + \omega_x H_y \tag{7.2.37}$$

Que con las tres ecuaciones de fuerza constituyen las seis ecuaciones diferenciales para el estudio del movimiento del cuerpo rígido.

Traslación

$$\sum\overrightarrow{F} = m\ddot{\overrightarrow{r}}_c \begin{cases} \sum F_x = m\ddot{x}_c \\ \sum F_y = m\ddot{y}_c \\ \sum F_z = m\ddot{z}_c \end{cases} \tag{7.2.38}$$

Rotación

$$\sum\overrightarrow{M} = \frac{d\overrightarrow{H}}{dt} \begin{cases} \sum M_x = \dot{H}_x - \omega_z H_y + \omega_y H_z \\ \sum M_y = \dot{H}_y - \omega_x H_z + \omega_z H_x \\ \sum M_z = \dot{H}_z - \omega_y H_x + \omega_x H_y \end{cases} \tag{7.2.39}$$

siendo

$$H_x = I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z \tag{7.2.40}$$

$$H_y = -I_{xy}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z \tag{7.2.41}$$

$$H_z = -I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \tag{7.2.42}$$

donde se conocen

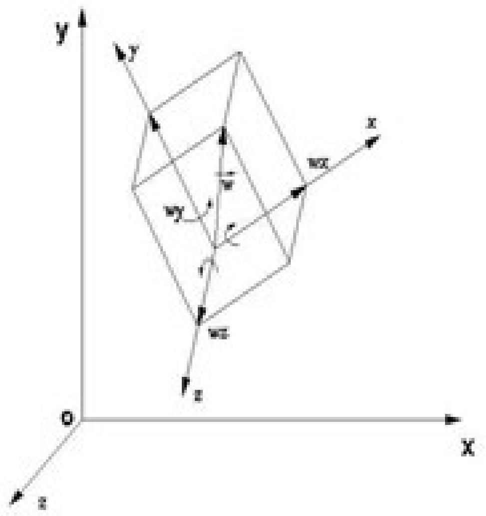


Figura 7.2.7: Cuerpo rígido

1. Las fuerzas externas del cuerpo rígido.
2. Los momentos y productos de inercia que son determinados por la forma del cuerpo.

$$I_{xx},\ I_{yy},\ I_{zz},\ I_{xy},\ I_{xz},\ I_{yz}$$

3. La velocidad angular del cuerpo rígido que es igual a la velocidad angular del sistema móvil (xyz)

$$\overrightarrow{\omega} = \omega_x \overrightarrow{i} + \omega_y \overrightarrow{j} + \omega_z \overrightarrow{k}$$

Las ecuaciones están sujetas a simplificaciones de acuerdo a las características particulares del movimiento y se analizará para diferentes casos.

Por ejemplo, si se aplica al movimiento de un cuerpo con dos planos perpendiculares de simetría, se anulan los productos de inercia y se tiene que el momento angular toma el valor de

$$H_x = I_{xx}\omega_x$$

$$\dot{H}_x = I_{xx}\dot{\omega}_x$$

$$H_y = I_{yy}\omega_y$$

$$\dot{H}_y = I_{yy}\dot{\omega}_y$$

$$H_z = I_{zz}\omega_z$$

$$\dot{H}_z = I_{zz}\dot{\omega}_z$$

Sustituyendo y agrupando

$$M_x = I_{xx}\dot{\omega}_x + (I_{zz} - I_{yy})\omega_y\omega_z \tag{7.2.43}$$

$$M_y = I_{yy}\dot{\omega}_y + (I_{xx} - I_{zz})\omega_x\omega_z \tag{7.2.44}$$

$$M_z = I_{zz}\dot{\omega}_z + (I_{yy} - I_{xx})\omega_x\omega_y \tag{7.2.45}$$

Que se llaman las ecuaciones de Euler del movimiento de un cuerpo rígido donde los ejes (xyz) son los ejes principales de inercia.

Las ecuaciones del impulso angular se obtienen de la ecuación general

$$\overrightarrow{M} = \frac{d\overrightarrow{H}}{dt}$$

separando variables

$$\overrightarrow{M}dt = d\overrightarrow{H}$$

e integramos

$$\int_1^2 \overrightarrow{M}dt = \overrightarrow{H}_2 - \overrightarrow{H}_1$$

Que establece que el impulso angular es igual a la variación del momento angular.

7.2.8. Trabajo y energía en el cuerpo rígido

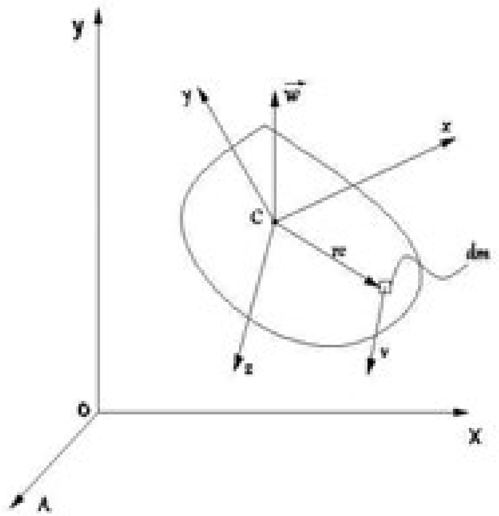


Figura 7.2.8: Energía cinética en el cuerpo rígido

Si $\overrightarrow{v}$ es la velocidad absoluta de la partícula (dm), la energía cinética del cuerpo rígido será:

$$dT = \frac{1}{2}v^2 dm$$

e integrando

$$T = \frac{1}{2}\int v^2 dm$$

pero el valor de la velocidad absoluta en función de la velocidad del centro de masa es:

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_c} + \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}_c$$

siendo
$\overrightarrow{v_c}$ =velocidad del centro de masa.
$\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}_c$ = velocidad de la partícula respecto al centro de masa, y

$$v^2 = (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v})$$

sustituyendo

$$T = \frac{1}{2}\int (\overrightarrow{v_c} + \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}_c) \cdot (\overrightarrow{v_c} + \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}_c) dm$$

$$= \frac{1}{2}\int \left[v_c^2 + 2\overrightarrow{v_c}(\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}_c) + (\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}_c)(\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}_c) \right] dm$$

$$= \frac{1}{2}\int v_c^2 dm + \int \overrightarrow{v_c}(\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}_c)dm + \frac{1}{2}\int (\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}_c)(\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}_c)dm$$

donde el primer término

$$\frac{1}{2}\int v_c^2 dm = \frac{1}{2}mv_c^2 \qquad \text{Energía cinética del centro de masa o de traslación}$$

el segundo término

$$\int \overrightarrow{v_c}(\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}_c)dm = \overrightarrow{v_c} \cdot \overrightarrow{\omega} \times \int \overrightarrow{r}_c dm = 0$$

por condición de centro de masa

$$\int \overrightarrow{r}_c dm = 0$$

y el tercer término

$$\frac{1}{2}\int (\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}_c)(\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}_c)dm = \frac{1}{2}\overrightarrow{\omega} \cdot \int \overrightarrow{r}_c \times (\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}_c)dm$$

aplicando la propiedad del producto escalar. Luego la ecuación queda:

$$T = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{\omega} \cdot \overrightarrow{H}_c \tag{7.2.46}$$

Que es la ecuación de la energía cinética del cuerpo rígido donde:
m = masa total del cuerpo.
v_c = velocidad del centro de masa.
ω = velocidad angular del cuerpo rígido.
H_c = Momento angular del cuerpo respecto del centro de masa.

La energía cinética total del cuerpo rígido es igual a la energía cinética de traslación del cuerpo con la velocidad del centro de masa mas la energía cinética de rotación del cuerpo alrededor del centro de masa.

Las Fuerzas que interactúan en el cuerpo rígido son equivalentes a una Fuerza resultante ($\overrightarrow{F}$) actuando en el centro de masa más un momento resultante ($\overrightarrow{M_c}$) de esta fuerza respecto al centro de masa que es el que produce la rotación.

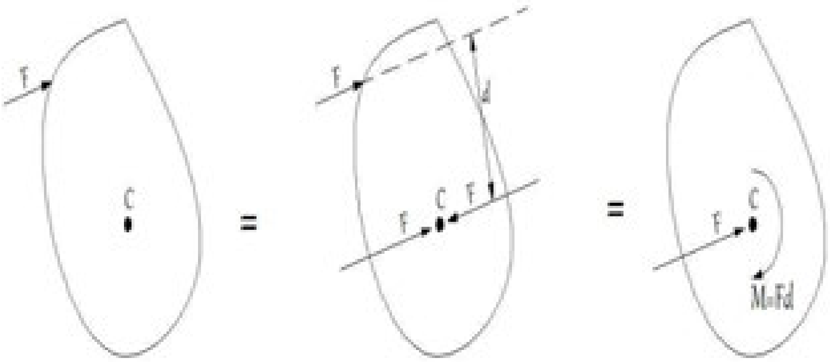


Figura 7.2.9: Traslación y rotación del cuerpo rígido

El trabajo se puede deducir que es igual al trabajo de traslación más el trabajo de rotación.

$$W = \int \overrightarrow{F} d\overrightarrow{r} + \int \overrightarrow{M} d\overrightarrow{\theta} \tag{7.2.47}$$

o también

$$W = \int \overrightarrow{F} v_c dt + \int \overrightarrow{\omega} \overrightarrow{M} dt \tag{7.2.48}$$

e igualando a la energía cinética
en traslación:

$$\int \overrightarrow{F} d\overrightarrow{r} = \frac{1}{2} m v_c^2 \Big|_1^2 \tag{7.2.49}$$

en rotación:

$$\int \overrightarrow{M} d\overrightarrow{\theta} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\omega} \cdot \overrightarrow{H}_c \Big|_1^2 \tag{7.2.50}$$

La energía cinética de rotación en coordenadas rectangulares calculamos sustituyendo los valores de $\overrightarrow{\omega}$ y $\overrightarrow{H}_c$.

$$\frac{1}{2} \overrightarrow{\omega} \cdot \overrightarrow{H}_c = \frac{1}{2} \left(\omega_x \overrightarrow{i} + \omega_y \overrightarrow{j} + \omega_z \overrightarrow{k} \right) \cdot \Big[\left(I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z \right) \overrightarrow{i} +$$

$$\left(-I_{xy}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z \right) \overrightarrow{j} + \left(-I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \right) \overrightarrow{k} \Big]$$

$$\frac{1}{2} \overrightarrow{\omega} \cdot \overrightarrow{H}_c = \frac{1}{2} \left(I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2 - 2I_{xy}\omega_x\omega_y - \right.$$

$$\left. 2I_{yz}\omega_y\omega_z - 2I_{xz}\omega_x\omega_z \right) \tag{7.2.51}$$

Que es la ecuación de la energía cinética de rotación de un cuerpo rígido expresado en coordenadas rectangulares donde los momentos y productos de inercia están definidos en ejes cuyo origen es el centro de masa si el cuerpo es simétrico.

$$T = \frac{1}{2} I_{xx}\omega_x^2 + \frac{1}{2} I_{yy}\omega_y^2 + \frac{1}{2} I_{zz}\omega_z^2 \tag{7.2.52}$$

A continuación se analizará la aplicación de las ecuaciones generales del movimiento del cuerpo rígido a los diferentes casos de movimiento bajo condiciones especiales.

7.2.9. Cuerpo rígido en reposo: equilibrio

Un caso en particular de análisis será el cuerpo que se halle en reposo o en equilibrio, llamando a ese estado cuando se halla bajo las siguientes condiciones:

1. La suma de las fuerzas que actúan es cero.

$$\sum \overrightarrow{F} = 0$$

   Es decir no tiene aceleración lineal.

2. La suma de los momentos en el cuerpo es cero.

$$\sum \overrightarrow{M} = 0$$

   Es decir no tiene ni aceleración angular ni velocidad angular.

$$\overrightarrow{H}_c = 0$$

Por lo tanto las ecuaciones a aplicarse será:

$$\sum \overrightarrow{F} = 0 \text{ Que implica } \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases} \tag{7.2.53}$$

$$\sum \overrightarrow{M} = 0 \text{ Que implica } \begin{cases} \sum M_x = 0 \\ \sum M_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases} \tag{7.2.54}$$

Estas ecuaciones maneja la Estática, y permiten calcular las fuerzas reactivas a las que se halla sujeto el cuerpo que impiden la traslación y la rotación del mismo.

7.2.10. Ecuaciones del movimiento de un cuerpo rígido en traslación

Un cuerpo se halla en movimiento de traslación cuando cualquier línea del cuerpo permanece siempre paralela a su posición original.

Condiciones.- No existe rotación, es decir la velocidad angular es cero.

$$\overrightarrow{\omega} = 0 \text{ que implica } \omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$$

$$\overrightarrow{H_c} = 0$$

ea considerarse el cuerpo tiene solo traslación y sustituyendo en las ecuaciones generales tenemos las ecuaciones a considerase:

$$\sum \overrightarrow{F} = m\ddot{\overrightarrow{r}}_c \text{ Que implica } \begin{cases} \sum F_x = m\ddot{x}_c \\ \sum F_y = m\ddot{y}_c \\ \sum F_z = m\ddot{z}_c \end{cases} \tag{7.2.55}$$

Siendo $(\ddot{\overrightarrow{r}}_c)$la aceleración del centro de masa que es igual a la aceleración de todos los puntos del cuerpo rígido, la segunda ecuación queda:

$$\sum \overrightarrow{M} = 0 \text{ Que implica } \begin{cases} \sum M_x = 0 \\ \sum M_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases} \tag{7.2.56}$$

La ecuación del momento permite calcular las fuerzas reactivas o reacciones dinámicas que impiden la rotación del cuerpo.

Ejemplo 10. Un cilindro homogéneo de radio (r) y masa (m), descansa en un plano inclinado de angulo (θ) si el coeficiente de fricción es (μ). Cuál es la distancia d para que una fuerza paralela al plano F provoque que el cilindro se deslice hacia arriba sin rotar. Calcular las reacciones del plano sobre el cilindro en estas condiciones.

