Margarita Martínez Bustamante
Robinson Portilla Flores

# Cálculo Diferencial y Geometría Analítica para Ingeniería Automotriz

Universidad Politécnica Salesiana

# Cálculo Diferencial con Geometría Analítica para Ingeniería Automotriz

*Margarita Martínez Bustamante*
*Robinson Portilla Flores*

# Cálculo Diferencial con Geometría Analítica para Ingeniería Automotriz

ABYA YALA | UNIVERSIDAD POLITÉCNICA SALESIANA

2017

**CÁLCULO DIFERENCIAL CON GEOMETRÍA ANALÍTICA PARA INGENIERÍA AUTOMOTRIZ**

***Margarita Martínez Bustamante / Robinson Portilla Flores***


1ra edición: ©Universidad Politécnica Salesiana
Av. Turuhuayco 3-69 y Calle Vieja
Cuenca-Ecuador
Casilla: 2074
P.B.X. (+593 7) 2050000
Fax: (+593 7) 4 088958
e-mail: rpublicas@ups.edu.ec
www.ups.edu.ec

Área de Ciencia y Tecnología
CARRERA DE MECÁNICA AUTOMOTRIZ

Diagramación, diseño y edición: Editorial Universitaria Abya-Yala
Quito-Ecuador

Derechos de autor: 051047
Depósito legal: 005873

ISBN UPS: 978-9978-10-268-8

Impresión: Editorial Universitaria Abya-Yala
Quito-Ecuador

Impreso en Quito-Ecuador, mayo de 2017

Publicación arbitrada de la Universidad Politécnica Salesiana

# Índice

## Capítulo 4
## Aplicación de la derivada

# Prefacio

Este libro ha sido elaborado para los docentes y estudiantes de la Carrera de Ingeniería Automotriz partiendo de la necesidad de enlazar la teoría del Cálculo Diferencial con aplicaciones en ingeniería.

El material elaborado parte desde conceptos de Geometría Analítica que servirán como inicio para el entendimiento del Cálculo Diferencial.

Se encuentra dividido en cuatro capítulos:

- Capítulo 1. Repaso de la Geometría Analítica
- Capítulo 2. Números reales, funciones y límites
- Capítulo 3. La derivada
- Capítulo 4. Aplicación de la derivada

Este libro contiene material teórico de cada tema, los conceptos importantes han sido encerrados dentro de recuadros para identificarlos, la información ha sido generada en diferentes niveles para su comprensión partiendo de introducciones y ejemplos prácticos en cada tema. Los temas se generan junto con Ejemplos, Ejercicios Resueltos, Ejercicios Propuestos para ser desarrollados por el alumno para reforzar el conocimiento y al final de cada capítulo Actividades Complementarias de todo el capítulo como también Ejercicios de Aplicación en la ingeniería específicamente en la Carrera de Ingeniería Automotriz.

La temática se ha elaborado de tal manera que la enseñanza-aprendizaje tenga una sinergia entre la parte teórica y su aplicación en casos prácticos de ingeniería como punto de partida para las materias de especialización.

Además al final del libro hay un formulario básico de conceptos algebraicos, trigonométricos y tablas de derivadas.

# Agradecimientos

Un agradecimiento al Consejo de Carrera de Ingeniería Mecánica Automotriz de la Universidad Politécnica Salesiana sede Cuenca conformado por: Ing. Cristian García, Ing. Fernando Chica, Ing. Wilson Calle e Ing. Juan Pablo Montero quienes apoyaron el desarrollo de este libro.

Un agradecimiento especial al Ing. Julio Loja, al Ing. Marco Amaya y al Ing. Fabricio Espinoza quienes dieron un apoyo académico al inicio de este proyecto. También a quienes de una u otra manera aportaron con ideas durante las diferentes etapas de desarrollo de este material.

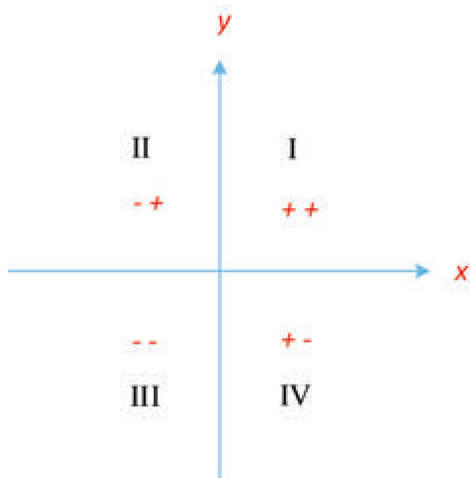
Capítulo 1

# Repaso de la Geometría Analítica

## 1.1 Sistema coordenado

El plano cartesiano está constituido por dos rectas perpendiculares, que al interceptarse en un punto llamado origen forman cuatro cuadrantes. A la recta horizontal se la conoce como eje “$x$” o de las abscisas y la recta vertical recibe el nombre de eje “$y$” o eje de las ordenadas.

Figura 1




Un punto situado en el plano cartesiano recibe el nombre de coordenada y tiene la representación: $P(x, y)$

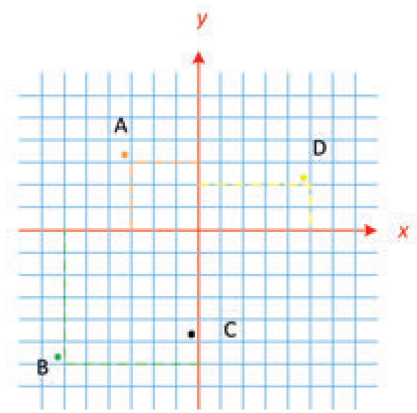
En la Figura 1 podemos observar los cuatro cuadrantes con sus respectivos signos.

## EJERCICIOS RESUELTOS

**ER1.** Considerando a cada división como la unidad, ubique en el plano cartesiano las siguientes coordenadas: ***A***(-3,3), ***B***(-6,-6), ***C***(0,-5) y ***D***(5,29)

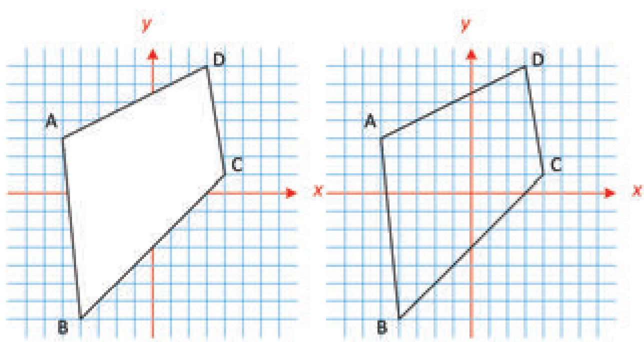
## SOLUCIÓN

**Figura 2**




**ER2.** Considerando a cada división como la unidad, ubique los vértices de la figura propuesta en la gráfica:

**Figura 3**



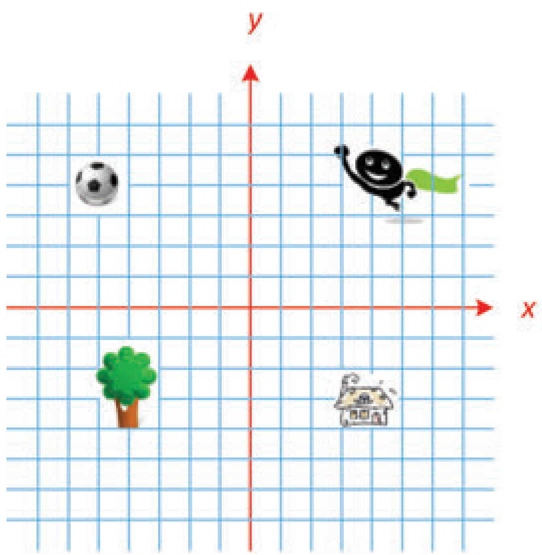
## Solución

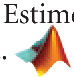
***A***(-5,3)
***B***(-4,-7)
***C***(4,1)
***D***(3, 7)

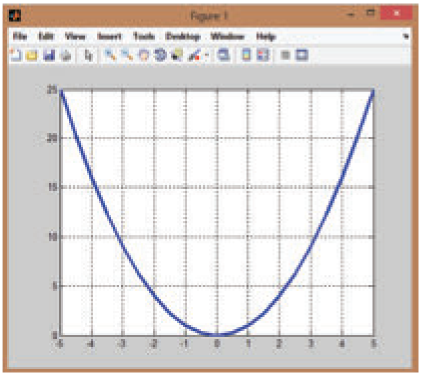
## Ejercicios propuestos

**EP1.** Considerando cada división como la unidad, estime la coordenada según el gráfico presentado:

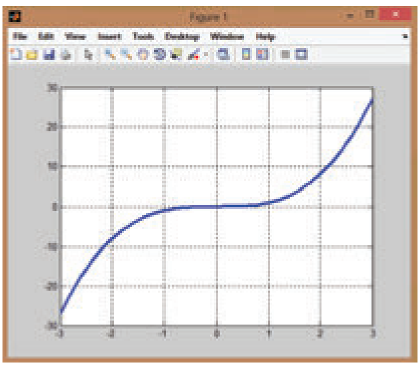
**Figura 4**



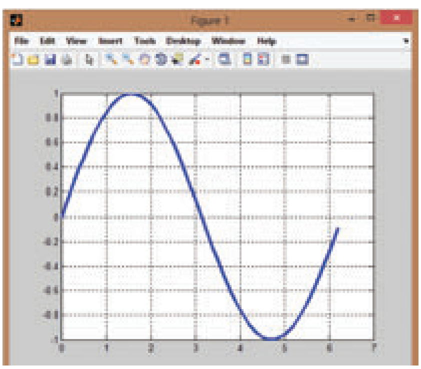

**EP2.** Estime por lo menos tres puntos que estén contenidos en cada gráfica. 




```
>> f='x.^2';
>> syms x
>> x=-5:0.5:5;
>> y=eval(f);
>> plot(x,y)
>> grid on
>> hold on
```




```
>> f='x.^3';
>> syms x
>> x=-3:0.1:3;
>> y=eval(f);
>> plot(x,y)
>> grid on
>> hold on
```

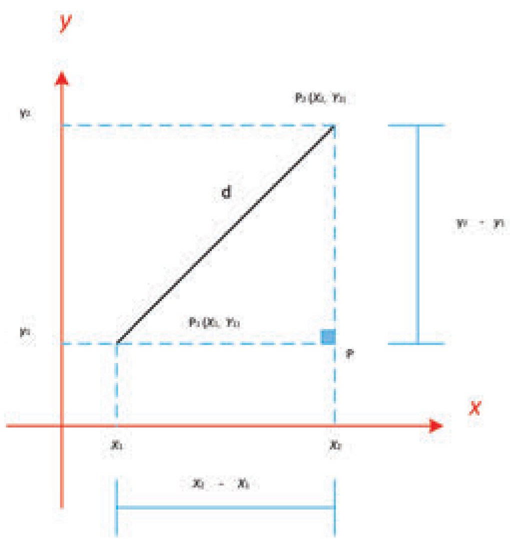



```
>> x=0:0.1:2*pi;
>> y=sin(x);
>> plot(x,y)
>> grid on
>> hold on
```

## 1.2 Distancia entre dos puntos

La distancia entre dos puntos se puede determinar hallando la longitud del segmento de recta que une dichos puntos, de tal manera que en el triángulo rectángulo $P_2PP_1$ (Figura 5), el segmento $P_1P_2$ definido como $d$ ($d=P_1P_2$) es la hipotenusa, los catetos son los segmentos: $P_1P=(x_2-x_1)$ y $P_2P=(y_2-y_1)$. Entonces por Pitágoras tenemos:

**Figura 5**




$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

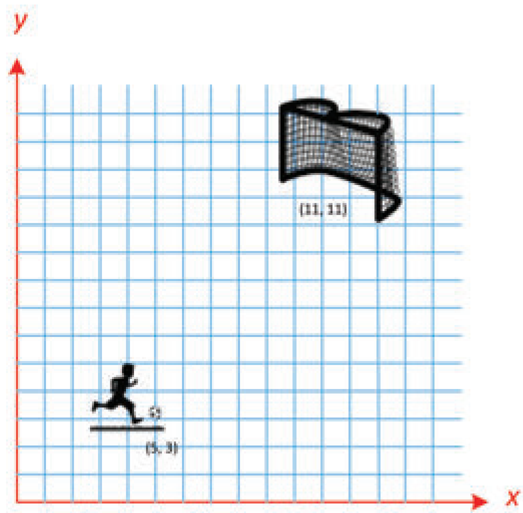
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

(Ecuación 1)

### Ejercicios resueltos

**ER1.** Considerando las coordenadas propuestas en la figura 6. Determinar la distancia que debe recorrer el balón para ingresar en el arco.

**Figura 6**




## Solución

$$d = \sqrt{36 + 64}$$

$$d = \sqrt{(11 - 5)^2 + (11 - 3)^2}$$

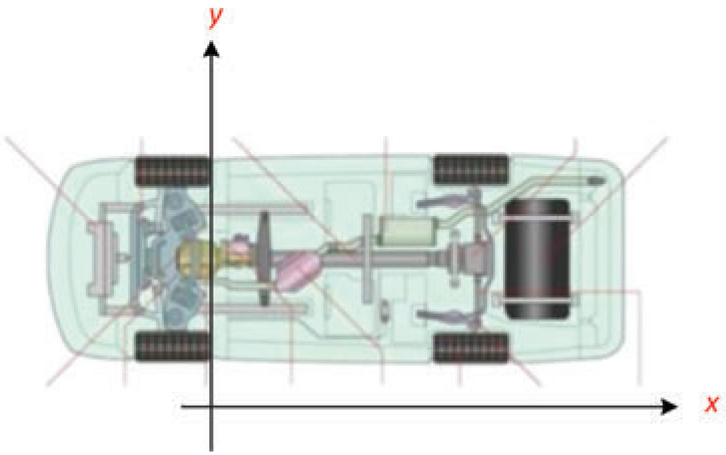
$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

*d=10 u*

## Ejercicios propuestos

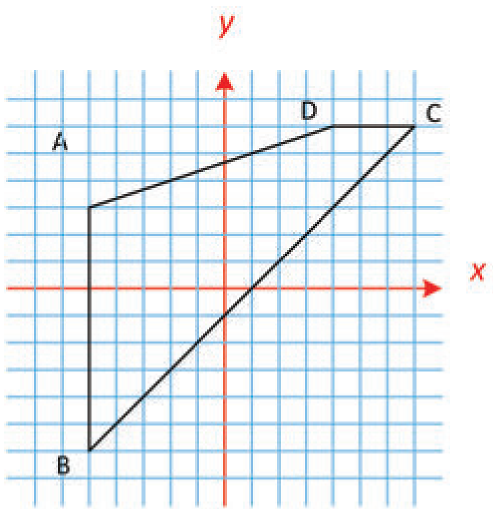
**EP1.** Indague sobre las partes de un vehículo, determine la distancia entre dos partes, las coordenadas se pueden determinar midiendo distancias en los ejes.

**Figura 7**




**EP2.** Determinar el perímetro de la figura propuesta, considerando cada división como la unidad en el sistema cartesiano de la figura propuesta.

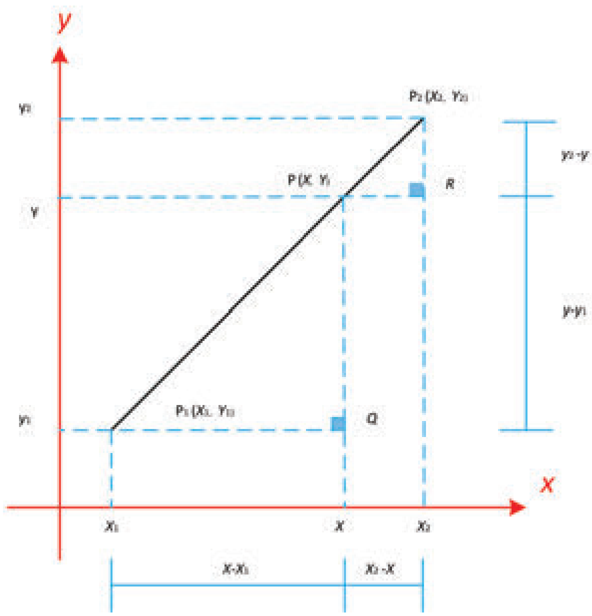
**Figura 8**



## 1.3 Razón en la que un punto divide un segmento de recta

En el segmento de recta $P_1P_2$, la razón en la el punto $P(x, y)$ divide al segmento en dos partes proporcionales se define como:

**Figura 9**




$$r = \frac{\overline{P_1\,P}}{\overline{PP_2}}$$

Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen dos ángulos homólogos, en los triángulos rectángulos $PQP_1$ y $P_2RP$ se cumple dicho teorema de semejanza, por lo tanto sus lados son proporcionales:

$$\frac{\overline{P_1\,P}}{\overline{PP_2}} = \frac{\overline{P_1\,Q}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{QP}}{\overline{P_2\,R}}$$

Reemplazando, tenemos:

$$r = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

Es decir:

$$r = \frac{x - x_1}{x_2 - x} \qquad \text{(Ecuación 2)}$$

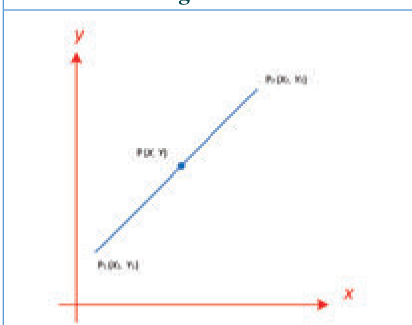
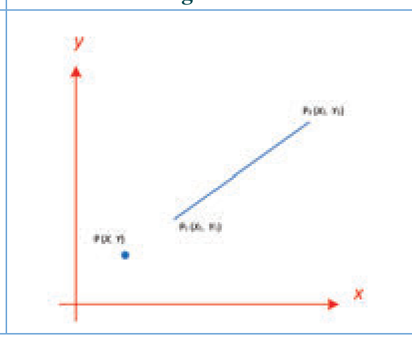
O

$$r = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

Para determinar las coordenadas del punto de división dados los extremos y la razón, despejando tenemos:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} \; ; \quad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r} \qquad \text{(Ecuación 3)}$$

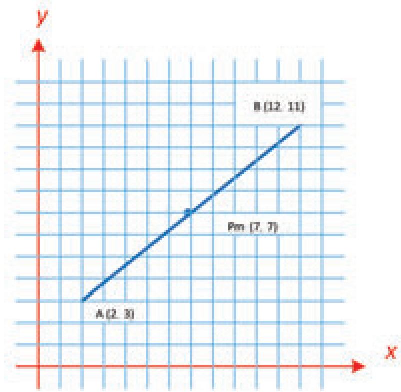
La razón es positiva cuando *P(x, y)* está en el segmento $P_1P_2$ (figura 10). La razón es negativa cuando *P(x, y)* está fuera del segmento $P_1P_2$ (figura 11).

| Figura 10 | Figura 11 |
|---|---|
|   |   |

## Ejercicios resueltos

**ER1.** Determine la razón a la que el punto *Pm* (punto medio), divide al segmento de recta *AB* de la figura adjunta.

**Figura 12**




## Solución

Reemplazamos los datos en la ecuación 2:

$$r = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$$

Tenemos:

$$r = \frac{7 - 2}{12 - 7}$$

De donde: *r=1*

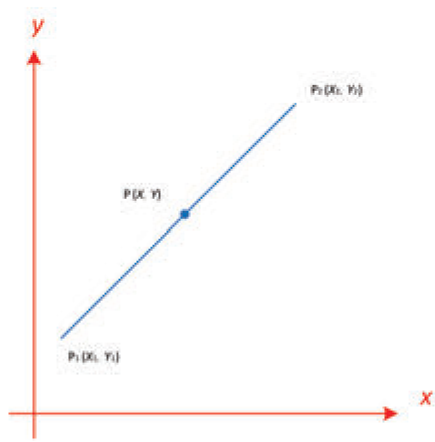
Se puede resolver también con las ordenadas de los puntos dados para verificar el resultado. La razón en la que un punto medio de un segmento de recta divide dicho segmento es *1*.

**ER2.** Determinar las coordenadas del punto medio de un segmento de recta.

## Solución

Sea el segmento de recta $P_1P_2$, cuyos extremos son los puntos $P_1$ y $P_2$; el punto medio está definido por $Pm$ ya que divide al segmento en dos partes iguales como se puede ver en la figura 13. Asimismo sabemos por el ejercicio anterior la razón en la que un punto medio divide un segmento de recta es 1, tenemos:

**Figura 13**




$$r = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$$

Reemplazamos la razón:

$$1 = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$$

Despejamos $x$:

$$x_2 - x = x - x_1$$

$$2x = x_1 + x_2$$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

De la misma manera procedemos para determinar la ordenada del punto medio.

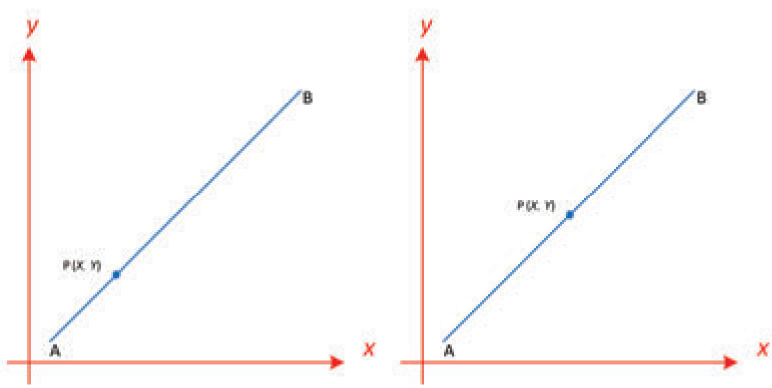
Coordenada del punto medio de un segmento de recta dado:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad ; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$ (Ecuación 4)

## Ejercicios propuestos

**EP1.** Estime la razón a la que el punto $P$ está dividiendo el segmento de recta $AB$ en los diferentes casos:

**Figura 14**



**EP2.** Cuál es la razón en la que el punto *P(-5,-3)* divide al segmento de recta cuyos extremos son los puntos $P_1(-3,-1)$ y $P_2(2,4)$.

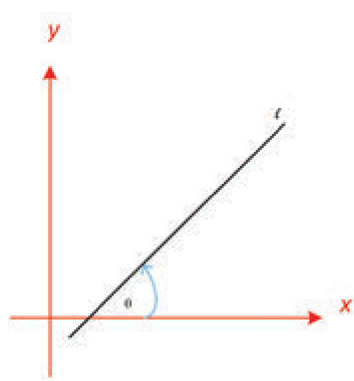
## 1.4 Pendiente de una recta

Es muy frecuente escuchar entre los alumnos: "La pendiente de esa recta es 45°". Por tal motivo se anotan definiciones básicas para aclarar los conceptos.

### *1.4.1 Ángulo de inclinación de una recta*

Se conoce como ángulo de inclinación de una recta al ángulo que forma dicha recta con el eje "*x*" positivo (eje de las abscisas). El ángulo de inclinación de la recta se mide desde el eje "*x*" positivo girando en sentido anti horario. Generalmente se representa con la octava letra minúscula del alfabeto griego theta (θ).

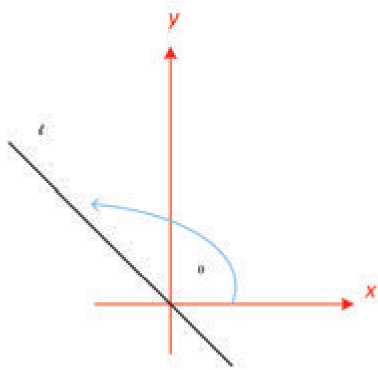
**Figura 15**




### Ejercicios resueltos

**ER1.** Estime el valor del ángulo de inclinación de la recta *l* del gráfico propuesto a continuación:

Figura 16



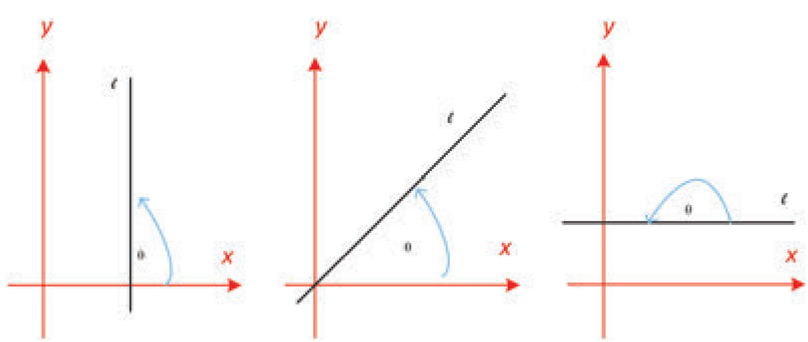

## Solución

Como es una estimación de acuerdo al gráfico el ángulo de inclinación podría ser de 135°.

## Ejercicios propuestos

**EP1.** Estime el valor del ángulo de inclinación de la recta *l* de los gráficos propuestos a continuación:

Figura 17



## 1.4.2 *Pendiente de una recta*

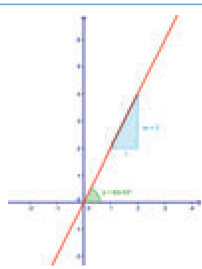
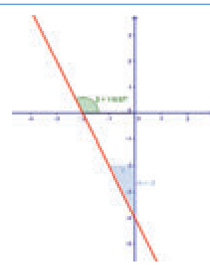
La pendiente de una recta se define como la tangente del ángulo de inclinación de dicha recta, se representa con la letra *m*.

$m=tan\ (\theta)$ (Ecuación 5.)

### Ejercicios resueltos

**ER1.** Determinar el ángulo de inclinación de una recta en los siguientes casos:

| **Si** $m=2$ | **Si** $m=-2$ |
|---|---|
| Si $m=tan(\theta)$<br>Despejamos $\theta$<br>$\theta$=arctan (m)<br>$\theta$=arctan (2)<br>$\theta$=63,43° | Si $m=tan\ (\theta)$<br>Despejamos $\theta$<br>$\theta$=arctan (m)<br>$\theta$=arctan (*-2)*<br>$\theta$=*-63,43°*<br><br>Como el valor del ángulo es negativo estamos obteniendo el ángulo que forma la recta con el eje *x* positivo pero medido en sentido horario, para obtener el ángulo de inclinación procedemos a restar de 180° el ángulo obtenido sin tomar en cuenta su signo, es decir:<br>$\theta$=180°-63,43°<br>$\theta$=116,57° |

| Resolución mediante el software libre "Geo Gebra" | |
|---|---|
|  |  |

## EJERCICIOS PROPUESTOS

**EP1.** ¿Cuál es la pendiente de una recta cuyo ángulo de inclinación es de 45°?

**EP2.** Grafique rectas con las siguientes condiciones de pendiente:

*m* positiva

*m* negativa

$m=0$

$m=\infty$

### 1.4.3 Pendiente de una recta que pasa por dos puntos

Sea $l$ la recta que pasa por dos puntos $P_1$ y $P_2$, su pendiente se deduce de la siguiente forma:

Si $m=tan(\theta)$

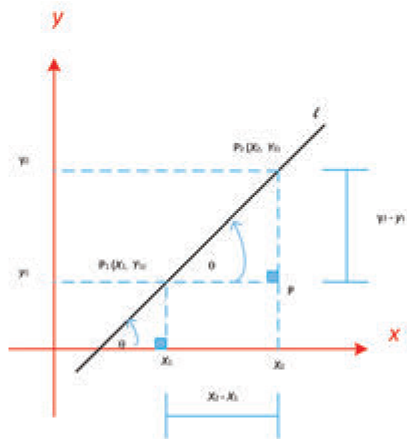
En el triángulo rectángulo $P_1PP_2$ de la figura 18, la razón trigonométrica de función tangente es:

$$\tan(\theta) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Por lo tanto:

$$\mathrm{m} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad \text{(Ecuación 6)}$$

Figura 18




## Ejercicios resueltos

**ER1.** Determine la pendiente y el ángulo de inclinación del segmento de recta *AB* de la figura 19.

## Solución

Determinamos la pendiente del segmento de recta:

$$m_{\overline{AB}} = \frac{7-0}{0-6}$$

$$m_{\overline{AB}} = -\frac{7}{6}$$

El ángulo de inclinación es:

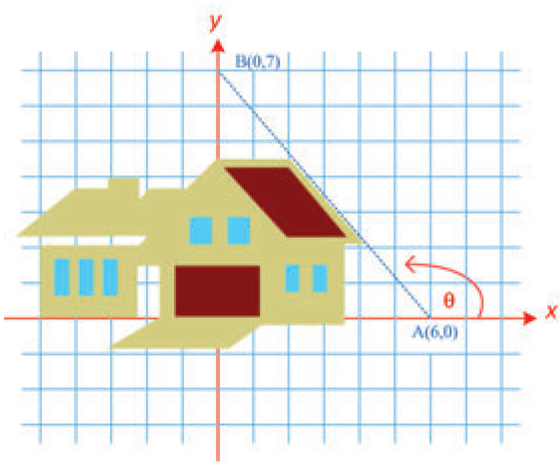
$$\theta = arctan\left(-\frac{7}{6}\right)$$

$$\theta = -49{,}4°$$

Es decir:

$\theta = 130{,}6°$

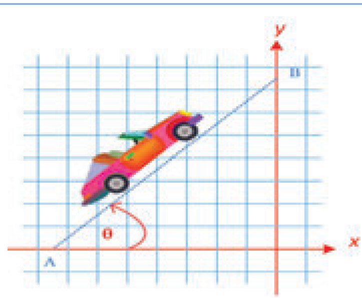
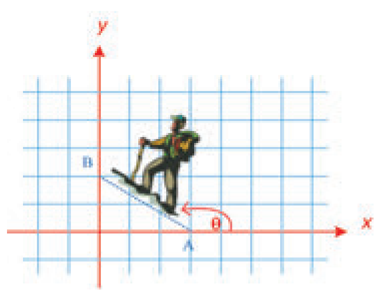
**Figura 19**




## *EJERCICIOS PROPUESTOS*

**EP1.** Determinar la pendiente y el ángulo de inclinación en los siguientes casos (considerar a cada división como la unidad):

**Figura 20**

| a) | b) |
|---|---|
|   |   |

## 1.5 Ángulo entre dos rectas

En la figura 21 podemos observar que:

El ángulo $\propto_1$ es igual al ángulo *C* del triángulo *ABC*, por ser opuestos por el vértice. Asimismo: $\theta_1 = \propto_1 + \theta_2$ ya que un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de dos ángulos interiores opuestos.

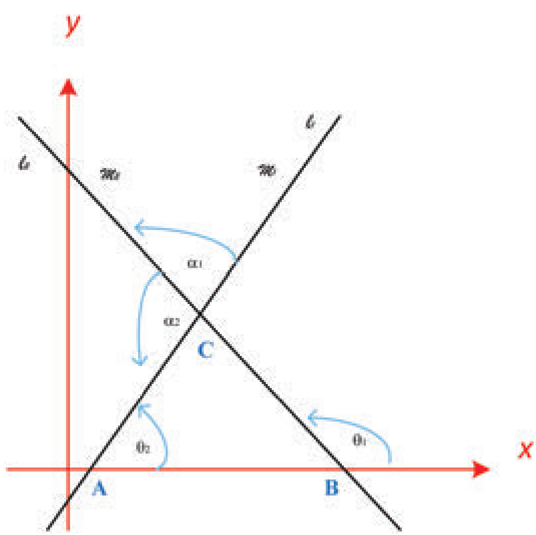
Despejando $\propto_1$, tenemos:

$\propto_{1=}\ \theta_1 - \theta_2$

Aplicando tangente a ambos lados tenemos:

$tan \propto_1 = tan(\theta_1 - \theta_2)$

**Figura 21**




Por identidades trigonométricas de diferencias de ángulos tenemos:

$$\tan(\propto_1) = \frac{\tan(\theta_1) - \tan(\theta_2)}{1 + \tan(\theta_1)\tan(\theta_2)}$$

Por definición sabemos que:

$m = tan\ (\theta)$

Del gráfico podemos observar que:

$m_2 = tan(\theta_1)$ *y* $m_1 = tan(\theta_2)$

Por lo tanto:

$$\tan(\propto_1) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$

O

$$\tan(\propto_1) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

El ángulo entre dos rectas está determinado por:

$$\propto_1 = arc\ tan\left(\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right)$$

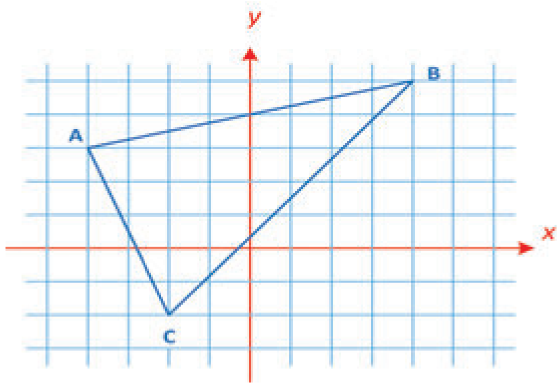
(Ecuación 7)

Para calcular $\propto_2$, bastaría con calcular el suplemento de $\propto_1$.

## Ejercicios resueltos

**ER1.** Si las coordenadas de los vértices del triángulo de la figura son ***A****(-4; 3)*, ***B***(4; 5) y ***C****(-2; -2)*. Determine los ángulos interiores de dicho triángulo.

Figura 22

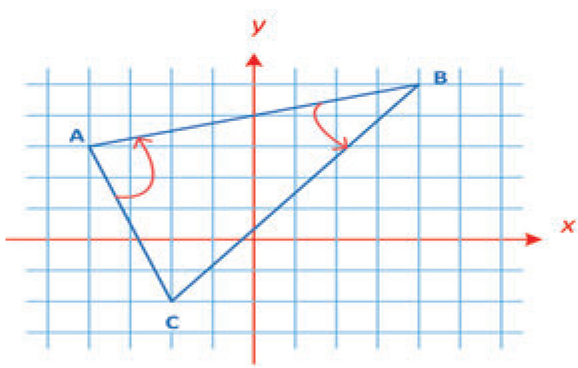



## Solución

Como la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°, bastaría con obtener la medida angular de dos de dichos ángulos, en este caso vamos a determinar la medida del ángulo *A* y del ángulo *B*. Para lo cual tomamos las siguientes consideraciones importantes:

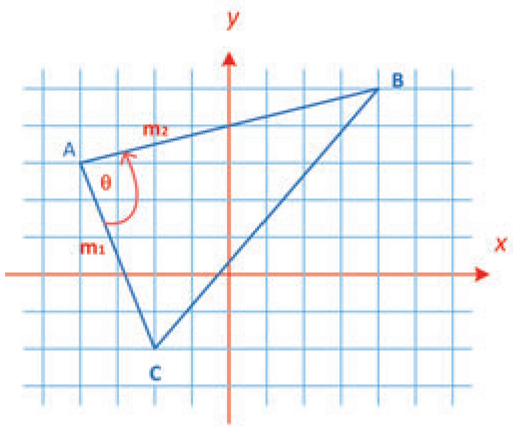
Graficamos en sentido contrario a las manecillas del reloj los ángulos a calcularse

Figura 23



Para calcular la medida angular del ángulo del vértice A (θ), consideramos que el segmento de recta *AB* tiene a $m_1$ como pendiente por ser de donde parte la fecha que indica el ángulo, y el segmento de recta *AB* tiene a $m_2$ como pendiente por ser a donde llega la flecha, como se muestra en la figura adjunta:

**Figura 24**




Entonces, sabemos las coordenadas de los puntos, procedemos a obtener las pendientes de los segmentos de recta: ***A****(-4; 3)*, ***B****(4; 5) y* ***C****(-2; -2)*

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_1 = \frac{-2 - 3}{-2 + 4}$$

$$m_1 = \frac{-5}{2}$$

De la misma manera:

$$\mathrm{m}_2 = \frac{1}{4}$$

Por lo tanto el ángulo se obtiene:

$$\theta = arc\ tan\left(\frac{\frac{1}{4}+\frac{5}{2}}{1+\left(-\frac{5}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)}\right)$$

$$\theta = arc\ tan\left(\frac{22}{3}\right)$$

θ=*82,23°*

Con similar procedimiento para calcular β:

$$m_1 = \frac{1}{4}$$

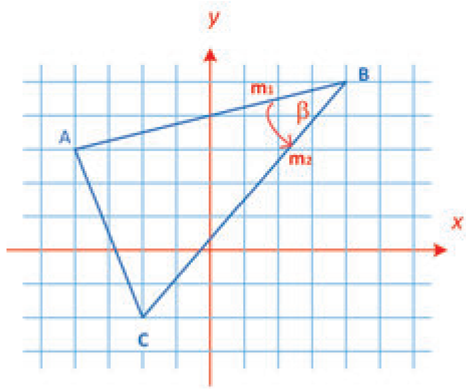
$$m_2 = \frac{7}{6}$$

$$\beta = arc\ tan\left(\frac{\frac{7}{6}-\frac{1}{4}}{1+\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{7}{6}\right)}\right)$$

$$\beta = arc\ tan\left(\frac{22}{31}\right)$$

β=*35,36°*

Figura 25



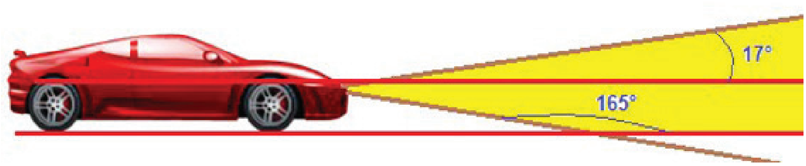

Con lo que la medida angular correspondiente al ángulo del vértice *C* sería de *62,4°*.

**ER2.** Encontrar el ángulo de proyección de los faros de un automóvil cuyo haz de luz está formado por dos rectas con inclinaciones con respecto a la calzada de *17°* y *165°* respectivamente.

## Solución

Para empezar hay que determinar la ubicación de las rectas que definen el haz de luz y sus respectivas inclinaciones con el eje horizontal de la calzada que sería el eje *x* (de color rojo) de nuestro sistema cartesiano. Se puede observar en la figura 26 los datos mencionados y el ángulo final a determinar.

Figura 26



Se procede a convertir estos ángulos en pendientes para luego aplicar la fórmula y determinar el ángulo de proyección.

$m_1=\tan(\theta_1)=\tan(17°)=0{,}306$

$m_2=\tan(\theta_2)=\tan(165°)=-0{,}268$

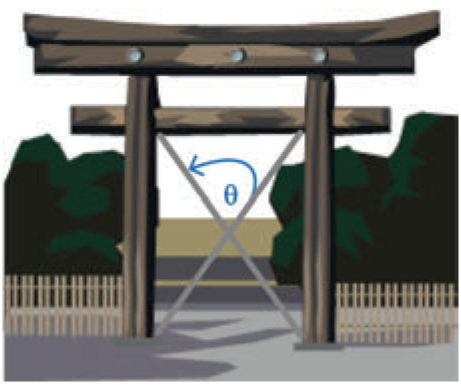
$$\tan(\alpha)=\frac{m1-m2}{1+m1\cdot m2}=\frac{0{,}306-(-0{,}268)}{1+0{,}306(-0{,}268)}=\frac{0{,}574}{0{,}918}=0{,}625$$

$$\alpha=\tan^{-1}(0{,}625)=32{,}02°$$

## Ejercicios propuestos

**EP1.** Establecer el sistema de referencia de acuerdo a su criterio y determine el ángulo indicado en la figura 27.

**Figura 27**




## 1.6 La recta

Proviene del término latín "*rectus*" (sin ángulos ni curvas), y es el lugar geométrico de los puntos del plano de tal manera que si tomamos dos de estos el valor de la pendiente es siempre constante.