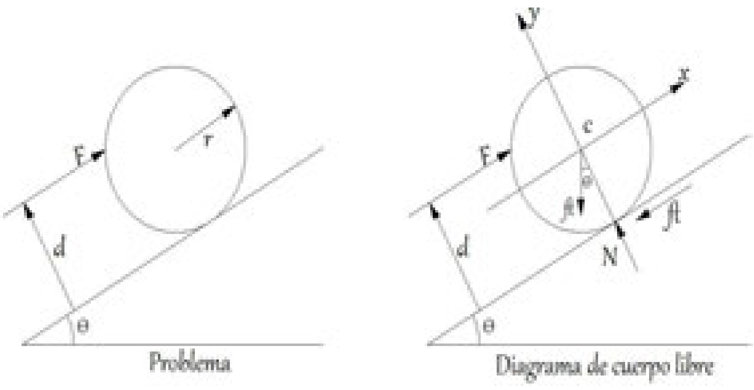


Figura 7.2.10: Problema

Se grafica el diagrama de cuerpo libre colocando las fuerzas que actúan:
Fuerza externa F(dato).
Fuerza peso ($p = mg$)
Fuerza normal N (reacción del plano en el cilindro)
Fuerza de rozamiento $f_r = \mu N$
Las ecuaciones para aplicar será:

$$\begin{cases} \sum F_x = m\ddot{x}_c \\ \sum F_y = m\ddot{y}_c \\ \sum F_z = 0 \end{cases} \quad \text{Ecuaciones del movimiento en el plano}$$

Además como no existe movimiento en y; aceleración en y=0 ($\ddot{y} = 0$) aplicando:

1.
$$\sum F_x = m\ddot{x}_c$$

$$F - f_r - Psen\theta = m\ddot{x}$$

$$F - \mu N - Psen\theta = m\ddot{x}$$

2.
$$\sum F_y = 0$$

$$N - Pcos\theta = 0$$

$$N = Pcos\theta$$

Sustituyendo:

$$F - \mu P cos\theta - P sen\theta = m\ddot{x}$$

$$P = mg$$

$$F = m\ddot{x} + P(sen\theta + cos\theta)$$

3.

$$\sum M_z = 0 \text{ Tomando momento al centro de masa}$$

$$-F(d - r) - f_r(r) = 0$$

$$F(d - r) + \mu N r = 0$$

$$Fd = Fr - uNr$$

$$d = r\left(1 - \frac{\mu N}{F}\right)$$

Se puede sustituir el valor de F encontrado anteriormente.

7.2.11. Movimiento de rotación alrededor de un eje fijo

El movimiento de rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo puede ser estudiado haciendo coincidir el eje de rotación con el eje OZ del sistema fijo y los ejes (xyz) propios del cuerpo giran con el cuerpo rotando en el plano (XY).

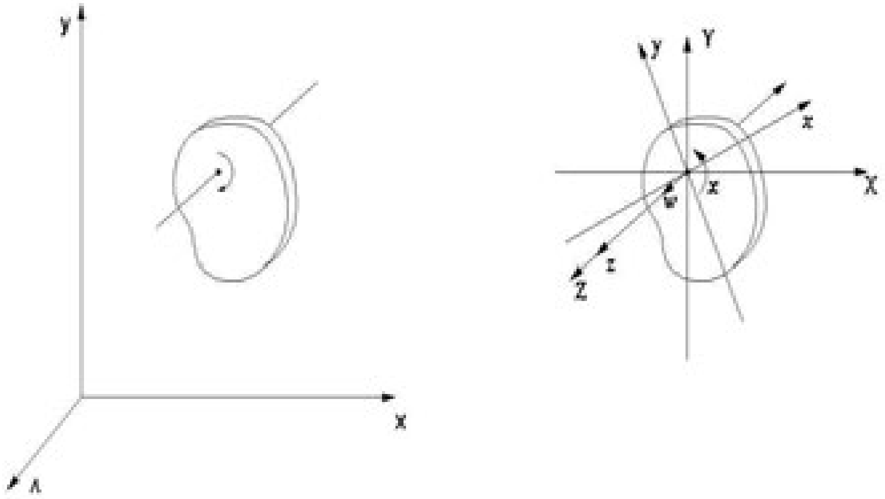


Figura 7.2.11: Movimiento alrededor del eje fijo

El caso más general del movimiento será cuando el centro de masa no coincide con el centro de rotación (o).

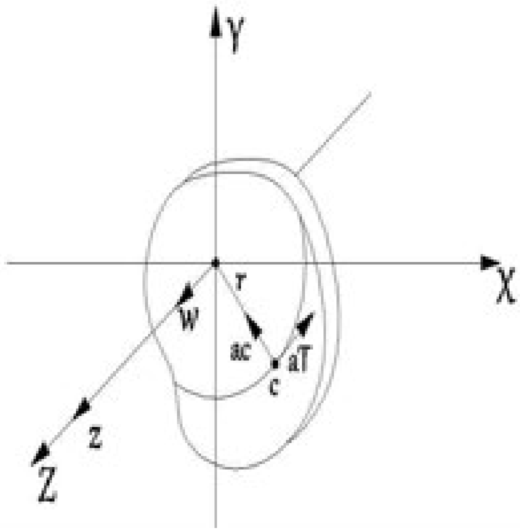


Figura 7.2.12: Centro de masa y centro de rotación

El centro de masa tiene aceleración y en coordenadas rectangulares las ecuaciones del movimiento del centro de masa será:

$$\sum F_x = m\ddot{x}_c \tag{7.2.57}$$

$$\sum F_y = m\ddot{y}_c \tag{7.2.58}$$

También la aceleración del centro de masa puede expresarse en función de la aceleración tangencial y la aceleración centrípeta del mismo.

Tangencial

$$a_T = r\dot{\omega}$$

Centrípeta

$$a_c = r\omega^2$$

Para la rotación:

$$\overrightarrow{M} = \frac{d\overrightarrow{H}}{dt}$$

en coordenadas rectangulares:

$$M_x = \dot{H}_x - \omega_z H_y + \omega_y H_z$$

$$M_y = \dot{H}_y - \omega_x H_z + \omega_z H_x$$

$$M_z = \dot{H}_z - \omega_y H_x + \omega_x H_y$$

y el momento angular

$$H_x = I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z$$

$$H_y = -I_{xy}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z$$

$$H_z = -I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z$$

las condiciones del movimiento será:

$$\omega_x = \omega_y = 0 \text{ solo existe } \omega_z$$

luego:

$$H_x = -I_{xz}\omega_z$$

$$H_y = -I_{yz}\omega_z$$

$$H_z = I_{zz}\omega_z$$

y sustituyendo en las ecuaciones generales:

$$M_x = -I_{xz}\dot{\omega}_z + I_{yz}\omega_z^2 \tag{7.2.59}$$

$$M_y = -I_{yz}\dot{\omega}_z - I_{xz}\omega_z^2 \tag{7.2.60}$$

$$M_z = I_{zz}\dot{\omega}_z \tag{7.2.61}$$

Que son las ecuaciones del movimiento de un cuerpo rígido rotando en un eje fijo. Las dos primeras ecuaciones sirven para determinar las fuerzas reactivas del sistema, es decir las reacciones dinámicas en los soportes del eje en el que rota el cuerpo.

La tercera ecuación:

$$M_z = I_{zz}\dot{\omega}_z$$

Es la ecuación que establece la relación entre el momento aplicado y la aceleración producida. Nótese que es idéntica a la ecuación que analiza la traslación.

$$F = ma$$

Si la aceleración angular es (α)

$$\dot{\omega} = \alpha$$

la ecuación queda:

$$M_z = I_{zz}\alpha$$

donde el momento de inercia en la rotación es lo que la masa es en la traslación, es decir el momento de inercia en la magnitud que mide precisamente la inercia de la rotación como la masa es la medida de la inercia de la traslación.

Como la aceleración angular puede escribirse como:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

$$\alpha = \omega \frac{d\omega}{d\theta}$$

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

La ecuación del rotación toma la forma:

$$M_z = I_{zz}\frac{d\omega}{dt}$$

$$M_z = I_{zz}\omega \frac{d\omega}{d\theta}$$

$$M_z = I_{zz}\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

De la primera ecuación sale la relación impulso angular igual a la variación del momento angular:

$$\int_1^2 M dt = I_{zz} d\omega \Big|_1^2$$

Impulso angular = variación del momento angular.

Y de la segunda ecuación sale la relación del trabajo angular igual a la variación de energía cinética de rotación.

$$\int_1^2 M d\theta = \frac{1}{2} I_{zz}\omega_x^2 \Big]_1^2$$

Trabajo de rotación = variación de energía cinética de rotación

Ejemplo 11. Analizar las reacciones dinámicas en los soportes de un eje por la rotación de un rotor no equilibrado, para un ángulo dado (θ).

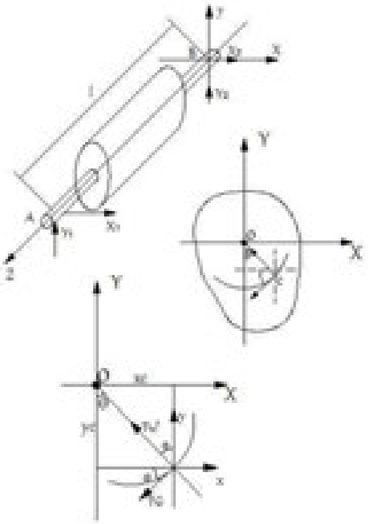


Figura 7.2.13: Rotor no equilibrado

El rotor rota sobre los cojinetes A y B, y no está equilibrado, es decir su centro de rotación (O) no coincide con el centro de gravedad (C).

Las ecuaciones de fuerza:

$$\sum F_x = m\ddot{x}_c$$

$$\sum F_y = m\ddot{y}_c$$

Los valores de la aceleración del centro de masa se pueden expresar en función de su aceleración centrípeda y tangencial.

$$\ddot{x}_c = -r\omega^2 sen\theta - r\dot{\omega}cos\theta$$

$$\ddot{y}_c = r\omega^2 cos\theta - r\dot{\omega}sen\theta$$

pero:

$$y_c = rcos\theta$$

$$x_c = rsen\theta$$

entonces:

$$\ddot{x}_c = -x_c\omega^2 - y_c\dot{\omega}$$

$$\ddot{y}_c = y_c\omega^2 - x_c\dot{\omega}$$

y las ecuaciones:

$$\sum F_x = m\ddot{x}_c$$

$$X_1 + X_2 = m(-x_c\omega^2 - y_c\dot{\omega}) \tag{7.2.62}$$

$$\sum F_y = m\ddot{y}_c$$

$$Y_1 + Y_2 = m(y_c\omega^2 - x_c\dot{\omega}) \tag{7.2.63}$$

y las ecuaciones de momento:

$$-Y_2 l = I_{yz}\omega_z^2 - I_{xz}\dot{\omega}_z \tag{7.2.64}$$

$$X_2 l = -I_{yz}\dot{\omega}_z - I_{xz}\omega_z^2 \tag{7.2.65}$$

Con las cuatro ecuaciones se puede calcular las reacciones dinámicas del sistema. Si el centro de masa coincide con el centro de rotación.

$$x_c = y_c = 0$$

$$X_1 = -X_2$$

$$Y_1 = -Y_2$$

Es decir que equilibrado el sistema podría haber reacciones dinámicas si existen productos de inercia provocando reacciones que forman pares.

Solo si no existen productos de inercia y el centro de masa coincide con el centro de rotación (equilibrio estático) las reacciones dinámicas serán cero.

Ejemplo 12. Calcular las reacciones dinámicas del rotor no equilibrado dinámicamente idealizado como dos placas homogéneas de espesor constante descansando en un eje horizontal en el mismo plano y rotando con aceleración $\dot{\omega}$

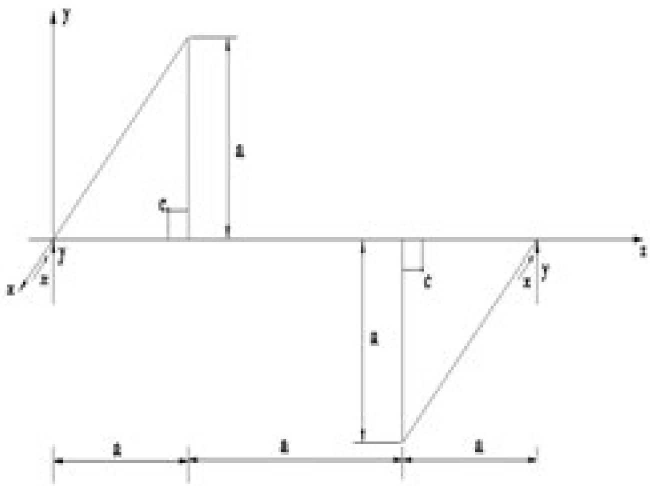


Figura 7.2.14: Eje en rotación

Debemos hacer coincidir el eje (OZ) con el eje de rotación para que las ecuaciones analizadas sirvan, es decir cuando:

velocidad

$$\overrightarrow{\omega} = \omega_z \overrightarrow{k}$$

aceleración

$$\dot{\overrightarrow{\omega}} = \dot{\omega}_z \overrightarrow{k}$$

el centro de masa total coincide con el centro de rotación

$$x_c = y_c = 0$$

Las ecuaciones

$$M_x = -I_{xz}\dot{\omega_z} + I_{yz}\omega_z^2$$

$$M_y = -I_{yz}\dot{\omega_z}$$

$$M_z = I_{zz}\dot{\omega_z}$$

Condiciones

$$M_z = 0$$

$$I_{xz} = 0$$

y en las placas triangulares

$$I_{y'z'} = \frac{ma^2}{36}$$

Productos de inercia respecto a su centro de gravedad.
Aplicando:

$$3aY = I_{yz}\omega_z^2$$

$$3aX = -I_{yz}\dot{\omega}_z$$

El valor del producto de inercia se calcula aplicando el teorema de Steiner

$$I_{yz} = I_{y'z'} + myz = \frac{ma^2}{36} + m\frac{a}{3} \cdot \frac{2a}{3} + \left[-\frac{ma^2}{36} + m\left(-\frac{a}{3}\right)\left(2a + \frac{a}{3}\right)\right]$$

$$= -\frac{5}{9}ma^2$$

y sustituyendo

$$3aY = -\frac{5}{9}ma^2\omega^2$$

$$Y = -\frac{5}{27}ma^2\omega^2$$

$$3aX = \frac{5}{9}ma^2\dot{\omega}$$

$$X = \frac{5}{27}ma^2\dot{\omega}$$

y la reacción

$$R = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{5}{27}ma^2\sqrt{\omega^4 + \dot{\omega}^2}$$

7.2.12. Movimiento plano del sólido rígido

El sólido rígido se mueve con movimiento plano cuando todos los puntos del sólido se mueven paralelamente a un plano.

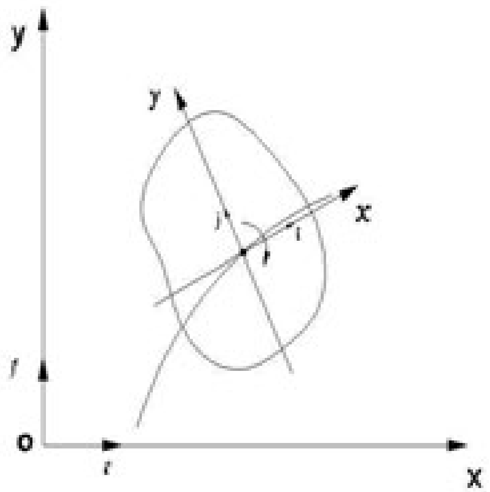


Figura 7.2.15: Movimiento Plano

Si se toma el plano (XY) como plano de movimiento y los ejes propios del cuerpo son (x'y') las condiciones serían.

Velocidad angular

$$\overrightarrow{\omega} = \omega_z \overrightarrow{k}$$

$$\begin{cases} \omega_x = 0 \\ \omega_y = 0 \end{cases}$$

velocidad del centro de masa

$$\overrightarrow{v_c} = \dot{x}_c \overrightarrow{i} + \dot{y}_c \overrightarrow{j}$$

aceleración del centro de masa

$$\overrightarrow{a_c} = \ddot{x}_c \overrightarrow{i} + \ddot{y}_c \overrightarrow{j}$$

Por lo tanto las ecuaciones a aplicarse serían:

$$\sum F_x = m\ddot{x}_c \ (1) \tag{7.2.66}$$

$$\sum F_y = m\ddot{y}_c \ (2) \tag{7.2.67}$$

$$M_x = I_{yz}\omega_z^2 - I_{xz}\dot{\omega_z} \ (3) \tag{7.2.68}$$

$$M_y = -I_{xz}\omega_z^2 - I_{yz}\dot{\omega_z} \ (4) \tag{7.2.69}$$

$$M_z = I_{zz}\dot{\omega_z} \ (5) \tag{7.2.70}$$

Las ecuaciones 1 y 2 estudian el movimiento del centro de masa.

Las ecuaciones 2 y 3 se aplican en caso de que el cuerpo tenga un ancho en el eje (OZ) y las fuerzas que actúan provocan momento con respecto a (X) y a (Y).Generalmente fuerzas de reacción.

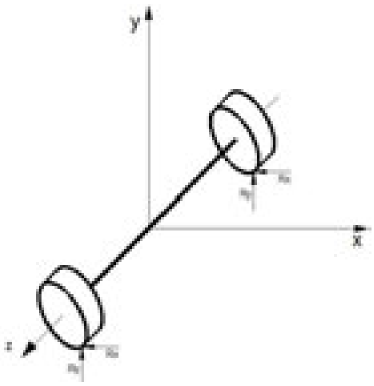


Figura 7.2.16: Movimiento Plano Espacial

La ecuación 5 es la que establece la relación entre el momento y la aceleración angular producido por las fuerzas que actúan en el plano (XOY).

Si no existen productos de inercia en los planos (YZ) y (XZ), los momentos en X (Mx) y en Y(My) son cero y las ecuaciones a aplicarse serán:

$$\sum F_x = m\ddot{x}_c \tag{7.2.71}$$

$$\sum F_y = m\ddot{y}_c \tag{7.2.72}$$

$$M_z = I_{zz}\dot{\omega_z} \tag{7.2.73}$$

Ejemplo 13. Un cilindro homogéneo de radio (R) y masa (m), parte del reposo y rueda sin resbalar en un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal. Si el coeficiente de fricción entre el cilindro y el plano es μ. Determinar el máximo ángulo de inclinación para que el cilindro ruede sin resbalar.

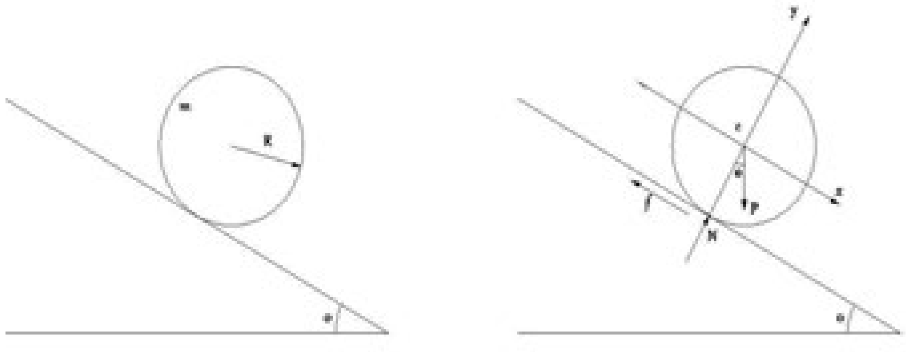


Figura 7.2.17: Diagrama de cuerpo libre

En el diagrama de cuerpo libre se colocan las fuerzas que actúan y se escoge el sistema más conveniente, en este caso un sistema en el centro de masa y con el eje OX que coincida con la dirección del movimiento, luego no tiene aceleración en el eje (OY). El sistema propio del cuerpo coincide con el sistema fijo.

Condiciones:

$$\overrightarrow{\omega} = \omega_z \overrightarrow{k}$$

$$M_x = 0$$

$$M_y = 0$$

$$\ddot{y_c} = 0$$

$$f = \mu N$$

$$I_c = \frac{mR^2}{2}$$

Luego las ecuaciones:

1.

$$\sum F_x = m\ddot{x}_c$$

$$Psen\theta - f = m\ddot{x}_c$$

$$Psen\theta - \mu N = m\ddot{x}_c$$

2.
$$\sum F_y = m\ddot{y}_c$$

$$N - Pcos\theta = 0$$

$$N = Pcos\theta$$

sustituyendo

$$Psen\theta - \mu Pcos\theta = m\ddot{x}_c$$

$$\ddot{x}_c = \frac{P(sen\theta - \mu cos\theta)}{m}$$

La condición de no resbalar es

$$\dot{x}_c = R\dot{\theta}$$

y derivando

$$\ddot{x}_c = R\ddot{\theta}$$

luego

$$\ddot{\theta} = \frac{P(sen\theta - \mu cos\theta)}{mR}$$

3.
$$\sum M_z = I_{zz}\ddot{\theta}$$

La ecuación puede aplicarse en cualquier punto del cuerpo, o en un punto fijo externo considerando que el momento de inercia debe tomarse respecto a ese punto elegido.

Tomando momento respecto a (O).

$$\sum M_o = I_o\ddot{\theta}$$

$$(Psen\theta)\,R = (I_c + mR^2)\ddot{\theta}$$

$$(Psen\theta)\,R = \left(\frac{mR^2}{2} + mR^2\right)\ddot{\theta}$$

$$PRsen\theta = \frac{3mR^2}{2}\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{2}{3}\frac{Psen\theta}{mR}$$

e igualando las ecuaciones en $\ddot{\theta}$

$$P\left(\frac{sen\theta - \mu cos\theta}{mR}\right) = \frac{2}{3}\frac{Psen\theta}{mR}$$

$$sen\theta - \mu cos\theta = \frac{2}{3}sen\theta$$

$$1 - \frac{\mu}{tag\theta} = \frac{2}{3}$$

$$tag\theta = 3\mu$$

7.2.13. Movimiento alrededor de un punto fijo. El trompo simétrico

El movimiento de un cuerpo alrededor de un punto fijo es un caso muy especial del movimiento de un cuerpo en el espacio. El trompo simétrico y el giróscopo son ejemplo de este movimiento, donde el cuerpo gira alrededor de un eje que a su vez también gira [1].

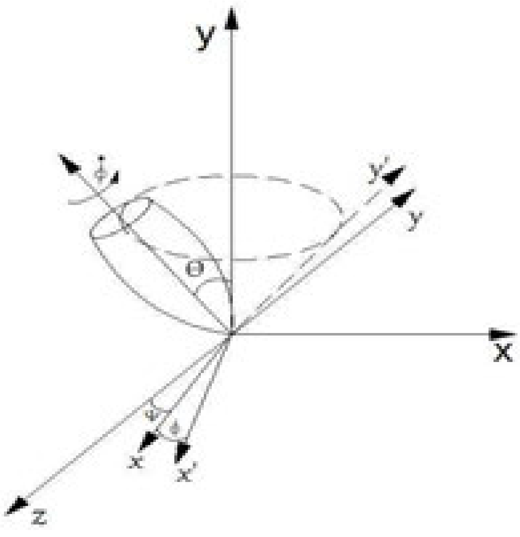


Figura 7.2.18: El trompo simétrico

El cuerpo está sometido a tres movimientos de rotación:

1. Rotación alrededor de un eje geométrico del cuerpo(oz´) llamado movimiento de espín.

2. Movimiento de rotación del eje del espín alrededor del eje fijo (Z) llamado movimiento de precesión.

3. Movimiento de alejamiento al eje fijo (Z) definido por la variación del ángulo θ.

Para el estudio del movimiento se asocian tres sistemas de referencia, que coinciden en el origen (o)

1. (XYZ), sistema fijo al cual se refiere el movimiento total.

2. (xyz), sistema asociado al cuerpo; el eje z coincide con el eje de espín y gira en la precesión conjuntamente con el cuerpo. El eje x se mueve siempre en el plano XOY, describiendo el ángulo ψ

3. (x´y´z´), sistema propio del cuerpo rota con el cuerpo y describe el ángulo ϕ. A este sistema se refieren los momentos y productos de inercia que son constantes en el movimiento. El eje z´ coincide con z, los tres ángulos (θ,ϕ,ψ) que definen la posición del cuerpo se llaman Ángulos de Euler, y su utilización conjuntamente con el sistema de coordenadas (x,y,z), permiten una mejor discusión del problema. Notese que puede estudiarse el movimiento del sistema (x,y,z), independiente del movimiento de espín del trompo.

Tomando $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ vectores unitarios del sistema (xyz), el sistema rota con $\overrightarrow{\omega}$

$$\overrightarrow{\omega}_b = \omega_x \overrightarrow{i} + \omega_y \overrightarrow{j} + \omega_z \overrightarrow{k}$$

Puesto en el cuerpo tiene una velocidad de espín $\dot{\phi}$, la velocidad angular del cuerpo será:

$$\overrightarrow{\omega}_o = \omega_x \overrightarrow{i} + \omega_y \overrightarrow{j} + (\omega_z + \dot{\phi}) \overrightarrow{k}$$

Las ecuaciones del movimiento se obtienen de manera usual escribiendo la ecuación de momento respecto al punto o.

$$\overrightarrow{M_o} = \dot{\overrightarrow{H}}_o$$

es decir

$$M_x = \dot{H}_x - H_y\omega_z + H_z\omega_y$$

$$M_y = \dot{H}_y - H_z\omega_x + H_x\omega_z$$

$$M_z = \dot{H}_z - H_x\omega_y + H_y\omega_x$$

El valor del momento angular en coordenadas rectangulares será:

$$H_x = I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}(\omega_z + \dot{\phi})$$

$$H_y = -I_{xy}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}(\omega_z + \dot{\phi})$$

$$H_z = -I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}(\omega_z + \dot{\phi})$$

Para el análisis del trompo simétrico utilizando con los ángulos de Euler, como caso especial, las velocidades del trompo serían:

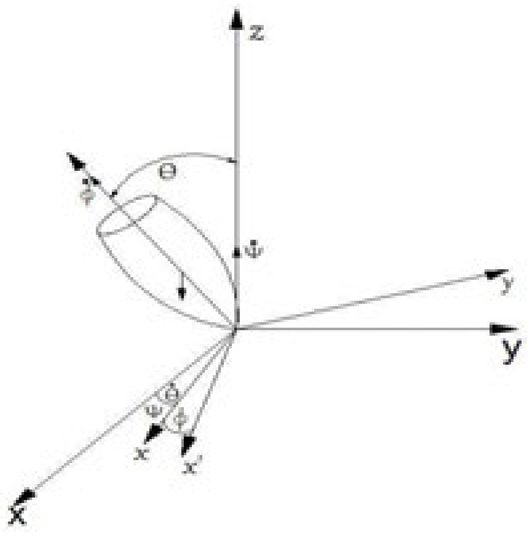


Figura 7.2.19: Velocidades de Euler

$\dot{\phi}$ =velocidad de espín.

$\dot{\Psi}$ =velocidad de preseción.

$\dot{\theta}$ =velocidad de alejamiento del eje Z.
y con respecto a los ejes (x,y,z).

$\omega_x = \dot{\theta}$

$\omega_y = \dot{\psi} sen\theta$

$\omega_z = \dot{\psi} cos\theta$
calculando las aceleraciones:
$\dot{\omega}_x = \ddot{\theta}$

$\dot{\omega}_y = \ddot{\psi} sen\theta + \dot{\psi}\dot{\theta} cos\theta$

$\dot{\omega}_z = \ddot{\psi} cos\theta - \dot{\psi}\dot{\theta} sen\theta$

Para la aplicación del momento angular tenemos las siguientes condiciones:

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0 \text{ Por ser el trompo simétrico}$$

$$I_{xx} = I_{yy} = I \text{ Son iguales}$$

$$I_{zz} = I_z$$

bajo estas condiciones:

$$H_x = I\omega_x$$

$$H_y = I\omega_y$$

$$H_z = I_z(\omega_z + \dot{\phi})$$

sustituyendo:

$$M_x = I\dot{\omega}_x - I\omega_y\omega_z + I_z(\omega_z + \dot{\phi})\omega_y$$

$$M_y = I\dot{\omega}_y - I_z(\omega_z + \dot{\phi})\omega_x - I\omega_x\omega_z$$

$$M_z = I_z(\dot{\omega}_z + \ddot{\phi}) - I\omega_x\omega_y + I\omega_y\omega_z$$

agrupando:

$$M_x = I(\dot{\omega}_x - \omega_y\omega_z) + I_z(\omega_z + \dot{\phi})\omega_y$$

$$M_y = I(\dot{\omega}_y - \omega_x\omega_z) - I_z(\omega_z + \dot{\phi})\omega_x$$

$$M_z = I_z(\dot{\omega}_z + \ddot{\phi})$$

despreciando los últimos términos porque tienden a cero, y sustituyendo las velocidades en función de los ángulos de Euler:

$$M_x = I\left(\ddot{\theta} - \dot{\psi}^2 sen\theta cos\theta\right) + I_z\dot{\psi} sen\theta(\dot{\psi} cos\theta + \dot{\phi}) \tag{7.2.74}$$

$$M_y = I(\ddot{\psi} sen\theta - 2\dot{\psi}\dot{\theta} cos\theta) - I_z\dot{\theta}(\dot{\psi} cos\theta + \dot{\phi}) \tag{7.2.75}$$

$$M_z = I_z(\ddot{\phi} + \ddot{\psi}cos\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}sen\theta) \qquad (7.2.76)$$

La solución general del sistema de ecuaciones diferenciales no lineales son complejas por lo que puede ser aplicada a problemas que contengan aun más simplificaciones y se traten de movimientos permanentes.