## 1.6.1 Ecuación de la recta

Según las condiciones dadas podemos determinar y clasificar la ecuación de una recta de algunas formas:

### 1.6.1.1 Ecuación general

La ecuación general de la recta se expresa de la siguiente forma:

$$Ax+By+C=0 \qquad \text{(Ecuación 8)}$$

Donde: $A$, $B$ y $C$ son constantes, la pendiente de la recta está definida por: $m=-\frac{A}{B}$ y cuyo intercepto con el eje "$y$" es: $-\frac{C}{B}$

### 1.6.1.2 Ecuación punto-pendiente

Dado el punto $P_1(x_1, y_1)$ y la pendiente $m$, se logra determinar la ecuación de la recta de la siguiente manera:

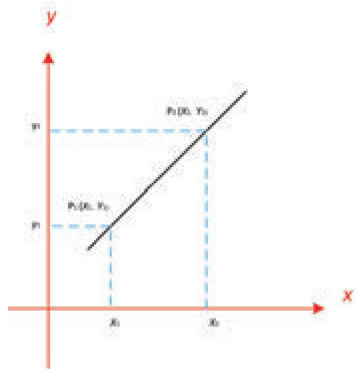
$$y-y_1=m(x-x_1) \qquad \text{(Ecuación 9)}$$

### 1.6.1.3 Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Dados los $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, se puede determinar la ecuación de la recta usando la siguiente fórmula:

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \qquad \text{(Ecuación 10)}$$

Figura 28




### *1.6.1.4 Ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada al origen*

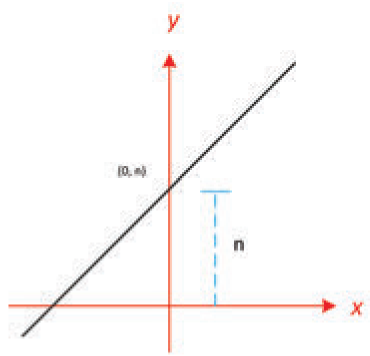
Se representa de la siguiente manera:

$$y=mx+n \qquad \text{(Ecuación 11)}$$

Donde:

$m$ es la pendiente de la recta
$n$ es el intercepto con el eje "$y$" (ordenada al origen)

Figura 29



### *1.6.1.5 Ecuación de la recta en su forma simétrica*

Una recta cuyas intersecciones con los ejes "*x*" y "*y*" son *a* y *b* siendo $a \neq 0$ y $b \neq 0$

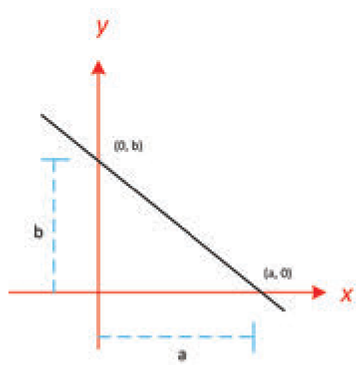
Está representada por:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad \text{(Ecuación 12)}$$

Donde:

*a* representa el intercepto con el eje "*x*" (abscisa al origen)
*b* representa el intercepto con el eje "*y*" (ordenada al origen)

**Figura 30**




## EJERCICIOS RESUELTOS

**ER1.** Determinar la ecuación de la recta propuesta en el gráfico 31:

## SOLUCIÓN

En vista de que en el gráfico hay las intersecciones con los ejes puedo usar:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

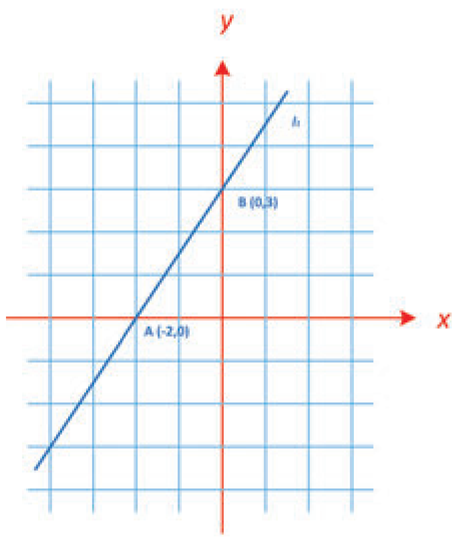
De donde:

$$\frac{x}{-2}+\frac{y}{3}=1$$

Resolviendo, tenemos la ecuación de la recta:

$$3x-2y+6=0$$

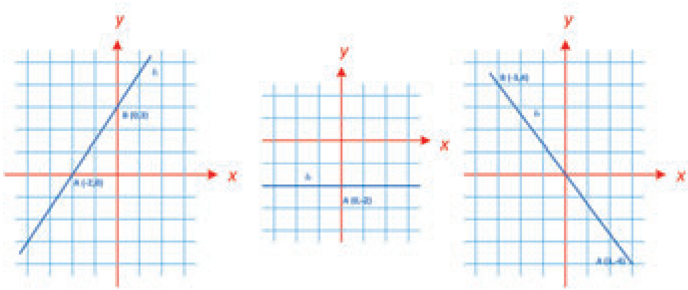
**Figura 31**




## Ejercicios propuestos

**EP1.** Determine la ecuación de las siguientes rectas:

Figura 32




## 1.7 Condiciones de paralelismo y perpendicularidad de rectas

### *1.7.1 Rectas paralelas*

Dos rectas son paralelas si el ángulo que forman dichas rectas es de 0° o de 180°, por lo tanto:

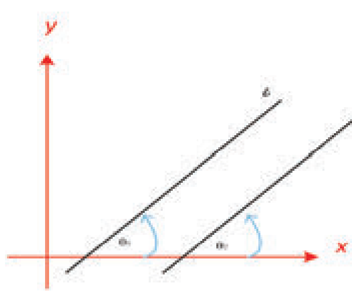
$$\tan(0°) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

De donde:

$m_1 = m_2$

En consecuencia sus ángulos de inclinación son iguales

Figura 33



### *1.7.2 Rectas perpendiculares*

Dos rectas son perpendiculares si el ángulo que forman dichas rectas es de 90°, como la tangente de 90° no está definida, la reemplazamos por su recíproca de la siguiente manera:

$$\frac{1}{ctg(\alpha)} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

$$ctg(\alpha) = \frac{1 + m_1 m_2}{m_2 - m_1}$$

$$ctg(90^\circ\ ) = \frac{1 + m_1 m_2}{m_2 - m_1}$$

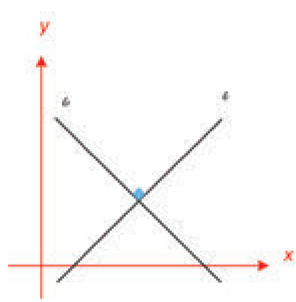
$$0 = \frac{1 + m_1 m_2}{m_2 - m_1}$$

$$m_1\ m_2 = -1$$

De donde

$$m_1 = -\frac{1}{m_2} \qquad o \qquad m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

**Figura 34**



## EJERCICIOS RESUELTOS

**ER1.** Determinar la ecuación de una recta que pasa por ***A****(2, 3)* y es paralela a la recta que pasa por ***B****(-3, 5)* y ***C****(-1,-4)*.

## SOLUCIÓN

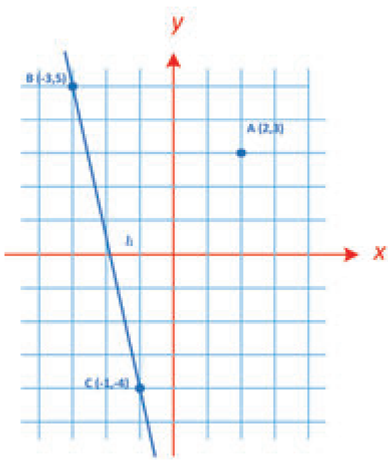
En vista de que la recta que pasa por el punto *A* es paralela a la recta que pasa por los puntos *B* y *C*, las pendientes de las rectas son iguales, procedemos a determinar la pendiente de la recta $l_1$:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_{\overline{BC}} = \frac{-4-5}{-1+3}$$

$$m_{\overline{BC}} = -\frac{9}{2}$$

**Figura 35**



Tenemos el punto ***A***$(2,3)$ y la pendiente $-9/2$, podemos determinar la ecuación de la recta pedida:

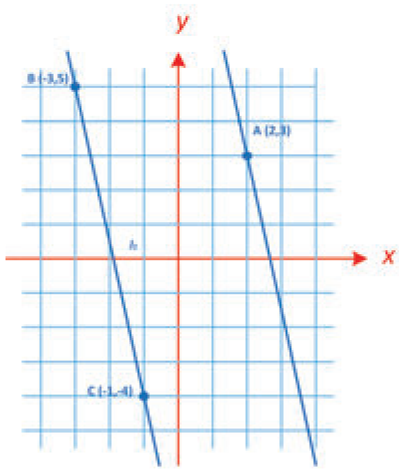
$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-3=-\frac{9}{2}(x-2)$$

$$2y-6=-9x+18$$

$$9x+2y-24=0$$

**Figura 36**




## Ejercicios propuestos

**EP1.** Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto ***A***$(1,7)$, y que es perpendicular a la recta que pasa por ***B***$(-5, 6)$ y ***C***$(7,8)$.

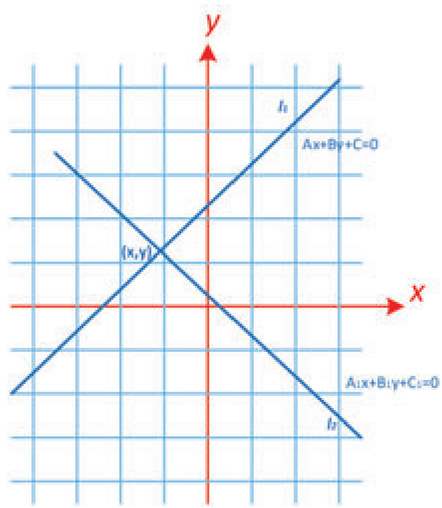
## 1.8 Coordenadas del punto de intersección de dos rectas

La solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas está determinado por las coordenadas *(x, y)* del punto de intersección de las rectas.

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ Ax + By + C = 0 \end{cases}$$

Dicho sistema puede resolverse por cualquiera de los métodos de álgebra.

**Figura 37**




### *Ejercicios resueltos*

**ER1.** Determinar la ecuación de la recta cuya pendiente es $-1/2$ y pasa por la intersección de las rectas $2x-3y+2=0$ y $x+y-4=0$

## Solución

Resolvemos el sistema de ecuaciones por el método de sustitución:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 2 = 0 \\ \ \ x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

Despejamos la variable *x*, de la segunda ecuación:

$$x=-y+4$$

Reemplazamos en la primera:

$$2(-y+4)-3y+2=0$$

Resolvemos:

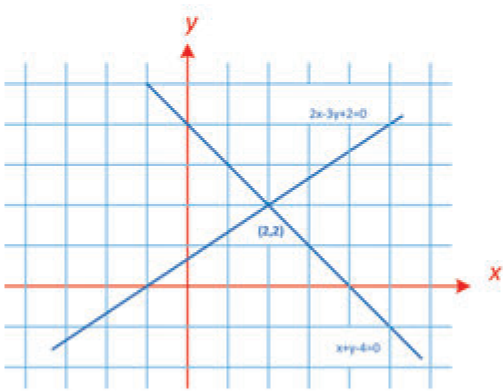
$$-2y+8-3y+2=0$$

$$-5y+10=0$$

$$y=2$$

$$x=2$$

**Figura 38**



Tenemos un punto y tenemos la pendiente, procedemos a calcular la ecuación de la recta

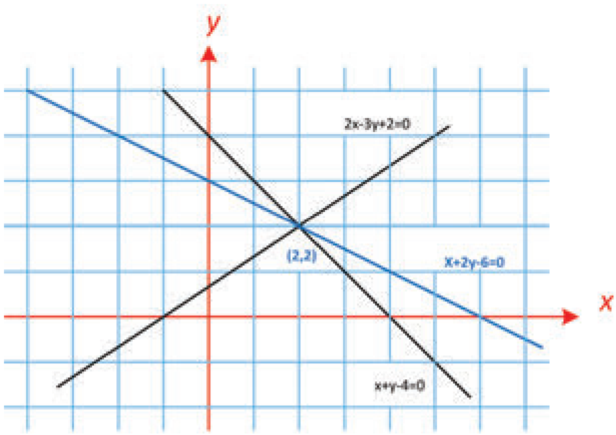
$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-2=-\frac{1}{2}(x-2)$$

$$2y-4=-x+2$$

$$x+2y-6=0$$

**Figura 39**




## EJERCICIOS PROPUESTOS

**EP1.** Determinar la ecuación de la recta perpendicular a la recta $x+2y-6=0$ pasa por la intersección de las rectas $2x-3y+2=0$ y $x+y-4=0$

**EP2.** Determinar la ecuación de la recta paralela a la recta $3x+4y-28=0$ que pasa por la intersección de las rectas $l_1$ y $l_2$, $l_1$ pasa por los puntos **A**$(2,3)$ y **B**$(-2,0)$ y $l_2$ pasa por los puntos **A**$(-1,2)$ y **B**$(0,-3)$.

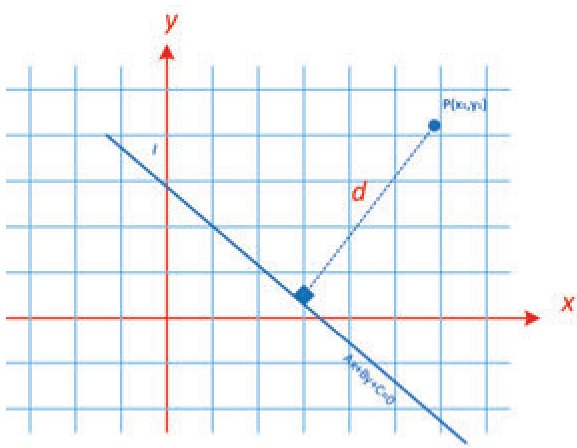
## 1.9 Distancia de un punto a una recta

La distancia del punto $P(x_1,y_1)$ a la recta $Ax+By+C=0$, $B>0$, viene dada por:

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$B>0$$

**Figura 40**




Donde el signo de *"d"* indica que el punto $P(x_1, y_1)$ está por encima o por debajo de la recta *l.*

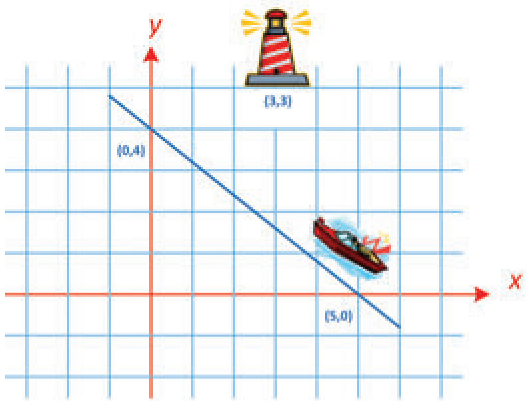
En muchas ocasiones no interesa conocer la posición del punto y la recta, sino simplemente la distancia entre ellas. En este caso, la distancia del punto a la recta se expresa por medio de la fórmula:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad \text{(Ecuación 13)}$$

## Ejercicios resueltos

**ER1.** Un barco navega con una trayectoria representada por la recta de la figura 41, sabiendo que un faro se localiza en la posición establecida ¿Cuál será la distancia más cercana entre el faro y el barco?

**Figura 41**




## Solución

La distancia más cercana de un punto a una recta es la perpendicular que los une, para lo cual usamos:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Necesitamos la ecuación de la recta, tenemos dos puntos con los que podemos determinar dicha ecuación:

$$m = -\frac{4}{5}$$

$$y - 4 = -\frac{4}{5}(x - 0)$$

*4x+5y-20=0*

Una vez que tenemos la ecuación y el punto, procedemos a determinar la menor distancia:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$d = \frac{|4(3) + 5(5) - 20|}{\sqrt{4^2 + 5^2}}$$

$$d = \frac{17}{\sqrt{41}}u$$

## Ejercicios propuestos

**EP1.** Determinar la distancia más corta del punto ***A*** *(-3,4)* a la recta

*5x-3y+2=0*

## 1.10 Traslación de ejes

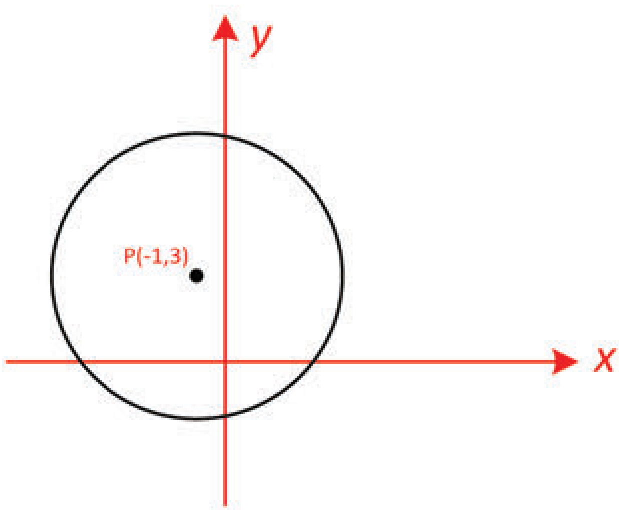
La traslación de ejes se utiliza para simplificar la expresión de una función, es decir cambiar su presentación a otra más sencilla. Se realiza la traslación de los ejes originales a otro lugar de tal manera que la expresión de la función se reduzca. Por ejemplo como se verá más adelante, la ecuación de una circunferencia de radio *r* en donde su centro esté desplazado del origen, tendría la expresión:

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$; mientras que si su centro estaría en el origen su expresión sería: $x^2+y^2=r^2$ debido a que los valores de $h$ y $k$ que representan a la coordenada del centro, son cero. Para llegar a esta expresión realizamos la operación de traslación de ejes a la posición de unos nuevos ejes *x'*, y *y'*, que se situarían en el centro de la circunferencia.

Para entender este proceso fijémonos en la gráfica en donde tenemos una circunferencia cuyo centro se encuentra en las coordenadas *(-1,3)* y su radio es *5*; sus ecuaciones y gráfica serían:

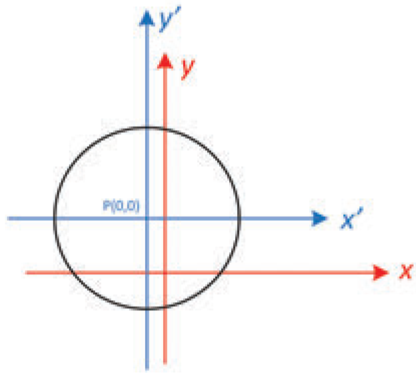
Ecuación de la circunferencia: $(x+1)^2+(y-3)^2=25$

**Figura 42**




En la ecuación de una circunferencia cuyo centro se encuentra en el origen, los valores *(h,k)* son *(0,0)*; para este caso como el centro se encuentra desplazado al punto *(-1,3)*, lo que se haría es trasladar los ejes originales al centro de la circunferencia y así la expresión se reduciría a una forma más sencilla.

Figura 43

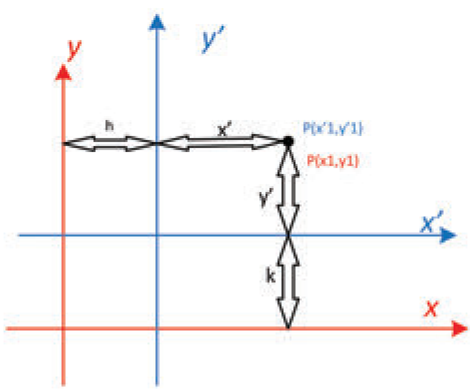



La nueva ecuación de la circunferencia ahora con respecto a los nuevos ejes $x'$, $y'$ de color azul sería: $x'^2+y'^2=25$

## 1.10.1 Fórmulas para la traslación de ejes

Como se va a desplazar el sistema de ejes original a una nueva ubicación dependiendo de la función; este desplazamiento se lo hace de la siguiente manera (observar el gráfico).

Figura 44



El punto de color negro que en el sistema original de ejes de color rojo tiene coordenadas $P(x_1,y_1)$, trasladándolo al sistema de ejes de color celeste tiene coordenadas $P(x'_1, y'_1)$; pero si vemos las coordenadas del sistema original medidas en base al nuevo sistema tenemos que:

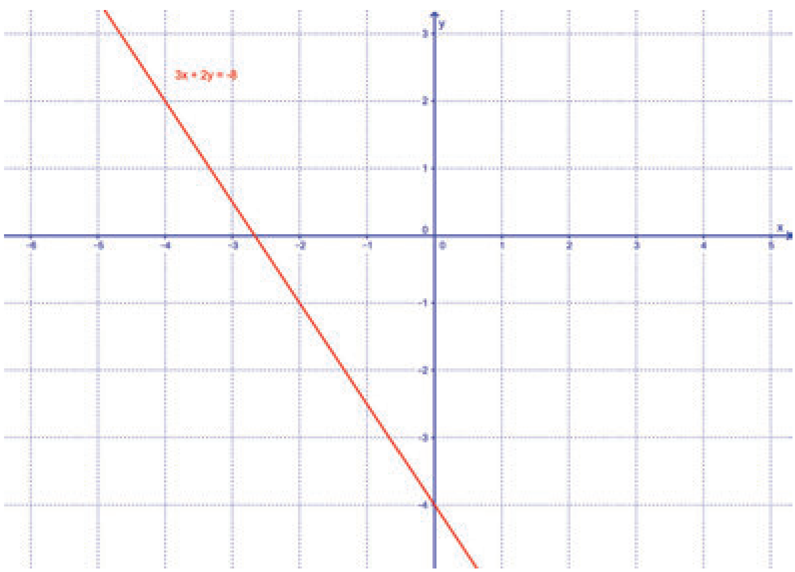
$$x=x'+h \qquad\qquad y=y'+k$$

**ER1.** Dada la recta $3x+2y+8=0$ hacer traslación de ejes de tal manera que esta pase por el origen de los nuevos ejes.

## SOLUCIÓN

Antes que nada vamos a dibujar esta recta en GeoGebra

**Figura 45**



De acuerdo al gráfico podemos ver que la recta dada no pasa por el origen, está desplazada cuatro unidades hacia abajo, eso podemos darnos cuenta al despejar $y$ de la ecuación dada:

$$3x+2y+8=0$$
$$2y=-3x-8$$

$$y=\frac{-3x}{2}-\frac{8}{2}$$

$$y=-\frac{3x}{2}-4$$

De acuerdo a esta expresión la recta se encuentra desplazada cuatro unidades hacia abajo en el eje de las ordenadas, pero de acuerdo al gráfico también tiene un desplazamiento hacia la izquierda de *8/3* unidades. Podemos realizar el desplazamiento de los ejes de coordenadas a cualquiera de estos valores.

Desplazamiento del eje de coordenadas hacia abajo: para esto el valor de *h* debe ser cero ya que no se va a desplazar en *x* sino en *y*:

$$3x+2y+8=0$$
$$3(x'+h)+2(y'+k)+8=0$$
$$3x'+3h++2y'+2k+8=0$$
$$3x'+2y'+3h+2k+8=0$$

Como no se va a desplazar en *x* sino en *y* tenemos *h=0*

$$2k+8=0$$
$$k=-4$$

Es decir se tiene que desplazar los ejes cuatro unidades hacia abajo.

Desplazamiento del eje de coordenadas hacia la izquierda: para esto el valor de *k* debe ser cero ya que no voy a desplazarme en el sentido *y*.

$$3x+2y+8=0$$
$$3(x'+h)+2(y'+k)+8=0$$
$$3x'+3h++2y'+2k+8=0$$
$$3x'+2y'+3h+2k+8=0$$

Como no se va a desplazar en $y$ sino en $x$ tenemos $k=0$

$$3h+8=0$$
$$h=-8/3=-2{,}67$$

Es decir se tiene que desplazar $-2{,}67$ unidades hacia la izquierda

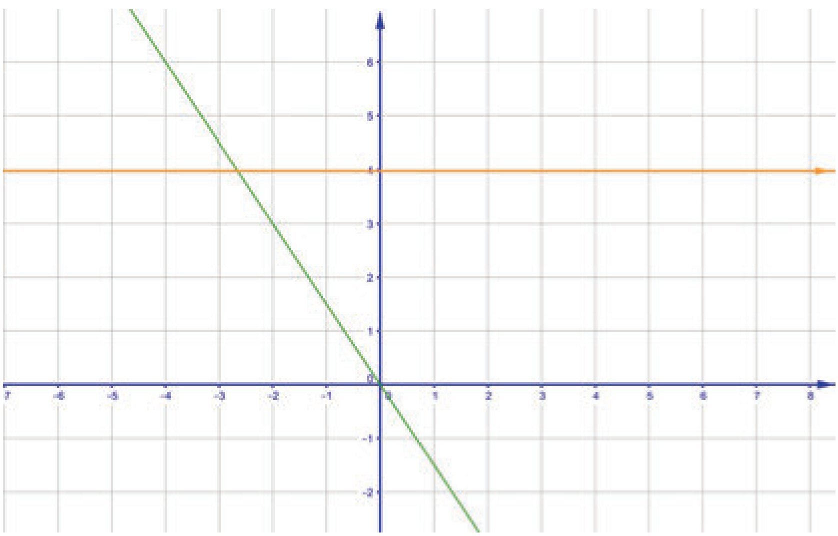
Así la nueva ecuación queda de la siguiente manera:

$$3x'+2y'=0$$

$$y' = -\frac{3x'}{2}$$

A continuación se presenta la gráfica de desplazamiento en donde el eje en color naranja es el original y el de color azul es eje de desplazamiento.

**Figura 46**



## Actividades complementarias de la subunidad

### *Preguntas de opción múltiple*

1. Indique la/s respuestas correctas:
   El ángulo de inclinación de una recta es:
   a. La pendiente de dicha recta
   b. El ángulo que forma dicha recta con el eje $x$ positivo
   c. El ángulo que forma dicha recta con el eje $y$ positivo
   d. El resultado de realizar arco tangente del valor de la pendiente.

2. El punto medio de un segmento divide al segmento en razón:
   a. 2
   b. 1/2
   c. 1
   d. 3

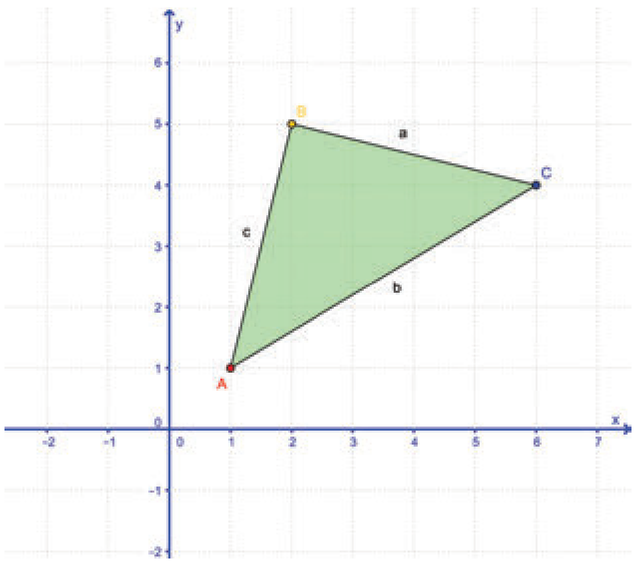
3. Sea $2x\text{-}3y+4=0$ la ecuación de una recta en su forma general, entonces la pendiente es:
   a. -2/3
   b. 2/3
   c. -3
   d. 2

4. Dos rectas son paralelas cuando:
   a. Tiene las pendientes inversas
   b. Tienen el mismo ángulo de inclinación
   c. Tienen la misma pendiente
   d. Tienen diferentes pendientes

5. La pendiente de una recta paralela al eje "$x$" es:
   a. Cero
   b. No existe
   c. No se puede determinar
   d. Mayor que cero

6. Dos rectas son perpendiculares cuando:
   a. Sus pendientes son las mismas
   b. Sus pendientes son inversas
   c. Sus pendientes son diferentes
   d. Sus ángulos de inclinación son iguales

**Figura 47**

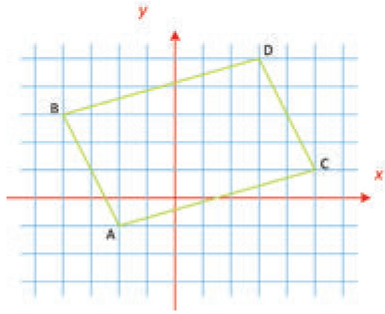



**AC1.** Los vértices de un triángulo son los puntos de la figura 47. Indicar:

- ¿Qué clase de triángulo es? Justifique su respuesta.
- El área del triángulo.

**AC2.** En el paralelogramo de la figura 48. Determinar las pendientes de las rectas que forman sus lados así como también las ecuaciones de dichas rectas y hallar los ángulos entre las diagonales. Tome a la unidad como la escala del gráfico.

Figura 48

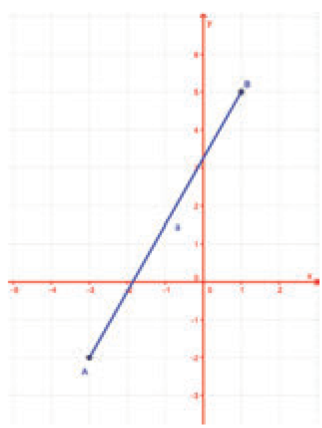



**AC3.** Una recta con un ángulo de inclinación de 45° pasa por el origen y por los puntos *A* y *B*. Si la ordenada del punto *A* es 5 y la abscisa del punto *B* es -4, determine las coordenadas de los puntos *A* y *B*.

**AC4.** El extremo de un segmento de recta es el punto ***A****(2, -4)*. Si la ordenada del otro extremo es 3/2 de su abscisa, determine las coordenadas del punto, si la longitud del segmento es de $2\sqrt{26}$ unidades.

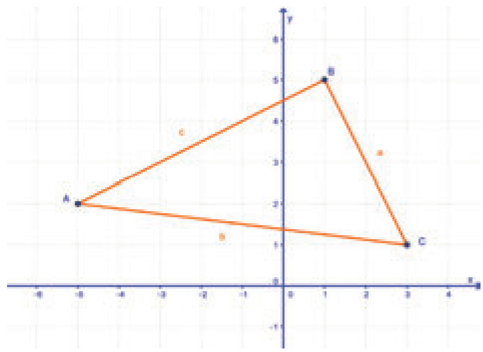
**AC5.** Determinar las coordenadas de trisección y el punto medio del segmento *AB* de la figura 49.

Figura 49



**AC6.** Los vértices de un triángulo son los puntos *A*, *B* y *C* de la figura 50.

**Figura 50**

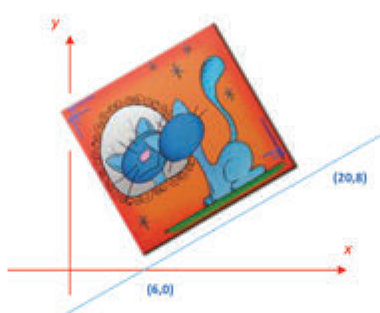


Trazar las medianas y determinar el punto de intersección de las mismas usando la propiedad del baricentro.

Trazar las alturas y determinar el ortocentro.

**AC7.** ¿Qué ángulo tengo que mover al cuadro de la figura 51 para enderezarlo?

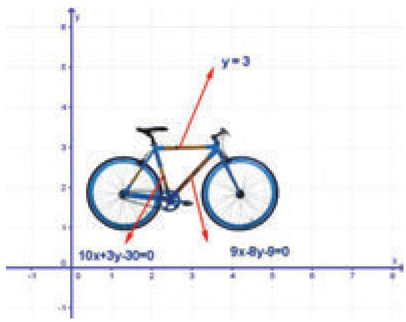
**Figura 51**




**AC8.** El bastidor de la bicicleta está formado por tubos que según la ilustración 52 obedecen a las ecuaciones indicadas. Determinar:

- Pendientes de dichas ecuaciones.
- Ángulos internos que forman los tubos.

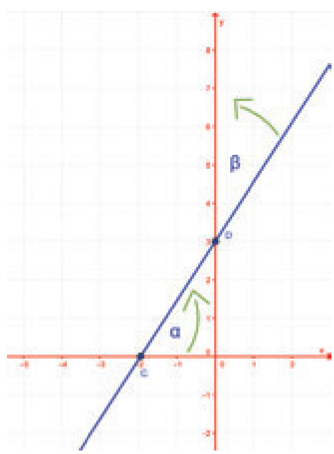
**Figura 52**




**AC9.** a) ¿Cuál es la ecuación de la recta que es perpendicular al eje de las abscisas y que pasa por ***A****(-10,3)*? b) ¿Cuál es la ecuación de una recta horizontal que pasa por el punto ***B****(4, -7)*?

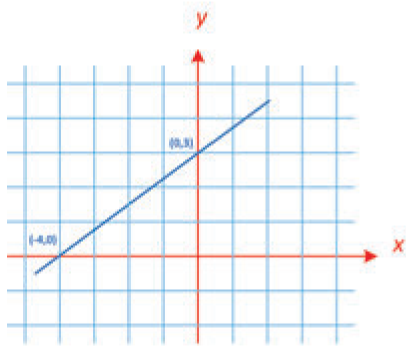
**AC10.** Determinar los ángulos $\alpha$ y $\beta$ que la recta que pasa por $C$ y $D$ forma con los ejes coordenados de la figura 53.

**Figura 53**



**AC11.** Determinar la ecuación de la recta graficada en la ilustración 54, además determine el área que la recta forma con los ejes coordenados.

**Figura 54**




**AC12.** Tenemos los puntos ***A***$(-3; 1)$, ***B***$(5; -3)$, ***C***$(-5; 3)$, ***D***$(0; 1/2)$ y ***E***$(4; -3)$ Indicar cuáles de estos puntos son colineales, y justificar las respuestas.

**AC13.** Determinar la ecuación de la recta que pasa por la intersección de las rectas, $x+2y-8=0$, $5x - 6y+ 2\ 1= 0$, y es paralela a la recta que pasa por los puntos ***A***$(3, 6)$ y ***B***$(6, 1)$.

**AC14.** Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento *BC*. Esta recta pasa por el punto *A*. ¿Por qué? Demostrar analíticamente.

**AC15.** Determine las ecuaciones de las rectas que son perpendiculares a la recta:

$3x-4\ y+18= 0$, si la distancia del punto ***A***$(2,6)$ a estas rectas es igual a *5* unidades.

**AC16.** Se conocen las ecuaciones de dos lados de un terreno en forma de rectángulo $x-3y+16=0$, $3x+y+8=0$ y uno de sus vértices ***O***$(-3,1)$. Determinar el área del terreno.

Figura 55

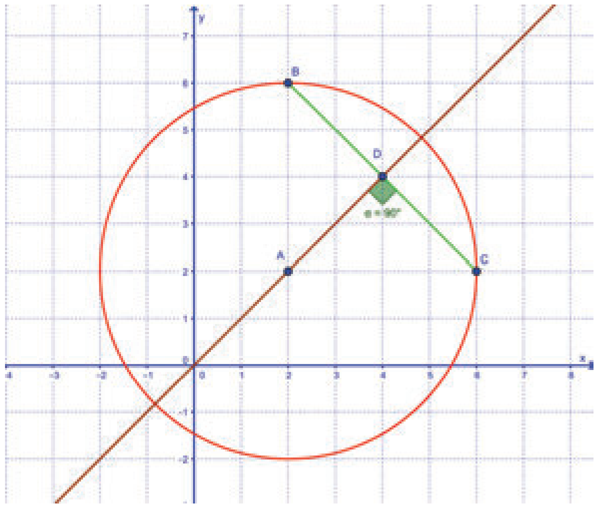
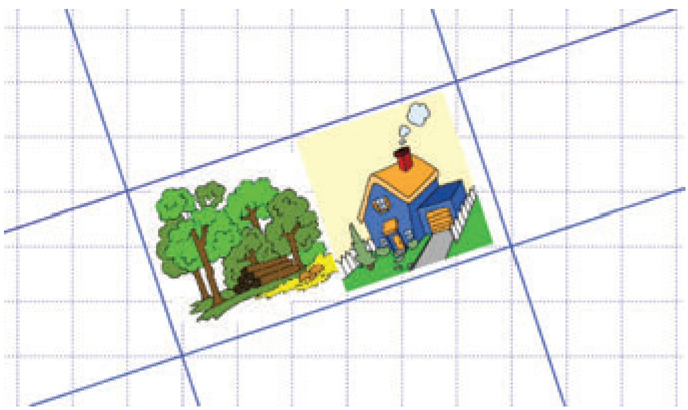
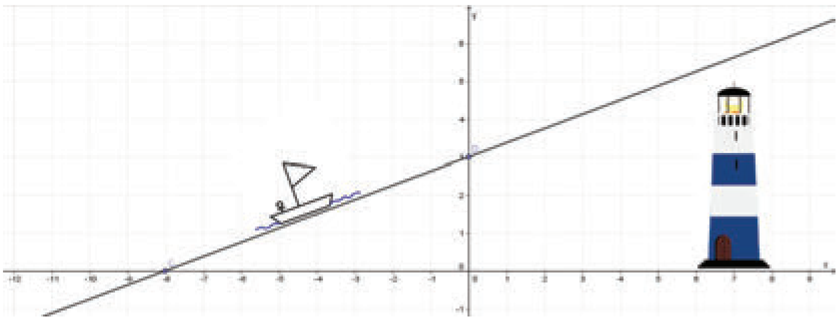



*Figura 56*



**AC17.** Un barco navega con una trayectoria representada por la recta representada en la figura 57, sabiendo que un faro se localiza en la posición ***B****(7,0)* ¿Qué distancia tendrá que navegar el barco para estar en la posición más cercana al faro, si su localización actual es ***A****(-4, 3/2)*?

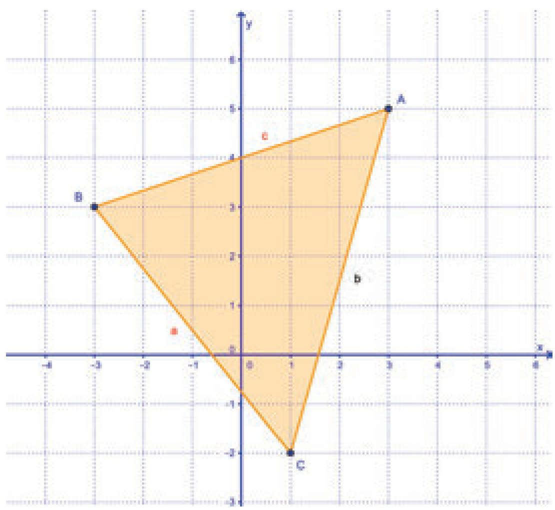
Figura 57



**AC18.** Dado el triángulo de la figura 58. Determinar:

- La ecuación de la altura con respecto al lado *AB*
- La ecuación de la mediana del lado *BC*
- El área del triángulo

Figura 58



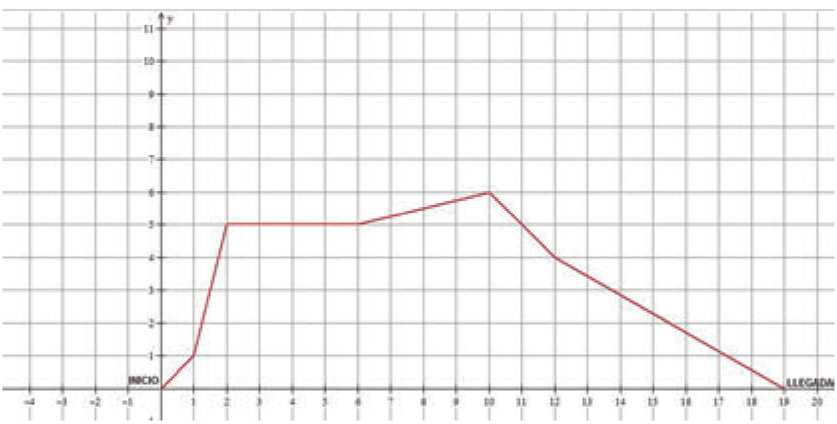
## Ejercicios de aplicación

**EA1.** Encontrar el ángulo de proyección de los faros de un automóvil cuyo haz de luz está formado por dos rectas con inclinaciones con respecto a la calzada de 25° y 155° respectivamente.

**Figura 59**

**EA2.** Un vehículo *4x4* va a realizar el recorrido trazado por el camino de color rojo, determinar la distancia total que hará. Determinar su rapidez media si la escala es de 100 $m$ y el recorrido lo hace en un tiempo de 5 minutos.

**Figura 60**




**EA3.** El refrigerante de un vehículo cuando el motor está frío se encuentra normalmente a 17 °C y llega a una temperatura de 95 °C en funcionamiento del mismo. Convertir estas cantidades a grados Fahren-

heit y colocar estas medidas en un sistema cartesiano donde el eje de las abscisas sea la temperatura en grados Celsius y el eje de las ordenadas sea la temperatura en grados Fahrenheit. La conversión de la temperatura de grados Celsius a Fahrenheit es lineal. Determine el punto medio de la temperatura en las dos escalas.

**EA4.** La altura del montículo de monedas *A* es de es de 5 *cm*, la altura del montículo *E* es de 22 *cm*, la distancia entre los centros de cada montículo es de 2,6 *cm*. Determinar mediante el tema "la división de un segmento de recta en una razón dada" la ubicación de los puntos *B*, *C* y *D*.

**Figura 61**


**EA5.** Si usted escucha que un vehículo está subiendo por una carretera con pendiente del 20% ¿Qué significa este enunciado? Investigar.

**EA6.** Determinar el ángulo de visión horizontal y vertical del parabrisas frontal de un vehículo (colocar el dato de la marca del vehículo) visto desde la posición de un conductor.

**EA7.** En las carreras de fórmula uno existen diferentes tipos de recorridos, algunos son más trabados que otros. El circuito de Shangai presenta el recorrido con la recta más larga de todos los circuitos, cuya longitud es de 1,2 *Km*. Si un medidor de velocidad se encuentra al inicio de la misma y detecta que un vehículo que está haciendo pruebas tiene una velocidad constante de 300 *Km/h*.

- Trazar la gráfica del recorrido versus el tiempo (coloque en las unidades adecuadas).
- Determine la ecuación de la recta. ¿Qué representa su pendiente?

**EA8.** El voltaje que circula por un circuito eléctrico es directamente proporcional a la corriente que circula por él e inversamente proporcional a la resistencia de dicho material, su expresión matemática es $v=I/R$ donde $v$ es el voltaje medido en voltios, $I$ es la intensidad medida en amperios y $R$ es la resistencia medida en ohmios. Esta ley es una función lineal y que pasa por el origen para una amplia gama de materiales. La pendiente de la recta corresponde al valor de la resistencia.

Determinar la ecuación general del comportamiento del material conductor si su comportamiento presenta las siguientes medidas.

**Tabla 1**

| **Voltaje** *(V)* | **Amperaje** *(A)* |
|---|---|
| 10 | 1 |
| 20 | 2 |
| 30 | 3 |
| 40 | 4 |

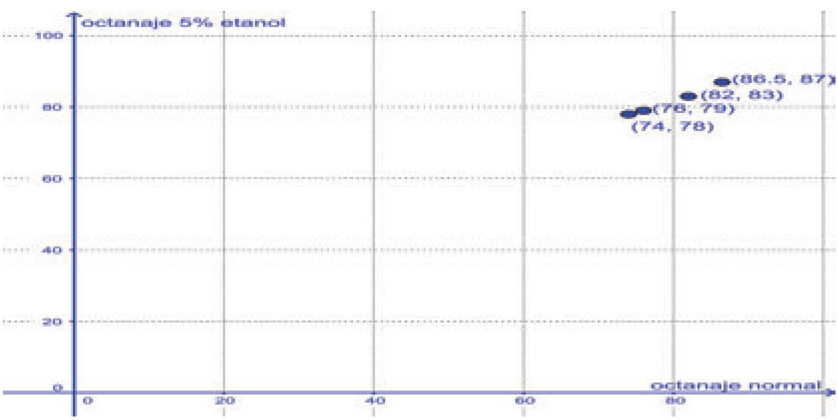
Investigar qué representa la pendiente de la recta generada.

**EA9.** Un tanque de combustible de sección homogénea es llenado por una manguera en forma constante de modo que la altura alcanzada por el combustible aumenta 3 *mm* por cada segundo que transcurre.

Si inicialmente el combustible que había en el tanque llegaba a una altura de 30 *mm*, ¿cuál es la ecuación de la función que determina la altura *(h)* del nivel de combustible después de transcurridos *t* segundos?

**EA10.** El octanaje o número de octanos no es otra cosa que la medida de la cualidad antidetonante que se requiere en el combustible para que este resista o evitar su tendencia ala auto detonación o autoencendido del mismo. A continuación se presenta el resultado de un estudio realizado al colocar 5% de etanol en gasolina extra, el comportamiento del índice antidetonante denominado *IAD* (que tiene que ver con el octanaje) mejora en la forma que muestra la gráfica a continuación. Determinar la ecuación de la misma. La gráfica contrarresta en el eje de las abscisas el octanaje del combustible extra y en las ordenadas el octanaje combustible extra con 5% de etanol. El comportamiento se asemeja a una recta determinar la ecuación de la recta que define a este comportamiento.