Al analizar las ecuaciones encontramos que los momentos estáticos son producidos por el peso y como el trompo no cae cuando rota con velocidad angular de espín, los momentos que equilibran el cuerpo serían aquellos términos asociados con el espín y que se llamen momentos giroscópicos como son el: $\left(I_z\omega_y\dot{\phi}\right)$y el $\left(-I_z\omega_x\dot{\phi}\right)$y deberían ser analizados con propósito de estudiar la estabilidad del sistema rotacional.

Ejemplo 14. Calcular la velocidad de precesión (ω_p)de un trompo cónico que gira con velocidad de espín constante (ω)y su eje forma un ángulo θ constante con la vertical, el cono tiene un semiángulo (α) y altura (h).

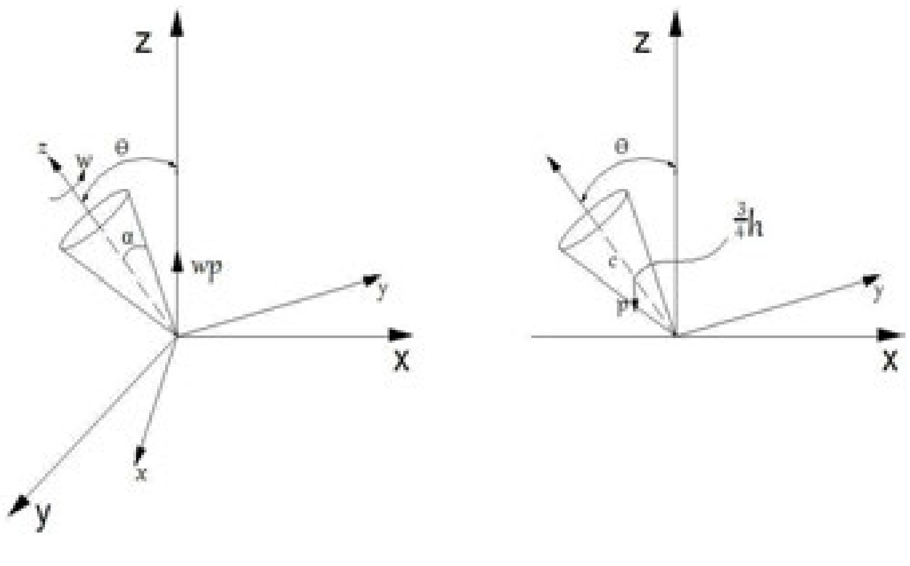


Figura 7.2.20: Trompo cónico

Considerando la posición del trompo de manera que el peso produzca momento solo con respecto a X, la ecuación que aplicamos es:

$$M_x = I\left(\ddot{\theta} - \dot{\psi}^2 sen\theta cos\theta\right) + I_z\dot{\psi}sen\theta(\dot{\psi}cos\theta + \dot{\phi})$$

donde

$$I = I_{xx}$$

$$I_z = I_{zz}$$

$$\theta = \text{constante} \qquad \dot{\theta} = 0 \qquad \ddot{\theta} = 0$$

$$\dot{\phi} = \omega \qquad \dot{\psi} = \omega_p$$

$$M_x = P\left(\frac{3}{4}h \cdot sen\theta\right)$$

sustituyendo:

$$\left(\frac{3}{4}Ph \cdot sen\theta\right) = -I\omega_p^2 sen\theta cos\theta + I_z\omega_p sen\theta\left(\omega_p cos\theta + \omega\right)$$

$$\frac{3}{4}Ph = -I\omega_p^2 cos\theta + I_z\omega_p^2 cos\theta + I_z\omega_p\omega$$

la solución exacta sería la resolución de la ecuación de segundo grado

$$\omega_p^2 + \frac{I_z\omega}{(I_z - I)\,cos\theta}\omega_p - \frac{3Ph}{4\,(I_z - I)\,cos\theta} = 0$$

Una solución aproximada, si dividimos por ω^2

$$\frac{3}{4}\frac{Ph}{\omega^2} = (I_z - I)\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 cos\theta + I_z\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)$$

Si la velocidad de precesión es pequeño con respecto a la velocidad de espín:

$$\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 = 0$$

queda:

$$\frac{3}{4}\frac{Ph}{\omega} = I_z\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)$$

de donde:

$$\omega_p = \frac{3}{4}\frac{Ph}{I_z\omega}$$

Lo que nos dice que la velocidad de precesión es inversamente proporcional de la velocidad de espín, y el trompo es más estable mientras mayor sea la velocidad de espín.

7.2.14. Movimiento general en el espacio. El disco que rueda

Uno de los problemas más interesantes de estudio, y de investigación es la estabilidad de un disco que rueda sin resbalar al moverse en un plano horizontal. Se puede aplicar al movimiento de bicicletas o motos de alta velocidad [1].

Estudiaremos el movimiento de un disco circular, espesor uniforme delgado de radio (a) y masa (m).

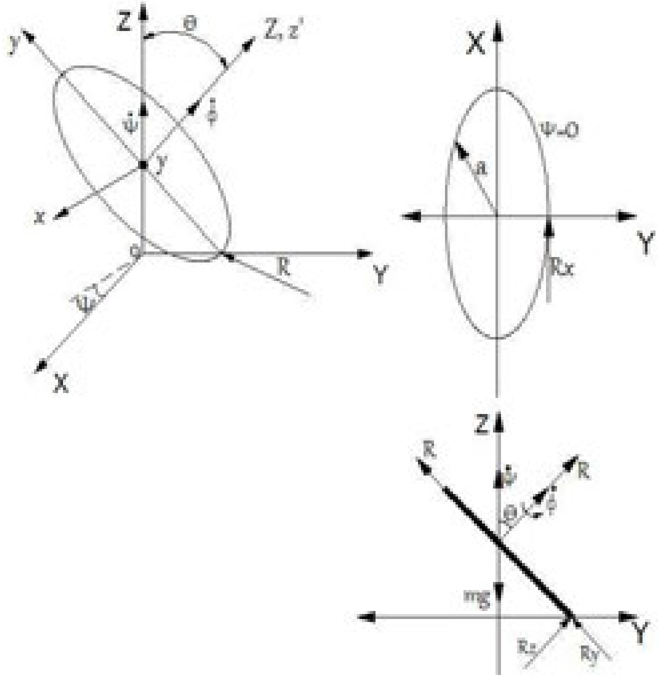


Figura 7.2.21: Movimiento del disco que rueda

Puede estudiarse el movimiento con las ecuaciones generales en sistema de coordenadas rectangulares, pero así como el trompo es un caso especial donde se pueden aplicar las ecuaciones considerando los ángulos de Euler (ϕ, θ, ψ)que se hallan expresadas en el dibujo correspondiente.

Se establecen los tres sistemas de referencias, igual que en el trompo.

1. Sistema fijo (XYZ), al cual se refieren las fuerzas que actúan , el peso (P) la reacción del plano sobre el cuerpo y las aceleraciones.
2. Sistema móvil (xyz) con el cuerpo, cuyo origen se halla en el centro de masa del disco y cuyo eje (y) pasa por el punto de contacto del disco con el plano.

3. Sistema fijo al cuerpo (x´y´z´) que rota con el cuerpo y al cual están relacionados los momentos y productos de inercia del cuerpo, coinciden con el otro sistema en su inicio y el eje (z´) es igual al (z).

Las velocidades son:

$\dot{\phi}$ =velocidad de rotación de espín del disco sobre el eje z o z´.

$\dot{\psi}$ =velocidad de precesión o cabeceo del disco.

$\dot{\theta}$ =velocidad de acercamiento o alejamiento del disco respecto al eje Z.

La condición para que el disco ruede sin resbalar será:

$$\dot{x}_c = -a\dot{\phi}$$

$$\dot{y}_c = 0 \text{ (Se asimila)}$$

$$\dot{z}_c = a\dot{\theta}$$

Las velocidades del centro de masa:

$$\dot{\vec{r}}_c = \dot{x}_c \vec{i} + \dot{z}_c \vec{k}$$

Y la velocidad angular:

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$$

siendo:

$$\omega_x = \dot{\theta}$$

$$\omega_y = \dot{\psi} sen\theta$$

$$\omega_z = \dot{\psi} cos\theta + \dot{\phi}$$

La velocidad del sistema de coordenadas (x,y,z) no es la misma que la velocidad del disco, ya que no tiene la velocidad de espín $\left(\dot{\phi}\right)$estas velocidades serían:

$$\Omega_x = \dot{\theta}$$

$$\Omega_{y=}\dot{\psi} sen\theta$$

$$\Omega_z = \dot{\psi} cos\theta$$

La aceleración del centro de masa determinamos a partir de la velocidad del centro de masa:

$$\overrightarrow{v}_c = \dot{x}_c \overrightarrow{i} + \dot{z}_c \overrightarrow{k}$$

y sabiendo que los vectores $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, rotan con respecto al sistema fijo:

$$\overrightarrow{a}_c = \ddot{x}_c \overrightarrow{i} + \dot{x}_c \dot{\overrightarrow{i}} + \ddot{z}_c \overrightarrow{k} + \dot{z}_c \dot{\overrightarrow{k}}$$

las derivadas vectoriales se calcula por medio del vector $\overrightarrow{\Omega}$ que es la velocidad angular del sistema (xyz)

$$\dot{\overrightarrow{i}} = \overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{i} = \left(\Omega_x \overrightarrow{i} + \Omega_y \overrightarrow{j} + \Omega_z \overrightarrow{k}\right) \times \overrightarrow{i} = \Omega_z \overrightarrow{j} + \Omega_y \overrightarrow{k}$$

$$\dot{\overrightarrow{k}} = \overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{k} = \left(\Omega_x \overrightarrow{i} + \Omega_y \overrightarrow{j} + \Omega_z \overrightarrow{k}\right) \times \overrightarrow{k} = \Omega_y \overrightarrow{i} - \Omega_x \overrightarrow{j}$$

y sustituyendo

$$\overrightarrow{a}_c = \ddot{x}_c \overrightarrow{i} + \dot{x}_c \Omega_z \overrightarrow{j} - \dot{x}_c \Omega_y \overrightarrow{k} + \ddot{z}_c \overrightarrow{k} + \dot{z}_c \Omega_y \overrightarrow{i} - \dot{z}_c \Omega_x \overrightarrow{j}$$

$$\overrightarrow{a}_c = \left(\ddot{x}_c + \dot{z}_c \Omega_y\right) \overrightarrow{i} + \left(\dot{x}_c \Omega_z - \dot{z}_c \Omega_x\right) \overrightarrow{j} + \left(\ddot{z}_c - \dot{x}_c \Omega_y\right) \overrightarrow{k}$$

en donde:

$$\dot{x} = -a\dot{\phi}$$

$$\ddot{x} = -a\ddot{\phi}$$

$$\dot{z} = a\dot{\theta}$$

$$\ddot{z} = a\ddot{\theta}$$

$$\Omega_x = \dot{\theta}$$

$$\Omega_y = \dot{\psi} sen\theta$$

$$\Omega_z = \dot{\psi} cos\theta$$

sustituyendo las componentes de la aceleración serán:

$$a_{cx} = -a\ddot{\phi} + a\dot{\phi}\dot{\psi} sen\theta$$

$$a_{cy} = -a\dot{\phi}\dot{\psi}cos\theta - a\dot{\theta}^2$$

$$a_{cz} = a\ddot{\theta} + a\dot{\phi}\dot{\psi}sen\theta$$

por lo tanto, las tres ecuaciones de fuerzas pueden ser escritas como:

$$R_x = -ma\left(\ddot{\phi} - \dot{\phi}\dot{\psi}sen\theta\right) \tag{7.2.77}$$

$$R_y - mgsen\theta = -ma\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}\dot{\psi}cos\theta\right) \tag{7.2.78}$$

$$R_z - mgcos\theta = ma(\ddot{\theta} + \dot{\phi}\dot{\psi}sen\theta) \tag{7.2.79}$$

Y las ecuaciones de momento agrupando en θ:

$$\sum M_x = -aR_z = I\ddot{\theta} + (I_z - I)\,\dot{\psi}^2\, sen\theta cos\theta + I_z\dot{\phi}\dot{\psi}sen\theta \tag{7.2.80}$$

$$\sum M_y = 0 = I\ddot{\psi}sen\theta + (2I - I_z)\,\dot{\psi}\dot{\phi}cos\theta - I_z\dot{\phi}\dot{\theta} \tag{7.2.81}$$

$$\sum M_z = aR_x = I_z\ddot{\phi} + I_z\ddot{\psi}cos\theta - I_z\dot{\psi}\dot{\theta}sen\theta \tag{7.2.82}$$

en donde:

$$I_{xx} = I_{yy} = I$$

$$I_{zz} = I_z$$

Las seis ecuaciones permiten estudiar el movimiento de un disco en el espacio y pueden ser simplificados de acuerdo a condiciones particulares que se establezcan.

En las ecuaciones pueden analizarse los momentos producidos por la rotación del disco es decir por su velocidad de espín $\left(\dot{\phi}\right)$ y serían los momentos estabilizadores que impiden la caída del disco:

$$\left(I_z\dot{\phi}\dot{\psi}sen(\theta)\right) \text{ y el momento } \left(I_z\ddot{\phi}\right)$$

7.2.15. Estabilidad de un disco que rota y se traslada

Como aplicación específica de las ecuaciones del movimiento de un disco se analizará la estabilidad de un disco que rota en línea recta y se traslada perpendicular al plano de rotación [1].

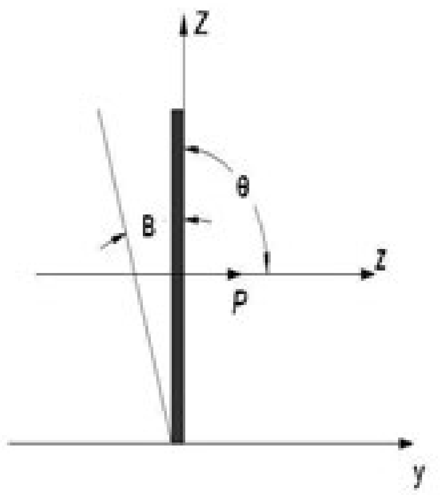


Figura 7.2.22: Estabilidad de un disco

El disco rota con velocidad de espín $\dot{\phi}$ y se introduce una pequeña velocidad de cabeceo con respecto a la vertical producida por un golpe por ejemplo. Determinado por el ángulo β muy pequeño. Las condiciones analíticas para introducir en las ecuaciones serán:

$$\theta = (90 + \beta)$$

$$\dot{\theta} = \dot{\beta}$$

$$\ddot{\theta} = \ddot{\beta}$$

sea

$$sen\theta = sen\,(90 + \beta) = cos\beta \approx 1$$

$$cos\theta = cos\,(90 + \beta) = -sen\beta \approx -\beta$$

Luego aplicando las ecuaciones de Euler de Fuerzas.

$$R_x = -ma\ddot{\phi} \tag{7.2.83}$$

$$R_y - mg = 0 \qquad \text{despreciando } \left(\dot{\beta}^2\right) \tag{7.2.84}$$

$$R_z + mg\beta = ma\ddot{\beta} + ma\dot{\phi}\dot{\psi} \tag{7.2.85}$$

Y las ecuaciones de momentos

$$-aR_z = I\ddot{\beta} + I_z\dot{\phi}\dot{\psi} \tag{7.2.86}$$

$$0 = I\ddot{\psi} - I_z\dot{\phi}\dot{\beta} \tag{7.2.87}$$

$$aR_x = I_z\ddot{\phi} \tag{7.2.88}$$

Se pueden hacer varios análisis de las diferentes variables y llegar a las conclusiones matemáticas que deberían estar sujetas a comprobaciones prácticas.

Se analizará las variables que nos interesan $\left(\dot{\beta} \text{ y } \ddot{\beta}\right)$. Despejando R_z de las ecuaciones 7.2.85 y 7.2.86 e igualamos.

$$R_z = mg\beta + ma\ddot{\beta} + ma\dot{\phi}\dot{\psi}$$

$$R_z = -\frac{I\ddot{\beta} + I_z\dot{\phi}\dot{\psi}}{a}$$

Igualando y despejando $\dot{\psi}$

$$\dot{\psi} = -\frac{I\ddot{\beta} + a\left(mg\beta - ma\ddot{\beta}\right)}{\dot{\phi}\left(I_z + ma^2\right)}$$

Considerando que $\dot{\theta}$ es constante $\left(\dot{\theta} = \omega\right)$

diferenciando y sustituyendo en la ecuación 7.2.87

$$I\left(I + ma^2\right)\dddot{\beta} + \left[I_z\left(I_z + ma^2\right)\omega^2 - Imga\right]\dot{\beta} = 0$$

que puede escribirse como:

$$\frac{d^2\dot{\beta}}{dt^2} + \left[\frac{I_z\left(I_z + ma^2\right)\omega^2 - Imga}{I\left(I + ma^2\right)}\right]\dot{\beta} = 0$$

Que es una ecuación diferencial del movimiento armónico simple en función de la velocidad $(\dot{\beta})$.

El segundo término consideramos como la fuerza restauradora y para que sea movimiento oscilatorio simple debe ser positivo, luego la condición del movimiento estable será cuando:

$$I_z\left(I_z + ma^2\right)\omega^2 > Imga$$

de donde

$$\omega^2 > \frac{Imga}{I_z\left(I_z + ma^2\right)}$$

para el disco uniforme

$$I_z = I_{zz} = \frac{ma^2}{2}$$

$$I = I_{yy} = I_{xx} = \frac{ma^2}{4}$$

$$v = a\omega$$

sustituyendo

$$v > \sqrt{\frac{ga}{3}}$$

que es la velocidad lineal del centro del disco que daría la velocidad estable para rodar en línea recta.

Capítulo 8

Dinámica de sistemas no rígidos de partículas

El modelo matemático para estudiar el movimiento se ha aplicado a una partícula y a un sistema de partículas, como el cuerpo rígido, pero puede aplicarse también a un sistema de partículas infinitas que no conservan sus distancias como sería al sólido elástico, y a los fluidos, es decir a líquidos y gases. En cada caso la aplicación sería diferente dependiendo de las características particulares del sistema dado.

8.1. Ondas transversales en fluidos

El movimiento ondulatorio producido en agua por una vibración permanente y periódica puede ser analizado desde el modelo matemático. También corresponde a este análisis el movimiento ondulatorio en una cuerda libre.

La perturbación que se produce viaja en el agua, o en la cuerda sin producir desplazamiento de la materia y se llama transversal porque el movimiento vibratorio de las partículas es perpendicular al vector desplazamiento.

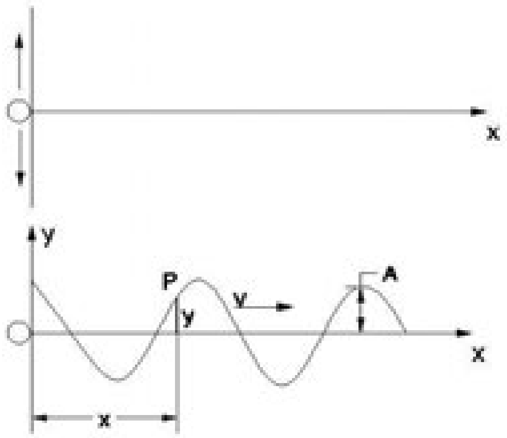


Figura 8.1.1: Cuerda vibrante

Las partículas (P) vibran al paso de la perturbación y puede expresarse con respecto al tiempo con la ecuación de vibración.

$$y = Acos(\omega t) \tag{8.1.1}$$

Siendo (A) la amplitud máxima y (ω)la frecuencia angular, analizados en capítulos anteriores.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

T = periodo.
f = frecuencia.
Si la velocidad de la onda es (v), su desplazamiento.

$$x = vt$$

luego despejando el tiempo y sustituyendo

$$y = Acos\left(\omega \frac{x}{v}\right) \tag{8.1.2}$$

Que es la ecuación de la onda propagándose con velocidad (v).
Si se considera una ecuación a tres variables se puede escribir:

$$y = Acos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

Que sería la ecuación general del movimiento ondulatorio, en donde se puede determinar la posición del punto (P) respecto al tiempo manteniendo constante (x), o la posición de la onda respecto a (x), manteniendo constante (t).
Si derivamos dos veces con respecto a (t), y a (x).

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -A\omega sen\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -A\omega^2 cos\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = A\frac{\omega}{v} sen\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -A\frac{\omega^2}{v^2} cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

se puede expresar en una sola ecuación

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \text{ó} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Que es la ecuación diferencial de la onda mecánica. Las soluciones particulares son las ecuaciones 8.1.1 y 8.1.2 de las que partimos pero escribiendo las mismas como solución general de las ecuaciones de segundo orden mediante la expresión

$$y = Ae^{-i\omega\left(t - \frac{X}{v}\right)}$$

Que utilizando la expresión de Euler

$$e^{-i\theta} = cos\theta - isen\theta$$

queda:

$$y = Acos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) - iAsen\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

Solución que puede ser analizada para aplicarse a problemas específicos de ondas.

8.2. Vibración en cuerda tensa

Una cuerda sometida a una tensión (T), se mantiene en línea recta en condiciones de equilibrio, si se desplaza la cuerda perpendicularmente a su longitud y se suelta, se produce una vibración que actúa como movimiento oscilatorio, puede estudiarse como una onda mecánica.

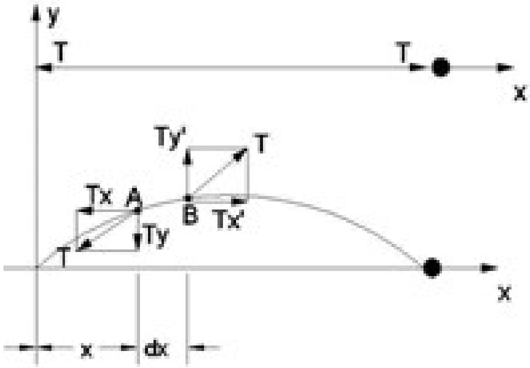


Figura 8.2.1: Vibración en cuerda tensa

La cuerda desplazada mantiene la tensión (T) tangente a su configuración. Si consideramos la porción de cuerda (dx), debido a la curvatura, las tensiones en sus extremos A y B no son directamente opuestas, sus componentes son:

$$T_{y'} = Tsen\alpha'$$

$$T_y = Tsen\alpha$$

Luego existe una fuerza recuperadora en (y)

$$F_y = T_y{'} - T_y = T(sen\alpha{'} - sen\alpha)$$

si la curvatura no es grande los ángulos son pequeños sen(α)$\approx$tag(α)

$$F_y = T(tag\alpha{'} - tag\alpha)$$

El paréntesis representa la variación de la tangente y puede escribirse como:

$$F_y = d\,(tag\alpha)$$

$$F_y = T \cdot \frac{\partial}{\partial x}\,(tag\alpha)\,dx$$

en donde:

$$tan\alpha = \frac{dy}{dx}$$

luego:

$$F_y = T\frac{\partial}{\partial x}(\frac{dy}{dx})dx = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot dx$$

esta fuerza será igual al producto de la masa de la porción AB por la aceleración producida

$$T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx = (mdx)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

m = masa por unidad de longitud de la cuerda.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{m}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{8.2.1}$$

Que es la ecuación diferencial del movimiento ondulatorio de la cuerda y relacionando con la ecuación de onda, la velocidad de propagación será:

$$v = \sqrt{\frac{T}{m}} \tag{8.2.2}$$

La cuerda vibrante produce sonido, por lo tanto puede estudiarse la frecuencia de vibración resolviendo la ecuación diferencial.

La solución general de la ecuación que depende de 2 variables $y = f(x,t)$ puede plantearse como el producto de soluciones dependientes de cada variable.

$$y(x,t) = y_1(t); y_2(x)$$

Se deriva, se separa variables y se iguala a una misma constante

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}\cdot y_1$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}\cdot y_2$$

sustituyendo

$$\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}\cdot y_1 = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}\cdot y_2$$

$$\frac{v^2}{y_2}\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} = \frac{1}{y_1}\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = -p^2$$

separando ecuaciones

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} + p^2 y_1 = 0 \tag{8.2.3}$$

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} + \frac{p^2}{v^2}y_2 = 0 \tag{8.2.4}$$

Que son dos ecuaciones lineales homogéneas con solución

$$y_1(t) = Asen(pt) + Bcos(pt) \tag{8.2.5}$$

$$y_2(x) = Csen\left(\frac{p}{v}x\right) + Dcos\left(\frac{p}{v}x\right) \tag{8.2.6}$$

Que pueden aplicarse en forma independiente. Así por ejemplo si aplicamos las condiciones de límite en $y = f(x)$

1.
$$x = 0$$
$$y_2 = 0 \Longrightarrow D = 0$$

2.
$$x = l$$

$$y_2 = 0$$
$$0 = csen\left(\frac{p}{v}l\right)$$

luego:
$$sen\left(\frac{p}{v}l\right) = 0$$

para que cumpla la condición
$$\frac{pl}{v} = n\pi$$

$$n = 0, 1, 2, 3...$$

lo que permite calcular las frecuencias angulares posibles:
$$p_n = n\pi\frac{v}{l}$$

$$n = 1$$

$$p_1 = \frac{\pi v}{l} = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{m}}$$

y la frecuencia natural (f) será:
$$p = 2\pi f$$

$$f = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}} \tag{8.2.7}$$

y el periodo $\tau = 2l\sqrt{\frac{m}{T}}$

Lo que proporciona un resultado claro, que la frecuencia puede modificarse en base a la tensión (T), manteniendo la masa por unidad de longitud (m). (f) puede ser la frecuencia de sonido producida.

8.3. Onda longitudinal en barra elástica

La vibración u onda longitudinal se produce cuando el vector vibración tiene la misma dirección que el vector propagación. Sucede el fenómeno en vibraciones que viajan por ejemplo en un resorte después de haber producido una deformación elástica de una sección del mismo [1].

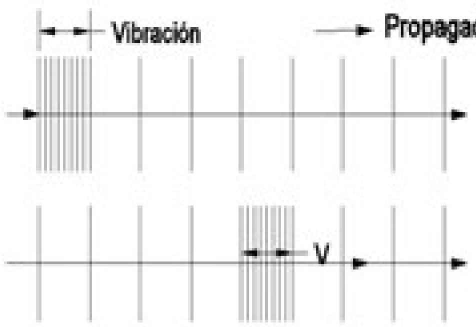


Figura 8.3.1: Propagación de vibración

El fenómeno puede ser comparado al que sucede en una barra elástica que recibe un golpe o un impacto. Si el golpe es periódico, la vibración se traslada como una onda y es el caso también del sonido.

Supongamos la barra elástica (o el resorte) de sección A y densidad(ρ) y que debido al esfuerzo sometido sufre la deformación correspondiente. La barra no se traslada y las secciones normales o eje permanecen planas, la deformación producida en la barra es elástica y la sección de barra considerada (dx) sufre una deformación (du).