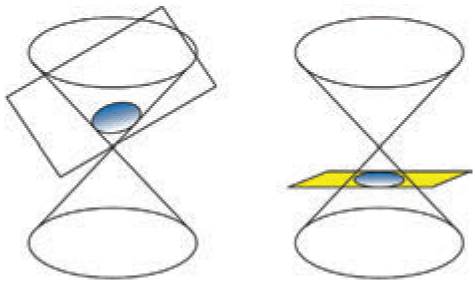
**Figura 62**




## 1.11 Cónicas

La circunferencia, parábola, elipse e hipérbola son llamadas cónicas porque se pueden obtener de tal forma que un plano corte a un cono circular recto doble.

Figura 63



### *1.11.1 La circunferencia*

Es el lugar geométrico que describe un punto que se mueve en el plano de tal manera que su distancia a un punto fijo llamado centro es siempre constante.

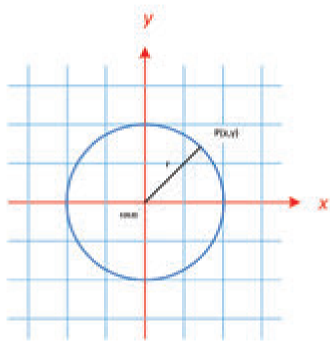
Circunferencia cuyo centro está en el origen:

Por definición:

$$d_{\overline{PC}} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$$

$$d_{\overline{PC}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Figura 64



A la distancia del segmento *PC* se le conoce como radio del círculo y se representa con la letra "*r*"

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

O

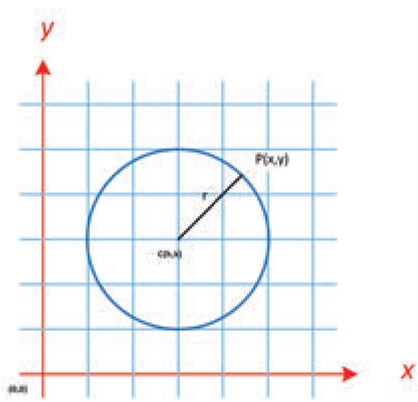
$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \text{(Ecuación 1)}$$

Circunferencia cuyo centro no está en el origen:

$$d_{\overline{PC}} = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$$

$$r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2 \qquad \text{(Ecuación 2)}$$

**Figura 65**




### *1.11.1.1 Forma general de la acuación de la circunferencia*

Desarrollamos la ecuación que está en su forma ordinaria:

$$r^2=(x-h)^2+(y-k)^2$$
$$r^2=x^2-2xh+h^2+y^2-2yk+k^2$$

Con:

$D=-2h$
$E=-2k$
$F=k^2+h^2-r^2$

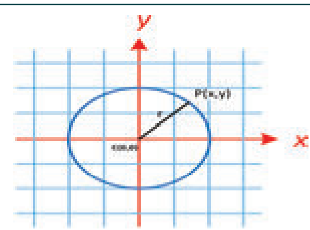
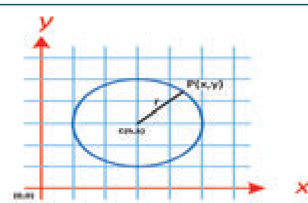
Tenemos:

$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

También es muy frecuente encontrarla así:

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+F=0 \qquad \text{(Ecuación 3)}$$

**Tabla 2**

| ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA | | |
|---|---|---|
| Forma General | $Ax^2+By^2+Cx+Dy+F=0$ | $A = B$ |
| Forma canónica | $r^2=x^2+y^2$ |   |
| Forma ordinaria | $r^2=(x-h)^2+(y-k)^2$ |   |

## EJERCICIOS RESUELTOS

**ER1.** Describa las características de la circunferencia cuya ecuación es: $4=(x-2)^2+(y+1)^2$

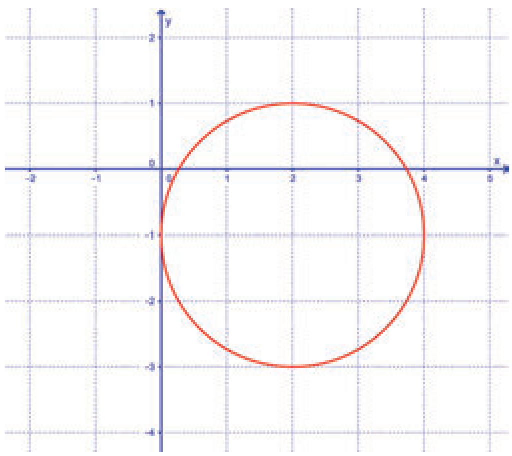
Resolución:

De la forma ordinaria de la ecuación de la circunferencia $r^2=(x-h)^2+(y-k)^2$, podemos determinar que:

$r=2$
$C=(2,-1)$

Cuya gráfica es la figura 66.

**Figura 66**




**ER2.** Grafique la circunferencia que tiene por ecuación general: $-3x^2-3y^2+4x-5y-1=0$

## Solución

Como los coeficientes de las variables que están elevadas al cuadrado son los mismos me aseguro que la ecuación pertenece a una circunferencia, y procedo a dividir la ecuación convenientemente:

$$\frac{-3x^2}{-3}+\frac{-3y^2}{-3}+\frac{4x}{-3}+\frac{-5y}{-3}+\frac{-1}{-3}=0$$

Obteniendo:

$$x^2 + y^2 - \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}y + \frac{1}{3} = 0$$

Separamos en paréntesis de acuerdo a las variables, al término independiente lo pasamos al otro lado del igual:

$$\left(x^2 - \frac{4}{3}x\right) + \left(y^2 + \frac{5}{3}y\right) = -\frac{1}{3}$$

Completamos los cuadrados:

$$\left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) + \left(y^2 + \frac{5}{3}y + \frac{25}{36}\right) = -\frac{1}{3} + \frac{4}{9} + \frac{25}{36}$$

$$\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{29}{36}$$

Datos de la circunferencia:

$$r = \frac{\sqrt{29}}{6}$$

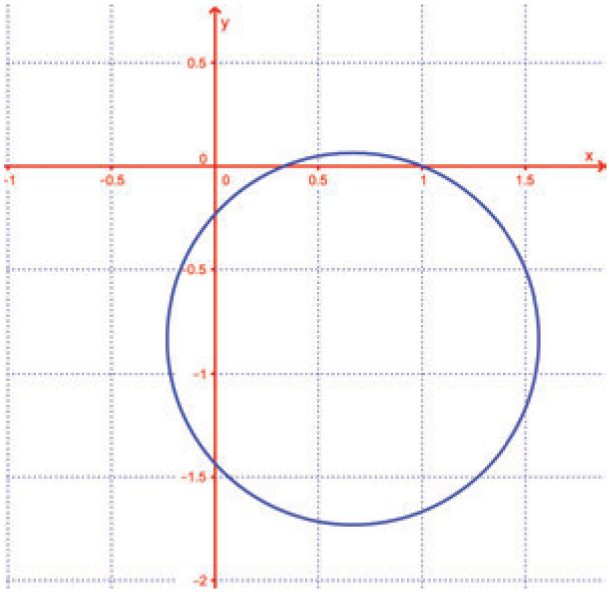
$$C = \left(\frac{2}{3}, -\frac{5}{6}\right)$$

## Ejercicios propuestos

**EP1.** Determinar la ecuación ordinaria de una circunferencia si el diámetro de dicha circunferencia está definido por los puntos en sus extremos ***A*** *(-2,6) y* ***B*** *(3,-5).*

**EP2.** Determinar la ecuación ordinaria de la circunferencia tangente a los ejes, si su centro está en el punto ***C*** *(2,2).*

Figura 67




**EP3.** Determinar la ecuación ordinaria de la circunferencia con centro en el origen y tangente a la recta con ecuación $2x+3y = 9$.

**EP4.** Graficar la circunferencia:

$$-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{2}x - 5y + 1 = 0$$

**EP5.** Determine la ecuación de la circunferencia del gráfico 68 propuesto, tomar cada división como la unidad.

**EP6.** Determinar si los puntos ***A***$(-3,5)$, ***B***$(1,-5)$ son interiores o exteriores a la circunferencia que tiene por ecuación: $16=(x-2)^2+(y+1)^2$.

**EP7.** Las circunferencias de la figura 69 se interceptan en los puntos ***A***$(0,1)$ y ***B***$(-3,-2)$. Determinar las ecuaciones de dichas circunferencias.

Figura 68

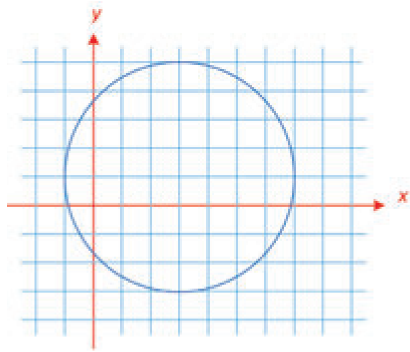
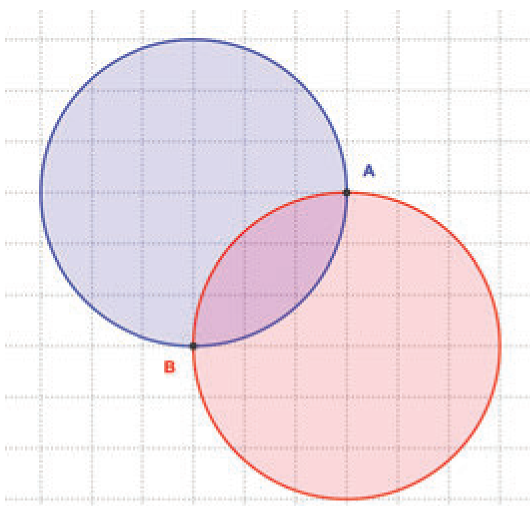



Figura 69




## 1.11.2 *La parábola*

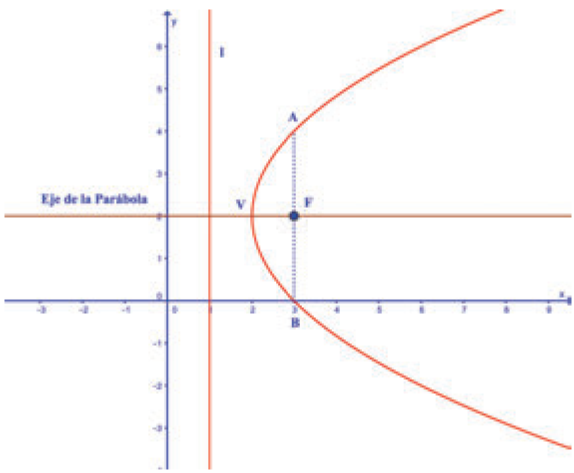
**Definición.** Sea $l$ una recta y $F$ un punto, se define a la parábola como el conjunto de puntos $P(x, y)$ tal que su distancia al punto $F$ es igual a su distancia a la recta $l$.

Al punto $F$ se le denomina Foco de la parábola y a la recta $l$ se le denomina directriz.

### *1.11.2.1 Elementos de la parábola*

- ***F***: Foco
- **Recta *l***: Directriz
- **Eje de la parábola**: Recta que pasa por $F$ y es perpendicular a $l$
- **Lado Recto**: Cuerda que pasa por el foco y es perpendicular al eje de la parábola (segmento $AB$)
- ***V***: Vértice de la parábola

**Figura 70**




### *1.11.2.2 Ecuación de la parábola*

Según la definición:

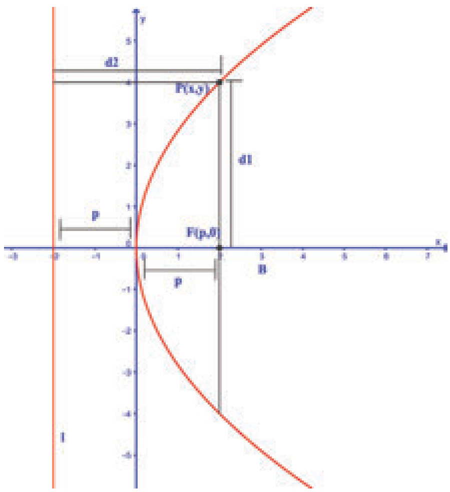
*d1=d2*

Es decir:

$$\sqrt{(x-p)^2+(y-0)^2}=x+p$$

$$\left(\sqrt{(x-p)^2+(y-0)^2}\right)^2=(x+p)^2$$

**Figura 71**




Desarrollando tenemos:

$x^2$-$2xp$+$p^2$+$y^2$=$x^2$+$2xp$+$p^2$
$y^2$=$4xp$

Comúnmente escrita como:

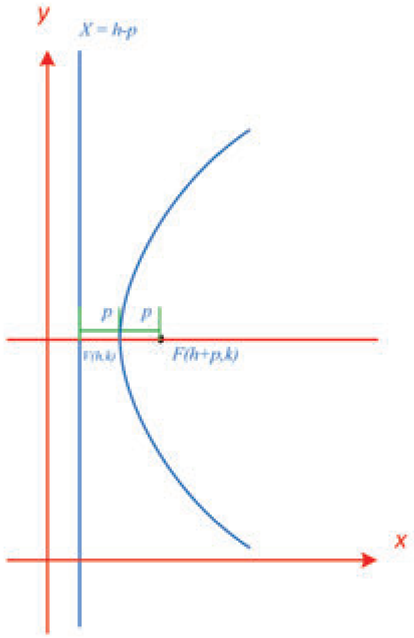
$y^2$=$4px$

Similar proceso realizamos con una parábola cuyo vértice tiene coordenadas

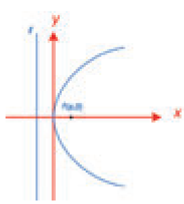
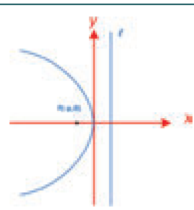
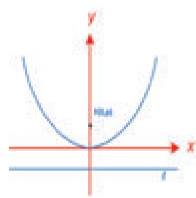
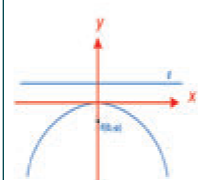
*V (h, k)*, para obtener:

$(y-k)^2=4p(x-h)$

### Figura 72




### Tabla 3

| ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA CUYO VÉRTICE ESTÁ EN EL ORIGEN | | | |
|---|---|---|---|
| $y^2=4px$ | | $x^2=4py$ | |
| $p>0$ | $p<0$ | $p>0$ | $p<0$ |
|  |  |  |  |

## Tabla 4

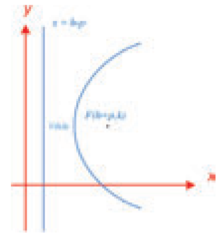
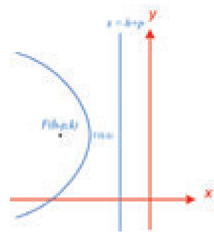
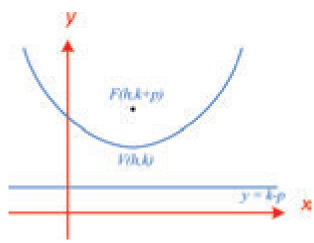
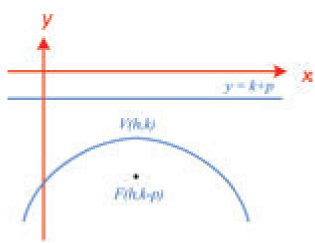
| ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA CUYO VÉRTICE NO ESTÁ EN EL ORIGEN | |
|---|---|
| $(y-k)^2=4p(x-h)$ |   |
| $(y-k)^2=-4p(x-h)$ |   |
| $(x-h)^2=4p(y-k)$ |   |
| $(x-h)^2=-4p(y-k)$ |   |

Tabla 5

| ECUACIÓN GENERAL DE LA PARÁBOLA | |
|---|---|
| Parábola horizontal | $y^2+Dx+Ey+F=0$ |
| Parábola vertical | $x^2+Dx+Ey+F=0$ |

## Ejercicios resueltos

**ER1.** Tenemos una parábola con vértice en el origen, cuyo eje coincide con el eje $y$ pasa por el punto $(4, 2)$. Determinar:

a. La ecuación de la parábola
b. Las coordenadas del foco
c. La ecuación de la directriz
d. Longitud del lado recto

## Solución

Según las características la parábola es vertical y obedece a la ecuación:

$$x^2=4py$$

Como nos dan un punto por el que pasa la parábola, el mismo debe satisfacer la ecuación de la parábola, así podemos determinar $p$:

$$16=4p(2)$$
$$p=2$$

Reemplazando en la ecuación de la parábola tenemos:

$$x^2=8y$$

Como $p>0$, las coordenadas del Foco son $F(0,2)$

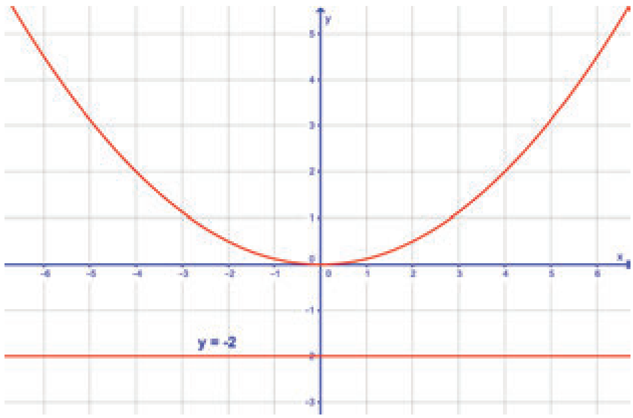
La ecuación de la directriz es $y=-2$

La longitud del lado recto:

$$LR=|4p|$$
$$LR=8$$

Cuya gráfica es la figura 73

**Figura 73**




**ER2.** Grafique la parábola

$$y^2=12x$$

Según la ecuación es una parábola horizontal, cuya ecuación corresponde a $y^2=4px$

Comparando tenemos que:

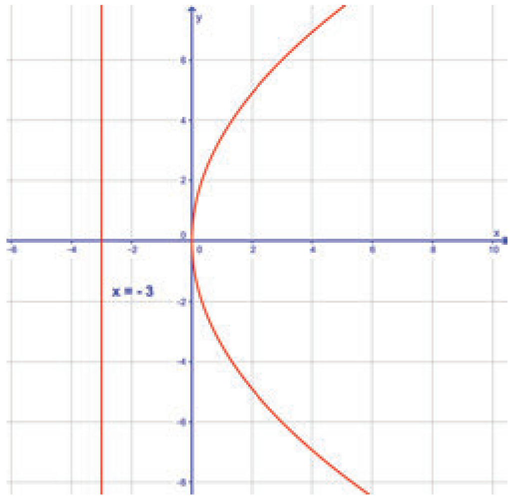
$$12=4p$$

De donde

$p=3$

Por lo tanto las coordenadas del Foco son $F(3,0)$, el lado recto es $LR=12$, la ecuación de la directriz es $x=-3$.

**Figura 74**




**ER3.** Dada la ecuación $x^2-10x-12y+37=0$, graficar la parábola.

## Solución

Agrupamos de manera conveniente para llegar a la forma $(x-h)^2=4p(y-k)$

$$x^2-10x=12y-37$$

Completamos el cuadrado y resolvemos:

$x^2-10x+25=12y-37+25$
$(x-5)^2=12y-12$
$(x-5)^2=12(y-1)$

Tenemos:

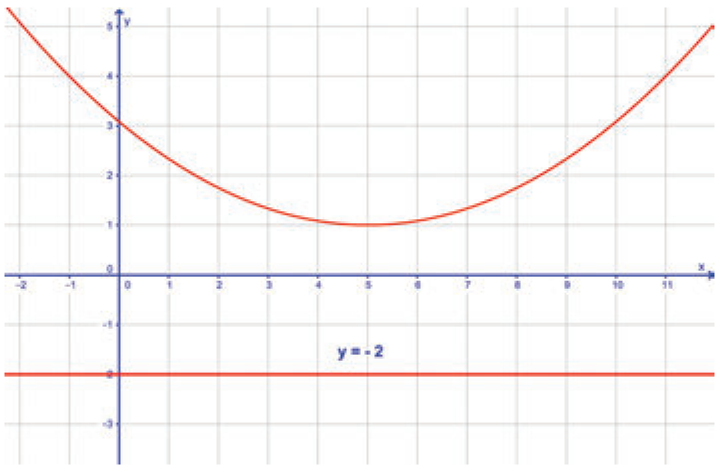
$4p=12$
$p=3$

Vértice: $V\ (5,1)$

Foco $(h,\ k+p)$: $F\ (5,4)$

Directriz $y=k-p$ : $y=-2$

**Figura 75**




## EJERCICIOS PROPUESTOS

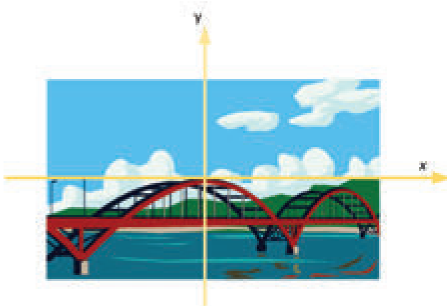
**EP1.** Graficar las siguientes ecuaciones:

- $y^2-4x=0$
- $x^2+4y=0$
- $x^2+4y=0$
- $4y^2-20y-24x+97=0$

**EP2.** Determinar la ecuación general de la parábola cuyo foco se encuentra en el punto de coordenadas $F(4,5)$ y tiene como recta directriz a la recta con ecuación $x=-2$

**EP3.** Usando el gráfico de la figura 76, encuentre una ecuación que pueda obedecer al modelo del puente.

**Figura 76**

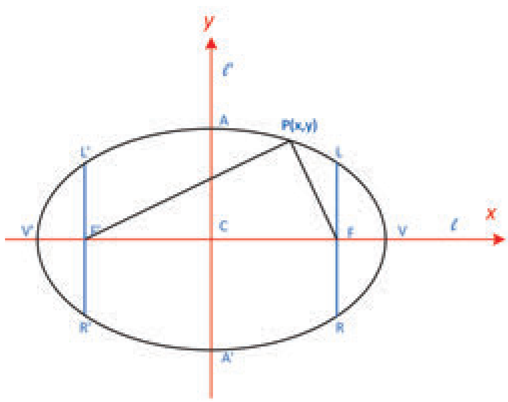



### *1.11.3 La elipse*

Es el lugar geométrico que describe un punto del plano que se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante, mayor que la distancia entre los dos puntos, es decir:

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$$

**Figura 77**



### *1.11.3.1 Elementos de la elipse*

l: Recta llamada eje focal
**l'**: Recta llamada eje normal
**C**: Centro de la elipse
***V y V'***: Vértices
***F y F'***: Focos
**Segmento *VV'***: Eje mayor
**Segmento *AA'***: Eje menor
***A*** y ***A'***: Extremos del eje menor

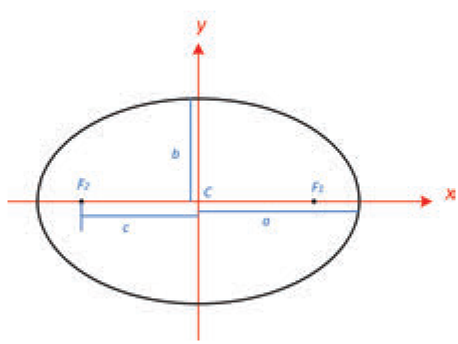
**Segmentos *LR y LR'***: Lado Recto, es un segmento llamado cuerda focal y es perpendicular al eje focal.

### *1.11.3.2 Ecuación de la elipse*

Es necesario saber que:

Eje mayor es igual a *2a*, así que *a* representa al semieje mayor
El eje menor es igual a *2b*, de igual manera *b* es el semieje menor
La distancia desde el centro al foco, la denominamos con la letra *c.*
La relación que existe entre *a, b* y *c* es:
$a^2=b^2+c^2$

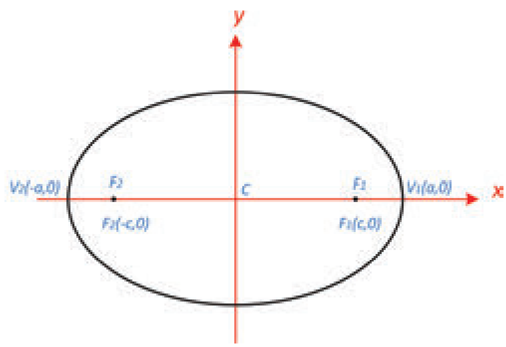
**Figura 78**



Eje Focal coincide con el eje "$x$" y el centro está en el origen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

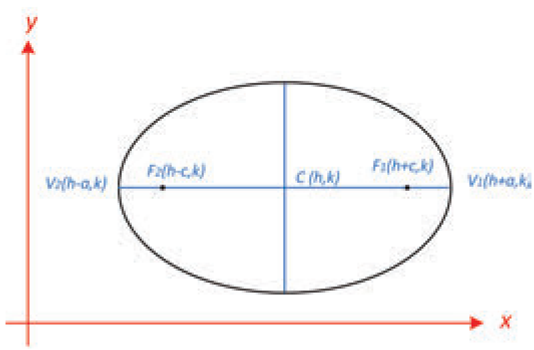
Figura 79




Eje Focal coincide con el eje "$x$" y el centro está fuera del origen:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

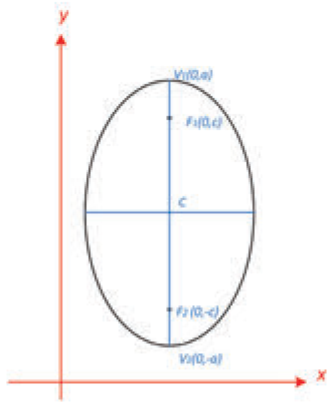
Figura 80




Eje Focal coincide con el eje "$y$" con centro en el origen:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

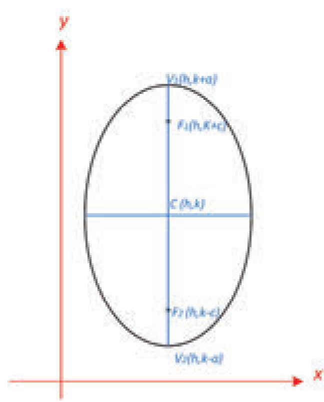
Figura 81




Eje Focal coincide con el eje "*y*" con centro fuera del origen:

$$\frac{(y-h)^2}{a^2} + \frac{(x-k)^2}{b^2} = 1$$

Figura 82



El lado recto es:

$$LR = \frac{2b^2}{a}$$

Excentricidad de una elipse es la razón entre la semidistancia focal y el semieje mayor, e indica la forma de una elipse, el valor de la excentricidad se encuentra entre *0* y *1*, mientras más próxima sea a *0* la elipse será más redondeada. Podemos determinarla con:

$$e = \frac{c}{a} < 1$$

**Tabla 6**

| **RESUMEN DE LAS ECUACIONES DE LA ELIPSE** | |
|---|---|
| Elipse horizontal con centro en el origen | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ |
| Elipse horizontal con centro fuera del origen | $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ |
| Elipse vertical con centro en el origen | $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ |
| Elipse vertical con centro fuera del origen | $\frac{(y-h)^2}{a^2} + \frac{(x-k)^2}{b^2} = 1$ |

**Tabla 7**

| **ECUACIÓN GENERAL DE LA ELIPSE** | |
|---|---|
| $Ax^2+By^2+Cx+Dy+F=0$ | *A* y *B* tienen el mismo signo |

## Ejercicios resueltos

**ER1.** Grafique la elipse que tiene por ecuación: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

## Solución

Como el denominador mayor está asociado a la variable correspondiente al eje con el cual coincide el eje mayor de la elipse, entonces en este caso tenemos una elipse horizontal, que obedece a la ecuación,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

de tal forma tenemos:

$a=3$
$b=2$

Longitud del eje mayor 6

Longitud del eje menor 4

La distancia desde el centro al Foco *(c)*: $c=\sqrt{a^2-b^2}$

$$c=\sqrt{5}$$

Lado recto:

$$LR=\frac{2b^2}{a}$$

$$LR=\frac{8}{3}$$

Vértices:

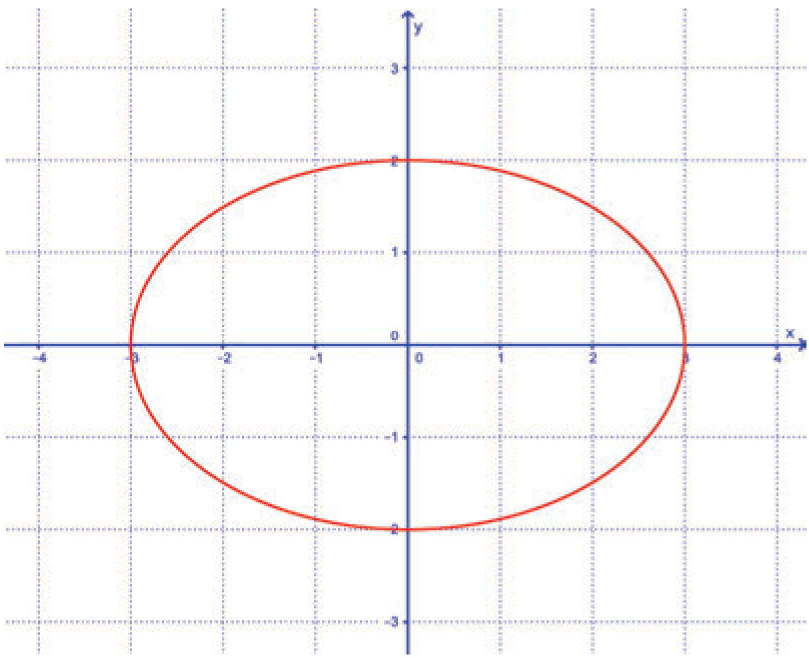
$V_1\ (a,0)$ y $V_2\ (-a,0)$
$V_1\ (3,0)$ y $V_2\ (-3,0)$

Focos:

$F_1\ (c,0)$ y $F_2\ (-c,0)$

$F_1\ (\sqrt{5}, 0) \quad y \quad F_2\ (-\sqrt{5}, 0)$

**Figura 83**




Excentricidad:

$$e = \frac{c}{a}$$

$$e = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

**ER2.** Determine los elementos y realice la gráfica de la elipse cuya ecuación es:

$$9y^2+4x^2-72y-24x+144=0$$

## Solución

Agrupamos los términos:

$(4x^2-24x)+(9y^2-72y)=-144$

Sacamos factor común:

$4(x^2-6x)+9(y^2-8y)=-144$

Completando los trinomios tenemos:

$4(x^2-6x+9)+9(y^2-8y+16)=-144+36+144$
$4(x-3)^2+9(y-4)^2=36$

Dividimos entre 36, tenemos:

$$\frac{4(x-3)^2}{36}+\frac{9(y-4)^2}{36}=\frac{36}{36}$$

$$\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y-4)^2}{4}=1$$

De acuerdo a lo obtenido, la ecuación es de la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Tenemos:

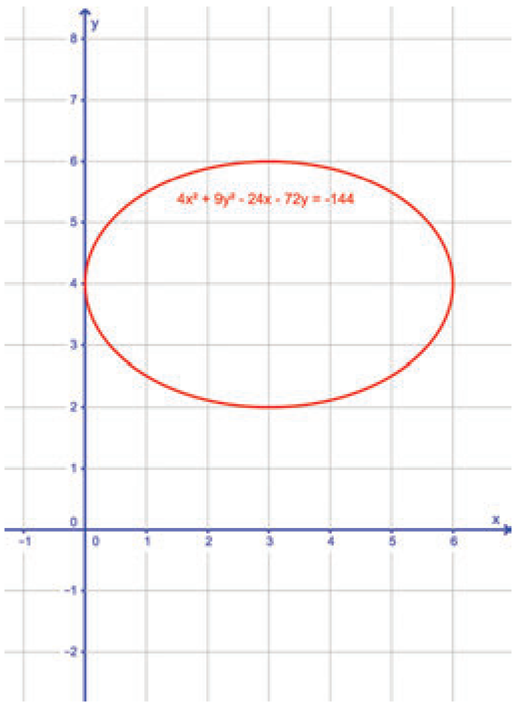
Centro: $C\ (3,4)$

*a=3*
*b=2*

Longitud del eje mayor 6

Longitud del eje menor 4

**Figura 84**




La distancia desde el centro al Foco *(c)*:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{5}$$

$$LR = \frac{2b^2}{a}$$

Lado recto:

$$LR = \frac{8}{3}$$

Vértices: $V_1$ *(h+a,k) y* $V_2$ *(h-a,k)*

$V_1$ *(6,4) y* $V_2$ *(0,4)*

Focos: $F_1$ *(h+c,k)* y $F_2$ *(h-c,k)*

$$F_1\ (3+\sqrt{5},4) \quad y \quad F_2\ (3-\sqrt{5},4)$$

Excentricidad:

$$e = \frac{c}{a}$$

$$e = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

## Ejercicios propuestos

**EP1.** Grafique: $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$

**EP2.** El centro de una elipse se encuentra en la intersección de las rectas *x+4y-12=0*, *x-y-2=0*, el eje menor es de *4* unidades y la distancia entre focos es de unidades. $4\sqrt{3}$ Determine la ecuación de dicha elipse y realice su gráfica.

## 1.11.4 La hipérbola

Es el lugar geométrico que describe un punto del plano que se mueve de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos, es siempre constante.

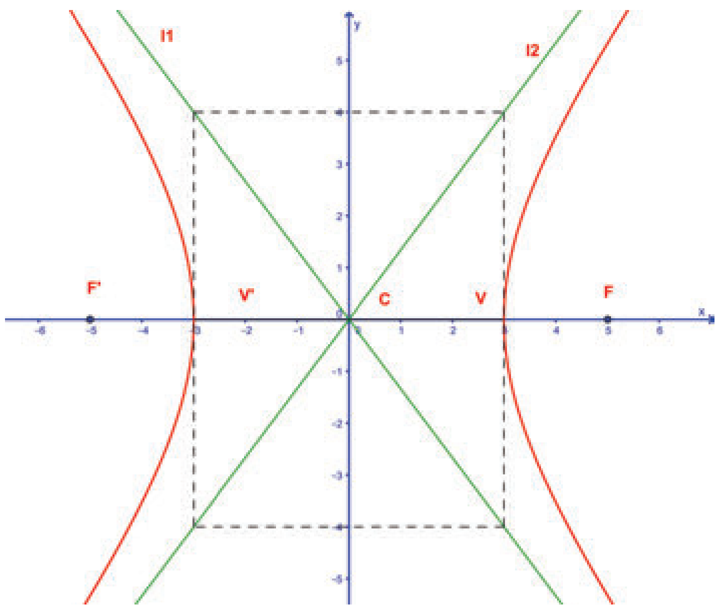
$$\left|\overline{PF} - \overline{PF'}\right| = 2a$$

### 1.11.4.1 Elementos de la hipérbola

**Eje transverso:** Es el segmento de recta que une a los vértices de la hipérbola, es la longitud del segmento ***VV'***, esto es *2a*.

**Eje conjugado:** Es el segmento de recta perpendicular al eje transverso en el centro, su longitud es *2b*.

**Figura 85**



**Centro:** Punto de intersección entre el eje transverso y el eje conjugado.

**Focos:** Puntos localizados en el eje de la hipérbola.

**Vértices:** Puntos extremos del eje transverso, la mitad de su distancia coincide con el centro de la hipérbola.

**$l_1$ y $l_2$ :** Asíntotas de la hipérbola

La relación que existe entre *a, b* y *c* es:

$c^2=a^2+b^2$

Donde *c* representa la distancia desde el centro a cada uno de los focos.

El lado recto es:

$$LR = \frac{2b^2}{a}$$

Excentricidad es:

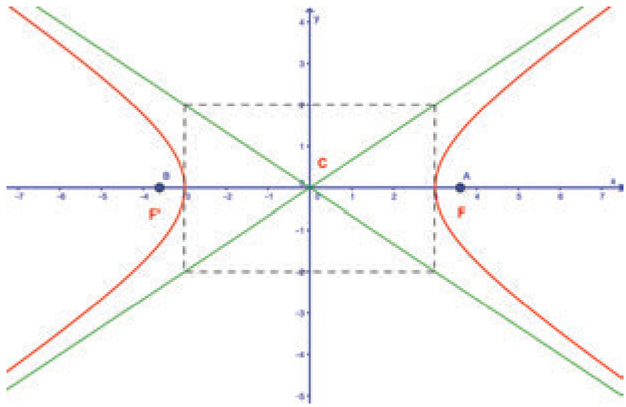
$$e = \frac{c}{a}$$

### *1.11.4.2 Ecuación de la hipérbola*

El eje transverso coincide con el eje "*x*", con centro en el origen:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

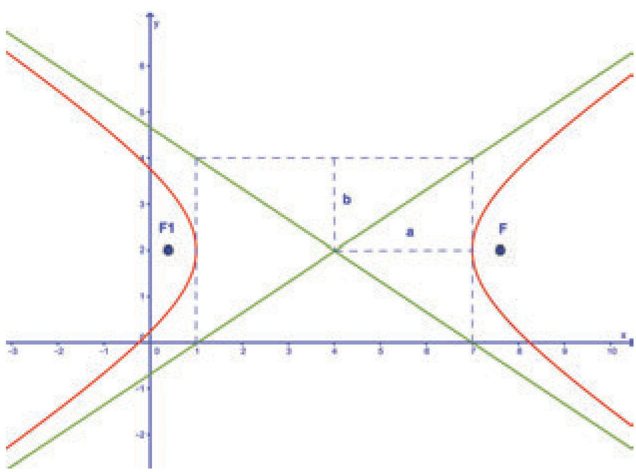
Figura 86




El eje transverso es paralelo al eje "$x$", con centro fuera del origen:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

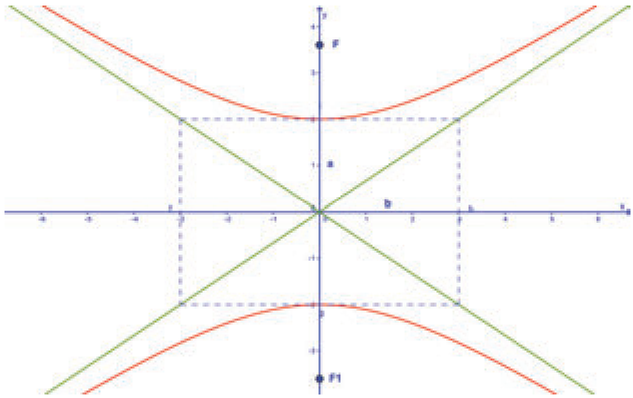
Figura 87




El eje transverso coincide con el eje "$y$", con centro en el origen:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

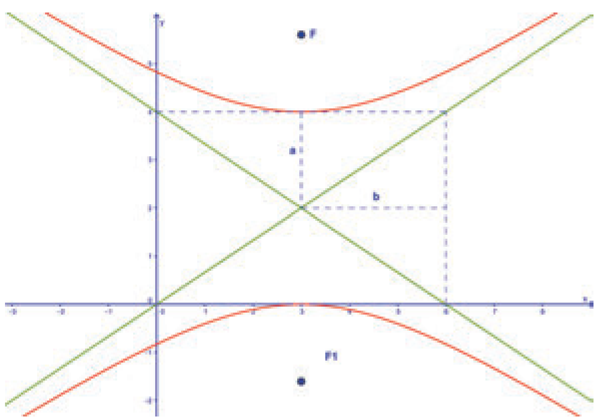
**Figura 88**



El eje transverso es paralelo al eje "$y$", con centro fuera del origen:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

**Figura 89**



## Tabla 8

| RESUMEN DE LAS ECUACIONES DE LA HIPÉRBOLA | |
|---|---|
| El eje transverso coincide con el eje "$x$", con centro en el origen | $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ |
| El eje transverso es paralelo al eje "$x$", con centro fuera del origen | $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ |
| El eje transverso coincide con el eje "$y$", con centro en el origen | $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ |
| El eje transverso es paralelo al eje "$y$", con centro fuera del origen | $\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ |

## Tabla 9

| ECUACIÓN GENERAL DE LA HIPÉRBOLA | |
|---|---|
| $Ax^2+By^2+Cx+Dy+F=0$ | A y B tienen diferente signo |

## Tabla 10

| COORDENADAS DE LOS FOCOS | |
|---|---|
| El eje transverso coincide con el eje "$x$", con centro en el origen | $F(c,0)$<br>$F1(-c,0)$ |
| El eje transverso es paralelo al eje "$x$", con centro fuera del origen | $F(h+c,k)$<br>$F1(h-c,k)$ |
| El eje transverso coincide con el eje "$y$", con centro en el origen | $F(0,c)$<br>$F1(0,-c)$ |
| El eje transverso es paralelo al eje "$y$", con centro fuera del origen | $F(h,k+c)$<br>$F1(h,k-c)$ |

## Ejercicios resueltos

**ER1.** Grafique la ecuación

$$\frac{(x-5)^2}{4}-\frac{(y+1)^2}{1}=1$$

## Solución

Como se puede observar en la ecuación el eje transverso es paralelo al eje *"x"*, con centro fuera del origen del tipo de:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

De tal manera que, su centro se encuentra en la coordenada ***C****(5,-1)*, el valor de *a* es *2*, por lo tanto el eje transverso es *2a=4*, el valor de *b* es *1,* así mismo el eje conjugado es *2b=2*

Con la relación $c^2=a^2+b^2$, podemos determinar la distancia del centro a los focos

$$c=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$$

Las coordenadas de los Focos:

$$F(h+c,k)=(5+\sqrt{5},-1)$$

$$F(h+c,k)=(5-\sqrt{5},-1)$$

Las asíntotas obtenemos:

$$\frac{(x-5)^2}{4}-\frac{(y+1)^2}{1}=1$$

Determinando el mínimo, e independiente del valor que nos quede igualada la expresión, la reemplazamos por cero:

$(x-5)^2-4(y+1)^2=0$

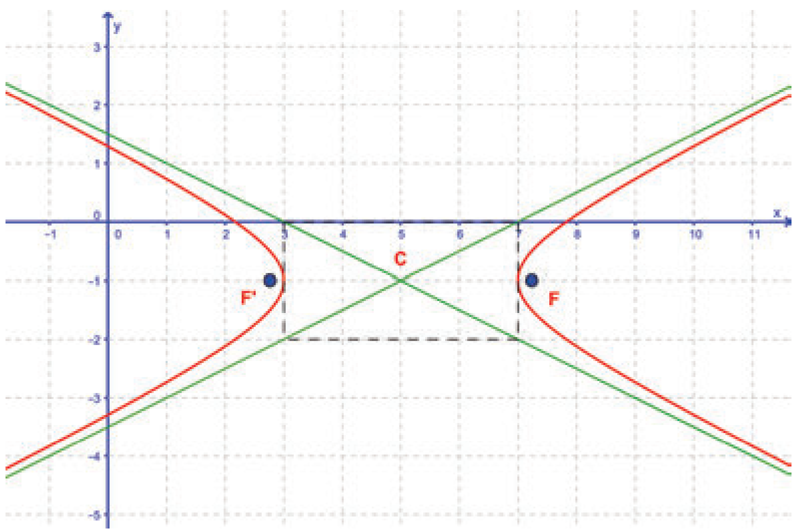
Factorizamos:

$[(x-5)+2(y+1)][(x-5)-2(y+1)]=0$

Resolviendo tenemos las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola:

$x+2y-3=0x-2y-7=0$

**Figura 90**




## Ejercicios propuestos

**EP1.** Graficar la hipérbola que tiene por ecuación,

$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{1} = 1$ indicando todos sus elementos.

**EP2.** Determinar la ecuación de la hipérbola que tiene centro en el origen pasa por el punto *(0,-2)*, asíntota es la recta cuya ecuación es *2x-3y=0*, y el eje transverso está sobre el eje *y*.

## Actividades complementarias de la subunidad

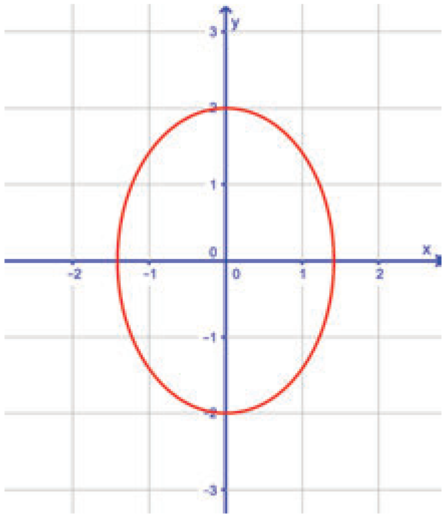
### *Preguntas de opción múltiple*

Indique la/s respuestas correctas:

1. La ecuación: $\frac{(y+2)^2}{3} + \frac{(x-1)^2}{1} = 1$ es:
   a. La ecuación de una elipse vertical con centro en ***C****(-1,2)*
   b. La ecuación de una elipse horizontal con centro en ***C****(-1,2)*
   c. La ecuación de una elipse horizontal con centro en ***C****(1,-2)*
   d. La ecuación de una elipse vertical con centro en ***C****(1,-2)*

2. La gráfica pertenece a la ecuación:
   a. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$
   b. $\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{2} = 1$
   c. $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{2} = 1$
   d. $\frac{(y+2)^2}{4} + \frac{(x-1)^2}{2} = 1$

Figura 91




3. La ecuación: $(x-2)^2+(y+3)^2=4$ corresponde:
   a. La ecuación de una circunferencia con centro en $(-2,3)$ y radio $2$ unidades
   b. La ecuación de una circunferencia con centro en $(2,-3)$ y radio $4$ unidades
   c. La ecuación de una circunferencia con centro en $(2,-3)$ y radio $2$ unidades
   d. La ecuación de una circunferencia con centro en $(-2,3)$ y radio $4$ unidades

4. Dada la ecuación $(x-3)^2+(y+1)^2=16$ que corresponde a cierta circunferencia, la ecuación de una circunferencia concéntrica a esta y de radio $5$ es:
   a. $x^2+y^2-6x+2y-6=0$
   b. $x^2-4x+y^2+2y-11=0$
   c. $x^2+y^2-4x+2y-20=0$
   d. $x^2+y^2-6x+2y-15=0$

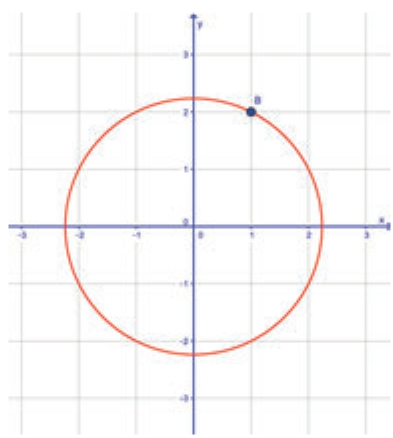
5. La ecuación de la directriz de una parábola es *y=-4*, y las coordenadas del vértice toman un valor de *2* en el eje de las ordenadas y *-1* en el eje de las abscisas, la parábola se dibuja:
   a. Horizontal hacia la derecha
   b. Vertical hacia abajo
   c. Horizontal hacia la izquierda
   d. Vertical hacia arriba
6. Dada la ecuación de la hipérbola, $\frac{(x+3)^2}{4}-\frac{(y+2)^2}{9}=1$ el punto de intersección de las asíntotas es:
   *a.* *A(3,2)*
   *b.* *A(-3,-2)*
   *c.* *A(2,-2)*
   *d.* *A(-18/3, 5/2)*

**AC19.** Graficar el lugar geométrico definido por la ecuación:

$4x^2+4y^2-2x-4y-16=0$

**AC20.** Determinar la ecuación de la circunferencia del gráfico 92, cuyo centro es el origen y pasa por el punto ***B****(1,2)*.

**Figura 92**



**AC21.** Determinar la ecuación de la circunferencia que contiene los puntos ***A****(7,2)* y ***B****(4,5)*, cuyo centro se encuentra sobre la recta definida por la ecuación $x+y-6=0$

**AC22.** Determinar la ecuación de la circunferencia inscrita en un cuadrado de *4* unidades de lado y cuyo centro se encuentra en la intersección de las rectas

$x+y-6=0$ y $x-y-2=0$

**AC23.** Determine la ecuación general de la circunferencia tangente a la recta definida por la ecuación $x-3y+5=0$ y cuyo centro es el punto de coordenadas ***C****(5,1)*.

**AC24.** Demostrar la posición relativa de la recta $y = 3 - 2x$ (tangente, secante, exterior) respecto a las circunferencias dadas. Verificar en forma gráfica.

a. $2x^2 + 2y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$
b. $2x^2 + 2y^2 - 6x + 8y - 6 = 0$
c. $2x^2 + 2y^2 + 3x + 5y - 5 = 0$

**AC25.** Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a la circunferencia: $2x^2+2y^2-12x+4y-12=0$, en los puntos en los que la abscisa toma el valor de *5*

**AC26.** Graficar el lugar geométrico definido por la ecuación e indicar todos los elementos.

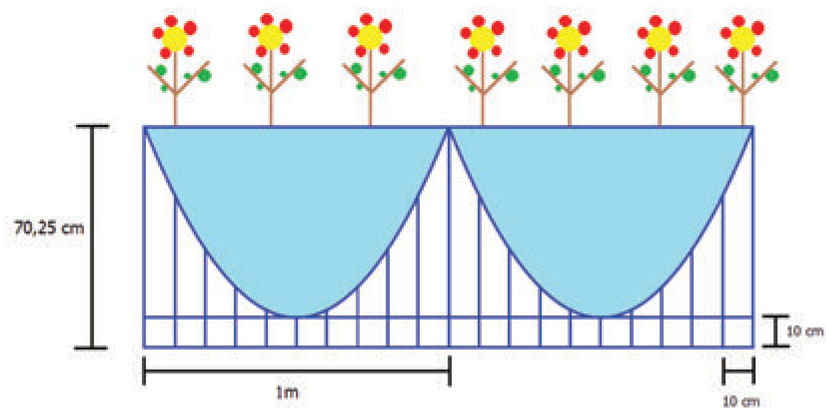
a. $y^2-10y+x+25=0$
b. $2x^2-2y-2x+9=0$

**AC27.** Un punto $P(x,y)$ se mueve de manera que su distancia al punto ***A****(-3,-4)* es siempre igual a su distancia a la recta $y-1/4=0$ Determinar la ecuación del lugar geométrico

**AC28.** Determinar la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje *"y"* y pasa por los puntos ***A****(-7, -4)*, ***B****(-3, -4) y* ***C****(-5, 0)*.

**AC29.** La jardinera del gráfico está compuesta por dos macetas de forma parabólica, soportadas en las verjas azules. Determinar la longitud total de los elementos verticales de dicha verja.

**Figura 93**




**AC30.** Encuentra los puntos de intersección de la parábola $y^2 - 8y - 16x + 64 = 0$ con la recta $2x- y - 8=0$, grafique la región que se encuentra entre estas dos gráficas.

**AC31.** Un túnel tiene la forma de una parábola, la base sobre la que descansa mide *8m* y la altura en el centro es de *4,8m*. ¿A partir de que distancia contando de un extremo puede pasar por debajo del arco un vehículo de *2m* de alto?.

**AC32.** La circunferencia $(x+3)^2+(y-5)^2=4$ es tangente a la elipse y pasa por sus focos. Forme la ecuación de la elipse, si su eje mayor es paralelo al eje de las ordenadas.

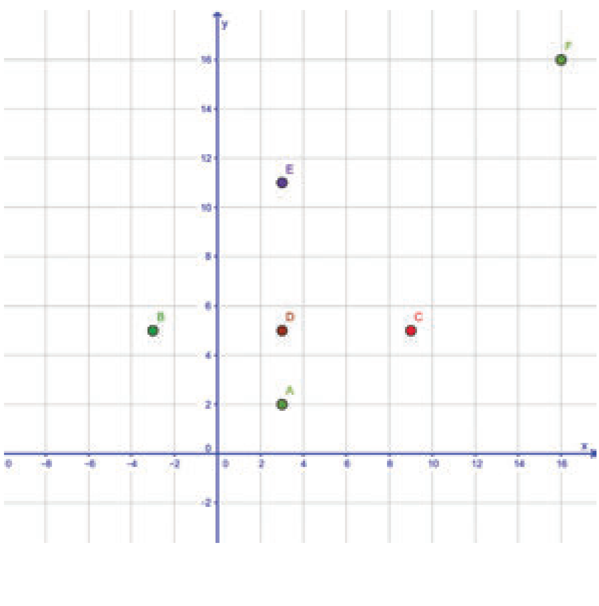
**AC33.** Determina cuál o cuáles de estas ecuaciones representan una elipse.

a. $4x^2 + 9y^2 - 16y = 20$
b. $x^2 - 6x - 12y - 15 = 0$
c. $5x^2 - 4y^2 + 8x - 10y + 9 = 0$
d. $9x^2 + 4y^2 = 36$

**AC34.** Se sabe que el punto ***A****(3,2)* es el vértice de una parábola, ***D****(3,5)* es el centro de una circunferencia y los puntos ***B****(-3,5)* y ***C****(9,5)* son las intersecciones de las *2* curvas:

a. ¿Qué relación tiene la recta *y=5* con las cónicas?
b. Hallar las ecuaciones de las curvas y graficar
c. Verificar analíticamente los puntos de intersección
d. ¿El punto *E* pertenece a la circunferencia?
e. ¿El punto *F* pertenece a la circunferencia?
f. Sombrear la región común menor a las 2 curvas

**Figura 94**



**AC35.** Determinar las coordenadas de los vértices y los focos de cada una de las siguientes ecuaciones:

a. $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{81}=1$

b. $\frac{y^2}{144}-\frac{x^2}{25}=1$

c. $2x^2-3y^2=30$

d. $y^2-16x^2=1296$

**AC36.** Determinar los elementos y graficar las siguientes hipérbolas:

a. $4x^2-3y^2-8x-8=0$
b. $y^2-2x^2-4x-4y=0$

**AC37.** Determinar la ecuación de la hipérbola cuya distancia focal es $34$ y la distancia de un vértice al foco más cercano es $2$.

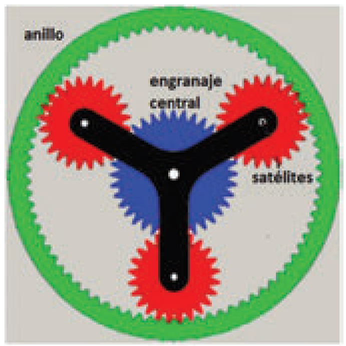
**AC38.** Determinar la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto $\sqrt{3}$ y que su excentricidad es $(2,\sqrt{3})$

**AC39.** Determinar la posición relativa de la recta $x+y-1=0$ con la hipérbola $x^2-2y^2=1$.

## Ejercicios de aplicación

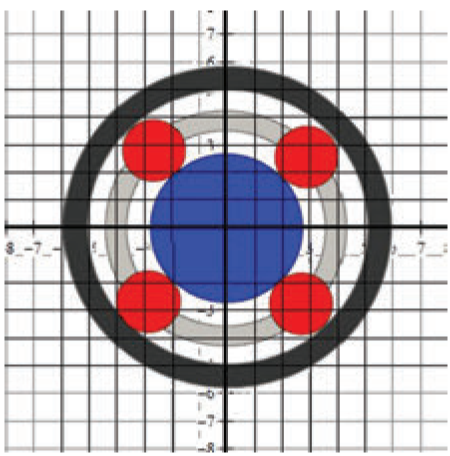
**EA1.** En los vehículos podemos encontrar algunos tipos de cajas de cambios y difieren en la forma en que funcionan por ejemplo las transmisiones manuales tienen un set de engranajes para cada relación de giro entre la velocidad de giro del cigüeñal, y la de las ruedas motrices. Por eso es que se necesita más de una marcha para andar en un sentido. En cambio, las cajas automáticas tienen un tipo de engranajes especiales, arreglados de una forma llamada “engranajes planetarios” (o epicicloidal) lo que le permite pasar de una relación de marcha a otra, sin tener que hacer uno el cambio. Se distinguen tres partes (observar la figura): El engranaje exterior que envuelve al sistema (o anillo) el engranaje central (o sol) y los engranajes satelitales (o planetas).

**Figura 95**




A continuación se presenta un gráfico esquemático con cuatro engranajes satelitales. Determinar las ecuaciones de las circunferencias de acuerdo a las medidas dadas por el gráfico y con referencia a los ejes mostrados.

**Figura 96**



**EA2.** Imaginemos que un vehículo se encuentra rodando y se desea reducir la velocidad; se aplica un frenado constante de tal manera que la velocidad angular del disco es $\pi/3$ radianes por segundo; (convertir a grados sexagesimales para el ejercicio). En el instante *0* la posición de la señal en el disco frenos está como se muestra en la figura. Si el sentido de giro es en sentido de las manecillas del reloj, y el diámetro del disco de frenos es de 26 *cm* determinar:

Las coordenadas de la ubicación del punto amarillo luego de *7* segundos.

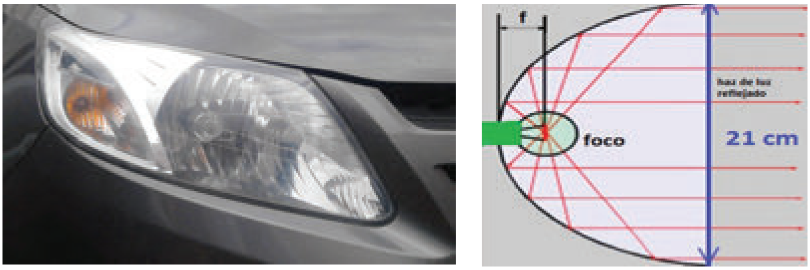
La ecuación de la recta tangente en ese punto.

**Figura 97**

**EA3.** Para lograr aprovechar al máximo la luz procedente del punto luminoso, en este caso representado como un filamento incandescente, los faros de los vehículos están dotados de un reflector parabólico perfectamente plateado y pulido en su interior, que refleja casi el *100%* de la luz que incide desde el punto luminoso. La colocación del emisor de luz dentro de la parábola determina como será reflejada la luz al exterior. Observe la figura que cuando el punto brillante se coloca en el foco de la parábola la luz reflejada sale como un haz concentrado for-

mado por líneas paralelas dirigidas rectas al frente del foco, en este caso el haz luminoso tiene el máximo alcance y representa la luz de carretera.

**Figura 98**




Con la medida mostrada en el gráfico, determinar la profundidad del faro si el foco se encuentra a *1/3* de la distancia entre el vértice y el borde del faro.

**EA4.** Cuando estudiábamos en la escuela acerca del Sistema Solar nos decían que el sol se encuentra en el centro y que la Tierra giraba alrededor de él haciendo una trayectoria elíptica, la información que recibimos en ese entonces era acertada dada nuestra capacidad cognitiva a esa edad; ahora a nivel universitario nuestras capacidades se han ido desarrollando y podemos entender de forma más exacta como funciona nuestro universo y los fenómenos naturales y más aún poder representarlos mediante modelos matemáticos.

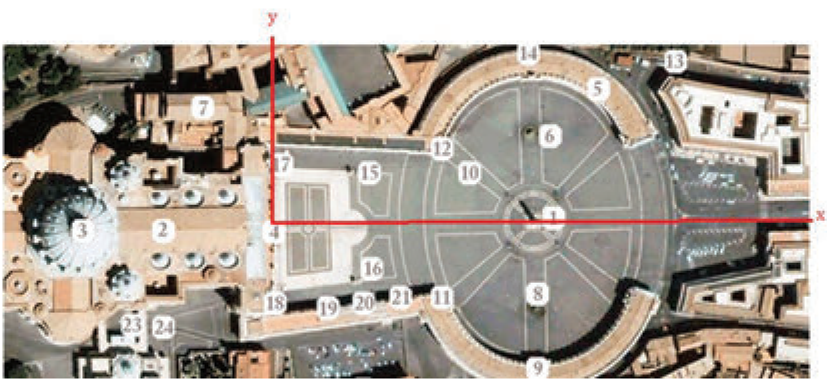
La Tierra gira alrededor del sol describiendo una trayectoria elíptica, pero el sol se encuentra desplazado del centro de esta trayectoria a la derecha y se ubica en uno de los focos de la elipse (como se ilustra en la figura).

La distancia más cercana y la distancia más lejana entre la Tierra y el Sol se medirían dentro del eje mayor de la elipse trazada. A la distancia más cercana entre la Tierra y el Sol se le llama perihelio y es *147 098 290 Km* de distancia; a la distancia más lejana entre la Tierra y el Sol se le llama afelio y es *152 098 290 Km* de distancia.

Con los dos datos proporcionados se pide al estudiante hacer un dibujo de esta trayectoria e indicar la distancia que existe entre el sol y el centro de la elipse que vendría a ser la distancia del centro al foco; además determinar la distancia del centro a uno de los extremos de la elipse. Con estos nuevos datos que representarían *c* y *a* respectivamente y determine la distancia vertical desde el centro hacia la elipse que vendría a ser el semieje menor *b* mediante la fórmula indicada $a^2=b^2+c^2$. Determine además la función que describe el desplazamiento de la Tierra alrededor del sol.

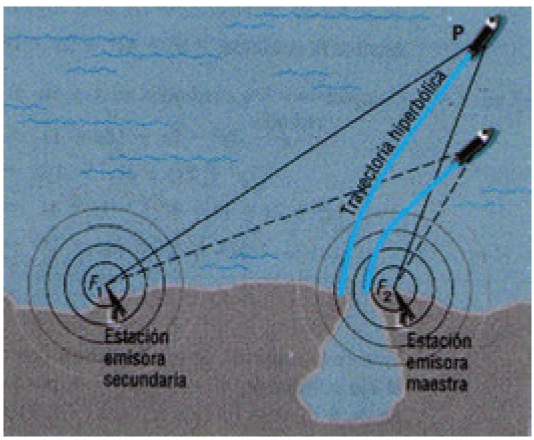
**EA5.** La plazoleta central del Vaticano llamada San Pedro es un lugar turístico, en este lugar se encuentran edificaciones y monumentos importantes. Se ha dispuesto un gráfico con los puntos importantes que pueden ser visitados por los turistas. Observar los números *6* y *8* que son los focos de la elipse, aquí están dispuestas dos piletas. Determinar la ecuación que describe a la plazoleta central desde la ubicación de los ejes que muestra el gráfico si: la distancia entre el origen de coordenadas y el centro de la plazoleta es de *70 m*, la distancia entre el centro de la plazoleta y una de las piletas es de *20 m* y la excentricidad de la elipse es *0,5*. Además determinar la distancia desde el origen del sistema cartesiano hasta el punto *14* que también es una fuente de agua denominada "Fuente Papal".

**Figura 99**



**EA6.** En el gráfico siguiente vemos una aplicación de la hipérbola en el sistema de comunicación de algunos barcos denominado Sistema Loran, las dos estaciones envían señales a un barco y dependiendo del tiempo de recepción y comparando el tiempo de cada una, se puede determinar la ubicación de un barco. Si el barco realizara una trayectoria hiperbólica la diferencia entre las señales se mantendría siempre en la misma. Determinar la ecuación de la trayectoria hiperbólica de un barco si la distancia entre las dos estaciones es de *100 Km* y la distancia entre la estación 1 y su vértice es de *10 Km*.

**Figura 100**

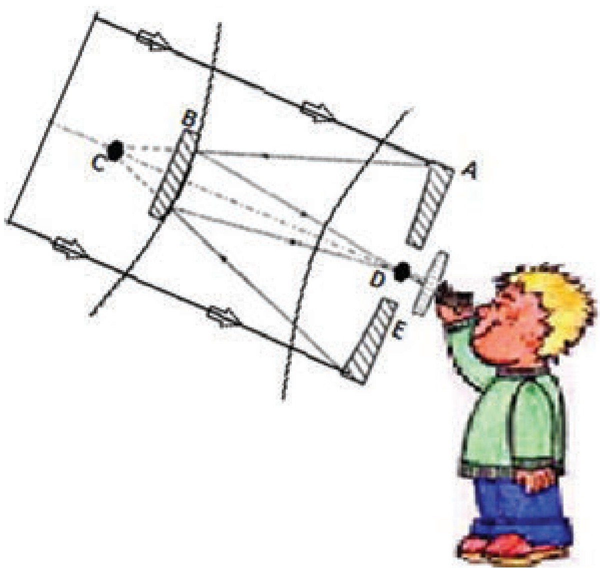



**EA7.** Un cometa sigue una trayectoria hiperbólica al pasar cerca del sol y alcanza su punto más cercano a este astro, en el vértice a *43* millones de millas de él.

Cuando la recta que une al sol con el cometa es perpendicular al eje transverso de la hipérbola, el cometa está a *137* millones de millas del sol. Determine la ecuación de la órbita del cometa, si el eje *x* se coloca en el eje transversal y el origen en el centro ¿Dónde está el sol?.

**EA8**. Un telescopio denominado Cassegrain para su funcionamiento aplica la teoría de la hipérbola. El principio de funcionamiento de este telescopio se puede observar en el gráfico, la luz ingresa por el lente tal y como lo indican las flechas y rebota en los lentes interiores *A* y *E* los mismos que por su forma reflectan la luz al lente *B* (observar que si no existiera este lente la luz coincidiría en el foco *C*) la luz rebota en el lente *B* y finalmente va al punto *D* que es el otro foco que es donde se coloca el ojo para poder ver algo a gran distancia.

**Figura 101**



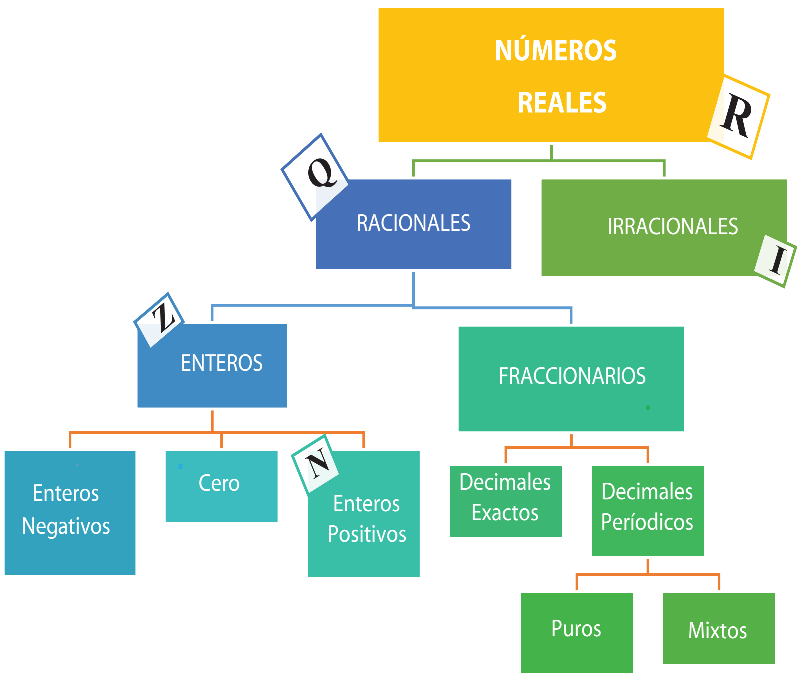

Determinar la ecuación de la hipérbola si la distancia entre los focos es de *30 cm* y el eje transverso mide *20 cm*.

**EA9.** Una fábrica de luces direccionales para vehículos entre mano de obra y materia gasta *21* dólares por cada juego de luces direccionales producidas y sus costos fijos son de *70 000* dólares. Si el precio de venta de cada juego de direccionales es de *35* dólares ¿Cuántas unidades debe vender como mínimo para que la compañía genere utilidades?

# Capítulo 2
# Números reales, funciones y límites

## 2.1 Números reales

Los números Reales son los que pueden ser expresados por un número que incluya dentro de la siguiente clasificación:



### 2.1.1 *Propiedades*

Siendo *a, b, c* y *d* números reales, tenemos algunas propiedades:

**Cuadro 1**

| PROPIEDADES | | EJEMPLO |
|---|---|---|
| Propiedad conmutativa de la suma | $a+b=b+a$ | $2+3=3+2$ |
| Propiedad conmutativa de la multiplicación | $ab=ba$ | $(-2)(3)=(3)(-2)$ |

**Cuadro 2**

| PROPIEDADES | | EJEMPLO |
|---|---|---|
| Propiedad asociativa de la suma | $(a+b)+c=a+(b+c)$ | $(2+3)+4=2+(3+4)$ |
| Propiedad asociativa de la multiplicación | $a(bc)=(ab)c$ | $(2)(4.3)=(2.4)(3)$ |

## 2.2 Intervalos

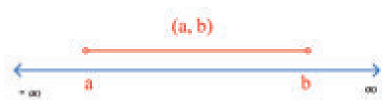
Un intervalo es un espacio comprendido entre dos valores, tenemos algunos tipos de intervalos, tales como:

### 2.2.1 *Intervalo abierto*

Es el conjunto de todos los números reales mayores que ***a*** y menores que ***b***.

$a<x<b$

**Figura 1**



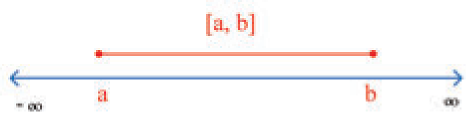

$\{x/a<x<b\}$

## 2.2.2 Intervalo cerrado

Es el conjunto de todos los números reales mayores o iguales que ***a*** y menores o iguales que ***b***.

$a \leq x \leq b$

**Figura 2**




$$\{x / a \leq x \leq b\}$$

Un ejemplo de intervalo cerrado aplicado a nuestro campo sería: la legislación ambiental para el control de contaminación de los vehículos entre algunos aspectos mide la concentración de gases contaminantes que salen por el escape y que debe tener ciertos valores; entre los gases que se controlan están los hidrocarburos que no se han quemado completamente, sus valores deben oscilar entre 0 ppm y 250 ppm (ppm significa partes por millón) para que no sean perjudiciales para la salud de las personas ya que valores mayores podrían causar dolores de cabeza, náuseas e irritaciones a las vías respiratorias; esto significa que por cada kg de gases de escape debe haber entre 0 y 250 mg de hidrocarburos no quemados.

Si $x$ representa el nivel de concentración de hidrocarburos a la salida de los gases de escape, el intervalo aceptable desde 0 ppm hasta 250 ppm sería un intervalo cerrado ya que valores por ejemplo de 251 ppm ya se considera que está fuera de la normativa ambiental y el motor de ese vehículo debería ser chequeado.

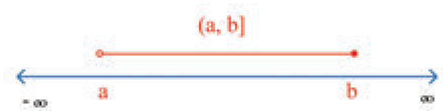
En símbolos, $\{x \in R \ / \ 0 \leq x \leq 250\}$ $x \in R$, indica $x$ números que pertenecen a los números reales. $0 \leq x \leq 250$, indica valores mayores o iguales a 0 ppm y menores o iguales a 250 ppm

### 2.2.3 Intervalo semiabierto por la izquierda

Es el conjunto de todos los números reales mayores que ***a*** y menores o iguales que ***b***.

$a < x \leq b$

Figura 3



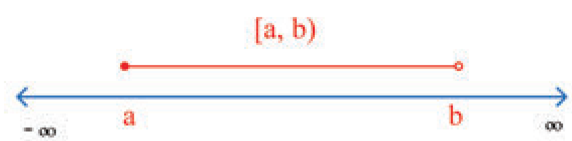

$\{x \,/\, a < x \leq b\}$

### 2.2.4 Intervalo semiabierto por la derecha

Es el conjunto de todos los números reales mayores o iguales que ***a*** y menores que ***b***.

$a \leq x < b$

Figura 4




$\{x \,/\, a \leq x < b\}$

### 2.2.5 Semirrectas

Las semirrectas están determinadas por un número, donde se encuentran todos los números mayores o menores que él.

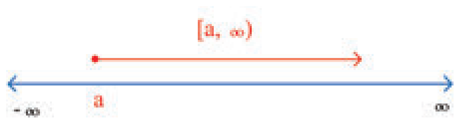
$x > a$

**Figura 5**


$$\{x / x > a\}$$

$x \geq a$

**Figura 6**




$$\{x / x \geq a\}$$

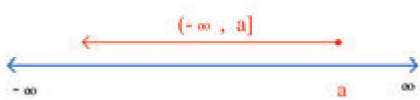
$x < a$

**Figura 7**


$$\{x / x < a\}$$

$x \leq a$

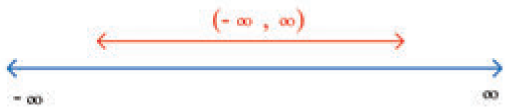
**Figura 8**




$$\{x / x \leq a\}$$

R

Figura 9




$\{x \,/\, x \in R\}$

## 2.3 Desigualdades

### *2.3.1 Propiedades*

Si a los dos miembros de una desigualdad se le suma o resta un mismo número o una misma expresión algebraica se obtiene otra desigualdad del mismo sentido:

Ejemplo:

Cuadro 3

| | |
|---|---|
| Tenemos la siguiente desigualdad: | $2 < 4$ |
| A ambos miembros de la desigualdad sumamos 3 unidades: | $2+3 < 4+3$ |
| Tenemos una desigualdad del mismo sentido: | $5 < 7$ |

Cuadro 4

| | |
|---|---|
| De igual forma: | $2 < 4$ |
| A ambos miembros de la desigualdad restamos 3 unidades: | $2-3 < 4-3$ |
| Tenemos una desigualdad del mismo sentido: | $-1 < 1$ |
| Asimismo: | $2 < 4$<br>$2 + x < 4 + x$ |

Si a los dos miembros de una desigualdad se multiplica o divide por un número mayor que cero, se obtiene otra desigualdad del mismo sentido:

Ejemplo:

**Cuadro 5**

| | |
|---|---|
| Tenemos la siguiente desigualdad: | $2 < 4$ |
| A ambos miembros de la desigualdad vamos multiplicar por un número mayor que cero: | $2(3) < 4(3)$ |
| Tenemos una desigualdad del mismo sentido: | $6 < 12$ |

**Cuadro 6**

| | |
|---|---|
| Tenemos la siguiente desigualdad: | $2 < 4$ |
| De igual forma obtenemos dividiendo la desigualdad por un número mayor que cero: | $2/4 < 4/4$ |
| Tenemos una desigualdad del mismo sentido: | $1/2 < 1$ |

Si a los dos miembros de una desigualdad se multiplica o divide por un número menor que cero, se obtiene otra desigualdad de sentido contrario:

Ejemplo:

**Cuadro 7**

| | |
|---|---|
| Tenemos la siguiente desigualdad: | $2 < 4$ |
| A ambos miembros de la desigualdad les vamos multiplicar por un número menor que cero: | $2(-3) < 4(-3)$ |
| Tenemos una desigualdad de sentido contrario: | $-6 > -12$ |

**Cuadro 8**

| | |
|---|---|
| Tenemos la siguiente desigualdad: | 2 < 4 |
| De igual forma obtenemos dividiendo la desigualdad por un número menor que cero: | 2/(-4) < 4/(-4) |
| Tenemos una desigualdad de sentido contrario: | -1/2 > -1 |

## Ejercicios resueltos

**ER1.** En la figura 10, indicar los intervalos graficados:

**Figura 10 a**



**Figura 10 b**



## Solución

En la figura 10 literal a, el intervalo comprende desde el valor de -3.5 hasta 1.5 por lo que se puede representar como -3.5, 1.5]

En la figura 10 literal b, el intervalo comprende desde el valor de -5 hasta 2 por lo que se puede representar como [-5, 2]

## Ejercicios propuestos

**EP1.** Clasificar los intervalos:

[4, 5]
(-∞, -10)

**EP2.** Graficar los intervalos:

$$[-4, 20)$$
$$(-\infty, 0]$$
$$[1, 3/2]$$
$$(1/3, \infty)$$
$$(-4/5, 3/7)$$

**EP3.** Según los gráficos propuestos escribir usando la notación de intervalo:

Figura 11 a

Figura 11 b



Figura 11 c

## 2.4 Inecuación

Una inecuación es una desigualdad en la que contiene una incógnita en algún miembro o en ambos miembros de la desigualdad.

Ejemplos:

Cuadro 9

| | |
|---|---|
| $2x+3 \leq -4x$ | $3 \geq -4y$ |
| $-7x-3 \leq -5x+10$ | $x^5 - 5x^2 < 0$ |
| $-3 \geq x^2$ | $2x + 3y \geq 1$ |
| $\lvert x \rvert \geq 2$ | $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 < 0$ |
| $-4/5\, x \leq -2/3$ | $(4x-2)/5x \leq -(2x+3x)/(3x-5)$ |

### 2.4.1 *Propiedades de las inecuaciones*

En el presente cuadro se realiza una clasificación de las propiedades de las inecuaciones:

Ejemplos:

PROPIEDADES

DE LA SUMA

Si a los dos miembros de una desigualdad se le suma o resta un mismo número o una misma expresión algebraica se obtiene otra desigualdad del mismo sentido

DEL PRODUCTO

Si a los dos miembros de una desigualdad se multiplica o divide por un número mayor que cero, se obtiene otra desigualdad del mismo sentido

Si a los dos miembros de una desigualdad se multiplica o divide por un número menor que cero, se obtiene otra desigualdad de sentido contrario

Cuadro 10

| De la suma | Del Producto |
|---|---|
| Tenemos la inecuación:<br>$2x+1 > 6$<br>Sumando un mismo valor a ambos lados tenemos:<br>$2x + 1 + 3 > 6 + 3$<br>$2x + 4 > 9$ | Tenemos la inecuación:<br>$2x+1 > 6$<br>Multiplicando por un mismo valor (mayor que cero) a ambos lados tenemos:<br>$2x(3)+1(3) > 6(3)$<br>$6x + 3 > 18$ |
| | Tenemos la inecuación:<br>$2x + 1 > 6$<br>Multiplicando por un mismo valor (menor que cero) a ambos lados tenemos:<br>$2x(-3) + 1(-3) > 6(-3)$<br>$-6x - 3 < -18$ |

## *2.4.2 Resolución de inecuaciones*

### *2.4.2.1 Inecuaciones lineales*

Ejemplo 1:

Resuelva las siguientes inecuaciones:

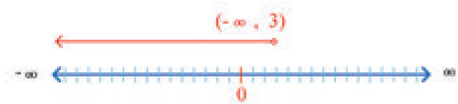
$$2x + 3 < 9$$

**Solución**

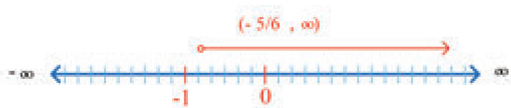
Despejando la variable tenemos:

$x < 3$

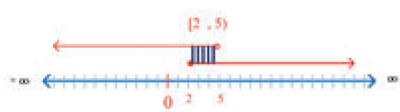
**Figura 12**




**Cuadro 11**

<table>
<tr><td>Ejemplo 2: $x/5+3 < 2x + 9/2$</td><td rowspan="2">Despejando la variable tenemos:<br>$x/5-2x < 9/2-3$<br>$-9x/5 < 3/2$<br>$9x/5 > -3/2$<br>$x > -5/6$</td></tr>
<tr><td><br><br>Figura 13</td></tr>
</table>

**Cuadro 12**

<table>
<tr><td>Ejemplo 3: $4 \leq 3x-2 < 13$</td><td rowspan="2">Despejando la variable tenemos:<br>$4 + 2 \leq 3x - 2 + 2 < 13 + 2$<br>$6 \leq 3x < 15$<br>$6/3 \leq 3x/3 < 15/3$<br>$2 \leq x < 5$</td></tr>
<tr><td><br><br>Figura 14</td></tr>
</table>

## 2.4.2.2 *Inecuaciones cuadráticas*

Ejemplo 1:

$$x^2 - 2x - 15 \leq 0$$

### Solución

Podemos igualar a cero y factorizar para determinar las raíces:

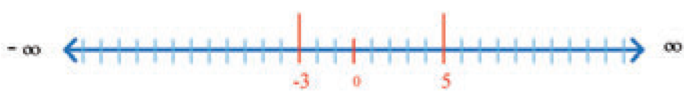
$x^2 - 2x - 15 = 0$
$(x - 5)(x + 3) = 0$
$x_1 = 5$
$x_2 = -3$

La inecuación factorizada es:

$$(x - 5)(x + 3) \leq 0$$

Colocamos las raíces en la recta numérica, observamos que se han formado 3 intervalos: (-∞, -3), (-3, 5), (5,∞)

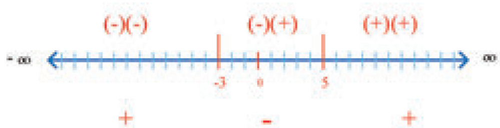
**Figura 15**




En los tres intervalos debemos analizar signos:

Para analizar los signos en los intervalos tomamos un valor que pertenezca al intervalo, reemplazamos en la inecuación y determinamos el signo:

**Figura 16**



Para dar la solución consideramos el sentido de la inecuación, en éste caso ≤ son los negativos, es decir: [–3,5]. Luego de dar la solución es necesario validarla, tomando valores y comprobando:

**Cuadro 13**

| | |
|---|---|
| Cuando x = - 3 | Cuando x = 0, valor dentro del intervalo |
| Reemplazamos en la inecuación:<br>$x^2 - 2x - 15 \leq 0$<br>Tenemos:<br>$(-3)^2 - 2(-3) - 15 \leq 0$<br>$9 + 6 - 15 \leq 0$<br>Cumple: 0 = 0 | Reemplazamos en la inecuación:<br>$x^2 - 2x - 15 \leq 0$<br>Tenemos:<br>$-15 \leq 0$<br>Cumple: $-15 < 0$ |
| Cuando x = 5 | Cuando x = - 4, valor fuera del intervalo |
| Reemplazamos en la inecuación:<br>$x^2 - 2x - 15 \leq 0$<br>Tenemos:<br>$(5)^2 - 2(5) - 15 \leq 0$<br>$25 - 10 - 15 \leq 0$<br>Cumple: 0 = 0 | Reemplazamos en la inecuación:<br>$x^2 - 2x - 15 \leq 0$<br>Tenemos:<br>$9 \leq 0$<br>lo que es una incoherencia |

Graficando la solución tenemos:

**Figura 17**

## *2.4.2.3 Inecuaciones racionales*

Ejemplo:

$(x - 3)/(x + 1) \geq - 5$

## Solución

Resolvemos el álgebra de la inecuación:

$(x - 3)/(x + 1) + 5 \geq 0$
$(x - 3 + 5(x + 1))/(x + 1) \geq 0$
$(x - 3 + 5x + 5)/(x + 1) \geq 0$

Llegamos a la última expresión:

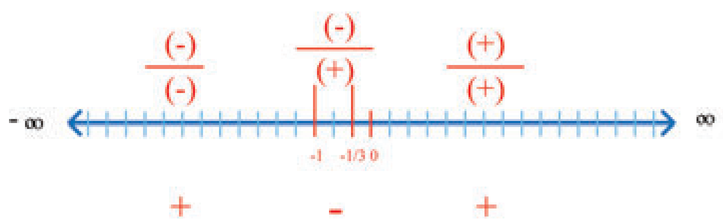
$(6x + 2)/(x + 1) \geq 0$

De igual forma analizamos por separado las raíces tanto del numerador como del denominador:

Tenemos $x = -1/3$ y $x = -1$

Graficamos los intervalos, reemplazamos valores que estén dentro de cada intervalo en la inecuación para obtener los signos:

**Figura 18**




De acuerdo al sentido de la inecuación procedemos a dar la solución al problema considerando el valor que anula al denominador, por lo tanto no debe ser parte de la solución.

La solución es: $(-\infty, -1)$ $U$ $[-1/3,\infty)$

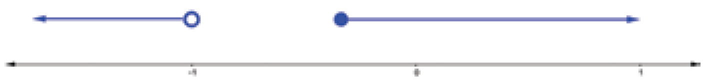
Validando la solución y graficando:

**Cuadro 14**

| Cuando x = 0 | Cuando x = -2/3, valor fuera del intervalo |
|---|---|
| Reemplazamos en la inecuación:<br>(x - 3)/(x + 1) ≥ -5<br>Tenemos:<br>-3 ≥ -5<br>Cumple: – 3 > -5 | Reemplazamos en la inecuación:<br>(x - 3)/(x + 1) ≥ -5<br>Tenemos:<br>-11 ≥ 0<br>Es una incoherencia |

La gráfica de la solución:

**Figura 19**



## *2.4.2.4 Valor absoluto*

El valor absoluto de un número real "***b***" se denota como |b|, y se define como:

$$|b| = \begin{cases} b & si \quad b \geq 0 \\ -b & si \quad b < 0 \end{cases}$$

### Propiedades

Siendo ***b*** y ***c*** números reales y ***n*** un número entero:

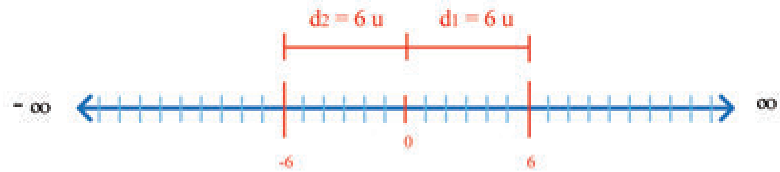
$|b.c| = |b|.|c|$
$|b/c| = |b|/|c|$
$|b^n|=|b|^n$
$|b + c| \leq |b| + |c|$

La noción de valor absoluto surge con problemas de distancia.