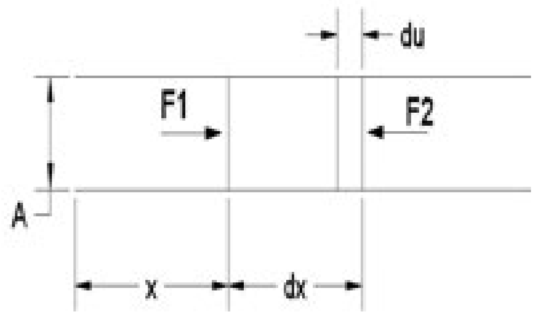


Figura 8.3.2: Deformaciones de barra elástica

la deformación unitaria será:

$$i = \frac{\triangle L}{L} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

parcial, porque los desplazamientos son función de (x) y de (t). De acuerdo a la ley de Hook.

$$\frac{\sigma}{i} = \frac{\text{fatiga}}{\text{deformación}} = \text{Módulo de Elasticidad}\,(E)$$

siendo la fatiga

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

y la deformación:

$$i = \frac{\triangle L}{L} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

aplicando

$$F = A \cdot E \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

por lo tanto en la sección actúan las dos fuerzas (F_1) y (F_2)

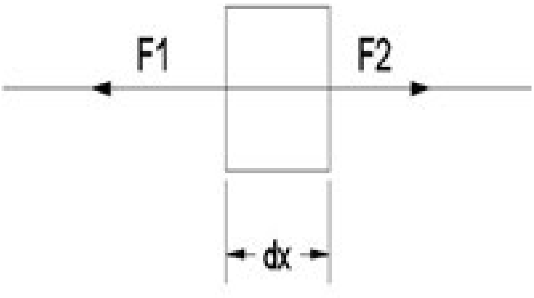


Figura 8.3.3: Sección y fuerzas deformantes

$$F_1 = EA\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$F_2 = EA\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot dx\right)$$

Y aplicando la ecuación de Newton:

$$\sum F = ma$$

$$-EA\frac{\partial u}{\partial x} + EA\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\partial x\right) = (\rho A dx)\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

simplificando

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \tag{8.3.1}$$

Que es la misma ecuación de movimiento ondulatorio, donde la velocidad de la onda será:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{8.3.2}$$

para el estudio e investigación de la onda de sonido puede considerarse la onda en tres dimensiones:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

de igual manera la ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$$

siendo:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

tiene como solución:

$$u(x,t) = u_1(t), u_2(x)$$

y derivando y sustituyendo

$$\frac{1}{u_1}\cdot\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{c^2}{u_2}\cdot\frac{\partial^2 u_2}{dx^2} = p^2$$

nos da dos ecuaciones dependientes de cada variable con sus soluciones:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p^2 u_1 = 0$$

$$u_1(t) = Asen(pt) + Bcos(pt)$$

$$\frac{d^2 u_2}{dx^2} + \frac{p^2}{c^2}u_2 = 0$$

$$u_2(x) = Csen\left(\frac{p}{c}x\right) + Dcos\left(\frac{p}{c}x\right)$$

Que son soluciones que permiten calcular los parámetros de acuerdo a condiciones específicas de los problemas a estudiar.

Ejemplo 15. Aplicar las ecuaciones de onda a la determinación de las frecuencias naturales de la barra de longitud(l), sección(A) y densidad(ρ) libre en el un extremo y empotrado en el otro.

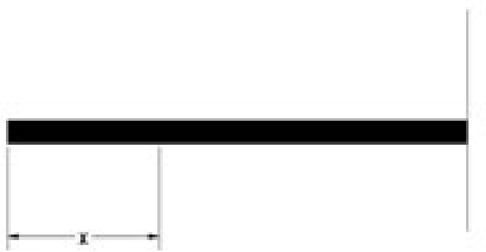


Figura 8.3.4: Barra empotrada

condiciones:

1. En el extremo libre el esfuerzo es cero.

$$x = 0$$

$$E\frac{\partial u_2}{\partial x} = 0$$

2. En el extremo fijo el desplazamiento es cero.

$$x = l$$

$$u_2(x) = 0$$

sustituyendo

1.

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = C\frac{p}{c}cos\left(\frac{p}{c}x\right) - D\frac{p}{c}sen\left(\frac{p}{c}x\right)$$

$$0 = C\frac{p}{c}$$

$$C = 0$$

2.

$$0 = Dcos\left(\frac{pl}{c}\right)$$

$$cos\left(\frac{pl}{c}\right) = 0$$

condiciones de solución.

$$\frac{pl}{c} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$$

la primera es la frecuencia angular fundamental

$$p_1 = \frac{\pi}{2}\frac{c}{l} = \frac{\pi}{2l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

8.4. Movimiento de un fluido no viscoso

Los fluidos pueden considerarse como un sistema infinito de partículas, que se mueven las unas respecto a las otras. Los fluidos son los líquidos que pueden considerarse como incomprensibles y los gases que son fluidos comprensibles. No se puede tratar como partículas discretas sino compuestos de elementos de volumen (dV). Teniendo el elemento de masa (ρdV) siendo (ρ) la densidad del fluido.

Previamente definimos tres magnitudes:

1. Presión de la fuerza sobre una superficie.

$$p = \frac{F}{S} \quad \text{Unidad de la presion} = \frac{N}{m^2} \tag{8.4.1}$$

2. Densidad es la masa por unidad de volumen, llamada también masa específica.

$$\rho e = \frac{M}{V} \quad \text{Unidad de densidad } = \frac{Kg}{m^3} \tag{8.4.2}$$

3. Peso específico es el peso por unidad de volumen.

$$p = \frac{P}{V} = \frac{Mg}{V} = \rho g \quad \text{Unidad de peso específico } = \frac{N}{m^3} \tag{8.4.3}$$

En un líquido que se halla en reposo, puede calcularse la presión que se produce en su interior debido solo al peso del líquido.

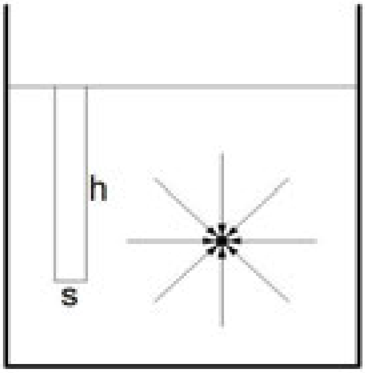


Figura 8.4.1: Presiones en un líquido

La presión que produce la columna sobre la superficie S es el peso de esa columna, dividido para la superficie.

$$p = \frac{Shg}{S} = h\rho g$$

siendo

$$p = \text{presión a la profundidad (h)}$$

$$\rho = \text{peso específico del líquido}$$

Como el líquido está en reposo la presión es igual en todas las direcciones. (principio de Pascal).

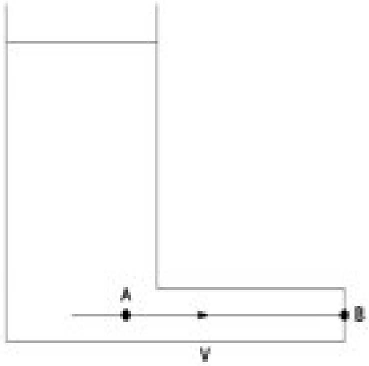


Figura 8.4.2: Líquido en movimiento

Un líquido se mueve cuando existe una diferencia de presiones entre dos puntos (A) y (B).

Supongamos un elemento de volumen(dV), y el movimiento es con cualquier orientación [1].

El elemento de volumen es un cubo, en el que actúan las presiones y el peso (W) del elemento.

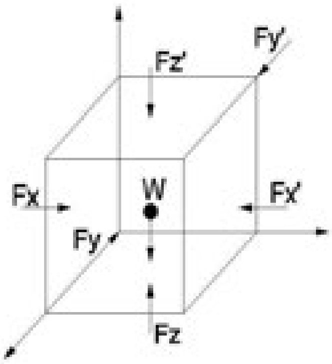


Figura 8.4.3: Elemento de volumen

En el centro del elemento la presión es igual:

$$p = p_x = p_y = p_z$$

El peso

$$W = \rho g dV = \rho g (dxdydz)$$

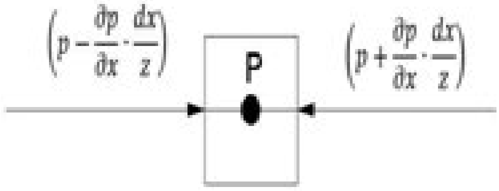


Figura 8.4.4: Presiones en eje OX

Analizando las fuerzas en x. Como F=pS (Fuerza = presión × superficie)

$$\sum F_x = \left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2}\right) dydz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2}\right) dydz$$

$$\sum F_x = -\frac{\partial p}{\partial x} \cdot dxdydz$$

y aplicando la ecuación de Newton

$$\sum F = ma$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} \cdot dxdydz = (\rho dxdydz)\,\ddot{x}$$

$$\rho\ddot{x} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

también en las otras direcciones

$$\rho\ddot{y} = -\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\rho\ddot{z} = -\left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g\right)$$

y en forma vectorial

$$\rho\dot{\overrightarrow{v}} = -\left[\frac{\partial p}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\overrightarrow{j} + \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g\right)\overrightarrow{k}\right]$$

La ecuación relaciona la velocidad con la distribución de presiones en x,y,z, y es complicada su aplicación, por eso se considera para líquidos con algunas condiciones.

Si el fluido es incomprensible, es decir es líquido

$$\rho = constante$$

y estableciendo la aceleración

$$\dot{\overrightarrow{v}} = v\frac{dv}{d\overrightarrow{r}}$$

integrando

$$\int \rho v dv = -\int \left[\frac{\partial p}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\overrightarrow{j} + \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g\right)\overrightarrow{k}\right] d\overrightarrow{r}$$

$$\int_1^2 \rho v dv = -\int_1^2 \left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz + \rho g dz\right)$$

Que es una ecuación de energía cinética = Trabajo desarrollado como

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz$$

$$\int_1^2 \rho v dv = -\int_1^2 dp - \int_1^2 \rho g dz$$

$$\frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2 = -\left(p_2 - p_1\right) - \rho g(z_2 - z_1)$$

y agrupando entre el punto 1 y 2

$$p_1 + \rho\frac{v_1^2}{2} + \rho g z_1 = p_2 + \rho\frac{v_2^2}{2} + \rho g z_2 \tag{8.4.4}$$

Ecuación que se le llama Teorema de Bernoulli y para su aplicación supone un estado estabilizado de movimiento del líquido, es decir no existe variación de las velocidades del fluido respecto al tiempo. El régimen se llama permanente.

La ecuación nos dice que si el régimen permanece constante, la suma de la presión hidrostática (p) más la presión debido a la velocidad $\left(\rho\frac{v^2}{2}\right)$y la presión producida por la altura o desnivel ($\rho g z$) permanece constante.

$$p + \rho\frac{v^2}{2} + \rho g z = \text{constante} \tag{8.4.5}$$

y puede aplicarse ante dos puntos cualquiera del líquido.

Para el caso más general, donde la velocidad del punto no es constante y la densidad puede ser variable respecto al tiempo, Euler propone otro esquema.

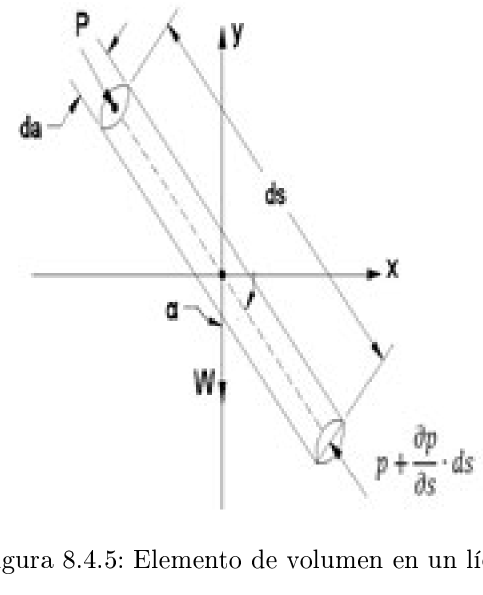


Figura 8.4.5: Elemento de volumen en un líquido

Considera un elemento de volumen como un tubo de longitud (ds) y área (da).

Este elemento de volumen permanece fijo en el espacio y se considera la circulación del fluido a través de él, analizando la ecuación del movimiento de la masa que ocupa el volumen en un instante dado. Por lo tanto la velocidad puede variar con el tiempo.

$$v = f(s,t)$$

y la aceleración

$$dv = \frac{\partial v}{\partial s} \cdot ds + \frac{\partial v}{\partial t} \cdot dt$$

$$\frac{dv}{dt} = v\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t}$$

El primer término se conoce como la aceleración del elemento que se mueve de un punto a otro, y el segundo término es la aceleración asociada a la variación del tiempo.

Las fuerzas que actúan en el filete son producidas por las presiones y por el peso.

$$W = \rho g da \cdot ds$$

Aplicando la ecuación

$$\sum F = ma$$

$$pda - \left(p + \frac{\partial p}{\partial s} \cdot ds\right) da + \rho g \cdot da \cdot ds \cdot cos(\alpha) = \rho \cdot da \cdot ds \left(v\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t}\right)$$

como

$$cos\alpha = \frac{\partial z}{\partial s}$$

la ecuación queda:

$$-\frac{\partial p}{\partial s} - \rho g\frac{\partial z}{\partial s} = \rho\left(v\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t}\right) \tag{8.4.6}$$

Qué es la ecuación general de Euler para el movimiento de un fluido. En esta ecuación la expresión $v\frac{\partial v}{\partial s}$ puede expresarse como:

$$v\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

y quedaría

$$-\frac{\partial p}{\partial s} - \rho g\frac{\partial z}{\partial s} = \rho\left[\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \frac{\partial v}{\partial t}\right] \tag{8.4.7}$$

Para llegar a la ecuación de Bernoulli la ecuación tiene algunas condiciones

1. Régimen permanente, luego $\frac{dv}{dt} = 0$
2. Líquido o fluido incomprensible ρ =constante.

sustituyendo

$$-\frac{\partial p}{\partial s} - \rho g \frac{\partial z}{\partial s} = \rho v \frac{\partial v}{\partial s}$$

e integrando

$$-\int_1^2 dp - \rho g \int_1^2 dz = \rho \int_1^2 v dv$$

$$-(p_2 - p_1) - \rho g (z_2 - z_1) = \rho \frac{v_2^2}{2} - \rho \frac{v_1^2}{2}$$

$$p_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} + \rho g z_1 = p_2 + \rho \frac{v_2^2}{2} + \rho g z_2 \tag{8.4.8}$$

Teorema de Bernoulli que es un teorema de conservación de la Energía, en efecto:

$$\rho \frac{v^2}{2} = \text{Energía Cinética por unidad de volumen}$$

$$p = \text{Energía Potencial por unidad de volumen asociado a presión}$$

$$\rho g z = \text{Energía Potencial por unidad de volumen debido al peso}$$

La ecuación también puede escribirse como alturas de columna de manómetros que miden cada presión.