El valor absoluto de un número b, se puede interpretar geométricamente como una distancia desde el origen hasta b sobre una recta numérica.

Es decir si $|b| = 6$, b está a seis unidades del origen, pudiendo ser $b = 6$ o $b = -6$

**Figura 20**



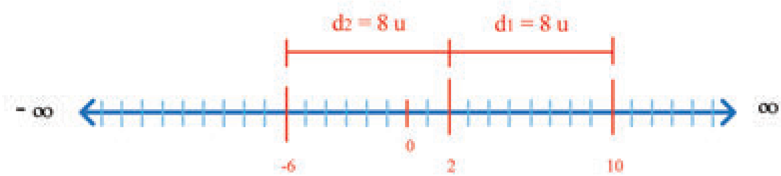

**Ejemplo 1:**

Resolver: $|x - 2| = 8$

## SOLUCIÓN

Geométricamente la solución consta de todos los valores de $x$ que están a 8 unidades del punto 2, es decir $x_1 = 10$ $x_2 = -6$

**Figura 21**



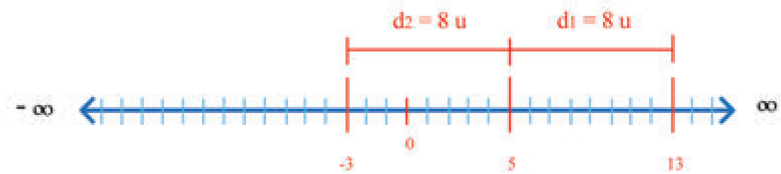

**Ejemplo 2:**

Resolver: $|x - 5| < 8$

## Solución

La solución consta de todos los valores de $x$ cuyas distancias al punto 5 sean menores que 8 unidades, es decir: $-3 < x < 13$

**Figura 22**




Solución representada en un intervalo: (–3,13)

**Figura 23**

**Ejemplo 3:**

Resolver:

$|x + 1| > 2$

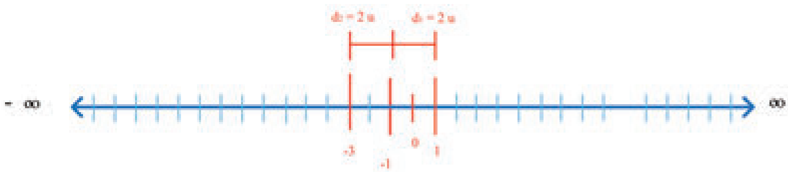
## Solución

La desigualdad puede escribirse de la siguiente manera:

$$|x -(-1)| > 2$$

En consecuencia la solución consta de todos los valores de $x$ cuya distancia de -1 sean mayores que 2 unidades, es decir: $x < -3$ x $> 1$

**Figura 24**



Solución representada en un intervalo:

$$(-\infty, -3)\ U\ (1,\infty)$$

**Figura 25**

El análisis realizado se resume en las siguientes propiedades:

**Tabla 1**

| INECUACIÓN | SI Y SOLO SI |
|---|---|
| $\lvert x\rvert < b\ b > 0$ | $-b < x < b$ |
| $\lvert x\rvert \leq b\ b > 0$ | $-b \leq x \leq b$ |
| $\lvert x\rvert > b\ b > 0$ | $x > b\ x < -b$ |
| $\lvert x\rvert \geq b\ b > 0$ | $x \geq b\ x \leq -b$ |

## EJERCICIOS RESUELTOS

**ER 1.** Resolver las inecuaciones siguientes con ayuda de las propiedades de la tabla 1

$$|x - 5| < 8$$
$$|x + 1| > 2$$

## Solución

a. $|x - 5| < 8$

Aplicando la propiedad:

$-b < x < b$

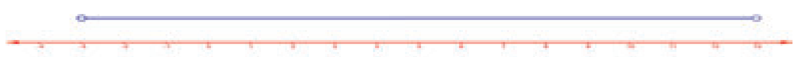
Tenemos:

$-8 < x - 5 < 8$

Resolviendo nos queda:

$-8 + 5 < x - 5 + 5 < 8 + 5 \longrightarrow -3 < x < 13$

**Figura 26**



b. $|x + 1| > 2$

Aplicando la propiedad:

$$x > b \; x < -b$$

Tenemos:

$x > b \longrightarrow x + 1 > 2$
$x < -b \longrightarrow x + 1 < -2$

Resolviendo nos queda:

$x+1 > 2 \longrightarrow x > 2 - 1 \longrightarrow x > 1$
$x+1 < -2 \longrightarrow x < -2 - 1 \longrightarrow x < -3$

**Figura 27**

Son las soluciones obtenidas anteriormente.

## Ejercicios propuestos

**EP1.** Resolver las inecuaciones siguientes

$$|x+4| < 1$$
$$|x^2 - 6| > 2$$

## *Actividades complementarias de la subunidad*

### *Preguntas de opción múltiple*

1. La interpretación gráfica de $\{\, x/ -2 < x \leq 4\}$ es:

   a. 

   b. 

   c. 

   d. 

2. Las notas sobre diez de once alumnos de cálculo de un curso se representan en la tabla siguiente:

**Tabla 2**

| Alumnos | Notas (/10) |
|---|---|
| Carlos | 5 |
| Juan | 8 |
| Pedro | 2 |
| María | 9 |
| Karla | 3 |
| Miguel | 10 |
| Clara | 10 |

| | |
|---|---|
| Fernando | 7 |
| Julián | 9 |
| Rita | 9 |
| Laura | 4 |

Si $m$ representa la mediana, $p$ el promedio y $f$ la frecuencia, indicar la solución correcta:

a. $f < p < m$
b. $p > f > m$
c. $p < m < f$
d. $m < f < p$

3. La solución de $2x + 3 < 5$ es:

a. $(-\infty, 1]$
b. $(1, \infty)$
c. $(-\infty,1)$
d. $(-\infty, 4)$

4. María asa pollos para la venta, ella no compra pollo que pesen menos de 6 libras ni más de 10 libras, si $x$ representa el peso en libras de los pollos que no compra María. ¿Cuál de las siguientes opciones representa todos los posibles valores de $x$

a. $|x - 8| < 2$
b. $|x - 8| > 2$
c. $|x - 6|< 10$
d. $|x - 6| > 10$

5. $x/|x| < 7\}$ representa:

a. $(-\infty, 7)$
b. $(-7, 7)$
c. $(7, \infty)$
d. $(-\infty, -7)\ U\ (7, \infty)$

6. Un intervalo semiabierto por la izquierda es:

   a. $(-5, \infty)$
   b. $[6, 10)$
   c. $(0, 1]$
   d. $[5, 7]$

**AC1**. En el siguiente enunciado analice el contenido e indique si pertenece a un intervalo abierto o cerrado y escriba la expresión matemática que corresponda:

"La cantidad $x$ de vehículos de cierta marca que podrían venderse en el mes de diciembre se halla entre 350 y 400".

**AC2**. Exprese en forma de intervalo las siguientes expresiones:

$$3 < x < -1$$
$$x \leq -3 \vee x > 1$$
$$3 \leq x < -10$$

**AC3.** Exprese en forma de intervalo las siguientes representaciones:

**Figura 28**

**Figura 29**

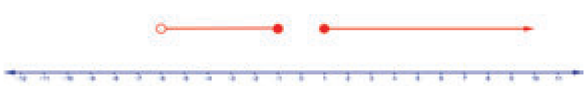


**Figura 30**

**AC4.** Represente en la recta numérica el valor de las desigualdades y explique qué significado tiene esta expresión.

$|x + 2| < 5$
$|x - 4| \geq 4$
$|x - 3| \leq 2$

**AC5.** Resuelva las siguientes inecuaciones y represente con intervalos

$$-1 < -\frac{1}{2}x < 7$$

$$\frac{2x-1}{4} < -x < -\frac{3}{2} + 7$$

$$x^2 - x - 6 < 0$$

$$x^2 + 5x + 4 \geq 0$$

$$\frac{2x-1}{4x-2} < \frac{x+3}{2x}$$

$$|3x - 7| \leq 1$$

$$\left|\frac{2x+1}{x-1}\right| \geq 1$$

**AC6.** Dada la siguiente expresión, determinar los valores de la variable que garantizan que la expresión sea real

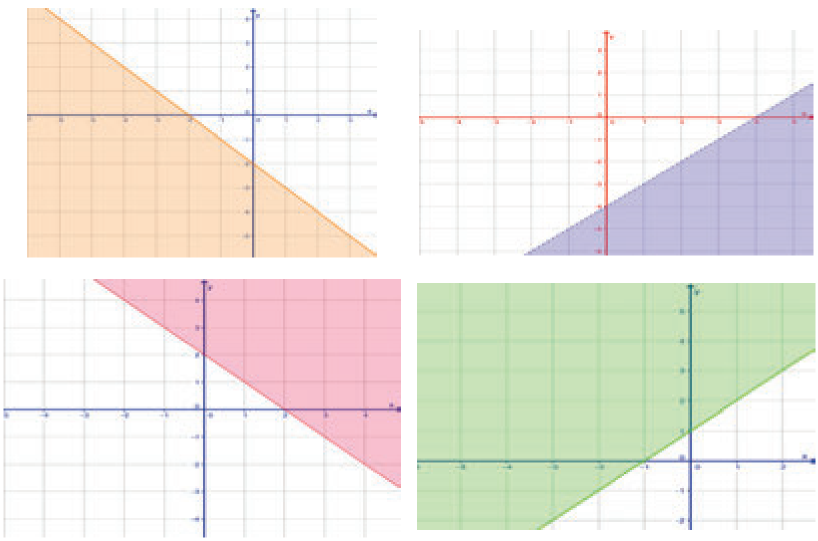
$$\sqrt{x^2 - 3}$$

**AC7.** La relación entre las escalas Celsius y Fahrenheit de temperatura está dada por $C= (5/9)(F - 32)$, donde $C$ es la temperatura en grados Celsius y $F$ es la temperatura en grados Fahrenheit. Determine el intervalo en la escala Fahrenheit correspondiente al rango de temperatura de $15 \leq C \leq 25$

**AC8.** Analice las gráficas e indique a cuáles de ellas pertenecen las siguientes desigualdades:

$-x - y \geq 2$
$x + y \geq 2$
$-x + y > 1$
$x - y > 4$

**Figura 31**



## Ejercicios de aplicación

**EA1.** Si observamos el siguiente gráfico en el que se representa la ubicación del sensor de flujo de aire de un automóvil (MAF); este sensor mide la cantidad de aire que ingresa al motor para que la computadora del vehículo envíe una señal de voltaje y dosifique la cantidad de combustible para los inyectores.

**Figura 32**

Determine los valores de variación del voltaje si la expresión viene dada por:

$$|x - 5/2| \leq 2{,}5$$

**EA2.** El rango de temperatura del refrigerante de un motor está dado por la siguiente inecuación:

$$|C - 55°| \leq 35°$$

Determine el intervalo de temperatura y grafique

Investigue la fórmula de conversión a grados Fahrenheit y represente este intervalo en forma de inecuación.

**EA3.** Una fábrica de luces direccionales para vehículos entre mano de obra y materia gasta 21 dólares por cada juego de luces direccionales producidas y sus costos fijos son de 70000 dólares. Si el precio de venta de cada juego de direccionales es de 35 dólares ¿Cuántas unidades debe vender como mínimo para que la compañía genere utilidades?

## 2.5 Funciones y relaciones

El concepto de Función es uno de los más importantes en la matemática. Para lograr comprender lo que es una función, debemos tener la noción de correspondencia, el establecer correspondencias entre varios tipos de fenómenos, nos permite hacer pronósticos. Para lo cual empezaremos escribiendo ejemplos de correspondencias:

*En un patio de venta de vehículos a cada auto le corresponde un precio*

*En un directorio telefónico a cada nombre le corresponde uno o más números de teléfono*

Si analizamos estos ejemplos de correspondencias, vemos que existe una asociación de elementos de un conjunto llamado dominio de la correspondencia con otro llamado recorrido de dicha correspondencia. Así:

**Figura 33**


a b

Estos ejemplos de correspondencia de la figura 33 son una relación.

### *2.5.1 Relación*

Es la correspondencia de un primer conjunto, llamado dominio con un segundo conjunto llamado rango, de manera que a cada elemento del dominio le corresponde uno o más elementos del recorrido.

## *2.5.2 Función*

Es una relación con la restricción de que a cada elemento del dominio le corresponde uno y solo un elemento del recorrido.

Por lo tanto todas las funciones son relaciones, pero no todas las relaciones son funciones.

El ejemplo *a)* de la figura 34, es una función en tanto que el ejemplo *b)* no lo es.

Las funciones matemáticas se utilizan para explicar el comportamiento de los fenómenos que pasan a nuestro alrededor como por ejemplo la cantidad de lluvia que cae en la ciudad, el crecimiento de la población del Ecuador, el caudal de un río, entre otros. Pero para armar una función matemática debemos tener presente que elementos no más influyen en cada fenómeno para saber colocarlos dentro de la misma, como por ejemplo para hacer el análisis del enfriamiento de un cuerpo Isaac Newton descubrió que este depende de la diferencia de temperaturas entre el cuerpo y el medio en donde se encuentra es decir si la diferencia entre ambas temperaturas es grande la rapidez a la cual desciende la temperatura será grande y si la diferencia entre ambas temperaturas es pequeña la rapidez a la cual desciende la temperatura será menor, en este ejemplo también debemos tener en cuenta que a medida que transcurre el tiempo el cuerpo se irá enfriando es decir que la temperatura del cuerpo depende del tiempo, al introducir estas dos variables (tiempo y Temperatura) en una función debemos darnos cuenta que el tiempo es la variable independiente y la temperatura es la variable dependiente, expresado en forma matemática tenemos que: $T(t)$ es decir la temperatura $T$ depende del tiempo $t$.

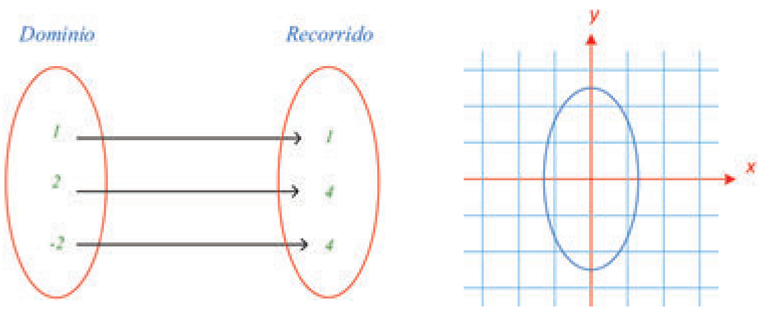
Por ejemplo si un recipiente es llenado con agua que cae en caudal constante y queremos analizar la función que se generaría debemos tener presente que el volumen de agua dentro del recipiente depende del tiempo que transcurra por ejemplo al inicio es decir en el tiempo

$0$ $(t=0)$ el volumen será $0$ $(V=0)$ porque todavía no habrá empezado a caer agua dentro del recipiente pero conforme transcurra el tiempo el volumen de agua dentro del recipiente aumentará, podemos concluir que el volumen de agua depende del tiempo, su expresión sería $V(t)$

## Ejercicios resueltos

En las siguientes correspondencias indique cuales de ellas son funciones y cuales no lo son:

**Figura 34**




a) b)

## Solución

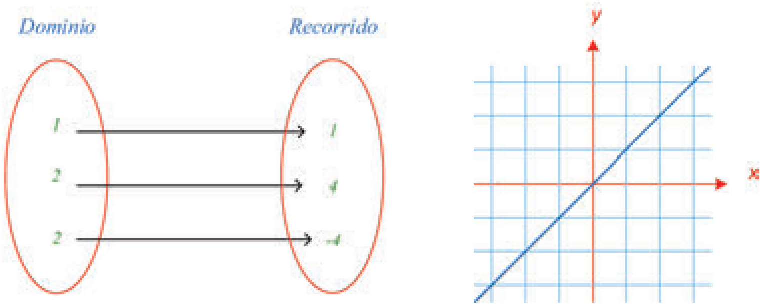
El literal *a* es una función ya que a cada elemento del dominio le corresponde uno y solo un elemento del recorrido.

El literal *b* no es una función ya que a cada elemento del dominio le corresponde uno o más elementos del recorrido.

## Ejercicios propuestos

En las siguientes correspondencias indique cuales de ellas son funciones y cuales no lo son justificando sus respuestas:

Figura 35

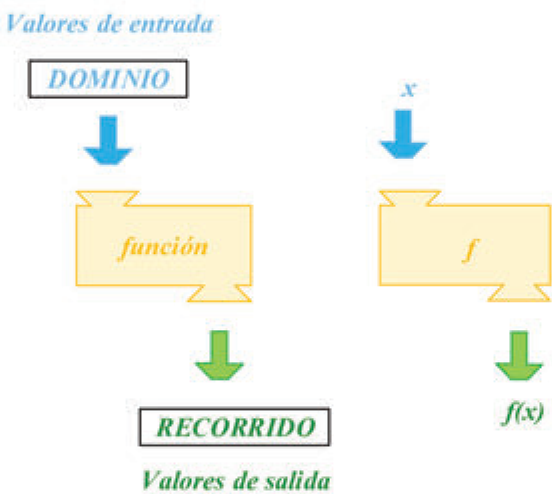



a) b)

## *2.5.3 Interpretación gráfica de una función*

El siguiente gráfico es un diagrama para interpretar una función, siendo el dominio todos los valores que acepta la función como entrada y el rango los valores de salida de dicha función.

Figura 36



## 2.5.4 Notación

$$y = f(x)$$

Se lee y es una función de $x$

## 2.5.5 Definición

Una función $f$ es una regla que asigna a cada elemento $x$ de un conjunto $X$ exactamente un elemento $y$ del conjunto $Y$, llamado la imagen de $x$ denotado por $f(x)$. El conjunto $X$ se llama **dominio** de la función. El **rango** de la función consta de todas las imágenes de los elementos de $X$.

## 2.5.6 Variables

***Variable independiente.***- Se llama así a un símbolo que representa un número arbitrario en el dominio de una función f.

***Variable dependiente.***- Se conoce a sí a un símbolo que represente un número en el rango def.

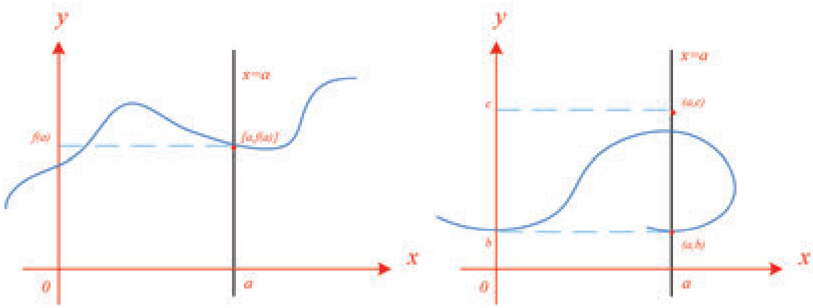
El valor de la variable $y$ siempre depende de la elección de la variable $x$, por lo tanto $y$ es la variable dependiente y $x$ es la variable independiente.

**Dominio** es el conjunto de los valores que puede tomar la variable independiente que dan resultados reales. **Rango** es el conjunto de resultados reales de la variable dependiente.

## 2.5.7 Prueba de la recta vertical

Una función de $x$, es una curva en el plano $xy$, si y solo si una recta vertical la intercepta en un solo punto.

Figura 37

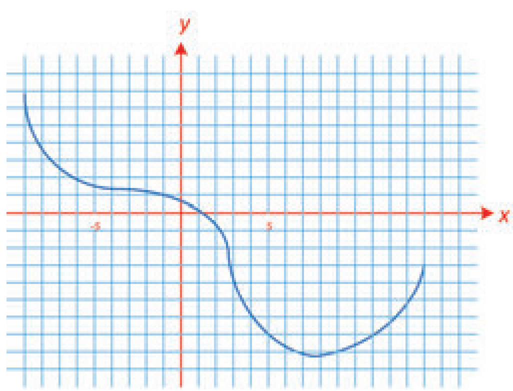



En la figura 37 se puede observar que en el primer caso la recta vertical $x = a$ intercepta a la curva en un solo punto, por lo tanto se define un solo valor funcional para *f(a)*, mientras tanto en la segunda figura la recta vertical $x$ = a, intercepta a la curva en dos puntos asignando así dos valores diferentes de *a*, por lo tanto la curva no representa una función de *x*.

## Ejercicios resueltos

**ER1.** En el siguiente gráfico indicar el dominio de la función:

Figura 38



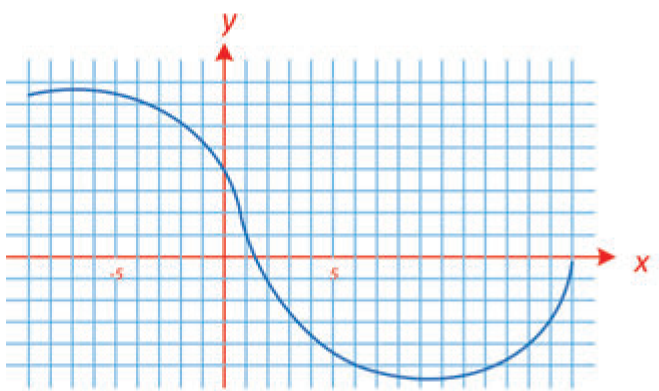
## Solución

Según la referencia en el gráfico y sabemos que el dominio son los valores en *x* sería: *[-9, 14]*

## Ejercicios propuestos

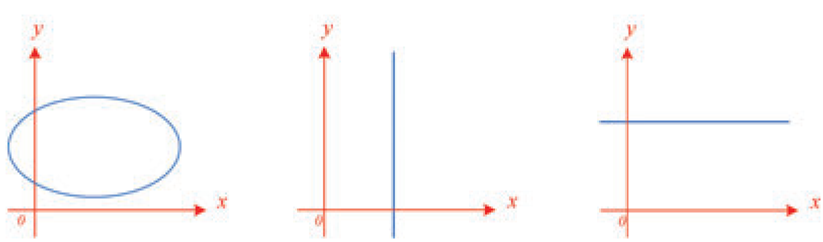
**EP1.** En el siguiente gráfico indicar un valor aproximado para dominio y el rango de la función:

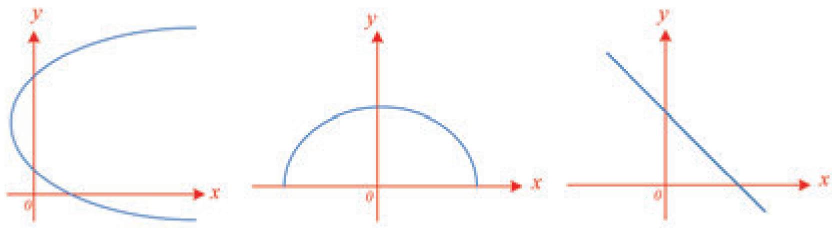
**Figura 39**




**EP2.** Use la prueba de la recta vertical para indicar los gráficos de la figura 40 que corresponde y los que no, a una función de *x*.

**Figura 40**



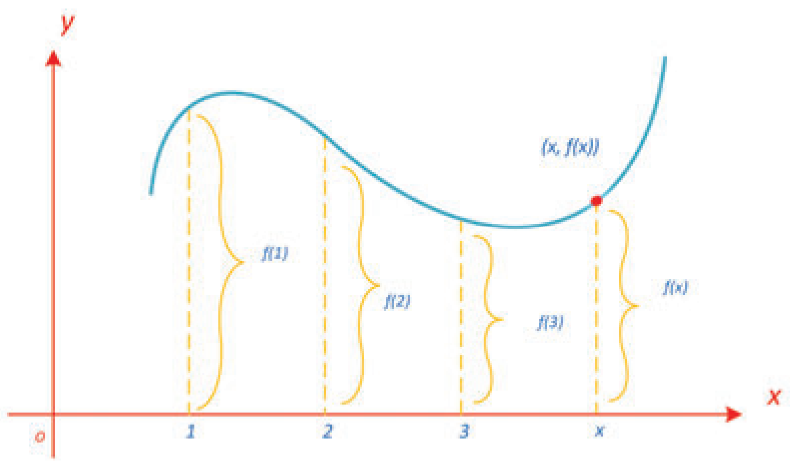



## 2.5.8 Evaluar un punto en la función

Si $f$ es una función con dominio $X$, entonces su gráfica es el conjunto de pares ordenados $\{(x, f(x)) \mid x \in X\}$. Es decir la gráfica de $f$ consta de todos los puntos $(x, y)$ en el plano coordenado tales que $y = f(x)$ y $x$ está en el dominio de $f$.

La coordenada $y$ de cualquier punto $(x, y)$ en el gráfico es $y = f(x)$, se puede leer el valor de $f(x)$ como la altura de la gráfica por encima del valor de $x$ como se muestra en la figura 41.

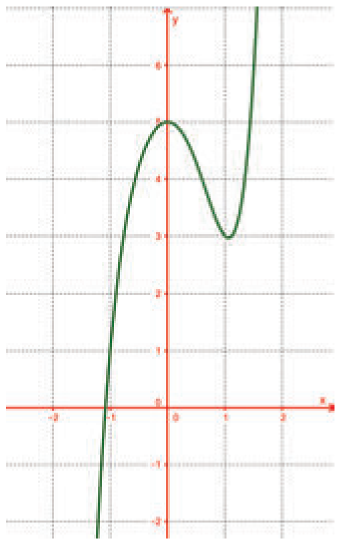
**Figura 41**



## Ejercicios resueltos

**ER1.** Estime los valores de *f(0)*, *f(1)* y *f(-1)* de la función de la gráfica.

**Figura 42**



## Solución

Sabemos que *y=f(x)*, se debe leer el valor de *f(x)* en el eje de las ordenadas como la altura por encima del valor de *x*, de tal forma que:

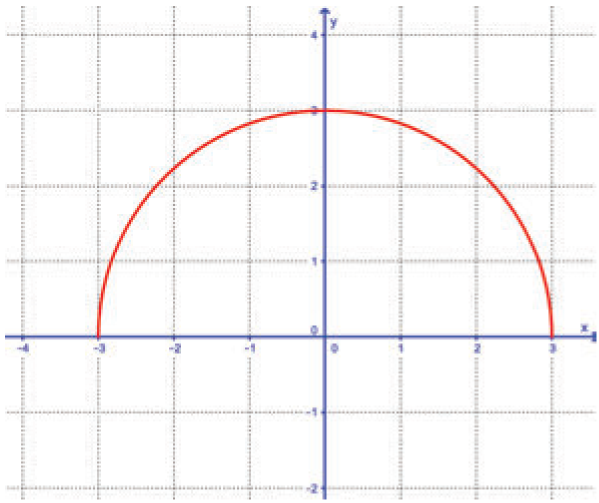
*f(0) = 5*
*f(1) = 3*
*f(-1) = 1*

## Ejercicios propuestos

**EP1.** Sea la función $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-16}{4}}$ . Determine *f(4)*, *f(-4)*

**EP2.** Estime los valores de $f(0)$, $f(1)$, $f(-2)$, $f(3)$, y $f(-3)$ de la función de la gráfica.

**Figura 43**




## *2.5.9 Simetría de funciones*

**SIMETRÍA.** Correspondencia exacta en la disposición regular de las partes o puntos de un cuerpo o figura, con relación a un centro, un eje o a un plano.

### *2.5.9.1 Función par*

Si una función $f$ satisface $f(-x) = f(x)$ para todo $x$ en su dominio. Ejemplo:

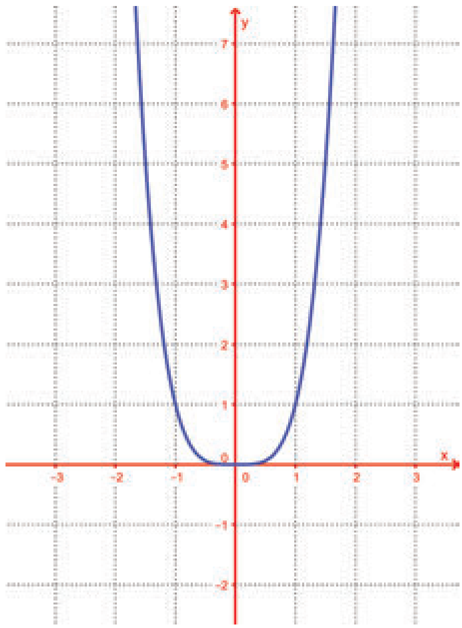
Sea la función $f(x) = x^4$

Analizamos:

$f(-x) = (-x)^4 = x^4 = f(x)$

Geométricamente una función par presenta una simetría con respecto al eje *y*.

**Figura 44**




### *2.5.9.2 Función impar*

Si una función $f$ satisface $f(-x) = -f(x)$ para todo $x$ en su dominio. Ejemplo:

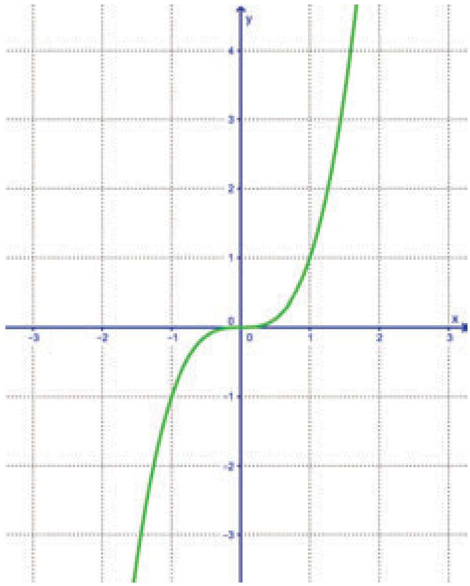
Sea la función $f(x) = x^3$

Analizamos:

$(-x) = (-x)^3 = (-x)^3 = -f(x)$

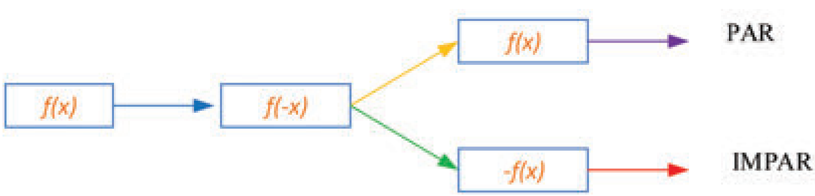
Geométricamente una función impar presenta una simetría con respecto al origen.

Figura 45




En el siguiente diagrama podemos observar la información sobre la simetría de funciones:

Figura 46




## Ejercicios resueltos

**ER1.** Indicar si la función $f(x)=x^5+x^3-3x$ es simétrica con respecto al eje $y$, con respecto al origen o no tiene simetría.

## SOLUCIÓN

Determinamos $f(-x)$:

$f(-x) = (-x)^5 + (-x)^3 - 3(-x)$

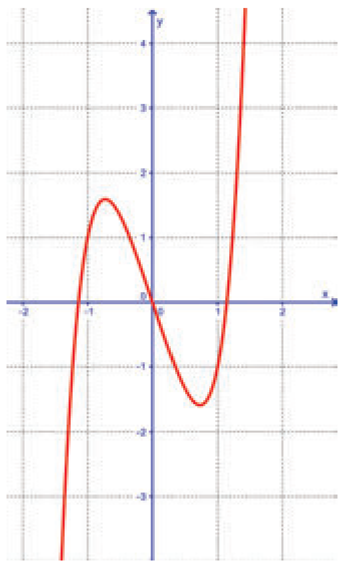
$f(-x) = -x^5 - x^3 + 3x$

$f(-x) = -(x^5 + x^3 - 3x)$

$f(-x) = -f(x)$

Por lo tanto la función es impar, simétrica con respecto al origen. (Ver gráfica 47)

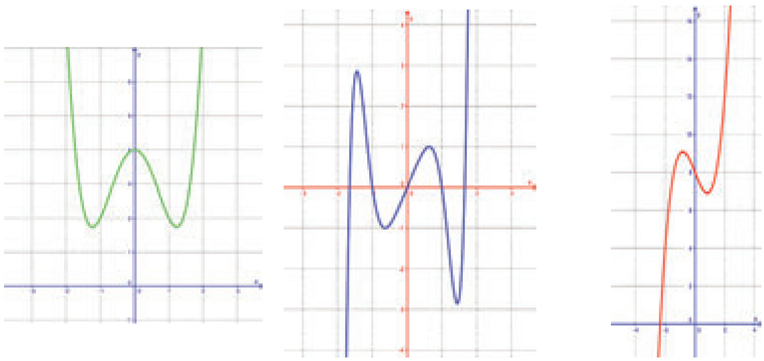
**Figura 47**




## EJERCICIOS PROPUESTOS

**EP1.** Según las gráficas determinar la simetría de funciones.

**Figura 48**

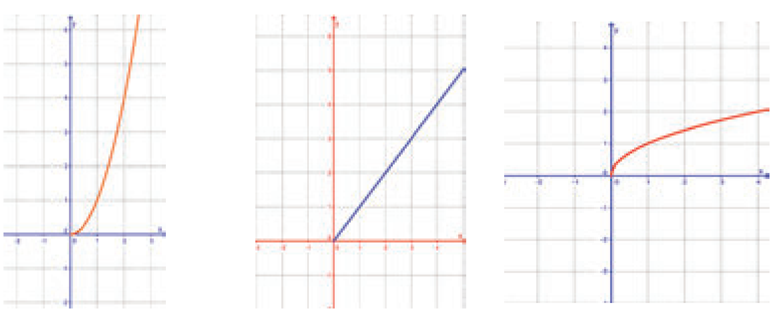


**EP2.** Analizar las siguientes funciones e indicar su simetría si es que son simétricas.

$f(x) = x^2 + 3x$
$g(x) = e^x$
$h(x) = |x|$
$k(x) = x^7 - 2x$

**EP3.** Completar las gráficas de modo que presenten *a)* simetría con respecto al eje *"y" b)* simetría con respecto al origen:

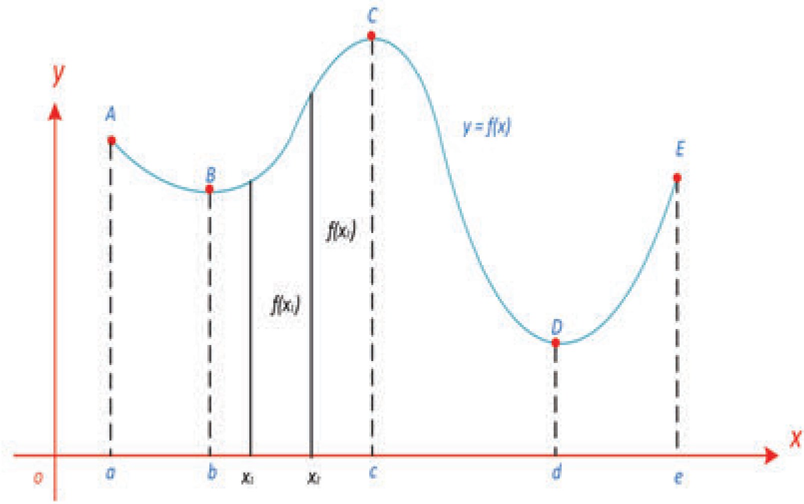
**Figura 49**



## 2.5.10 Funciones crecientes y decrecientes

En la gráfica de la figura 50 se puede observar que desde *A* hasta *B* la función baja o decrece, desde *B* hasta *C* la función sube o crece, desde *C* hasta *D* la función decrece y desde *D* hasta *E* otra vez crece.

**Figura 50**




En el intervalo *[b, c]* se puede apreciar que $x_1 < x_2$, asimismo que $f(x_{1)} < f(x_2)$ y la función es creciente, con esta información se resume el siguiente cuadro:

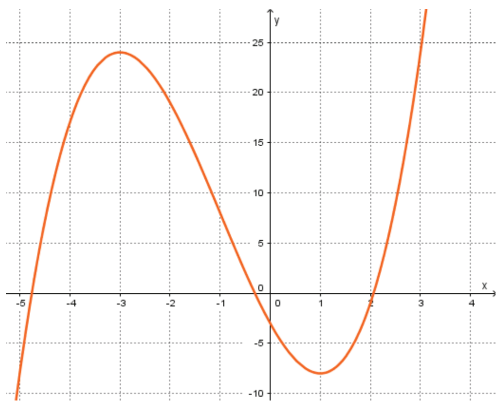
> Una función *f* se llama creciente sobre un intervalo *I* si:
> $f(x1) < f(x2)$ siempre que $x1 < x2$ en *I*
>
> Una función *f* se llama decreciente sobre un intervalo *I* si:
> $f(x1) > f(x2)$ siempre que $x1 < x2$ en *I*

## Ejercicios resueltos

Sea la función $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 3$. Usando los criterios para saber si es creciente o decreciente analizar en los intervalos:

a. $(-\infty, -3]$
b. $[-3, 1]$
c. $[1, \infty)$

**Figura 51**




## Solución

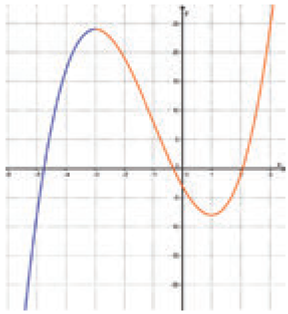
Para el intervalo del literal *a)*: $(-\infty, -3]$

Tomamos $x_1$ y $x_2$ que estén dentro del intervalo:
$x_1 = -5$
$x_2 = -4$

Observamos que $x_1 < x_2$

Determinamos $f(x_1)$ y $f(x_2)$:
$f(x_1) = (-5)^3 + 3(-5)^2 - 9(-5) - 3$
$f(x_1) = -8$

**Figura 52**



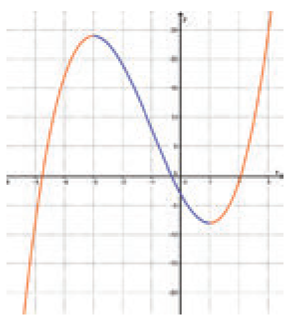
$f(x_2) = (-4)^3 + 3(-4)^2 - 9(-4) - 3$
$f(x_1) = 17$

Observamos que $f(x_1) < f(x_2)$

Por lo tanto en este intervalo la función es creciente.

Para el intervalo del literal *b): [-3, 1]*
$x_1 = -2$
$x_2 = 0$
$x_1 < x_1$
$f(x_1) = 19$
$f(x_2) = -3$

**Figura 53**



Observamos que $f(x_1) > f(x_2)$

Por lo tanto en este intervalo la función es decreciente.

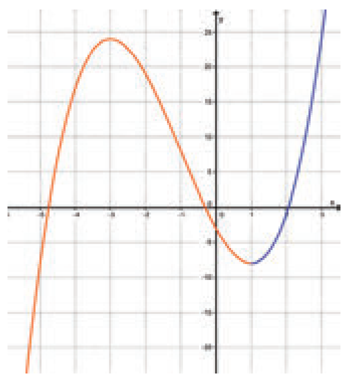
Para el intervalo del literal *c)*: $[1, \infty)$

$x_1 = 2$
$x_2 = 3$
$x_1 < x_2$
$f(x_1) = -1$
$f(x_2) = 24$

Observamos que $f(x_1) < f(x_2)$

Por lo tanto en este intervalo la función es creciente.

**Figura 54**



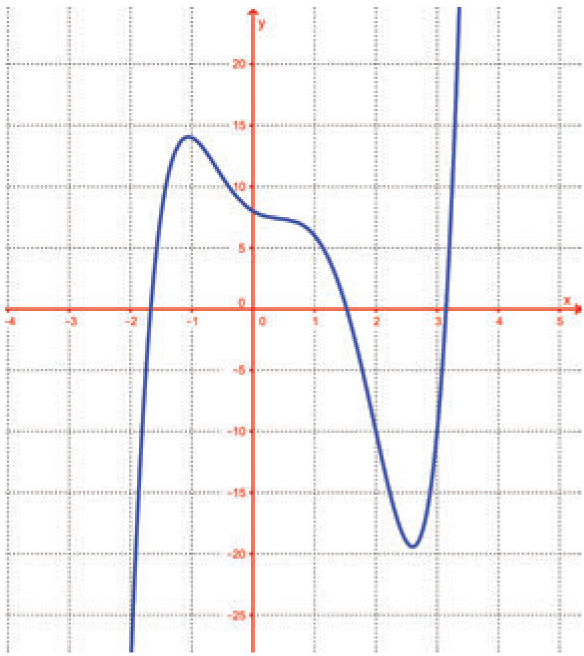
## Ejercicios propuestos

**EP1.** En la gráfica 55 indicar los intervalos donde la función es creciente y asimismo donde la función es decreciente

**EP2.** Graficar las funciones propuestas usando un software, analizar los intervalos donde la función crece y donde la función decrece, comparar los resultados realizando el estudio analítico.

a. $f(x) = x^2 + x - 1$
b. $g(x) = ln(5x)$
c. $h(x) = x^5 - x + 7$

**Figura 55**



## *2.5.11 Operaciones entre funciones*

Dos funciones *f* y *g* pueden combinarse mediante operaciones para formar nuevas funciones:

$f + g, f - g, fg, f/g$

Las operaciones se definen de la siguiente manera:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$
$$(f/g)(x) = f(x)/g(x)$$

Si el dominio de $f$ es $A$, y el dominio de $g$ es $B$, el dominio de la función resultante de realizar las operaciones entre dichas funciones es: $A \cap B$

## Ejercicios resueltos

**ER1.** Sea $f(x) = x^2 + x - 3$ y $g(x) = x^3 + 2x$. Determine $(f+g)(x)$

Resolución:

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
$(f+g)(x) = x^2 + x - 3 + x^3 + 2x$
$(f+g)(x) = x^3 + x^2 + 3x - 3$

Dominio: $(-\infty,\infty)$

**ER2.** Sea $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ y $g(x) = \sqrt{x - 5}$ Determine $(f+g)(x)$

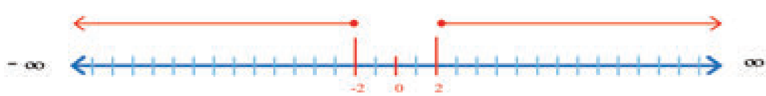
Resolución:

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$$(f+g)(x) = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{x - 5}$$

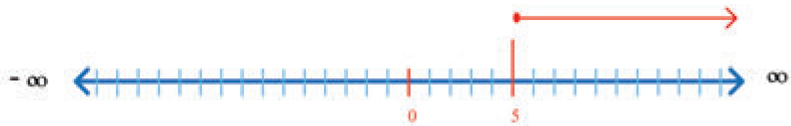
Dominio de $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ es: $(-\infty,-2] U [2,\infty)$

**Figura 56**



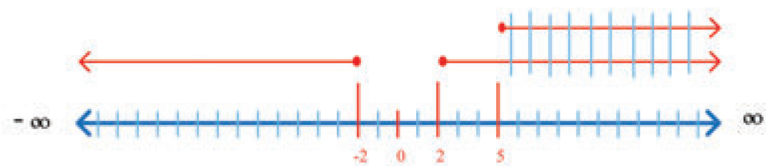
Dominio de $g(x) = \sqrt{x-5}$ es: $[5,\infty)$

Figura 57




Dominio de $(f+g)(x)$ es $[5,\infty)$

Figura 58




**ER3.** Sea: $f(x) = x^2 -3$ y $g(x) = x+5$. Determine $(f/g)(x)$

Resolución:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2-3}{x+5}$$

Dominio de $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ es $\{x \in A \cap B | g(x) \neq 0\}$ ya que no podemos dividir para cero, es decir: $\{ x \,\square\, x \neq -5 \}$ o $(-\infty,-5) \cup (-5,\infty)$.

## Ejercicios propuestos

**EP1.** Sean las funciones:

$f(x) = x^2 -1$

$$g(x) = \sqrt{9 - x^2}$$

Determine:

$$(f + g)(x)$$

$$(f - g)(x)$$

$$(fg)(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)$$

### 2.5.12 Composición de funciones

Dadas dos funciones $f$ y $g$, la función compuesta $f \circ g$, se define como:

$$(f \circ g)(x) = f((x))$$

#### Ejercicios resueltos

**ER1.** Sean las funciones

$f(x) = x^3 - 4x + 5$

$$g(x) = \sqrt{x^2 + 4}$$

$$h(x) = \frac{x + 5}{x}$$

Determinar: $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$, $(f \circ h)(x)$, $(h \circ h)(x)$

#### Solución

$(f \circ g)(x) = (f(g(x))$

$$\left(f\left(g(x)\right)\right) = (\sqrt{x^2+4})^3 - 4(\sqrt{x^2+4}) + 5$$

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$$g\left(f(x)\right) = \sqrt{(x^3 - 4x + 5\,)^{\mathbf{2}} + 4}$$

$(f \circ h)(x) = f(h(x))$

$$f\left(h(x)\right) = \left(\frac{x+5}{x}\right)^3 - 4\left(\frac{x+5}{x}\right) + 5$$

$(h \circ h)(x) = h(h(x))$

$$h\left(h(x)\right) = \frac{\frac{x+5}{x} + 5}{\frac{x+5}{x}} = \frac{6x+5}{x+5}$$

## Ejercicios propuestos

**EP1.** Para los siguientes casos, $h(x) = (f \circ g)(x)$, indicar cuáles podrían ser las funciones

$f(x)$ y $g(x)$
$h(x) = |x+3|$
$h(x) = e^{4x+5}$
$h(x) = (x+4)/x^2$
$h(x) = (x+5)^3 -4x -20$

**EP2.** Sean las funciones

$f(x) = x$

$$g(x) = \sqrt{x^2 + 4x - 5}$$

$h(x) = ex^2$

Determinar: $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$, $(f \circ h)(x)$, $(h \circ h)(x)$

**EP3.** Sea $(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$, determinar $(f \circ g \circ h)(x)$ de las siguientes funciones:

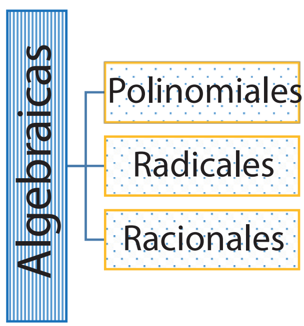
$f(x) = x^5$

$$g(x) = \sqrt{x^3}$$

$h(x) = ln(x^2)$

## *2.5.13 Clases de funciones*

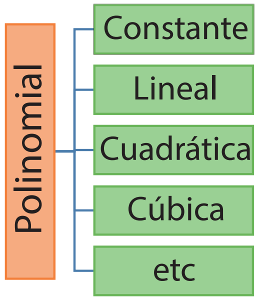
**FUNCIONES ALGEBRAICAS.** Si una función puede construirse usando operaciones algebraicas se llama función algebraica.




**FUNCIONES POLINOMIALES.** Una función se denomina polinomial si:

$$f(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_2\, x^2 + a_1\, x + a_0$$

Donde $n$ es un número entero no negativo y $a_0$, $a_1$, $a_2$,..., $a_n$, son constantes llamadas coeficientes. El dominio de las funciones polinomiales es $(-\infty, \infty)$. Si el coeficiente principal $a_n \neq 0$, el grado de la función es $n$.



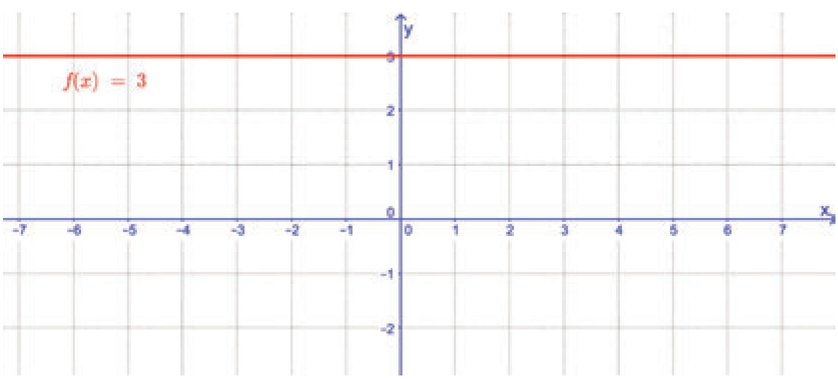

**FUNCIÓN CONSTANTE.** La gráfica de cualquier valor constante es una recta horizontal que asigna a cada elemento de la abscisa siempre un mismo valor de ordenada. Tiene la forma $f(x) = c$ donde a $c$ se le puede asignar cualquier valor.

Ejemplo: la función $f(x) = 3$ es una recta horizontal que para cualquier valor de $x$ toma siempre el valor 3 en $y$.

**DOMINIO.** Es el conjunto formado por todas los elementos que tienen imagen, es decir $(-\infty,\infty)$

**RANGO.** Es el conjunto formado por las imágenes, es decir: $\{3\}$

**Figura 59**



**FUNCIÓN LINEAL.** Es una función polinomial de grado 1, de la forma: $f(x) = mx + b$, cuya gráfica es una recta

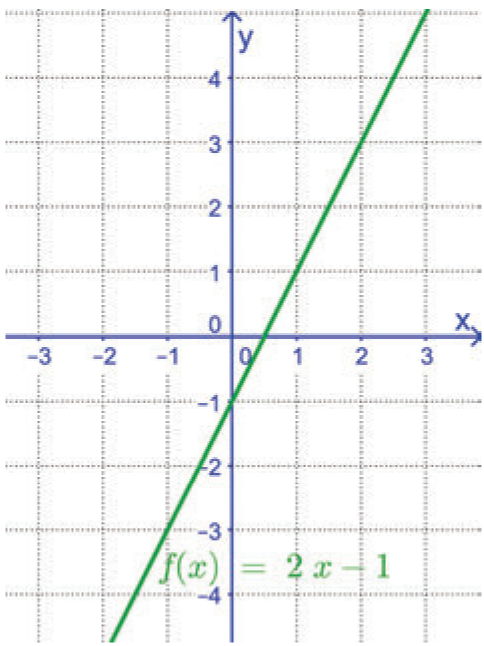
Ejemplo:

$f(x) = 2x - 1$

**DOMINIO:** Es el conjunto formado por todas los elementos que tienen imagen, es decir $(-\infty,\infty)$

**RANGO:** Es el conjunto formado por las imágenes, es decir: $(-\infty,\infty)$

**Figura 60**



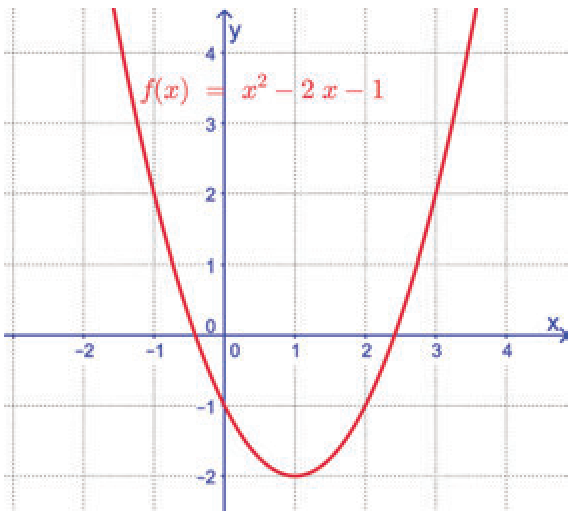

**FUNCIÓN CUADRÁTICA:** Son funciones polinómicas de segundo grado, siendo su gráfica una parábola. Su forma general es: $f(x) = ax^2+bx+c$

Ejemplo: $y = x^2 – x - 1$

**DOMINIO:** Es el conjunto formado por todos los elementos que tienen imagen, es decir $(-\infty,\infty)$

**RANGO:** Es el conjunto formado por las imágenes, es decir: $[-2,\infty)$

**Figura 61**




**FUNCIÓN CÚBICA.** Son funciones polinómicas de grado tres, tiene la forma general:

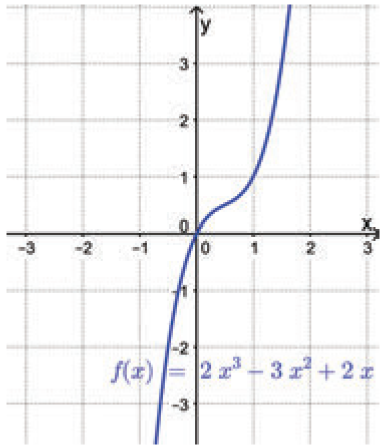
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Ejemplo: $y = 2x^3 - 3x^2 + 2x$

**DOMINIO:** Es el conjunto formado por todas los elementos que tienen imagen, es decir $(-\infty,\infty)$

**RANGO:** Es el conjunto formado por las imágenes, es decir: $(-\infty,\infty)$

Figura 62

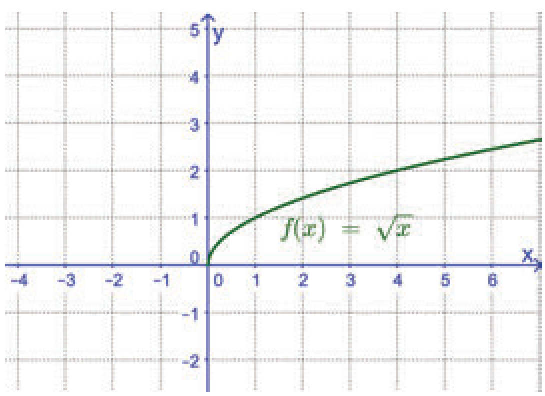



**FUNCIÓN RADICAL.** La función *f(x)* = $x^{1/n}$ es igual a: $f(x) = \sqrt{x}$ siendo *n* un número entero positivo, para *n=2* es la función raíz cuadrada, es decir: $f(x) = \sqrt[n]{x}$

**DOMINIO:** *[0,∞)*

**RANGO:** *[0,∞)*

Figura 63

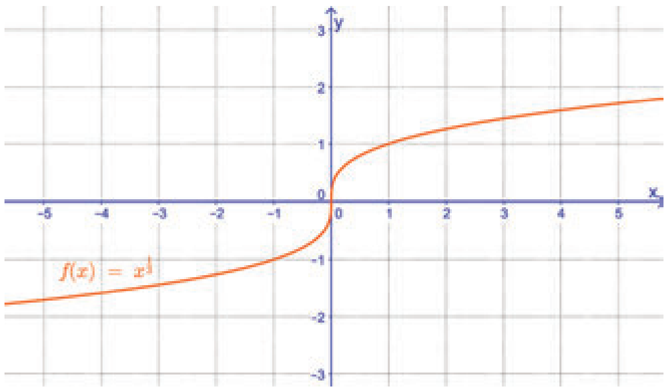


Para *n=3*, tenemos la función raíz cúbica de: *x* $f(x) = \sqrt[3]{x}$

**DOMINIO:** *[-∞,∞)*

**RANGO:** *[-∞,∞)*

**Figura 64**




**FUNCIONES RACIONALES:** Una función racional *f* es la razón de dos polinomios *P(x)* y *Q(x)*. El dominio consiste en todos los valores de *x* tales que $Q(x) \neq 0$

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Ejemplo: $y = \frac{2x}{x-1}$ de donde: $P(x) = 2x$ y $Q(x) = x-1$

**DOMINIO:** Es el conjunto formado por todas los elementos que tienen imagen, en las funciones racionales los valores que no deben pertenecer al dominio son los que anulan al denominador, en este caso cuando $x = 1$ el denominador es cero.

Para determinar dicho valor, se puede proceder de la siguiente forma:

$$x\text{-}1 \neq 0$$

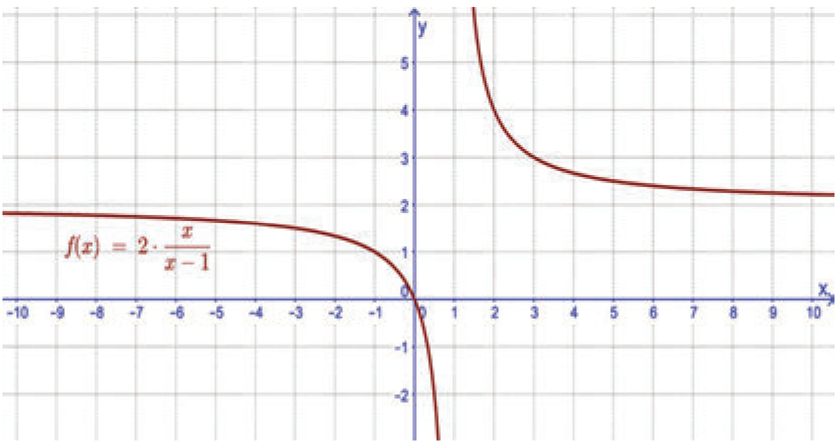
Despejando:

$$x \neq 1$$

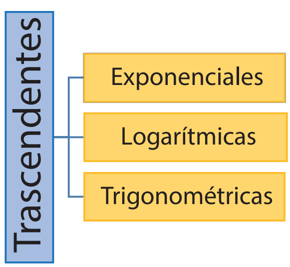
Es decir: $(-\infty,1)U(1,\infty)$

**RANGO:** Es el conjunto formado por las imágenes, es decir: $(-\infty,2)U(2,\infty)$

**Figura 65**

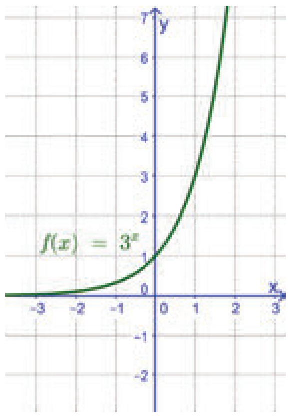



**FUNCIONES TRASCENDENTES:** Son funciones que no obedecen una ecuación polinómica.



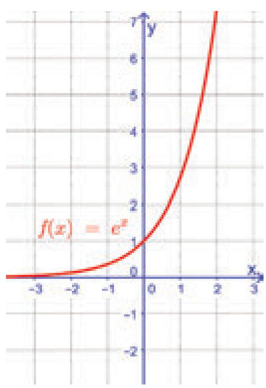
**FUNCIÓN EXPONENCIAL.** Las funciones exponenciales son de la forma $f(x) = a^x$, donde la base $a$ es una constante y es positiva. Como ejemplo tomamos $f(x) = 3^x$, el dominio es $(-\infty, \infty)$, el rango es $(0, \infty)$, la gráfica corresponde a la figura 66.

**Figura 66**



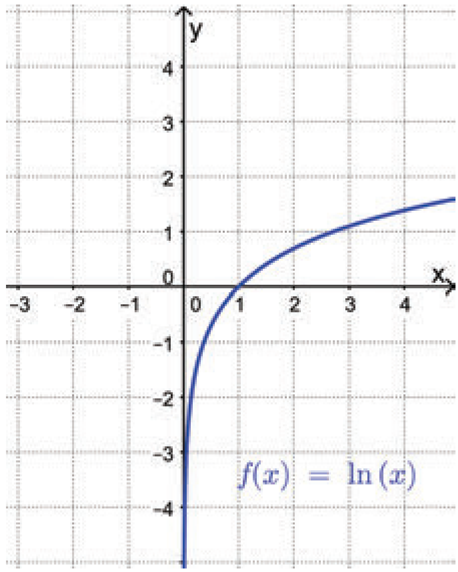

La función exponencial con base $e$, es una de las funciones con más uso para el cálculo, su dominio es $(-\infty, \infty)$, el rango es $(0, \infty)$, la gráfica es:

**Figura 67**



**FUNCIÓN LOGARITMO NATURAL.** Es una función creciente, cuyo dominio es *(0,∞)*, y el rango es *(-∞,∞)*, la gráfica es:

**Figura 68**



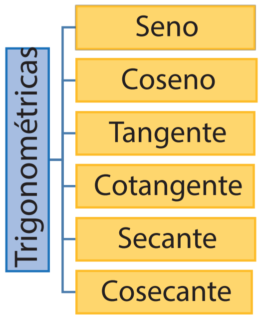

*Funciones periódicas: amplitud, período, frecuencia*

Una función $f(x)$ es periódica si existe un número $T$ tal que pueda hacer $f(x+T) = f(x)$ para todas las $x$. Al menor número $T$ se le llama período.

De este tipo de funciones las más importantes son las funciones trigonométricas.

**FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS:** Las funciones trigonométricas básicas son: seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante.

También existen las funciones inversas y las funciones hiperbólicas derivadas de las funciones básicas.



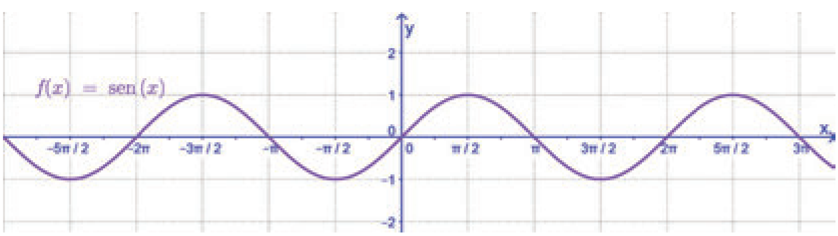

**FUNCIÓN SENO:** Es una de las funciones más utilizadas en el campo de las matemáticas y en aplicaciones de ingeniería. A continuación se presenta una tabla en donde se definen sus características:

Tabla 3

| $f(x)$ | Período | Amplitud | Rango | Dominio | Cortes con $x$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $sen(x)$ | $2\pi$ | $1$ | $[-1,1]$ | $(-\infty,\infty)$ | $(\pi/2+n\pi)$ donde $n$ pertenece a $R$ |

Función recíproca: cosecante
Cofunción: coseno

Figura 69



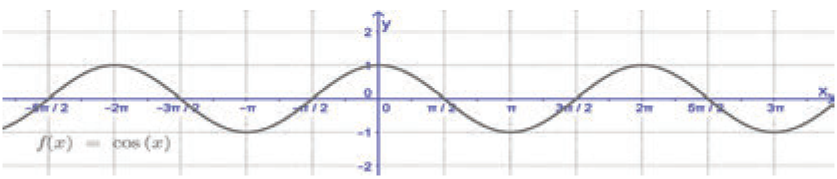

**FUNCIÓN COSENO:** Al igual que el seno es uno de las más utilizadas en matemáticas y aplicaciones de ingeniería. La tabla donde se explica su comportamiento es la siguiente:

Tabla 4

| *f(x)* | Período | Amplitud | Rango | Dominio | Cortes con *x* |
|---|---|---|---|---|---|
| *cos (x)* | *2π* | *1* | *[-1,1]* | *(-∞,∞)* | (π/2+*n*π) donde *n* pertenece a *R* |

Función recíproca: secante

Figura 70



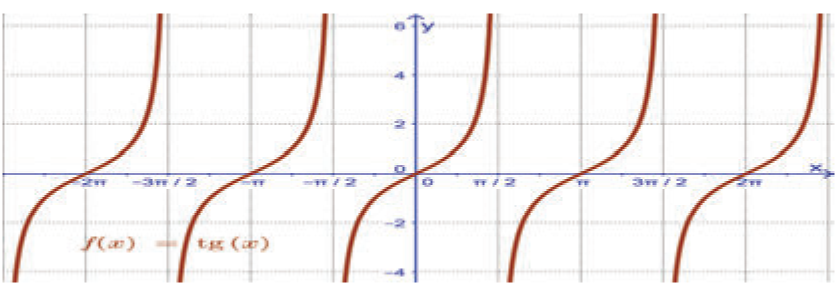

**FUNCIÓN TANGENTE:** Es una función que también es utilizada en ingeniería, es una función discontinua. Se presenta la tabla de valores de la función tangente

Tabla 5

| *f(x)* | Período | Amplitud | Rango | Dominio | Cortes con *x* |
|---|---|---|---|---|---|
| *tan(x)* | π | infinito | *(-∞,∞)* | $R-\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}$ donde *n* pertenece a *R* | (*n*π) donde *n* pertenece a *R* |

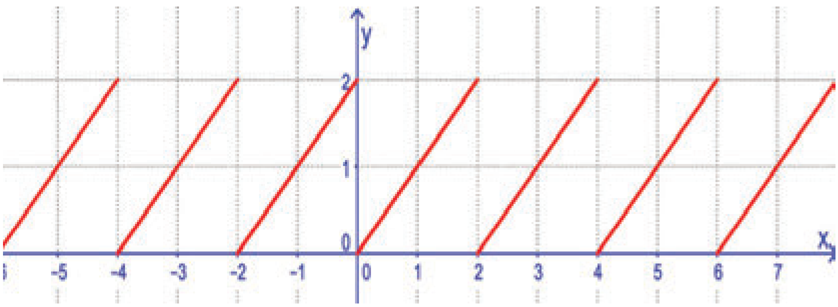
Función recíproca: cotangente
Cofunción: cotangente

Figura 71



**OTRO TIPO DE FUNCIÓN PERIÓDICA:** En ingeniería se pueden trabajar con funciones periódicas como las mostradas en la figura en donde la variable independiente por lo general toma valores en el tiempo y se trabaja con la variable *t* en lugar de la variable *x*, este tipo de funciones tienen un tratamiento especial matemático.

**Figura 72**




Observando la gráfica se puede verificar que la función se repite cada *2*, por lo tanto la función es periódica de período *T=2*.

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t < 2 \\ 0 & t = 2 \end{cases} \qquad f(t+2) = f(t)$$

*Otras funciones*

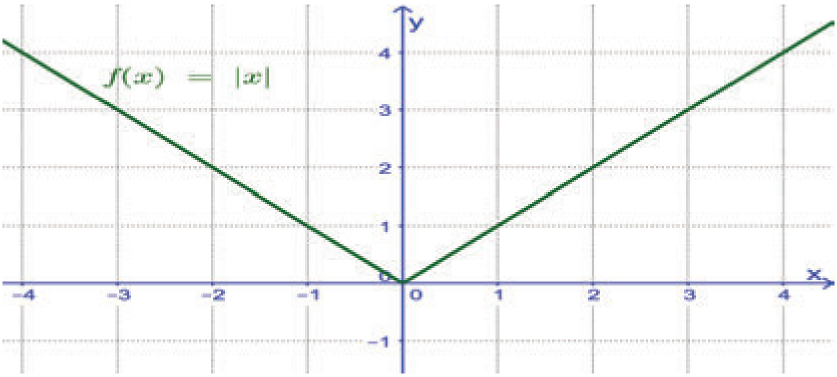
**FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO:** Se define:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$$

**DOMINIO:** Es el conjunto formado por todas los elementos que tienen imagen, es decir *(-∞,∞)*

**RANGO:** Es el conjunto formado por las imágenes, la función valor absoluto nunca devuelve un valor negativo, por lo tanto su dominio es: *[0,∞)*

Figura 73




**FUNCIÓN DEFINIDA POR PARTES:** Como su nombre lo indica este tipo de funciones es la unión de dos o más funciones en una sola función, para ello cada parte existe dentro de un intervalo dado.

Ejemplo:

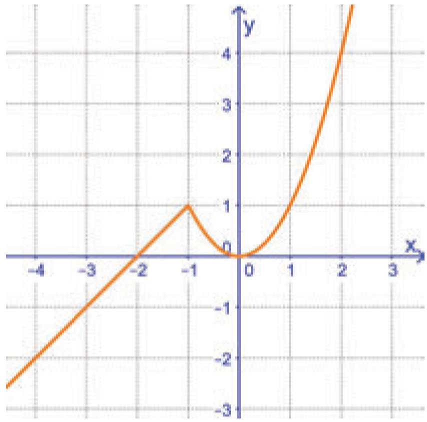
$$f(x) = \begin{cases} x+2 & si \quad x \leq -1 \\ x^2 & si \quad x > -1 \end{cases}$$

En este ejemplo la función se compone de dos partes, la primera que es una recta y va desde menos infinito hasta tomar el valor de -1 y la segunda parte la compone una parábola que toma los valores después de -1 hasta el infinito. Aunque está compuesta de dos partes a la función se la considera una sola. Las funciones por partes no siempre son continuas, puede haber discontinuidades, en este ejemplo la función es continua.

**DOMINIO:** Es el conjunto formado por todas los elementos que tienen imagen, es decir *(-∞,∞)*

**RANGO:** Es el conjunto formado por las imágenes, es decir *(-∞,∞)*

Figura 74



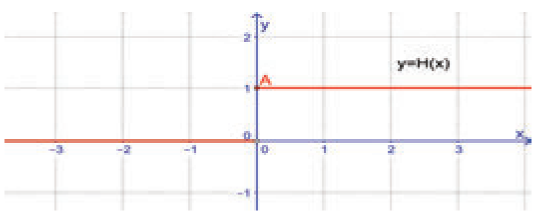

**FUNCIÓN ESCALÓN UNITARIO (FUNCIÓN HEAVISIDE):** Es una función discontinua, su nombre se debe al matemático inglés Oliver Heaviside, esta función toma el valor 0 cuando la variable independiente es menor a 0 y toma el valor de 1 cuando la variable independiente es igual o mayor a 1. Su función matemática es:

$$y = H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

**DOMINIO:** Es el conjunto formado por todas los elementos que tienen imagen, es decir *(-∞,∞)*

**RANGO:** Es el conjunto formado por las imágenes, es decir: {1}

Figura 75



*Funciones trigonométricas inversas*

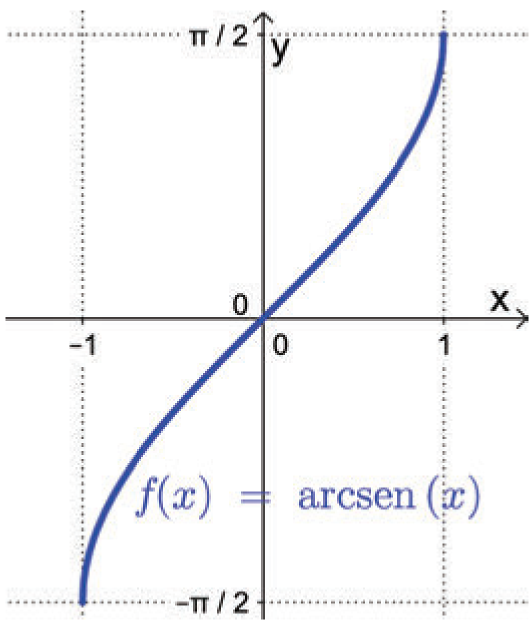
**FUNCIÓN SENO INVERSO (ARCOSENO):** La función trigonométrica *sen(x)* no es uno a uno, pero se puede restringir al dominio $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ para que sí lo sea. Denotamos $sen^{-1}(x)$ o *arcsen(x)*.

Las ecuaciones de cancelación correspondientes son

$$\sin^{-1}(\sin x) = x \qquad para -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\sin(\sin^{-1} x) = x \qquad para - 1 \leq x \leq 1$$

**Figura 76**



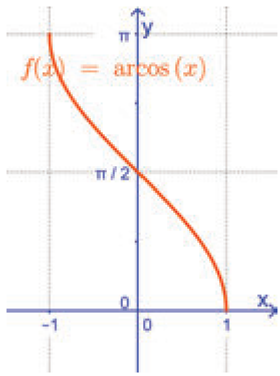

**FUNCIÓN COSENO INVERSO (ARCOSENO):** Denotamos $cos^{-1}(x)$ o *arcos(x)*. Las ecuaciones de cancelación para esta función son las siguientes:

$$\mathrm{Cos}^{-1} x = y \qquad \leftrightarrow \qquad \cos y = x \qquad y \quad 0 \leq y \leq \pi$$

$$\cos^{-1}(\cos x) = x \qquad para\ 0 \leq x \leq \pi$$

$$\cos(\cos^{-1} x) = x \quad para - 1 \leq x \leq 1$$

**Figura 77**

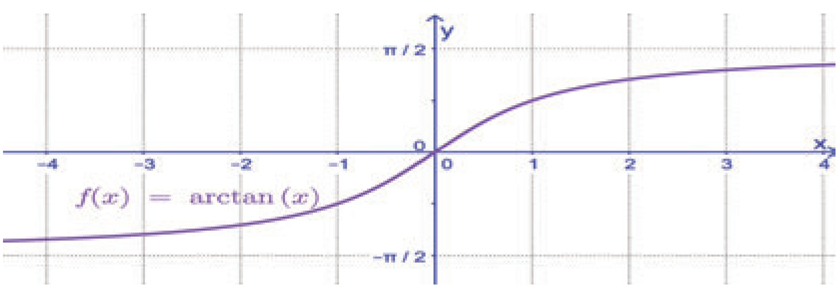



**FUNCIÓN TANGENTE INVERSA (ARCOTANGENTE):** Denotamos como *tan*$^{-1}$ *(x)* o *arcotan(x)*. Las ecuaciones de cancelación son:

$$\tan^{-1} x = y \qquad \leftrightarrow \qquad \tan y = x \qquad y$$

$$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

**Figura 78**



Las demás funciones inversas son:

$$y = \csc^{-1} x \qquad (|x| \geq 1) \qquad \leftrightarrow \qquad \csc y = x \qquad y \qquad y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \quad U \ \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$$

$$y = \sec^{-1} x \qquad (|x| \geq 1) \qquad \leftrightarrow \qquad \sec y = x \qquad y \qquad y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \quad U \ \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$$

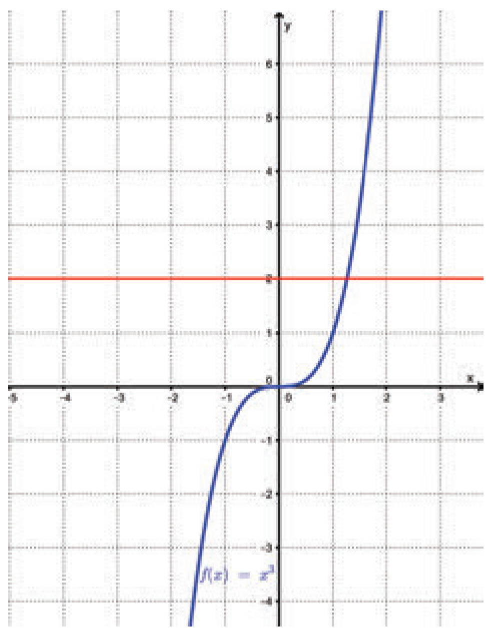
$$y = \cot^{-1} x \qquad (x \in R) \qquad \leftrightarrow \qquad \cot y = x \qquad y \qquad y \in (0, \pi)$$

## *2.5.4 Función inversa*

**FUNCIÓN UNO A UNO**. A una función se le llama uno a uno si la función nunca toma el mismo valor dos veces, es decir:

$f(x_1) \neq f(x_2)$ siempre que $x_1 \neq x_2$

**Figura 79**



Ejemplo: Sea la función: $f(x) = x^3$

$x_1 = 1$
$x_2 = -1$
$f(x_1)=(1)^3 = 1$
$f(x_2) =(-1)^3 = -1$

Como:

$f(x_1) \neq f(x_2)$

La función es una función uno a uno

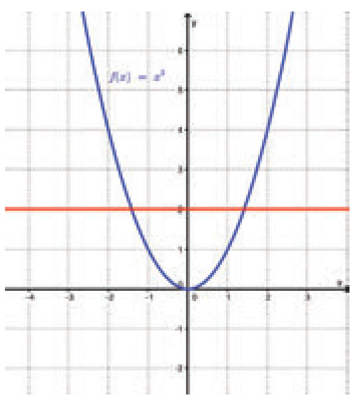
b) $f(x) = x^2$
$x_1 = 1$
$x_2 = -1$
$f(x_1)=(1)^2 = 1$
$f(x_2) =(-1)^2 = 1$

Como:

$f(x_1) = f(x_2)$

La función no es una función uno a uno

**Figura 80**



Un método geométrico para saber si una función es uno a uno es trazar una recta horizontal en cualquier lugar de la gráfica, si la recta interseca a la gráfica de la función en un solo punto, entonces la función es uno a uno como se puede apreciar en la figura 79, si la recta interseca en más de un punto, la función no es uno a uno como en la figura 80.

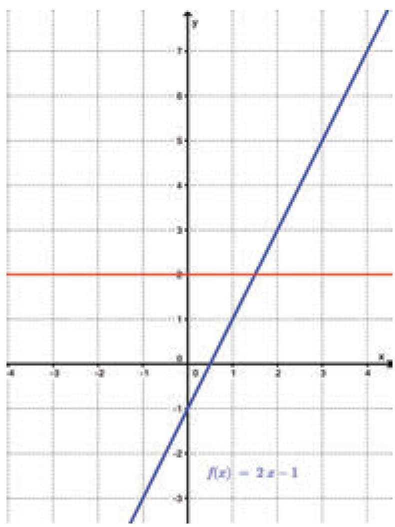
## *Definición*

Sea $f$ una función uno a uno con Dominio $X$ y rango $Y$, entonces una función $g$, con Dominio $Y$ y rango $X$ se denomina la función inversa de $f$ si:

$$f(g(x)) = x \text{ para cada } x \text{ en } Y$$
$$g(f(x)) = x \text{ para cada } x \text{ en } X$$

*Pasos para determinar la inversa de una función*

**Figura 81**



Con el ejemplo propuesto a continuación se van a detallar los pasos.

**Ejemplo:** Determine la función inversa de la función $f(x) = 2x - 1$

1.- Analizamos si la función es uno a uno, podemos hacerlo con el método geométrico.

Como sabemos la gráfica pertenece a una función lineal, al trazar una recta horizontal en cualquier ubicación de la gráfica solo interseca en un punto, entonces es función uno a uno.

2.- Cambiamos la nomenclatura a $f(x)$, por $y$ de tal forma:

$f(x) = 2x - 1$
$y = 2x - 1$

3.- Despejamos la variable $x$:

$$x = \frac{y+1}{2}$$

4.- Cambiar la variable $x$ por la variable $y$, y viceversa:

$$y = \frac{x+1}{2}$$

5.- Cambiamos la variable $y$ por $f^{1}(x)$ para obtener la función inversa: $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$

## *Ecuaciones de cancelación*

*Definición*

$f^{-1}(f(x)) = x$ para cada $x$ en $X$
$f(f^{-1}(x)) = x$ para cada $x$ en $Y$

En el ejercicio del ejemplo anterior tenemos:

*f(x) = 2x -1*

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$$

Vamos a realizar la composición de funciones para determinar si cumple con las ecuaciones de cancelación:

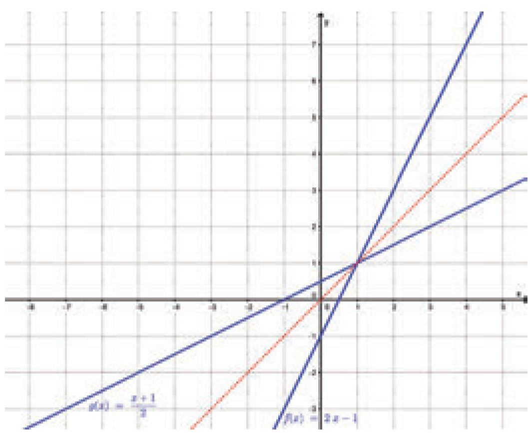
$$f^{-1}\big(f(x)\big) = \frac{2x-1+1}{2} = \frac{2x}{2} = x$$

$$f(f^{-1}(x)) = 2\left(\frac{x+1}{2}\right) - 1 = x + 1 - 1 = x$$

Si son funciones inversas ya que cumplen con las ecuaciones de cancelación.

Graficando las funciones inversas en un mismo sistema coordenado tenemos:

**Figura 82**



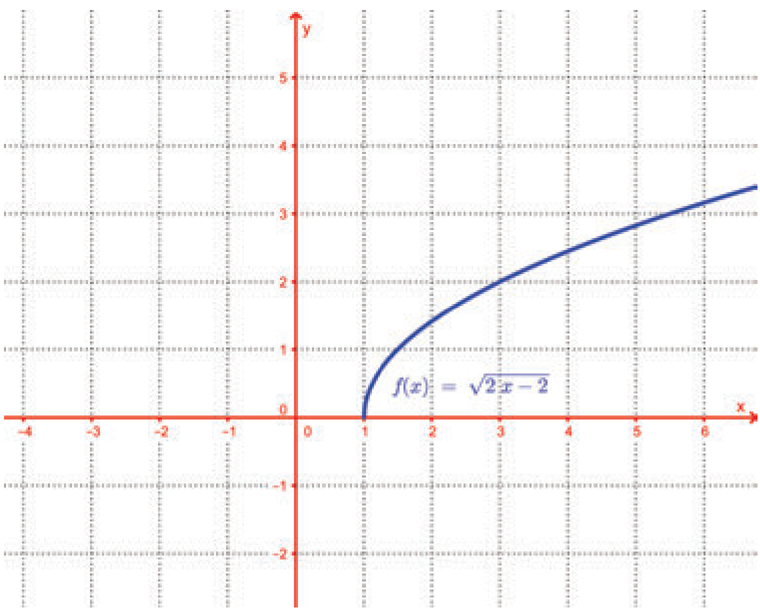
En el gráfico 82 se puede observar que si reflejamos la gráfica de $f$ sobre la recta $y = x$ obtenemos la gráfica de $f^{-1}$.

## EJERCICIOS PROPUESTOS

**EP1.** Sea $f(x) = \sqrt{2x - 2}$

a. Determine el dominio y el rango de dicha función
b. Sea la figura 83 la gráfica correspondiente a *f*, realice una posible gráfica de $f^{-1}$
c. De ser posible determine $f^{-1}$
d. Realice la gráfica de $f^{-1}$ y compare con la gráfica del literal *b.*
e. Realice la gráfica de $y = x$, y analice la simetría.
f. Verifique si son funciones inversas usando las ecuaciones de cancelación.

**Figura 83**



## 2.5.15 *Transformación de funciones*

A partir de las funciones estándar podemos conseguir nuevas funciones mediante desplazamientos, alargamientos, compresiones y reflexiones.