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z = \text{constante}$$

$$\frac{p}{\rho g} = \text{altura por presión hidrostática} = h_1$$

$$\frac{v^2}{2g} = \text{altura por velocidad} = h_2$$

$$z = \text{diferencia de nivel} = z$$

La altura por velocidad puede ser observada introduciendo un pitot

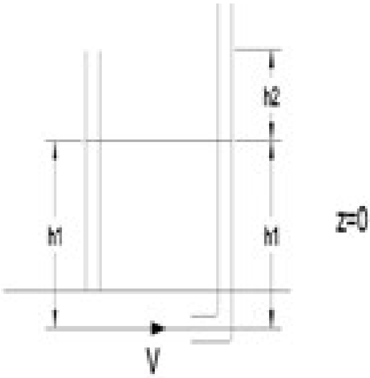


Figura 8.4.6: Alturas manométricas

Capítulo 9

Análisis dimensional

Hemos puntualizado que el estudio de la Dinámica es el estudio del movimiento de los cuerpos materiales y pretende describir y llegar a conclusiones referentes a esos movimientos sin embargo, como se usa como base las ecuaciones diferenciales, su tratamiento requiere capacitación profunda respecto a los diferentes métodos de solución de las ecuaciones.

Los movimientos y en general los procesos que pueden ser explicados mediante Fuerzas y magnitudes básicas como longitud y tiempo pueden ser analizadas mediante procedimientos que se basan en el análisis de dimensiones llegando a conclusiones que luego de la correspondiente experimentación pueden ser válidas para explicar procesos físicos de la naturaleza. Es importante estudiar estos procedimientos en los que se basa la determinación de fórmulas llamadas empíricas y la teoría de modelos que permiten calcular dimensiones de un modelo pequeño a experimental para que sus conclusiones sean valederas para el prototipo que se pretende construir [1].

9.1. Magnitudes básicas.- Sistemas de unidades

La ciencia y particularmente la mecánica racional es la ciencia que busca magnitudes, es decir entes en la naturaleza que puedan ser medidos por comparación con una muestra de cantidad conocida de la misma magnitud, llamada unidad.

Para iniciar el proceso de búsqueda de magnitudes y las interacciones de las mismas en los diferentes fenómenos naturales fue necesario partir por lo menos de tres magnitudes fundamentales independientes y que aceptamos su existencia porque en cierta medida determinan la existencia de nosotros mismos.

Estas magnitudes son la longitud que determina el espacio que habitamos, la masa que lo relaciona a la materia y el tiempo que determinan la transitoriedad y la permanencia. Las otras magnitudes que hemos utilizado son derivadas de las fundamentales y nacen por definición de los procesos físicos. Cuando se analizan fenómenos eléctricos, aparece otra magnitud básica adicional como es la carga eléctrica y si estudiamos procesos de calor y termodinámica aparece la temperatura. Todas las demás magnitudes se expresan en función de las magnitudes básicas o fundamentales.

En el estudio de la Mecánica Racional cuando se toman como unidades fundamentales o básicas; la masa (M), la longitud (L), y el tiempo (T), se llama el sistema (MLT) o sistema internacional o absoluto de unidades, y dentro de éste puede existir medidas múltiplas o submúltiplas que conforman sistemas de unidades especiales.

Son sistemas (MLT):

- MKS con unidades

$$\text{Longitud} = \text{metro (m)}$$

$$\text{Masa} = \text{kilogramo (kg)}$$

$$\text{Ttiempo} = \text{segundo (s)}$$

- CGS con unidades

$$\text{Longitud} = \text{centímetro (cm)}$$

$$\text{Masa} = \text{gramo (gr)}$$

$$\text{Tiempo} = \text{segundo (s)}$$

A lo largo de la historia de la ciencia siempre ha existido considerables diferencias entre eminentes autoridades científicas sobre la forma mas lógica de establecer magnitudes básicas o fundamentales y por eso se han creado innumerables sistemas de unidades, casi dependiendo de cada país. Actualmente se persigue unificar todo el proceso en el sistema internacional de unidades (SI).

A inicios del siglo XX los físicos alemanes proponen un sistema basado en tres unidades básicas: la fuerza (F), la longitud (L), y el tiempo (T) y se construye un sistema (FLT) que provocó gran confusión en todos los niveles ya que parten de la unidad de fuerza como conocida que es el peso del kilogramo masa y luego la masa pasó a ser unidad definida. Cada país por lo tanto podía tener sistema MLT o FLT y en cada uno podía existir varios sistemas con unidades múltiplas o submúltiplas. En nuestro caso solo se analizarán las magnitudes bajo el sistema (MLT) y con unidades MKS.

Considerando el sistema (MLT) se pueden crear las diferentes magnitudes mediante su definición y su fórmula, y sus dimensiones expresadas en función de la masa (M), la longitud (L), y el tiempo (T). El adimencional deberá ser expresado como $\left[M^0 L^0 T^0\right]$

magnitudes Y unidadES MECÁNICAS

NOMBRE	**FÓRMULA**	**DIMENSIÓN**	**unidad**
LONGITUD	l	$\left[M^0LT^0\right]$	metro = m
MASA	m	$\left[M^1L^0T^0\right]$	kilogramo = kg
TIEMPO	t	$\left[M^0L^0T^1\right]$	segundo = g
VELOCIDAD	$v = \frac{l}{t}$	$\left[M^0LT^{-1}\right]$	$\frac{m}{s}$
ACELERACIÓN	$v = \frac{l}{t^2}$	$\left[M^0LT^{-2}\right]$	$\frac{m}{s^2}$
ÁNGULO	θ	$\left[M^0L^0T^0\right]$	radian
VELOCIDAD ANGULAR	$\omega = \frac{\theta}{t}$	$\left[M^0L^0T^{-1}\right]$	$\frac{1}{s}$
ACELERACIÓN ANGULAR	$\alpha = \frac{\omega}{t}$	$\left[M^0L^0T^{-2}\right]$	$\frac{1}{s^2}$
PERIODO	T	$\left[M^0L^0T\right]$	s
FRECUENCIA	$f = \frac{1}{T}$	$\left[M^0L^0T^{-1}\right]$	$\frac{1}{s}$
ÁREA	$A = l^2$	$\left[M^0L^2T^0\right]$	m^2
VOLUMEN	$V = l^3$	$\left[M^0L^3T^0\right]$	m^3
FUERZA	$F = ma$	$\left[MLT^{-2}\right]$	$\frac{kgm}{s^2} = Newton(N$
TRABAJO (ENERGÍA)	$W = F \cdot d$	$\left[ML^2T^{-2}\right]$	$\frac{kgm^2}{s^2} = Nm = Ju$
POTENCIA	$P_o = \frac{W}{t}$	$\left[ML^2T^{-3}\right]$	$\frac{Julio}{seg} = Watt$
POTENCIAL GRAVITATORIO	$V = mgh$	$\left[ML^2T^{-2}\right]$	$\frac{kgm^2}{s^2} = J$
PRESIÓN	$P_r = \frac{F}{A}$	$\left[ML^{-1}T^{-2}\right]$	$\frac{N}{m^2} = PASCAL$
DENSIDAD	$d = \frac{m}{V}$	$\left[ML^{-3}T^0\right]$	$\frac{kg}{m^3}$
PESO ESPECÍFICO	$\varrho = dg$	$\left[ML^{-2}T^{-2}\right]$	$\frac{N}{m^3}$
MOMENTO ESTÁTICO	$\tau = F \cdot l$	$\left[ML^2T^{-2}\right]$	$N \cdot m$
MOMENTO INERCIA	$I = mr^2$	$\left[ML^2T^0\right]$	$kg \cdot m^2$
COEF. VISCOSIDAD	$\eta = \frac{Fl}{Av}$	$\left[ML^{-1}T^{-1}\right]$	$\frac{kg}{ms}$
IMPULSO LINEAL	$Im = F \cdot t$	$\left[MLT^{-1}\right]$	$N \cdot s$
CANTID. MOVIMIENTO	$\rho = mv$	$\left[MLT^{-1}\right]$	$kg\frac{m}{s} = N \cdot s$
MOMENTO ANGULAR	$H = rmv$	$\left[ML^2T^{-1}\right]$	$kg\frac{m^2}{s}$
CAUDAL	$Q = \frac{V}{t}$	$\left[M^0L^3T^{-1}\right]$	$\frac{m^3}{s}$
MÓDULO DE ELASTICIDAD	$E = \frac{F}{A}$	$\left[ML^{-1}T^{-2}\right]$	$\frac{N}{m^2}$

En el caso de magnitudes eléctricas, se incluye una nueva magnitud básica que es la carga eléctrica cuya unidad es el Culombio (c).

magnitudes Y unidadES ELÉCTRICAS			
MAGNITUD	**FORMULA**	**DIMENSIÓN**	**unidad**
MASA	m	$\left[ML^0T^0Q^0\right]$	kilogramo =
LONGITUD	l	$\left[M^0LT^0Q^0\right]$	metro = m
TIEMPO	t	$\left[M^0L^0T^1Q^0\right]$	segundo =
CARGA ELÉCTRICA	q	$\left[M^0L^0T^0Q\right]$	culombio =
INTENSIDAD	$i = \frac{q}{t}$	$\left[M^0L^{-1}T^0Q^{-1}\right]$	$\frac{C}{s}$ = Amperio
VOLTAJE	$V = \frac{W}{q}$	$\left[ML^2T^{-2}Q^{-1}\right]$	$\frac{Julio}{C}$ = Voltio(
RESISTENCIA ELÉCTRICA	$R = \frac{V}{i}$	$\left[ML^2T^{-1}Q^{-1}\right]$	$\frac{Volt}{Amp}$ = Ohmio(
INDUCTANCIA	$L = \frac{V}{\frac{di}{dt}}$	$\left[ML^2T^0Q^{-2}\right]$	$\frac{Volt-seg}{A}$
CAPACITANCIA	$C = \frac{q}{V}$	$\left[M^{-1}L^{-2}T^2Q^2\right]$	$\frac{C}{V}$ = Faraday
INTEN. CAMPO ELÉCTR	$E = \frac{F}{q}$	$\left[MLT^{-2}Q^{-1}\right]$	$\frac{New}{C} = \frac{Vol}{m}$
INTEN. CAMPO MAGNÉTR	$B = \frac{F}{qv}$	$\left[ML^0T^{-1}Q^{-1}\right]$	$\frac{N}{A-m} = \frac{V\cdot s}{m^2} = \frac{Web}{m^2} =$
FLUJO MAGNÉTICO	$\phi_B = B \cdot s$	$\left[ML^2T^{-1}Q^{-1}\right]$	Volt-seg = W
POTENCIAL ELÉCTRICO	$W = E \cdot I$	$\left[ML^2T^{-3}Q^0\right]$	$\frac{Julio}{s} = Wa$

9.2. Homogeneidad dimensional

Los procesos físicos se expresan mediante fórmulas o ecuaciones que contienen magnitudes básicas y derivadas y las dimensiones de un miembro de la ecuación deberá ser igual a las dimensiones del otro miembro de la ecuación. Por ejemplo en la ecuación

$$F = m \cdot a$$

las dimensiones de los dos miembros deben ser iguales, en efecto.

$$\left[MLT^{-2}\right] = \left[M^1L^0T^0\right]\left[M^0LT^{-2}\right]$$

$$\left[MLT^{-2}\right] = \left[MLT^{-2}\right]$$

Si las dimensiones no se igualan indica que existe un error de alguna clase. Este proceso de análisis se llama homogeneidad dimensional, y debe ser comprobado en todo proceso físico que se expresa mediante ecuaciones.

Otro ejemplo, consideremos la ecuación que describe la velocidad de un cuerpo que cae en un medio viscoso:

$$v = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right)$$

Siendo las magnitudes y las dimensiones:
Velocidad:

$$v = \left[M^0LT^{-1}\right]$$

Masa

$$m = \left[M^1 L^0 T^0\right]$$

Gravedad

$$g = \left[M^0 L T^{-2}\right]$$

Factor de resistencia

$$k = \left[M L^0 T^{-1}\right]$$

Tiempo

$$t = \left[M^0 L^0 T^1\right]$$

Se procede a establecer la homogeneidad entre los dos términos:
En el primer miembro

$$v = \left[M^0 L T^{-1}\right]$$

Analizando en el segundo miembro, primero el exponente

$$\frac{kt}{m} = \frac{\left[M L^0 T^{-1}\right]\left[M^0 L^0 T^1\right]}{\left[M L^0 T^0\right]} = \left[M^0 L^0 T^0\right] \text{adimensional}$$

Se nota que en la expresión $e^{-\frac{kt}{m}}$, el exponente es adimensional. En cualquier expresión de los tipos e^x,$ln(x)$,$sen(x)$, $cosh(x)$, el argumento (x) debe ser una magnitud sin dimensión o adimensional. También todo número es adimensional.

En la ecuación dada, la dimensión de la velocidad dependería solo de la expresión:

$$\frac{mg}{k} = \frac{\left[M^1 L^0 T^0\right]\left[M^0 L T^{-2}\right]}{\left[M L^0 T^{-1}\right]} = \left[M^0 L T^{-1}\right]$$

Que es la dimensión de la velocidad, lo que implica que la ecuación es dimensionalmente homogénea y por lo tanto es cierta.

Si la ecuación la expresamos de la siguiente manera:

$$\frac{vk}{mg} = \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right)$$

ambos términos son adimensionales:

$$\left(\frac{vk}{mg}\right) \text{ y } \left(\frac{kt}{m}\right)$$

lo que permitiría expresar como relación de las adimensionales:

$$\left(\frac{vk}{mg}\right) = \phi\left(\frac{kt}{m}\right)$$

es decir que la expresión analizada puede ser expresada como función de 2 cantidades o términos adimensionales.