**Tabla 6**

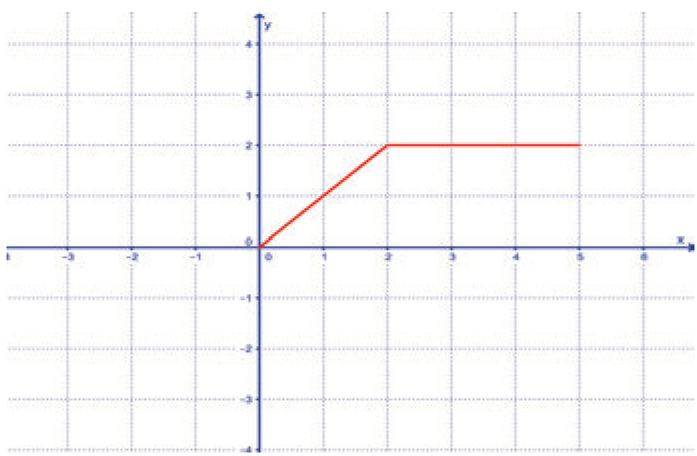
| **DESPLAZAMIENTO VERTICAL** | |
|---|---|
| Sea $y = f(x)$ | $a > 0$ |
| $y = f(x) + a$, desplace $a$ unidades hacia arriba la gráfica de $y = f(x)$ | |
| $y = f(x) - a$, desplace $a$ unidades hacia abajo la gráfica de $y = f(x)$ | |

### Ejercicios resueltos

**ER1.** Sea $y = f(x)$. La gráfica de la función corresponde a la figura 84, graficar la funciones:

a. $y = f(x) + 2$,
b. $y = f(x) -3$

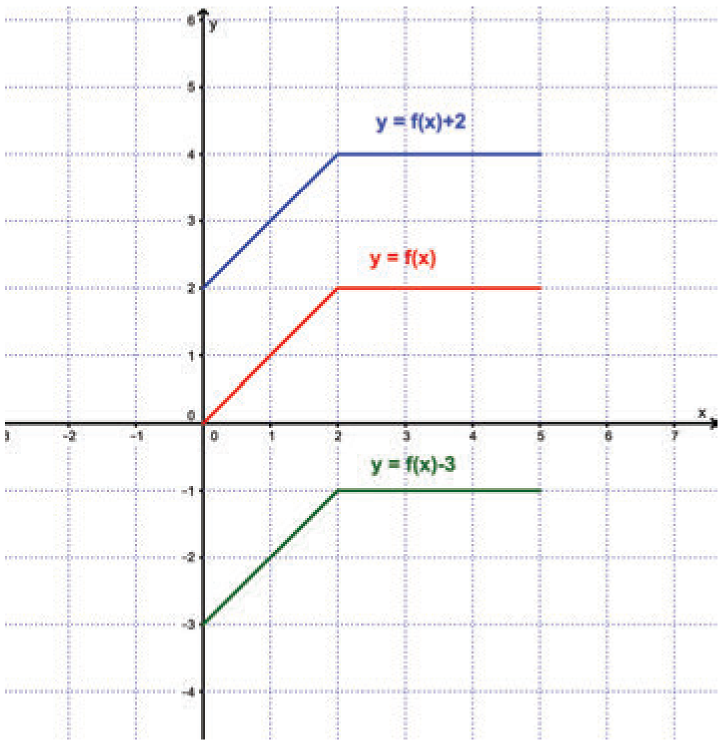
**Figura 84**



## Solución

En el literal a se trata de un desplazamiento vertical de 2 unidades hacía arriba, y el literal b de 3 unidades hacia abajo, con lo que la gráfica será:

**Figura 85**




**ER1.** Sea $f(x) = cos(x)$, desplazarla 1 unidad hacia arriba.

## Solución

La función desplazada sería: $g(x) = cos(x) +1$, como se muestra en la figura 86

Figura 86

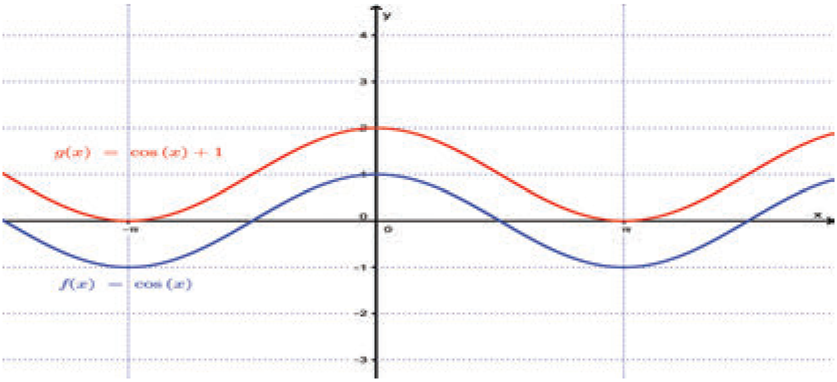
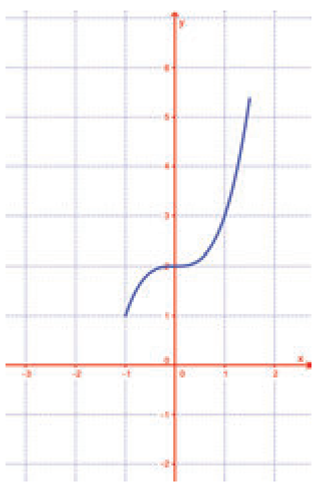



Tabla 7

| DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL | |
|---|---|
| Sea $y = f(x)$ | $a > 0$ |
| $y = f(x+a)$, desplace $a$ unidades hacia la izquierda la gráfica de $y = f(x)$ | |
| $y = f(x- a)$,, desplace $a$ unidades hacia la derecha la gráfica de $y = f(x)$ | |

Figura 87



## EJERCICIOS RESUELTOS

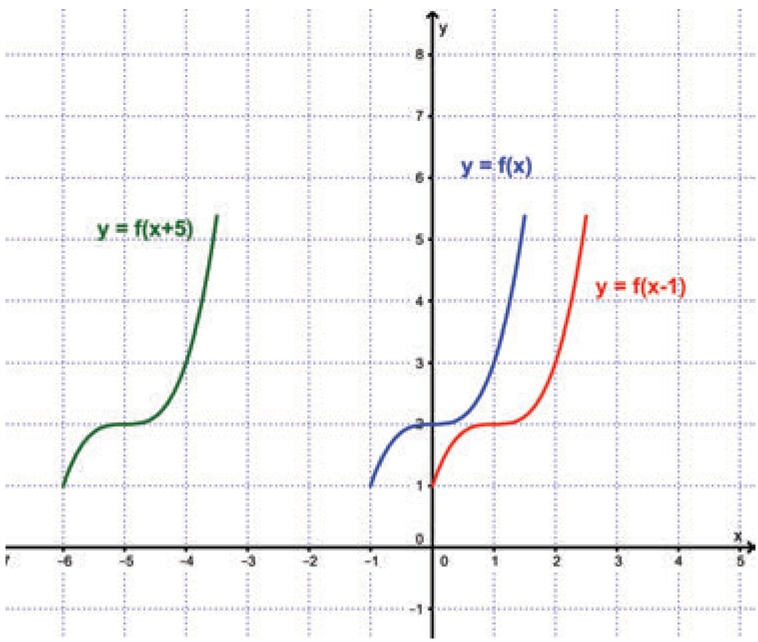
**ER1.** Sea $y = f(x)$ la gráfica de la función corresponde a la figura 87, graficar la funciones:

a. $y = f(x+5)$
b. $y = f(x-1)$

## SOLUCIÓN

Para el literal a la gráfica se desplaza 5 unidades hacia la izquierda, y para el literal b la gráfica se desplaza 1 unidad hacia la derecha. Las gráficas desplazadas se muestran en la figura 88

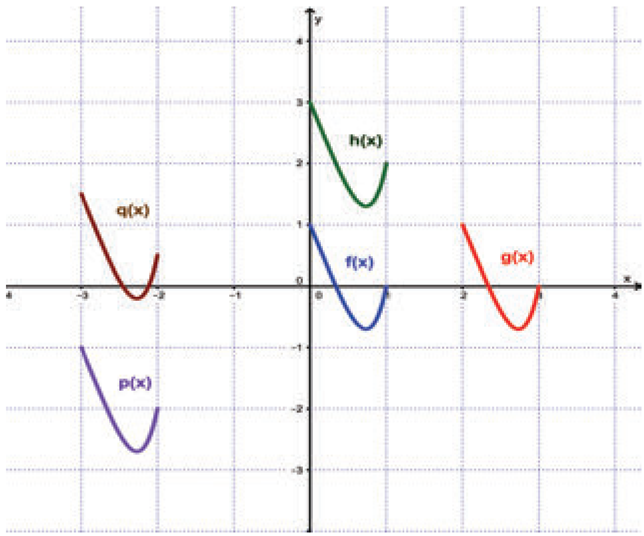
**Figura 88**



## Ejercicios propuestos

**EP1.** Sea $y = f(x)$, la función original, indicar que transformaciones se han realizado para obtener las funciones $g(x)$, $h(x)$, $p(x)$, $q(x)$.

**Figura 89**




**EP2.** Sea $f(x) = sin(x)$, realizar las siguientes transformaciones horizontales y verticales:

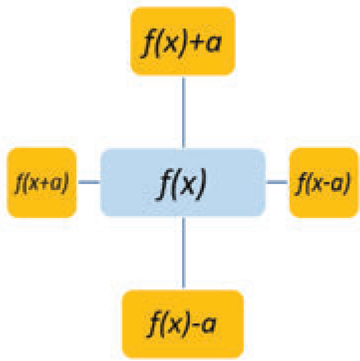
Desplace la función 3 unidades hacia arriba y $\pi$ unidades hacia la derecha.

Desplace la función 3/2 unidades hacia abajo.

Desplace la función $\pi/2$ unidades hacia la izquierda y 1unidad hacia abajo.

**EP3.** Indicar la relación que tiene el diagrama de la figura 90 con los desplazamientos de funciones.

**Figura 90**




**EP4.** Indicar que clase de transformación se ha realizado en la función $f(x) = x^2$ para obtener:

$g(x) = x^2+2x+1$
$h(x)=x^2 -2x +1$
$k(x)=x^2 -6x +13$

**Tabla 8**

| ALARGAMIENTO VERTICAL | |
|---|---|
| Sea $y = f(x)$ | $a > 1$ |
| $y = af(x)$, alargada en un factor de $a$ en la dirección vertical la gráfica de $y = f(x)$ | |

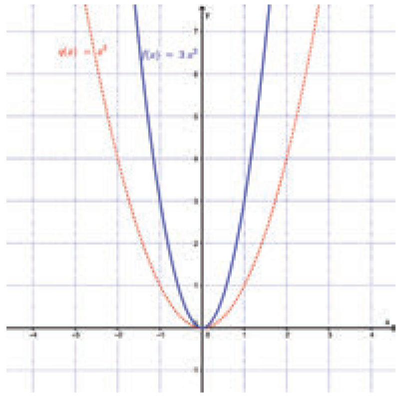
## Ejercicios resueltos

**ER1.** Sea $y = x^2$, alargue la función verticalmente un factor de 3.

## Solución

Como el factor $a$ en este caso 3 es mayor que 1, tenemos: $y = 3x^2$, cuya gráfica es:

**Figura 91**

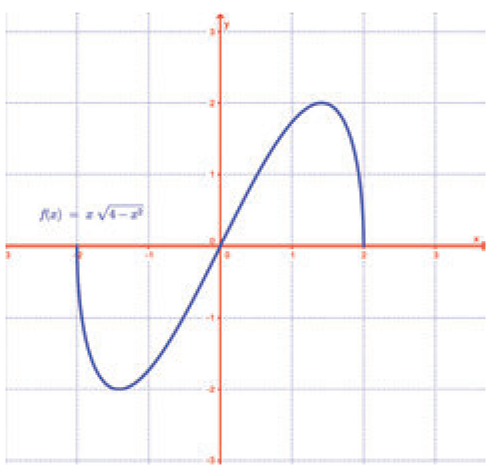


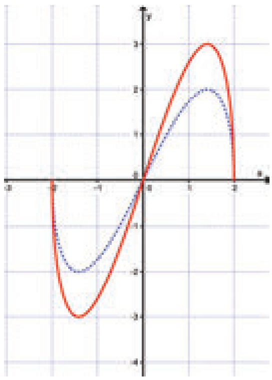
## Ejercicios propuestos

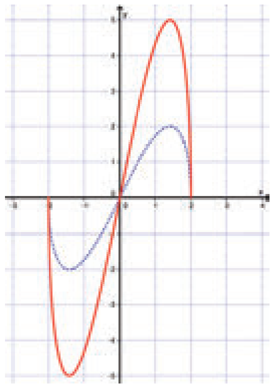
**EP1.** Sea, $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ determinar

las funciones de los literales *a, b* y *c* pertenecientes a las gráficas de la figura 92.

**Figura 92**




a


b

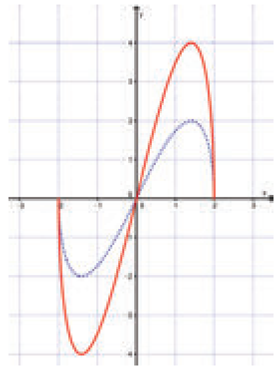

c

**Tabla 9**

| CROMPRESIÓN VERTICAL | |
|---|---|
| Sea $y = f(x)$ | $a > 1$ |
| $y = \frac{1}{a}f(x)$, comprimida en un factor de $a$ en la dirección vertical la gráfica de $y = f(x)$ | |

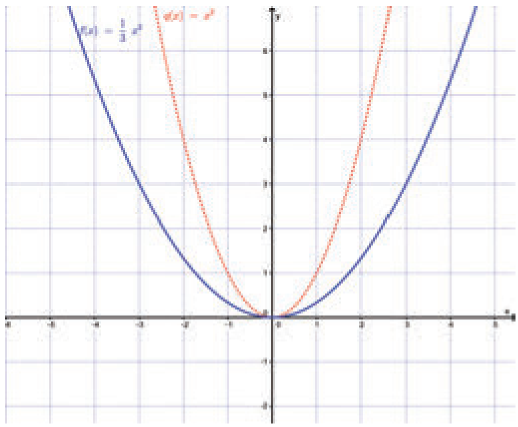
## Ejercicios resueltos

**ER1.** Sea $y=x^2$, comprima la función verticalmente un factor de 3.

## Solución

Como el factor **a** en este caso 3 es mayor que 1, tenemos: $y = \frac{1}{3}x^2$ cuya gráfica es:

**Figura 93**



## Ejercicios propuestos

**EP1.** Sea $y = sen(x)$

Comprima verticalmente a la función un factor 2

Comprima verticalmente a la función un factor de 4

**Tabla 10**

| ALARGAMIENTO HORIZONTAL | |
|---|---|
| Sea $y = f(x)$ | $a > 1$ |
| $y = f\left(\frac{x}{a}\right)$, alargada en un factor de $a$ en la dirección horizontal la gráfica de $y = f(x)$ | |

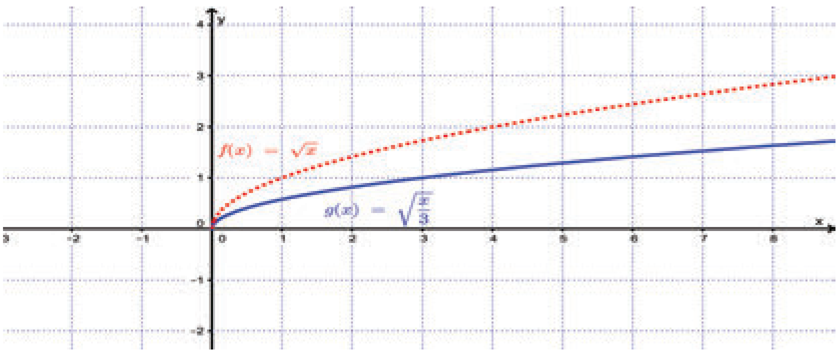
## Ejercicios resueltos

**ER1.** Sea, $y = \sqrt{x}$ , alargue la función horizontalmente un factor de 3.

## Solución

Como el factor ***a*** en este caso 3 es mayor que 1, tenemos: $y = \sqrt{\frac{x}{3}}$ cuya gráfica es:

**Figura 94**




## Ejercicios propuestos

**EP1.** Sea $f(x) = cos(x)$,

Alargue horizontalmente a la función un factor 2

Alargue horizontalmente a la función un factor de 4

**Tabla 11**

| CROMPRESIÓN HORIZONTAL | |
|---|---|
| Sea $y = f(x)$ | $a > 1$ |
| $y = f(ax)$, comprimida en un factor de $a$ en la dirección horizontal la gráfica de $y = f(x)$ | |

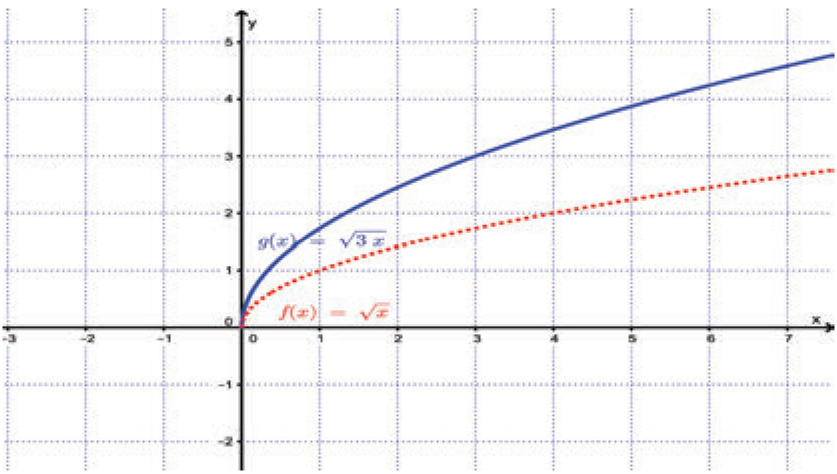
## Ejercicios resueltos

**ER1.** Sea, $y = \sqrt{x}$ comprima la función horizontalmente un factor de 3.

## SOLUCIÓN

Como el factor *a* en este caso 3 es mayor que 1, tenemos: $y = \sqrt{3x}$ cuya gráfica es:

**Figura 95**




## EJERCICIOS PROPUESTOS

**EP1.** Sea $f(x) = cos(x)$,

Comprima horizontalmente a la función un factor 2

Comprima horizontalmente a la función un factor de 4

**Tabla 12**

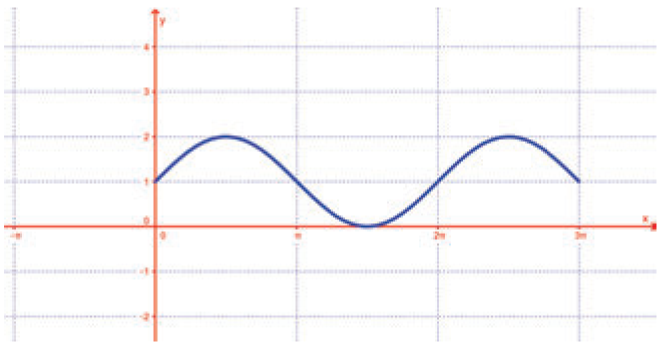
| REFLEXIONES | |
|---|---|
| Sea $y = f(x)$ | |
| $y = -f(x)$, refleja la gráfica de $y = f(x)$ sobre el eje "x" | |
| $y = f(-x)$, refleja la gráfica de $y = f(x)$ sobre el eje "y" | |

## Ejercicios resueltos

**ER1.** Sea $y = f(x)$, la gráfica de la función corresponde a la figura 96, graficar la funciones:

a. $y = -f(x)$
b. $y = f(-x)$

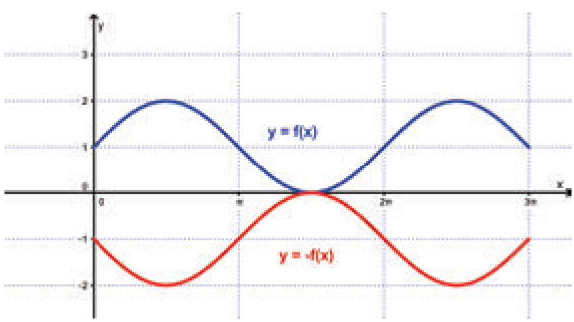
**Figura 96**



## Solución

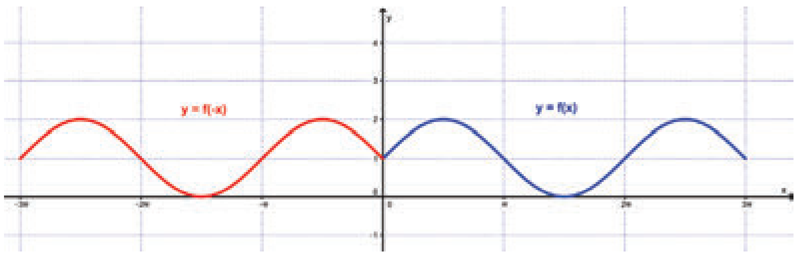
El literal *a* trata sobre una reflexión en el eje *"x"*, por lo tanto la gráfica será:

**Figura 97**



El literal $b$ trata sobre una reflexión en el eje *"y"*, por lo tanto la gráfica será:

Figura 98



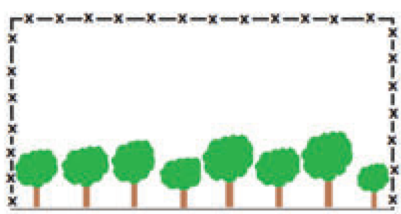

## *2.5.16 Funciones como modelos matemáticos*

Lo ideal para los problemas de la vida real sería lograr traducirlo a un modelo matemático, con el cual podamos realizar un estudio amplio de dicho problema para poder determinar la solución con su respectiva validación.

La alta gama de problemas de la vida real van desde problemas que involucran variables como la población, la temperatura, la presión, áreas, volúmenes, perímetros, hasta problemas de velocidad, aceleración …

**Ejemplo 1**. Un lote de terreno de forma rectangular va a cercarse de acuerdo a la figura 65. Si el área del lote es de $50\ m^2$. Exprese la longitud de la cerca del lote en función del lado no cercado.

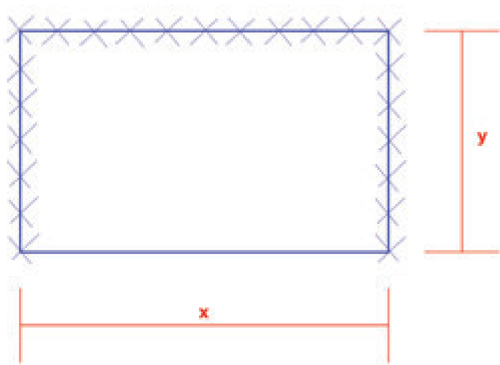
Figura 99



## Solución

Empezamos por hacer una representación y establecer variables:

**Figura 100**




Entonces la longitud de la cerca es:

$L = x + 2y$

Debemos tener en función de una sola variable, en este caso del lado no cercado "$x$" adicionalmente tenemos la información del valor del área, es decir:

$A = xy$
$50 = xy$

Despejamos $y$:

$y = 50/x$

Reemplazamos en $L = x + 2y$

$$L = x + 2\left(\frac{50}{x}\right)$$

$L = x + 100/x$

Podemos escribir como:

$$f(x) = x + \frac{100}{x}$$

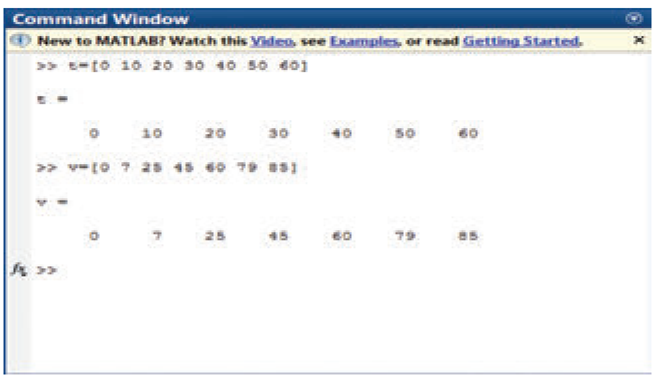
## Ejercicios resueltos

**ER1.** Se prueba un vehículo experimental en una pista recta. Parte del reposo y su velocidad $v$ (metros por segundo) se registra en la tabla 2, cada 10 segundos durante un minuto.

**Tabla 13**

| t | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v$ | 0 | 7 | 25 | 45 | 60 | 79 | 85 |

Usando un software, determine una función para los datos de la tabla 13.

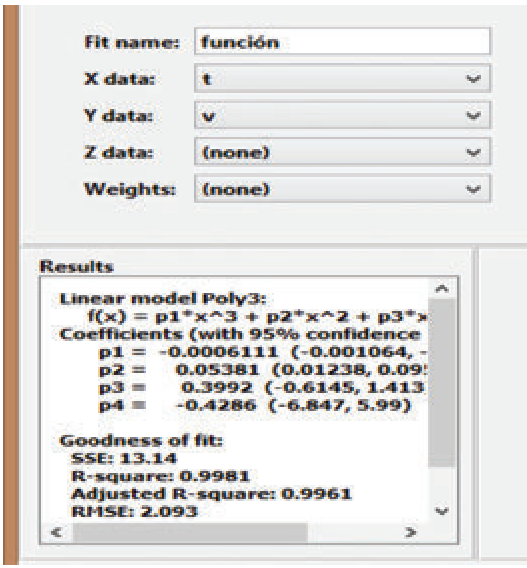


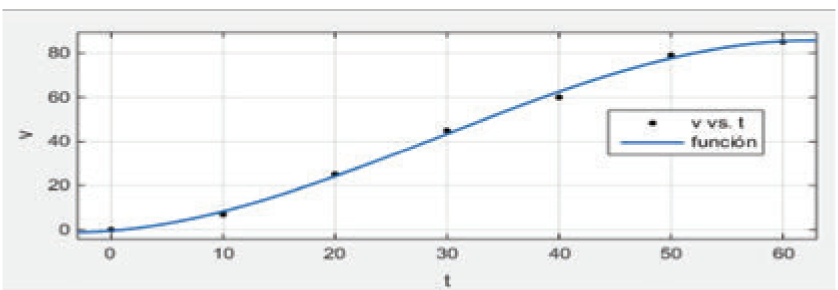

## Solución

Usamos matlab para resolver el ejercicio, primero podemos ingresar como vectores los datos tanto de tiempo como de velocidad que proporciona la tabla 13:

Con un comando directo de matlab (*cftool*) podemos determinar la función que necesitamos, luego de escoger las variables que ingresamos y el grado de la función.

Obtenemos lo que necesitamos:




De acuerdo a la información obtenida, la función es:

$$v(t) = -0.0006111t^3 + 0.05381t^2 + 0.3992t - 0.4286$$

## Ejercicios propuestos

**EP1.** En el ejercicio resuelto uno usando el mismo software, investigar y determinar la distancia recorrida por el vehículo durante la prueba.

**EP2.** Las fórmulas propuestas corresponden al método de interpolación de Lagrange

Investigar cómo se usan dichas fórmulas para determinar una función cúbica para los datos de la tabla 3.

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i) \qquad\qquad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ i\neq 1}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

**Tabla 14**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *t* | 0 | 20 | 40 | 60 |
| *v* | 0 | 25 | 60 | 85 |

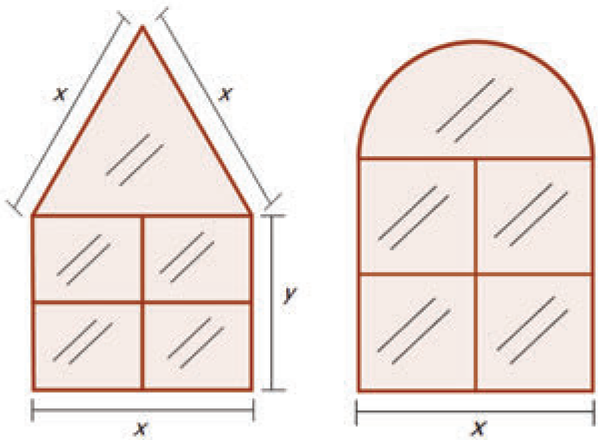
**EP3.** Determinar el dominio para el ejemplo 1 resuelto en el tema.

**EP4.** Se desea construir un recipiente con la forma de un cilindro circular con tapa con un volumen de *30π* cm$^2$, el precio del material que se usa para el fondo es el doble del que se usa para la parte curva. Exprese el costo del recipiente en función del radio de la base del recipiente.

**Figura 101**

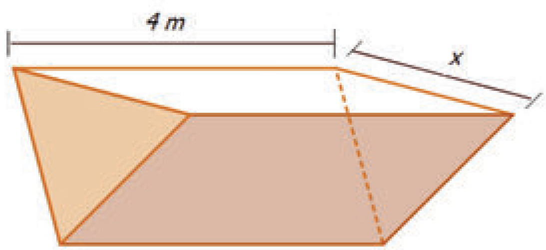
**EP5.** Un constructor desea construir ventanas en las formas graficadas, si la ventana tiene 7 m de marco determine la función que exprese el área en función de *x*.

**Figura 102**



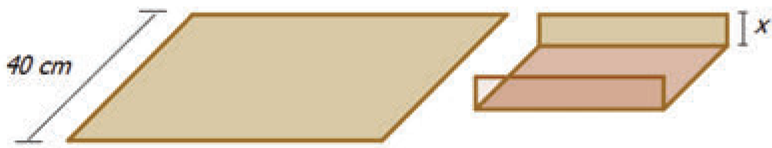

**EP6.** Determinar la función que exprese el volumen en función de *x* del bebedero de la figura.

**Figura 103**




**EP7.** De una pieza de lata de 40 cm de ancho se va a realizar una canal para lluvia doblando hacia arriba sus orillas para formar sus lados. Expresar el área de la función transversal en función de su altura.

Figura 104




## Actividades complementarias de la subunidad

### *Preguntas de opción múltiple*

1. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?
   a. Toda relación es una función
   b. Toda función es una relación
   c. Una función par es simétrica con respecto al eje “*y*”
   d. Una función impar es simétrica con respecto al origen

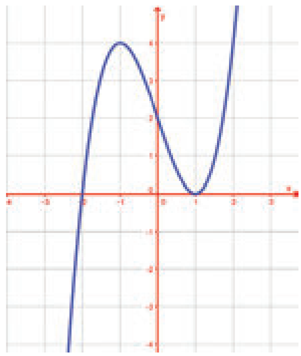
2. El dominio de la función $\sqrt{x^2-16}$ es:
   a. (-4,4)
   b. $(-\infty,-4)\cup(4,\infty)$
   c. $(-\infty,-16)\cup(16,\infty)$
   d. $(-\infty, -4]\cup[4, \infty)$

3. ¿Cuál de las siguientes funciones tiene un comportamiento creciente?
   a. $f(x) = 3$
   b. $f(x) = -2x$
   c. $f(x) = -1$
   d. $f(x) = 2x+5$

4. La gráfica representa la función:
   a. $f(x) = x^3 -3x +2$
   b. $f(x) = x^3 -3x -2$

c. $f(x) = x^3 - 3x + 4$
d. $f(x) = x^3 - 3x - 4$

**Figura 105**

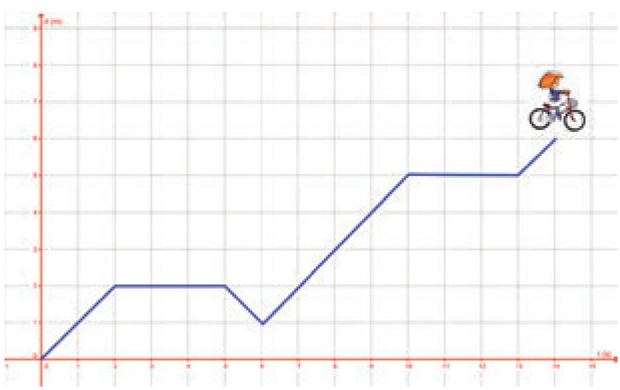


5. La función $f(x) = \sqrt{x-5}$ es la función raíz desplazada:

   a. 5 unidades hacia arriba
   b. 5 unidades hacia abajo
   c. 5 unidades hacia la derecha
   d. 5 unidades hacia la izquierda

**AC9.** De acuerdo al siguiente gráfico describa el acontecimiento

**Figura 106**



**AC10.** Ubique en el sistema coordenado y una los siguientes puntos, además usando la prueba de la recta vertical determine si la gráfica pertenece a una función de "*x*":

**Tabla 15**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\sqrt{5}$ | $-\sqrt{5}$ | 0 | 0 |
| $y$ | 0 | 0 | $\sqrt{5}$ | $-\sqrt{5}$ |

**Tabla 16**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $y$ | 0 | 1 | 2 | 3 |

**AC11.** Complete la tabla con las gráficas de funciones estándar dadas, anote los dominios y rangos respectivos.

**Tabla 17**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(x)=c$ | $f(x) = x$ | $f(x) = x^2$ | $f(x) = x^3$ |
| $f(x) = 1/x$ | $f(x) = \sqrt{x}$ | $f(x) = ln(x)$ | $f(x) = e^x$ |
| $f(x)=sen(x)$ | $f(x)=cos(x)$ | $f(x)=tan(x)$ | $f(x) = \lvert x\rvert$ |

**AC12.** Sea $h(x)=3x^2 -15x +9$

Si $h(x) = f(x) +g(x)$, indicar las posibles funciones $f(x)$ y $g(x)$.

Si $h(x) = g(x) - f(x)$, indicar las posibles funciones $f(x)$ y $g(x)$.

Si $h(x) = f(x)g(x)$, indicar las posibles funciones $f(x)$ y $g(x)$.

Si $h(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$ indicar las posibles funciones $f(x)$ y $g(x)$.

Si $h(x) = (f \circ g)(x)$, indicar las posibles funciones $f(x)$ y $g(x)$.

**AC13.** Sea $f(x) = \sqrt{x-5}$ y $g(x) = 4x^2+x$. Determinar $(f \circ g)(x)$, y su respectivo dominio.

**AC14.** Determinar el dominio y el rango en los siguientes casos de funciones:

$f(x) = -3$

$f(x) = 2x + 5$

$f(x) = -6x^2 + 2x - 2$

$f(x) = x^3 + 5$

$f(x) = \dfrac{2x}{x-3}$

$f(x) = \ln(x-3)$

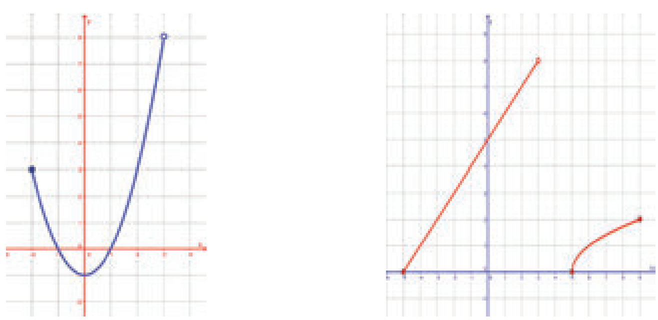
$f(x) = e^{2x}$

$$f(x) = \begin{cases} -x-2 & si\ x < -1 \\ 0 & si\ x = 0 \\ \sqrt{x+2} & si\ x > 0 \end{cases}$$

$f(x) = sen(x) - 1$

**AC15.** Indique el dominio y rango de las funciones graficadas a continuación:

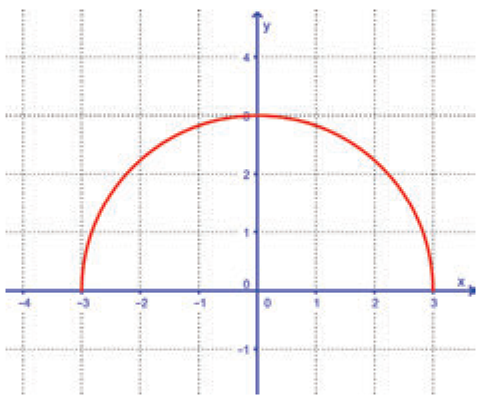
**Figura 107**



**AC16.** Sea *f(x)* la función de la gráfica, determinar:

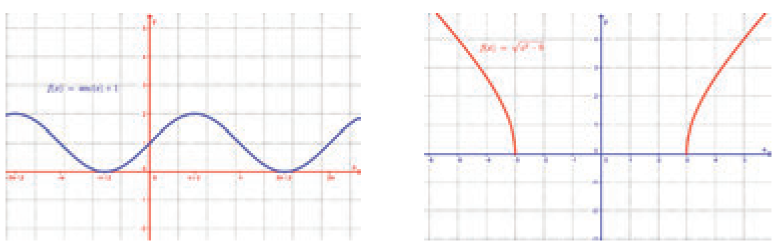
a. La función $f(x)$
b. Dominio y rango de la función
c. Desplazar 3 unidades hacia la derecha, e indicar la nueva función.
d. Desplazar 5 unidades hacia la izquierda y 2 hacia abajo, e indicar la nueva función.
e. Reflejarla con respecto al eje $x$, desplazarla 4 unidades hacia izquierda y 2 hacia arriba, e indicar la nueva función.
f. Comprimirla verticalmente en un factor de 4, e indicar la nueva función.

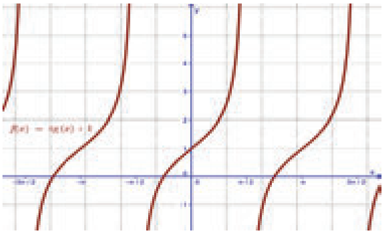
**Figura 108**

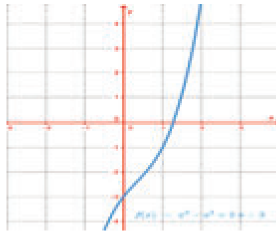



**AC17.** Geométricamente indique cuáles de los siguientes gráficos son funciones uno a uno:

**Figura 109**







**AC18.** Sea $f$ una función cuyo dominio es $(-\infty,\infty)$, y rango $(0,\infty)$. Determinar el dominio y rango de $f^{-1}$ y realizar un boceto de las posibles gráficas

**AC19.** Sean las funciones $f(x) = \frac{2x-4}{3}$ y $g(x) = \frac{3}{2}x + 2$ verificar si son funciones inversas.

**AC20.** Sean $f$ y $g$ funciones definidas de la siguiente forma: $f(x) = x^3$ y $g(x) = \frac{x-5}{2}$.. Si $h(x) = f(g(x))$ determine:

a. $h^{-1}$
b. Las ecuaciones de cancelación
c. La gráfica de las funciones inversas
d. **AC21.** Sea $f(x) = x^2 - \frac{4}{3}$ indicar si se puede determinar la $f^{-1}$ de no ser posible restringir el dominio y determinar $f^{-1}$, graficar y determinar dominios y rangos.

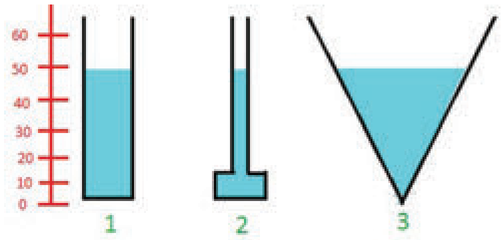
## Ejercicios de aplicación

**EA1.** El gráfico mostrado pertenece a tres recipientes que son llenados a la misma vez con una cantidad de agua constante, la regla que se encuentra a lado mide la altura del líquido conforme pasa el tiempo. Si tengo que detener el llenado cuando la altura haya llegado a 60 cm, de acuerdo a su razonamiento contestar lo siguiente:

¿En qué orden detengo el llenado de agua?

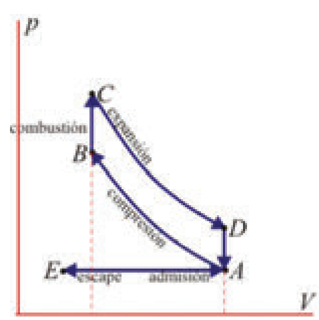
Realice una gráfica aproximada para cada recipiente de como sube el nivel del agua conforme pasa el tiempo, es decir en un sistema coordenado contrarreste el tiempo con el nivel de agua.

**Figura 110**




**EA2.** A continuación se presenta el diagrama del comportamiento teórico del motor de un vehículo de encendido por explosión es decir con bujías para encender el combustible (en nuestro país el combustible más utilizado es la gasolina), este es el denominado ciclo Otto de cuatro tiempos en honor a su inventor el ingeniero alemán Nicolas August Otto. Los cuatro ciclos son: Admisión cuando ingresa el combustible mezclado con el aire en forma pulverizada dentro del motor; Compresión cuando por la acción de un embolo denominado pistón esta mezcla se comprime; Expansión cuando al encenderse la mezcla debido a la bujía se genera una presión dentro del motor que hace que el pistón se desplace hacia abajo del cilindro con gran fuerza y Escape cuando los gases que se formaron debido a la mezcla que se quemó, salen del motor por el tubo de escape.

**Figura 111**
**Ciclo de cuatro tiempos de un motor**



Como se puede observar en el diagrama se contrarresta el volumen *(V)* del recorrido del pistón en cada tiempo y la presión *(P)* que se va generando dentro del motor. El primer ciclo empieza en el punto E del diagrama y se dirige hacia A. Se pide contestar las siguientes preguntas:

a. En qué etapas del ciclo Otto el volumen dentro del cilindro del motor es el más grande.
b. ¿Qué pasa con el volumen entre el punto *B* y el punto *C*?
c. ¿Qué pasa con la presión entre el punto *B* y el punto *C*?
d. ¿En qué ciclos la presión es más baja dentro del cilindro?

**EA3.** Investigue el siguiente fenómeno: ¿Por qué un cuerpo que se está enfriando, se enfría más rápido al inicio y mientras pasa el tiempo se enfría cada vez más lento?

**EA4.** La ley de enfriamiento de Newton señala que el cambio de temperatura *(T)* de un cuerpo con respecto al tiempo t que se denota como $\frac{dT}{dt}$ y que es directamente proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura del medio $T_m$. Escriba la ecuación que modela esta ley.

**EA5.** El sistema de suspensión de un vehículo, cuya gráfica se encuentra en la figura:

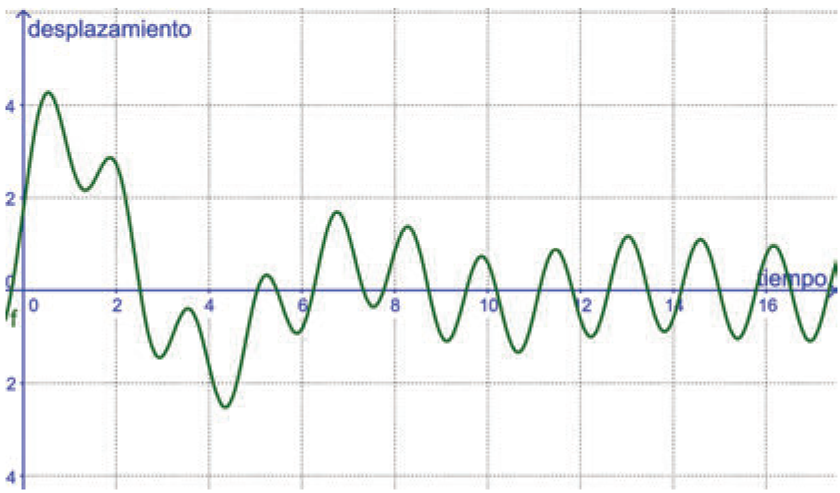
**Figura 112**
**Esquema de un sistema masa-resorte-amortiguador (suspensión)**

Tiene la siguiente ecuación de movimiento:

$$x(t) = e^{-\frac{t}{2}}\left(\cos(t) + 2sen(t)\right) - 0.75\cos(2t) + sen(2t)$$

La gráfica de la ecuación es:

**Figura 113**
**Modelización del comportamiento de una suspensión**

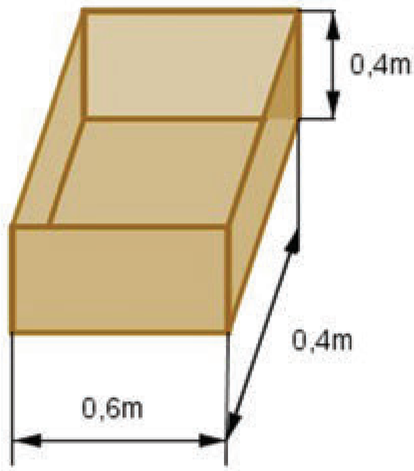



Observar y describir, qué es lo que sucede con la gráfica desde los 0 hasta los 2 segundos aproximadamente y qué es lo que sucede después de los 2 segundos.

**EA6.** El tanque de combustible de un vehículo tiene la forma mostrada en la figura y está lleno, se vacía el tanque para realizar una limpieza del mismo una velocidad de *0,001m*$^3$ por segundo. Las medidas en metros del tanque son *0,6x0,4x0,4.*

Establezca la expresión que modele el descenso del volumen del tanque conforme pasa el tiempo.

**Figura 114**




- ¿Qué tipo de función es?
- ¿En qué tiempo el volumen del tanque será de $0{,}08m^3$?
- ¿En qué tiempo se vaciará por completo el tanque?
- ¿Cuáles son los cortes con los ejes?

**EA7.** Un pasajero quiere alcanzar un bus en marcha. Las funciones que relacionan el espacio (en metros) y el tiempo (en segundos) son, en cada caso: $Bus \quad S_b = \frac{t^2}{50} + 100 \qquad Pasajero\ S_p = \frac{9t}{2}$ (Suponga que tanto el bus como el pasajero parten de un tiempo cero).