En general una ecuación dimensionalmente homogénea puede ser expresada en función de términos sin dimensiones y estos se pueden expresar en forma del llamado Teorema(π)

Una ecuación física de n variables expresada en N unidades fundamentales puede ponerse en la forma.

$$\phi\left(\pi_1, \pi_2, \pi_3 ... \pi_{(n-N)}\right) = 0$$

en donde los (π) son parámetros o términos sin dimensiones formados por productos de las variables. El número de términos independientes π será, en general $(n - N)$

9.3. Ecuaciones dimensionales

Para aplicar el método que permite relacionar variables dadas $(v_1, v_2, v_3, ...v_n)$en términos adimensionales, todas estas variables deben ser conocidas. El método de análisis dimensional dará alguna información sobre la forma que tomará la solución o la relación entre las mismas.

Esta información jamás será completa y el análisis no puede ser sustitución de planteamiento analítico de los problemas y de su solución, sin embargo puede partirse del análisis dimensional y experimentar las conclusiones para que puedan ser ajustadas a las realidades de los problemas estudiados llegando a lo que se llaman fórmulas empíricas.[1]

El procedimiento es el siguiente:

Supongamos que buscamos la relación de la fuerza que se produce por el movimiento radial de una masa a una velocidad dada.

Se escriben las magnitudes que intervienen en el fenómeno con sus dimensiones, en nuestro caso:

Fuerza

$$F = \left[MLT^{-2}\right]$$

Masa

$$m = \left[ML^0T^0\right]$$

Radio

$$r = \left[M^0LT^0\right]$$

Velocidad

$$v = \left[M^0LT^{-1}\right]$$

[1] Un análisis más completo del mismo puede verse en Mecánica aplicada dinámica de Housman y Hudson, 4ta Edición, CESSA-1959, Pág. 20.

número de variables n=4
número de variables fundamentales N=3
número de términos adimensionales $(\pi) = (n - N) = 1$
Se plantea la relación para encontrar los exponentes de cada magnitud que da como resultado el término adimensional.

$$F^a m^b r^c v^d = \left[MLT^{-2}\right]^a \left[ML^0T^0\right]^b \left[M^0LT^0\right]^c \left[M^0LT^{-1}\right]^d = \left[M^0L^0T^0\right]$$

la ecuación de los exponentes serán:

$$a + b = 0$$

$$a + c + d = 0$$

$$-2a - d = 0$$

Generalmente resultan sistemas indeterminados y se tendrían varias soluciones. Se da valores de la unidad al exponente asignado de la variable que se quiere despejar.
así a=1

$$b = -1$$

$$d = -2a = -2$$

$$c = -a - d = -1 + 2 = 1$$

por lo tanto el término π

$$\pi_1 = F^1 m^{-1} r^1 v^{-2} = \frac{Fr}{mv^2}$$

La expresión puede ser escrita como:

$$\phi\left(\frac{Fr}{mv^2}\right) = 0$$

y como ecuación

$$\frac{Fr}{mv^2} = c$$

c=constante(adimensional)
luego

$$F = c\frac{mv^2}{r}$$

La constante depende de las unidades de las variables o de la experimentación que comprueba la igualdad.

En general la igualdad de los términos (π) pueden hacerse como:
si hay un solo término (π)

$$\pi_1 = c$$

si hay 2 términos (π)

$$\pi_1 = c\pi_2$$

o varios términos

$$\pi_1 = \phi(\pi_1, \pi_2, \pi_3 ... \pi_n)$$

Ejemplo 16. Analizar la fuerza (F) que requiere una esfera de diámetro (d), que se mueve con una velocidad (v), para vencer la resistencia de un líquido de densidad (ρ) y viscosidad (η).

Las magnitudes que intervienen con sus respectivas dimensiones son:
Coeficiente de viscosidad

$$\eta = \left[ML^{-1}T^{-1}\right]$$

Diámetro

$$d = \left[M^0 L T^0\right]$$

Velocidad

$$v = \left[M^0 L T^{-1}\right]$$

Densidad

$$\rho = \left[ML^{-3}T^0\right]$$

Fuerza

$$F = \left[MLT^{-2}\right]$$

En lugar de plantear como producto de dimensiones es recomendable graficar una matriz como la siguiente:

	η^a	d^b	v^c	ρ^d	F^e
M	1	0	0	1	1
L	-1	1	1	-3	1
T	-1	0	-1	0	-2

n=5

N=3

En el lado izquierdo están las incógnitas fundamentales y en la parte superior las magnitudes con su exponente que se busca, la matriz es formada por los coeficientes de las dimensiones de cada variable.

$$\text{número de términos de } \pi = (n - N) = (5 - 3) = 2$$

La matriz es eficiente porque permite el siguiente análisis:

1. Si una fila de las magnitudes básicas es cero se disminuye inmediatamente el número (N) de magnitudes básicas.
2. Si existe variables con igual columna, el cociente entre ellas es un término π y se puede prescindir de una de ellas, o de las dos.

La matriz tienen rango 3 y por lo tanto tiene 5 incógnitas con 3 ecuaciones y su solución es indeterminada, las ecuaciones son:

$$a + d + e = 0$$

$$-a + b + c - 3d + e = 0$$

$$-a - c - 2e = 0$$

La solución es posible si se dan 2 valores y se calculan los otros. Estos permiten realizar varios análisis y determinar las más convenientes.

1. Dando valores a=0 e=1 Para que la fuerza aparezca con exponente 1, se determinan los otros valores

$$d = -1, c = -2, b = -2$$

2. Dando valores a=1 e=0 (intercambiando)

   se obtiene

$$d = -1, c = -1, b = -1$$

en tabla:

	η^a	d^b	v^c	ϱ^d	F^e
π_1	0	-2	-2	-1	1
π_2	1	-1	-1	-1	0

Los términos adimensionales serán:

$$\pi_1 = d^{-2}v^{-2}\varrho F = \left(\frac{F}{d^2v^2\varrho}\right)$$

Se debe comprobar que es adimensional, en efecto:

$$\frac{F}{d^2v^2\varrho} = \frac{\left[MLT^{-2}\right]}{\left[M^0LT^0\right]^2\left[M^0LT^{-1}\right]^2\left[ML^{-3}T^0\right]} = \left[M^0L^0T^0\right]$$

El segundo término π

$$\pi_2 = \eta d^{-1}v^{-1}\varrho^{-1} = \left(\frac{\eta}{dvg}\right)$$

y puede expresarse como:

$$\pi_1 = c\pi_2$$

$$\left(\frac{F}{d^2v^2\varrho}\right) = c\left(\frac{\eta}{dvg}\right)$$

$$F = \left(d^2v^2\varrho\right)c\left(\frac{\eta}{dvg}\right)$$

El término (π_2) que puede escribirse como $\left(\frac{\eta}{dvg}\right)$se denomina el número de Reynolds en el estudio de la mecánica de fluidos.

9.4. Teoría de los modelos

El análisis dimensional es muy útil para estudiar fenómenos o estructuras mediante modelos físicos que se construyen a escalas manejables a fin de estudiar y predecir propiedades de los prototipos. Existen muchas estructuras, como puentes, edificios, aviones, diques, que además de ser diseñados por los métodos y modelos matemáticos (prototipos) deben ser experimentados mediante modelos que permitan estudiar las diferentes propiedades del prototipo, antes de ser construidos por primera y a veces única vez.

Para la aplicación del método se deben conocer todas las variables que se suponen más importantes para el análisis del problemas. Estas variables podrían tomarse de las ecuaciones que formaron parte del diseño matemático del problema o las que se creyeran convenientes.

Con las variables conocidas se puede aplicar el proceso del análisis dimensional y llegar a establecer los términos adimencionales (π)

$$\phi(\pi_1, \pi_2, \pi_3, ...\pi_n) = 0$$

o expresadas mediante igualdades convenientes

$$\pi_1 = c(\pi_2, \pi_3, ...\pi_n)$$

Esta relación se aplicará al prototipo y al modelo
PROTOTIPO:

$$\pi_{1p} = c(\pi_{2p}, \pi_{3p}, ...\pi_{np})$$

MODELO:

$$\pi_{1m} = c(\pi_{2m}, \pi_{3m}, ...\pi_{nm})$$

Y para determinar las relaciones entre las magnitudes del prototipo y las magnitudes del modelo se procede a igualar.

$$\pi_{2p} = \pi_{2m}$$

$$\pi_{3p} = \pi_{3m}$$

$$\pi_{np} = \pi_{nm}$$

Llegando finalmente a expresar

$$\pi_{1p} = \pi_{1m}$$

Ejemplo 17. Determinar las dimensiones que debe tener el modelo físico de una viga de largo (l) y sección (A) en la que actúa su peso propio, determinado por su peso específico(ρ) y en la que actúa además una carga concentrada (P). El módulo de elasticidad de la viga es (E) y se requiere investigar la relación de la flecha del prototipo en función de la del modelo.

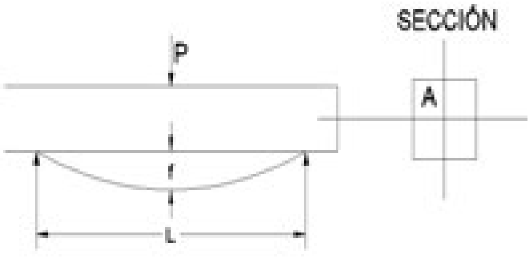


Figura 9.4.1: Viga simplemente apoyada

El problema puede resolverse partiendo de la flecha que se ha determinado con análisis y modelos matemáticos y transformarlas en adimensionales para relacionarlas entre prototipo y modelo.

En el presente caso aplicaremos el análisis dimensional aún para establecer las relaciones entre las magnitudes independiente de los resultados obtenidos en el análisis estático matemático en la viga.

1. magnitudes y dimensiones.

   Peso Especifico

   $$\gamma = \left[ML^{-2}T^{-2}\right]$$

   Módulo de Elasticidad

   $$E = \left[ML^{-1}T^{-2}\right]$$

   Longitud

   $$L = \left[M^0LT^0\right]$$

   Área

   $$A = \left[M^0L^2T^0\right]$$

   Carga

   $$P = \left[MLT^{-2}\right]$$

   Flecha

   $$\delta = \left[M^0LT^0\right]$$

2. Determinación del término π

	γ^a	E^b	L^c	A^d	ρ^e	δ^f
M	1	1	0	0	1	0
L	-2	-1	1	2	1	1
T	-2	-2	0	0	-2	0

   Existen 2 términos adimensionales lógicos.

   $$\pi_1 = \frac{\delta}{L}, \pi_2 = \frac{\delta L}{A}$$

3. Ecuaciones de los exponentes

   $$a + b + e = 0$$

   $$-2a - b + c + 2d + e + f = 0$$

$$-2a - 2b - 2e = 0$$

Se nota que la tercera ecuación es igual que la primera, lo que termina con 2 ecuaciones con 6 incógnitas, es decir tenemos que dar 4 valores para levantar la indeterminación

con c=1, d=1, e=0, f=0 se obtiene que

$$a = 3, b = -3$$

$$\pi_3 = \gamma^3 E^{-3} LA = \frac{\gamma^3 LA}{E^3}$$

con c=0, d=0, e=1, f=1 se obtiene

$$a = 3, \; b = -4$$

$$\pi_4 = \gamma^3 E^4 P\delta = \frac{\gamma^3 P\delta}{E^4}$$

El teorema (π) queda

$$\pi_1 = \pi_3 \phi \left(\pi_2, \pi_4\right)$$

$$\frac{\delta}{L} = \frac{\gamma^3 LA}{E^3} \phi \left(\frac{\delta L}{A}, \frac{\gamma^3 P\delta}{E^4} \right)$$

Puede haber varias opciones y la ecuación puede escribirse como:

$$\frac{\delta E^3}{\gamma^3 L^2 A} = \phi \left(\frac{\delta L}{A}, \frac{\gamma^3 P\delta}{E^4} \right)$$

Y se igualan las adimensionales del modelo con el prototipo

$$\left(\frac{\delta E^3}{\gamma^3 L^2 A} \right)_p = \left(\frac{\delta E^3}{\gamma^3 L^2 A} \right)_m$$

o sea

$$\frac{\delta_p E_p^3}{\gamma_p^3 L_p A_p} = \frac{\delta_m E_m^3}{\gamma_m^3 L_m A_m}$$

Y la relación de flecha del prototipo respecto a la del modelo será:

$$\delta_p = \left(\frac{E_m^3}{E_p^3} \right) \left(\frac{\gamma_p^3}{\gamma_m^3} \right) \left(\frac{L_p^2}{L_m^2} \right) \left(\frac{A_p}{A_m} \right) \delta_m$$

Donde se ve que la longitud y el área puede ser a escala reducida, y dependería del tipo de material del modelo definido por el módulo de elasticidad y las densidades del material usado en el modelo respecto al que usa el prototipo, si el material es el mismo del modelo y del prototipo, la reducción del modelo sería solo a escala que se desea.

Bibliografía

[1] HOUSNER GEORGE. HUDSON DONALD.- Mecánica Aplicada Dinámica. 4ta Edición, CECSA-México-1969.

[2] GOLDSTEIN H. Mecánica clásica, ADDISON-WESLEY, Cambriasi-1950.

[3] BEER FERDINAND-JOHNTON RUSSELL.- Mecánica Vectorial para Ingenieros-DINÁMICA- VII Edición McGrawHill- México-2004.

[4] HIBBELER RC.- Mecánica Vectorial para Ingenieros- Décima Edición-REARSON PRENTICE HALL- México-2004.

[5] KITTEL CHARLES.- Mecánica- BENKELEY PHISIC CAURSG- Editorial DEVENTE-BARCELONA-1968.

[6] SYMON KEITH.-Mecánica- UNIVERSIDAD DE WISCONSIN-Primera Edición-Editorial AGUILAR-ESPAÑA-1970.

[7] RESNICK ROBER-HALLIDAY DAVID- Física para estudiantes de Ciencia e Ingeniería- Segunda Edición en Español- Editorial CONTINETAL MÉXICO- 1965.

[8] WELLS,DARC- Teoría y Problemas de Dinámica de Lagrange-Libros McGraw Hill-CARVAJAL-COLOMBIA 1967.

[9] SETO WILLIAN- Teoría y Problemas de Vibraciones Mecánicas- Libros McGraw Hill-CARVAJAL-COLOMBIA 1970.

[10] MCKELVEY JOHN.- Física para ciencias e Ingeniería-Primera Edición-HARLA-MÉXICO-1981.

[11] FREGLY B.S-Dinámics of Mechanical, Aerospace and Biomechanical Systems-Universidad de Florida-2008.