A partir de esta información realice el análisis y represente las gráficas correspondientes. ¿Llega a producirse el alcance? ¿En qué momento? ¿Cuántos intentos tiene el pasajero para abordar el bus? Ayúdese de un Software para sustentar su respuesta.

**EA8.** La ley de Hooke establece que la fuerza $F$ necesaria para comprimir o estirar un resorte (dentro de sus límites elásticos) es proporcional a la variación de longitud $d$ que experimenta. Esto es: $F = kd$, donde $k$ es una medida de la resistencia del resorte a la deformación y se denomina constante elástica. La siguiente tabla muestra el alargamiento $d$, en centímetros, de un resorte de un vehículo de competencia cuando se le aplica una fuerza de $F$ Newtons.

**Tabla 18**

| Fuerza (Newtons) | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | 600 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Desplazamiento (cm) | 0,5 | 1,1 | 1,4 | 2 | 2,38 | 3,12 |

- Encontrar la función de regresión en la herramienta de graficación, usando un modelo lineal para los datos.
- Utilizar la herramienta de graficación para representar los datos y el modelo. ¿Qué tanto se ajusta el modelo a los datos? Explicar el razonamiento.
- Utilizar el modelo para estimar el alargamiento del resorte cuando se le aplica una fuerza de 355 Newtons.

**EA9.** Los estudiantes midieron la fuerza de ruptura S (en libras) de una pieza de madera de 2 pulgadas de espesor, con $x$ de altura y 12 de longitud. Los resultados se muestran en la siguiente tabla 19.

**Tabla 19**

| $x$ | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|
| $S$ | 5450 | 10300 | 16240 | 23850 | 29160 |

- Utilizar una herramienta de graficación para ajustar un modelo cuadrático a los datos.
- Utilizar la herramienta de graficación para representar los datos y el modelo.
- Utilizar el modelo para estimar la fuerza de ruptura cuando $x = 2$.

**EA10.** Un avión está volando con una velocidad de 350 km/h, a una altitud de una milla y pasa directamente sobre una estación de radar en el tiempo $t = 0$.

a. Exprese la distancia horizontal $d$ (en millas) que el avión ha volado, en función de $t$.
b. Exprese la distancia $s$ entre el avión y la estación de radar en función de $d$.
c. Utilice la composición para expresar $s$ como una función de $t$.

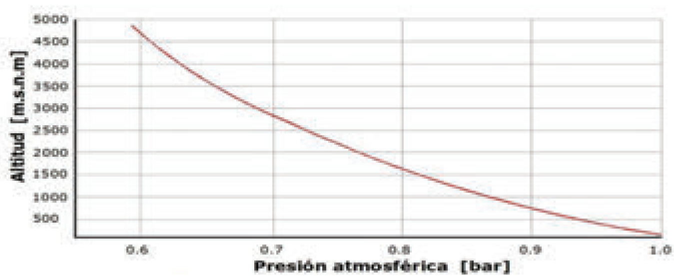
**EA11.** Una piedra se deja caer en un lago, creando una onda circular que viaja hacia fuera a una velocidad de 60 cm/s.

a. Exprese el radio $r$ del círculo en función del tiempo $t$ (en segundos).
b. Si $A$ es el área de este círculo como una función del radio, encuentre $A$ o $r$ e interprétela.

**EA12.** El siguiente gráfico muestra el comportamiento de la presión atmosférica de acuerdo a la altura a la que nos encontremos.

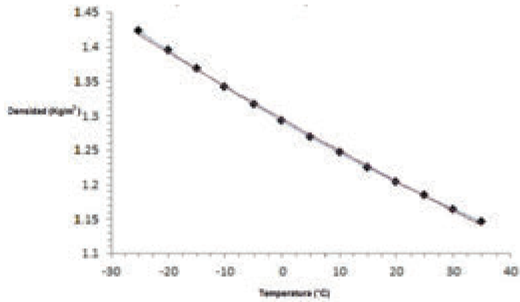
- Observar el gráfico y determinar la presión atmosférica en Cuenca, Guayaquil y Quito
- Concluir que pasa con la presión atmosférica mientras aumenta la altura
- Investigue si la potencia debido a la variación de la presión atmosférica en un motor será la misma en las tres ciudades.

**Figura 115**




**EA13.** La densidad del aire en función de la temperatura presenta la configuración mostrada en la figura. Con ayuda de un software realizar un ajuste de curva cuadrático con los datos dados y graficar.

Figura 116




## 2.6 Límites de una función

Tomemos la función $f(x) = x + 1$, se van a considerar valores muy próximos a un punto que forma parte de la función para analizar el comportamiento de dicha función:

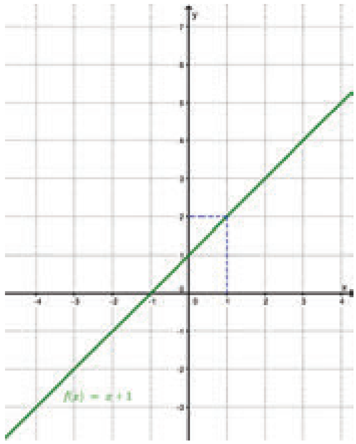
Cuando $x$ toma valores muy próximos a 1, ¿Cómo es la función?, es decir cuando $x \rightarrow 1$ ($x$ tiende a uno), ¿Hacia qué valore tiende $f(x)$?

Realicemos una tabla para tener una idea del comportamiento de la función:

Tabla 20

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 1,5 | 2,5 |
| 1,2 | 2,2 |
| 1,1 | 2,1 |
| 1,09 | 2,09 |
| 1,005 | 2,005 |
| 1,0001 | 2,0001 |
| 1 | ……. |
| 0,9999 | 1,9999 |
| 0,98 | 1,98 |
| 0,9 | 1,9 |
| 0,5 | 1,5 |

**Figura 117**



Como podemos observar tanto en la tabla como en el gráfico a medida que tomamos valores más cercanos a 1, la función se acerca a 2. De acuerdo a esta información se podría indicar que cuando *x⟶1, f(x)⟶2.* Que se escribe:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2$$

## Ejercicios resueltos

**ER1.** Sea la función $f(x) = 2/(x+1)$ que se muestra en la figura 118, llene los datos que solicita la tabla 21, para determinar el $\lim_{x\to -1} f(x)$.

**Tabla 21**

| *x* | -0,9 | -0,99 | -0,999 | -1,001 | -1,01 | -1,1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *f(x)* | | | | | | |

## Solución

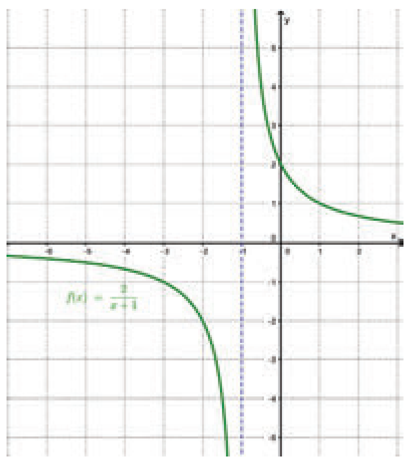
Procedemos a reemplazar los valores en la función para llenar la tabla.

**Tabla 22**

| $x$ | -0,9 | -0,99 | -0,999 | -1,001 | -1,01 | -1,1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 20 | 200 | 2000 | -2000 | -200 | -20 |

Como se puede observar cuando tomamos valores cercanos a -1 por la derecha la función tiende a ∞, y si lo hacemos por la izquierda la función tiende a -∞ por lo que podemos indicar que el $\lim_{x \to -1} f(x)$ no existe. Para verificar el resultado podemos consultar con la gráfica de la función:

**Figura 118**



## Ejercicios propuestos

**EP1.** Con ayuda de una tabla de datos y las respectivas gráficas, determinar los siguientes límites:

- $\lim_{x \to 1} \sqrt{x}$
- $\lim_{x \to 5} \frac{2x}{x-5}$

$$\lim_{x \to 0} x^2 + 2x - 2$$

$$\lim_{x \to -3} -3$$

Al resolver el ejercicio modelo $\lim_{x \to 1} x + 1$ con ayuda de la tabla y la gráfica, su solución fue: $\lim_{x \to 1} x + 1 = 2$ lo que nos indica que para resolver el límite debemos remplazar en la función el valor al cual tiende la variable.

## EJERCICIOS RESUELTOS

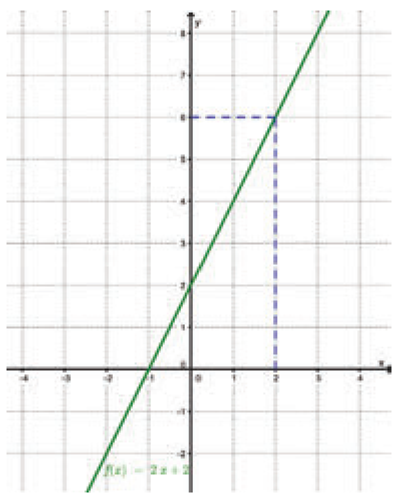
**ER1.** Resolver los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 2} 2x + 2$

b) $\lim_{x \to 1} \sqrt{4x} - 3$

c) $\lim_{x \to -1} (3x + 5)^3$

**Figura 119**

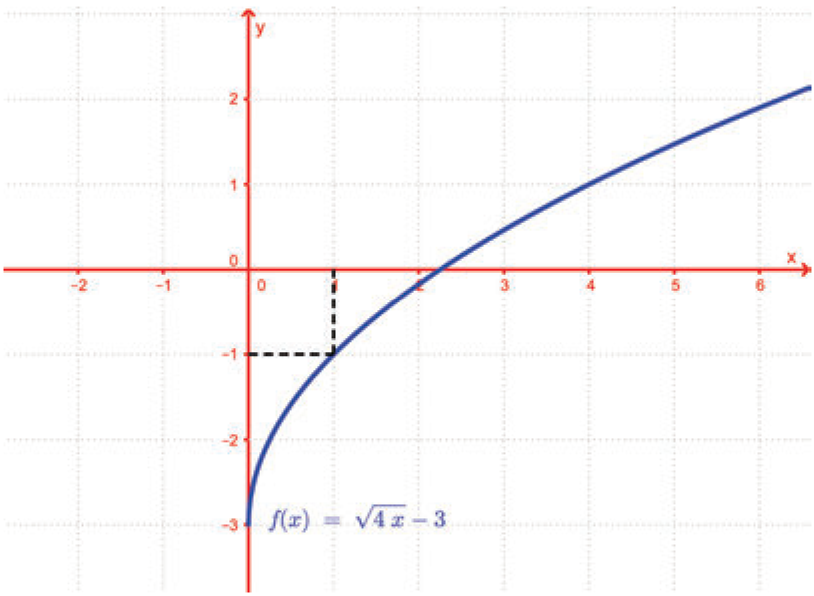


## Solución

a. $\lim\limits_{x \to 2} 2x + 2 = 2(2) + 2 = 6$

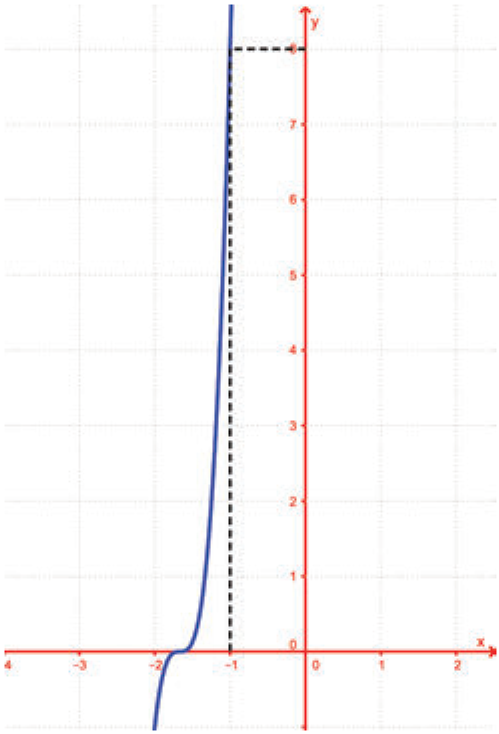
b. $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{4x} - 3 = \sqrt{4(1)} - 3 = -1$

**Figura 120**




c. $\lim\limits_{x \to -1} (3x + 5)^3 = [3(-1) + 5]^3 = 8$

**Figura 121**




## *EJERCICIOS PROPUESTOS*

**EP1.** Determinar los siguientes límites:

$$\lim_{x \to 1} \sqrt{x}$$

$$\lim_{x \to 5} \frac{2x}{x-5}$$

$$\lim_{x \to 0} x^2 + 2x - 2$$

$$\lim_{x \to -3} -3$$

## 2.6.1 Teoremas de límites

Tabla 23

| | |
|---|---|
| $\lim\limits_{x \to a} c = c$<br>$a$ y $c$ son números reales | $\lim\limits_{x \to a}(mx + b) = ma + b$<br>$a$, $b$ y $m$ son números reales |

Tabla 24

| |
|---|
| $\lim\limits_{x \to a} cf(x) = c \lim\limits_{x \to a} f(x)$<br>$a$ y $c$ son números reales |

Tabla 25

| | |
|---|---|
| Si $a > 0$ y $n$ es un número entero positivo, o si $a \leq 0$ y $n$ es un entero impar positivo, entonces:<br>$\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ | Si una función $f$ tiene un límite cuando $x$ tiende a $a$, entonces:<br>$\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$<br>Siempre y cuando $n$ sea un entero positivo impar o bien $n$ sea un entero positivo par y $\lim\limits_{x \to a} f(x) > 0$ |

Tabla 26

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$, entonces:

a) $\lim\limits_{x \to a}[f(x) + g(x)] = L + M$

b) $\lim\limits_{x \to a}[f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$

$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$, siempre y cuando $M \neq 0$

El teorema anterior también se escribe:

Tabla 27

$$\lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a}[f(x)] \cdot \lim_{x \to a}[g(x)]$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$$

## EJERCICIOS RESUELTOS

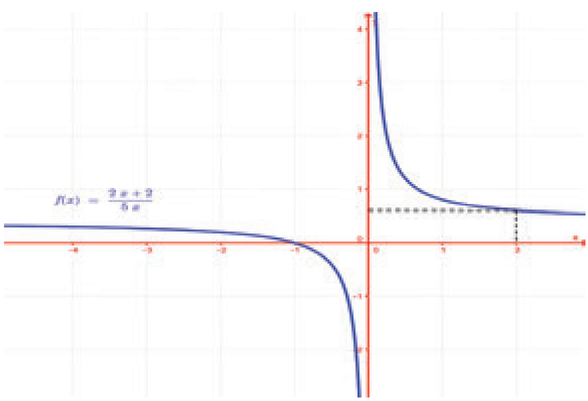
**ER1.** Aplicando los teoremas determinar:

$$\lim_{x \to 3} \frac{2x + 2}{5x}$$

## SOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 3} \frac{2x + 2}{5x} = \frac{\lim_{x \to 3}(2x + 2)}{\lim_{x \to 3}(5x)} = \frac{2(3) + 2}{5(3)} = \frac{8}{15}$$

Figura 122



## Ejercicios propuestos

**EP1.** Aplicando los teoremas determinar los siguientes límites:

- $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^{\frac{4}{3}}+5\sqrt{x}}{7-\frac{13}{x}}$

- $\lim\limits_{x \to 5} \sqrt[3]{2x^2 - 5x + 2}$

- $\lim\limits_{x \to -2} -6$

- $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{4-\sqrt{16+h}}{-5}$

- $\lim\limits_{x \to -2} -x^2 + 3x - 6$

### *2.6.2 Indeterminaciones*

Una indeterminación no significa que el límite no exista, tampoco indica que el mismo no se puede determinar. Solo indica que las propiedades no se pueden aplicar directamente y requiere ciertas manipulaciones a las expresiones o acudir a ciertos teoremas, a fin de poder "levantar o hacer determinable" el límite buscado. Existen siete indeterminaciones que debemos recordar y a la vez diferenciar de algunas expresiones que si son determinadas y a las cuales se les asigna un valor o la tendencia a un valor.

**Tabla 28**

| Son indeterminaciones | | No son indeterminaciones |
|---|---|---|
| cero para cero | $0/0$ | $c/0 = \infty$ |
| infinito para infinito | $\infty/\infty$ | $0/c = 0$ |
| infinito menos infinito | $\infty - \infty$ | $c/\infty = 0$ |
| cero por infinito | $0 \cdot \infty$ | $\infty + \infty = \infty$ |
| cero elevado a la cero | $0^0$ | $-\infty - \infty = -\infty$ |
| infinito elevado a la cero | $\infty^0$ | $0^\infty = 0$ |
| uno elevado al infinito | $1^\infty$ | $0^{-\infty} = 0$ |

## Ejercicios resueltos

**ER1.** Realizar las siguientes operaciones:

- $100 + \infty =$
- $5 - \infty =$
- $\infty/2 =$
- $5(\infty) =$

## Solución

- $100 + \infty = \infty$
- $5 - \infty = -\infty$
- $\infty/2 = \infty$
- $5(\infty) = \infty$

## Ejercicios propuestos

**EP1.** Llenar la tabla propuesta:

**Tabla 29**

| | | |
|---|---|---|
| $-5 + \infty =$ | $(\infty)(-\infty) =$ | $\infty/(-3) =$ |
| $100+(-\infty) =$ | $(-\infty)^3 =$ | $(-\infty)/\infty =$ |
| $-10 -\infty =$ | $(1/3)^{-\infty} =$ | $0/(-\infty) =$ |
| $-5(-\infty) =$ | $(-3)^{\infty}=$ | $(\infty+\infty)/(-3) =$ |
| $-5 + \infty =$ | $(2/3)^{\infty} =$ | $2(\infty) + \infty =$ |
| $(1000)\infty =$ | $3^{\infty}=$ | $10000/\infty=$ |
| $(-4)(-\infty) =$ | $\infty-\infty =$ | $(-0.0003)/(-\infty) =$ |
| $\infty^{\infty}=$ | $\infty^0=$ | $\infty^2=$ |

**Indeterminación** $\dfrac{0}{0}$

Cuando al reemplazar los valores de un límite en una función nos da este resultado, para funciones racionales, se debe retirar la indeterminación mediante cancelación de sus factores comunes.

**Ejemplo 1:** Determinar $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1}$

## Solución

Si reemplazamos el valor al que tiende $x$ nos da como resultado $\frac{1^2-1}{1^2-1} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}$ que es una indeterminación.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x}{(x+1)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

**Indeterminación** $\frac{\infty}{\infty}$

Cuando al reemplazar directamente el límite en la función nos da un valor de este tipo, se tiene que dividir el numerador y el denominador para la mayor potencia de la variable en el denominador.

**Ejemplo 2:** Determinar $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2 + x}{3 - x}$

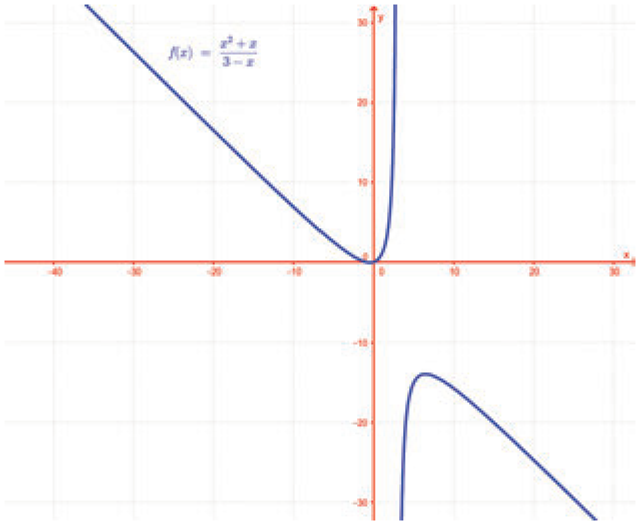
## Solución

Si reemplazamos el valor al que tiene $x$ nos queda $\frac{\infty+\infty}{3-\infty} = \frac{\infty}{\infty}$ lo cual es una indeterminación ya que no se puede dividir un valor infinito para otro infinito ya que no son valores determinados.

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x^2 + x}{3 - x} = \lim_{x\to \infty} \frac{\frac{x^2 + x}{x}}{\frac{3 - x}{x}} = \frac{x + 1}{\frac{3}{x} - 1} = \frac{\infty + 1}{\frac{3}{\infty} - 1} = \frac{\infty}{0 - 1} = -\infty$$

En la siguiente gráfica podemos observar que cuando $x$ toma valores cada vez más altos, es decir tiende al infinito, los valores de $y$ toman valores negativos tendiendo al menos infinito como se pudo ver en el ejemplo.

Figura 123




### *2.6.3 Formas de levantar las indeterminaciones*

Entre algunas formas de levantar las indeterminaciones tenemos la factorización, racionalización, simplificación o una mezcla de las anteriores:

**Ejemplo1:**

$$\lim_{x \to -5} \frac{25 - x^2}{5x + x^2}$$

Solución

Reemplazando tenemos:

$$\lim_{x \to -5} \frac{25 - x^2}{5x + x^2} = \frac{25 - (-5)^2}{5(-5) + (-5)^2} = \frac{25 - 25}{-25 + 25} = \frac{0}{0}$$

Factorizando tenemos:

$$\lim_{x \to -5} \frac{25 - x^2}{5x + x^2} = \lim_{x \to -5} \frac{(5 + x)(5 - x)}{x(5 + x)} = \lim_{x \to -5} \frac{(5 - x)}{x} = \frac{10}{-5} = -2$$

**Ejemplo 2**

$$\lim_{x \to 5} \frac{x - 5}{1 - \sqrt{x - 4}}$$

## Solución

Reemplazando tenemos:

$$\lim_{x \to 5} \frac{x - 5}{1 - \sqrt{x - 4}} = \frac{0}{0}$$

Racionalizando y realizando las operaciones:

$$\lim_{x \to 5} \frac{x - 5}{1 - \sqrt{x - 4}} \cdot \frac{1 + \sqrt{x - 4}}{1 + \sqrt{x - 4}} = \lim_{x \to 5} \frac{(x - 5)\left(1 + \sqrt{x - 4}\right)}{\left(1 - \sqrt{x - 4}\right)\left(1 + \sqrt{x - 4}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 5} \frac{(x - 5)\left(1 + \sqrt{x - 4}\right)}{[1 - (x - 4)]} = \lim_{x \to 5} \frac{(x - 5)\left(1 + \sqrt{x - 4}\right)}{[1 - x + 4]}$$

$$= \lim_{x \to 5} \frac{(x - 5)\left(1 + \sqrt{x - 4}\right)}{(5 - x)} = \lim_{x \to 5} \frac{(x - 5)\left(1 + \sqrt{x - 4}\right)}{-(x - 5)}$$

$$\lim_{x \to 5} -\left(1 + \sqrt{x - 4}\right) = -\,2$$

### *Límites al infinito con funciones racionales*

**Caso 1:** El grado del numerador es mayor que el del denominador

### Ejemplo 1:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + x^4}{x^2 + 1}$$

## SOLUCIÓN

Para evaluar el límite en el infinito de una función racional, luego de verificar la indeterminación al reemplazar el valor del límite, empezamos dividiendo tanto el numerador como el denominador por la potencia mayor de la variable que hay en el denominador.

Reemplazando tenemos:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + x^4}{x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty}$$

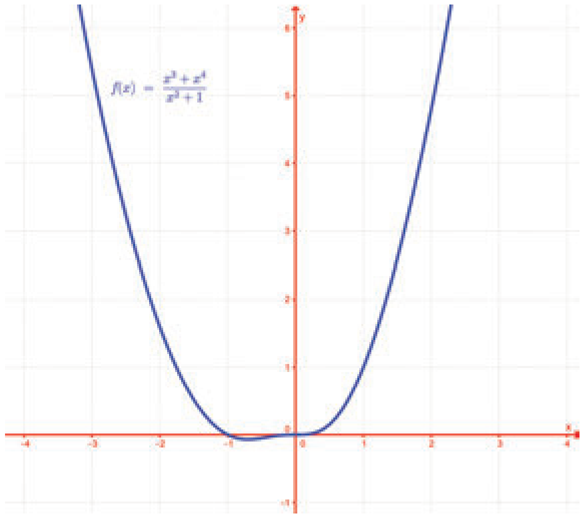
Levantamos la indeterminación dividiendo en este caso para $x^2$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + x^4}{x^2 + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3 + x^4}{x^2}}{\frac{x^2 + 1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x + x^2}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} (x + x^2)}{\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} x + \lim\limits_{x\to\infty} x^2}{\lim\limits_{x\to\infty} 1 + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{\infty + \infty^2}{1 + 0} = \infty$$

**Figura 124**



Si el grado del numerador es mayor que el del denominador la solución nos queda +∞ o -∞

**Caso 2:** El grado del numerador y del denominador es el mismo

**Ejemplo 1:**

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 + x}{x^2 + 1}$$

## Solución

Reemplazando tenemos:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 + x}{x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty}$$

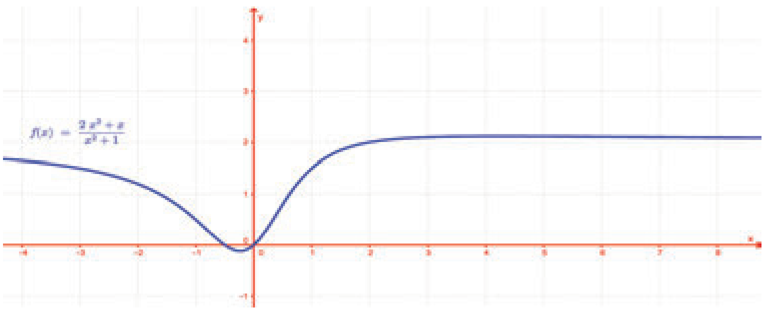
Levantamos la indeterminación dividiendo en este caso para $x^2$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2+x}{x^2}}{\frac{x^2+1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}2+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}$$

$$=\frac{2+0}{1+0}$$

$$=2$$

**Figura 125**




**Caso 3**

**Caso 1:** El grado del numerador es menor que el del denominador

**Ejemplo 1:**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+3}{x^4+x^2+1}$$

## Solución

Reemplazando tenemos:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+3}{x^4+x^2+1}=\frac{\infty}{\infty}$$

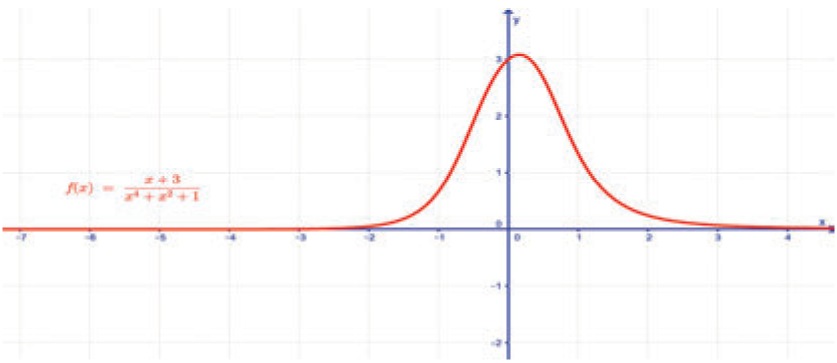
Levantamos la indeterminación dividiendo en este caso para $x^4$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+3}{x^4+x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{x+3}{x^4}}{\dfrac{x^4+x^2+1}{x^4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{3}{x^4}}{1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^3}+\dfrac{3}{x^4}}{\lim\limits_{x\to\infty} 1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^3}+\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3}{x^4}}{\lim\limits_{x\to\infty} 1+\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^4}}$$

$$= \frac{0+0}{1+0+0} = 0$$

Figura 126




Si el grado del numerador es menor que el del denominador la solución nos queda 0

### *2.6.4 Límites de funciones trigonométricas*

Para resolver límites de funciones trigonométricas, es de gran importancia conocer los teoremas:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1 \qquad \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x}$$

**Ejemplo 1:**

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{x}$$

## Solución

El límite es indeterminado de la forma $\frac{0}{0}$ por lo tanto:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x cos(x)} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \cdot \frac{1}{cos(x)}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right) \cdot \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\cos(x)}\right) = (1)(1)$$

$$= 1$$

## Ejercicios propuestos

**EP1.** Determinar los siguientes límites:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{\sqrt{x}-1}$$

$$\lim_{x \to 8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{x^2-2x-48}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^6-x^5}{1-x}$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$$

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(4x)}{x}$
- $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2-5x+4}$
- $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(4x)}{sen\,(5x)}$

**EP2.** Demostrar:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x}$$

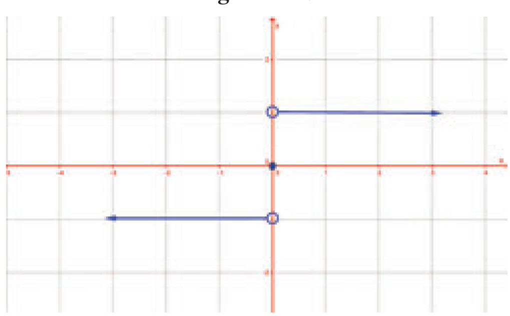
## *2.6.5 Límites laterales*

Tenemos la función signo: $sgn(x) = \begin{cases} 1 & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x = 0 \\ -1 & si\ x < 0 \end{cases}$

Cuya gráfica se representa en la figura 127, cuando *x* se aproxima a cero por la derecha, la función tiende a 1, cuando *x* se aproxima a cero por la izquierda la función tiende a, –1 es decir:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$

**Figura 127**



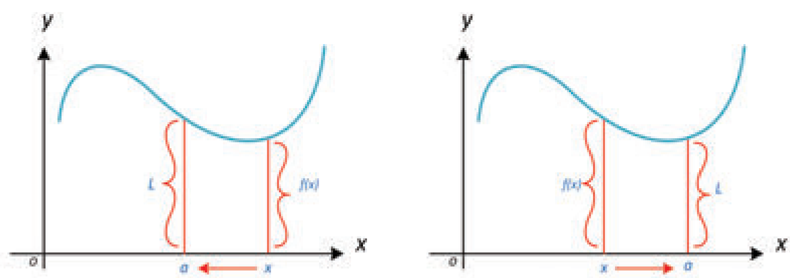
Partiendo del análisis del ejercicio, se tiene la siguiente definición:

Tabla 30

| DEFINICIÓN |
|---|
| $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ |
| El límite de *f(x)* cuando *x* tiende a *a* por la derecha es igual a *L*, si podemos hacer que los valores de *f(x)* se acerquen arbitrariamente a *L* tanto como queramos, tomando *x* cercanos a *a*, pero mayores que *a*. |
| $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$ |
| El límite de *f(x)* cuando *x* tiende a *a* por la izquierda es igual a *L*, si podemos hacer que los valores de *f(x)* se acerquen arbitrariamente a *L* tanto como queramos, tomando *x* cercanos a *a*, pero menores que *a*. |

La definición anterior se puede ilustrar con los gráficos propuestos a continuación en la figura 128:

Figura 128




$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$

Por la definición y por las gráficas se concluye que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \textit{si y solo si} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = L \quad y \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

**Ejemplo 1:**

Según la gráfica 129 determinar:

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) =$

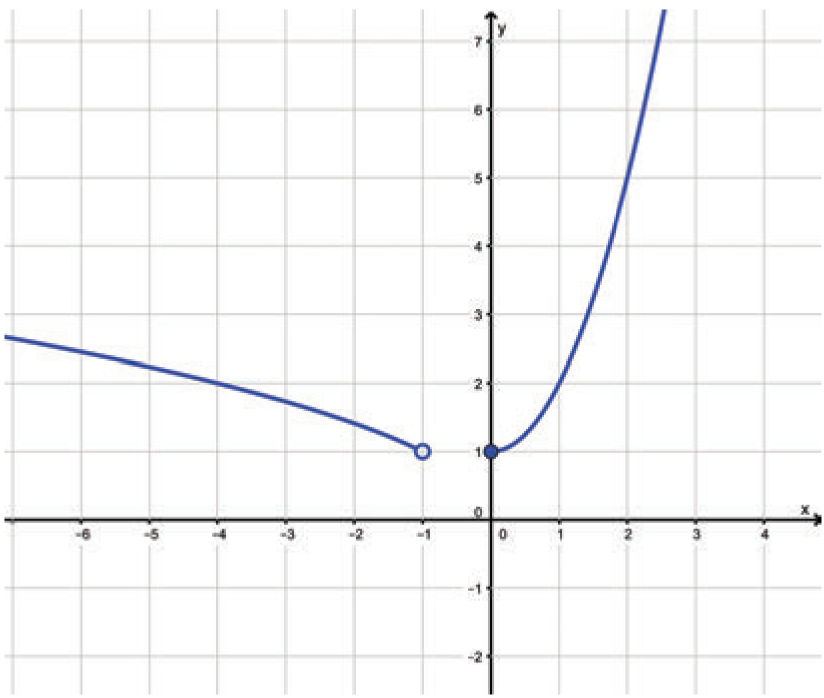
b) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) =$

c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) =$

d) $f(-1) =$

e) $f(0) =$

**Figura 129**



## Solución

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$

b) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = NE$

c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = NE$

d) $f(-1) = NE$

e) $f(0) = 1$

## Ejercicios propuestos

**EP1.** Según la gráfica determinar:

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) =$

b) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) =$

c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) =$

d) $f(4) =$

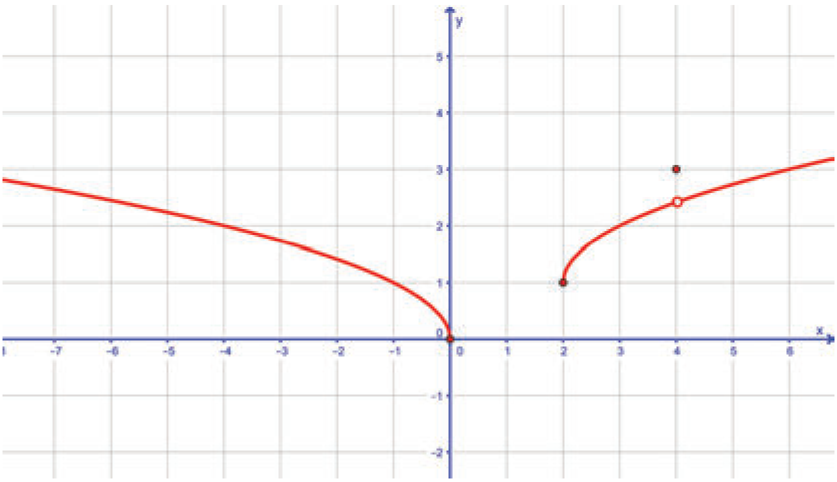
e) $f(0) =$

f) $\lim\limits_{x \to 4} f(x) =$

g) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) =$

h) $f(2) =$

Figura 130



## 2.7 Asíntotas de una función

Se le llama asíntota de la gráfica de una función, a una recta a la que se aproxima continuamente la gráfica de dicha función. La distancia entre las dos tiende a ser cero a medida que se extiende indefinidamente.

### *2.7.1 Asíntota horizontal*

Tabla 31

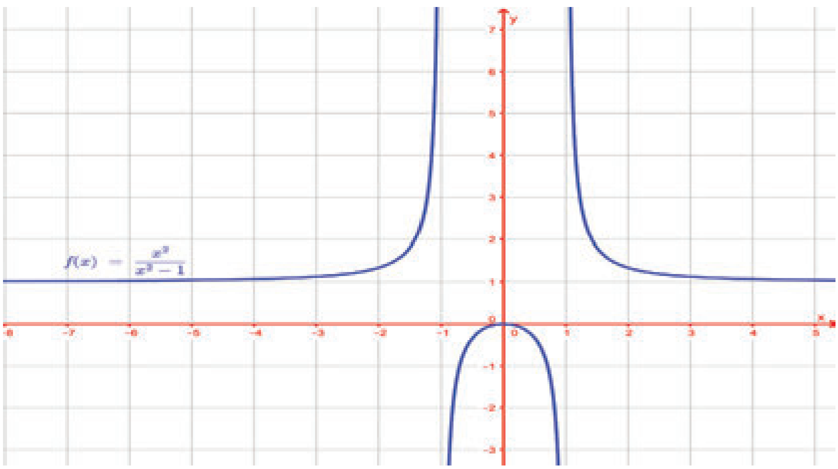
| DEFINICIÓN |
|---|
| La recta $y = L$ se llama asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$ si: |
| $a)\quad \lim_{x\to\infty} f(x) = L$ o $b)\quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ |

## Ejercicios resueltos

**ER1.** Sea la función $f(x) = x^2/(x^2-1)$,

a. Según la gráfica establecer si la función tiene asíntota horizontal
b. Determinar analíticamente si la función tiene AH

**Figura 131**



## Solución

a. De acuerdo a la gráfica se puede observar que la recta $y=1$ representa una asíntota horizontal en la gráfica.
b. Para determinar la AH de forma analítica debemos determinar:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \qquad \text{o} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

Así tenemos:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-1}$$

Para levantar la indeterminación ∞/∞, como se anotó antes, dividimos tanto el numerador como el denominador para la variable con el mayor exponente, y resolvemos:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2-1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}=1$$

Así mismo:

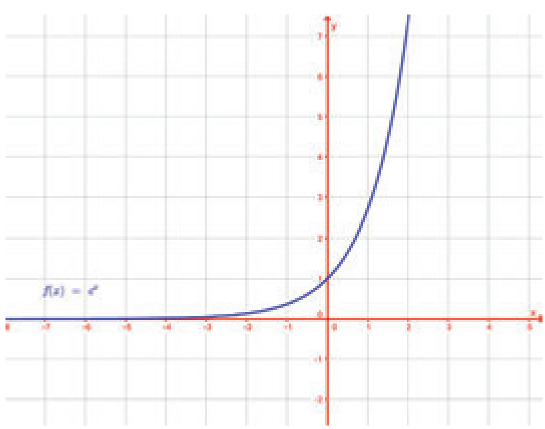
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2-1}=1$$

## Ejercicios propuestos

**ER1.** Sea la función: $f(x) = e^x$,

a. Según la gráfica establecer si la función tiene asíntota horizontal
b. Determinar analíticamente si la función tiene A.H.

**Figura 132**



## 2.7.2 *Asíntota vertical*

**Tabla 32**

| **DEFINICIÓN** | | |
|---|---|---|
| La recta $x=a$ se llama asíntota vertical de la curva $y=f(x)$ si al menos una de las siguientes afirmaciones son verdaderas: | | |
| $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ | $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$ | $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ | $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ | $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ |

### Ejercicios resueltos

**ER1.** Sea la función: $f(x)=\frac{1}{x-3}$ , realice el respectivo análisis y determine la asíntota vertical.

### Solución

En las funciones racionales *a* es un valor que no pertenece al dominio, por lo tanto debe ser el valor que anula el denominador, es decir en la función: $f(x)=1/(x-3)$ el valor 3 no pertenece al dominio ya que anularía al denominador, entonces procedemos a determinar el límite:

$$\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-3}=\infty$$

Es decir que la recta $x = 3$, es la asíntota vertical. Graficando tenemos (figura 133):

### Ejercicios propuestos

**EP1.** En el gráfico propuesto de la figura 134 observar y determinar visualmente la recta asíntota de la función.

**Figura 133**

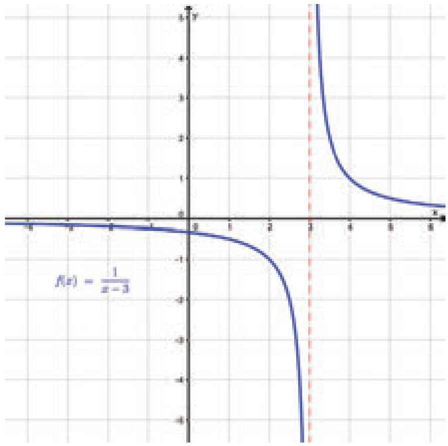
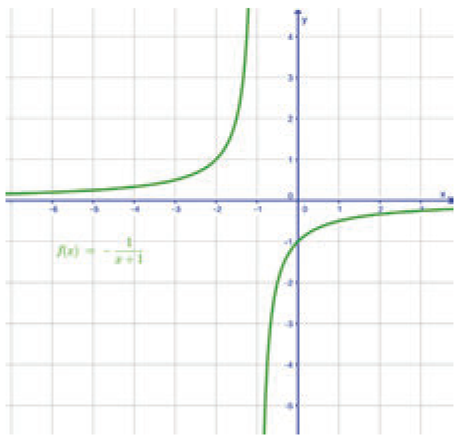



**Figura 134**




**EP2.** Determinar las asíntotas verticales de las siguientes funciones:

- $f(x) = (2x+3)/(x-1)$
- $f(x) = 1/x^2$
- $f(x)=1/(x^2 -2x -15)$
- $f(x) = \tan(x)$

**EP3.** Con la información que proporciona la gráfica de la figura 135. Determinar:

a) $\lim_{x \to 1} f(x) =$

b) $\lim_{x \to -1} f(x) =$

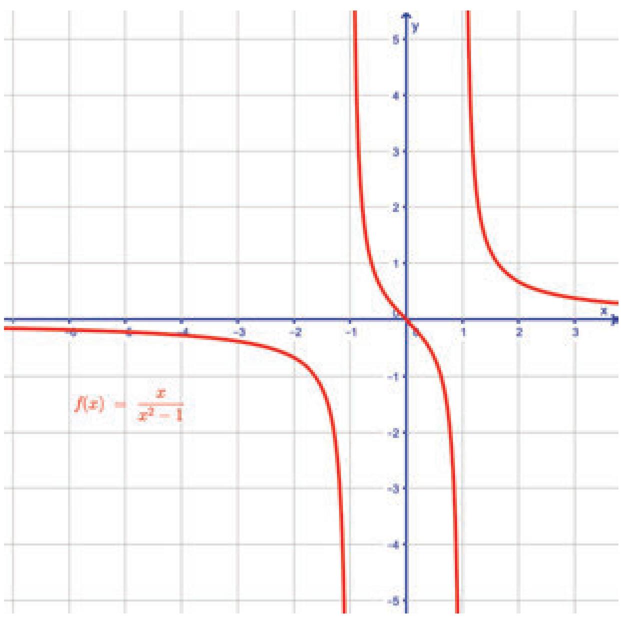
c) $\lim_{x \to 1^+} f(x) =$

d) $\lim_{x \to 1^-} f(x) =$

e) $\lim_{x \to -1^+} f(x) =$

f) $\lim_{x \to -1^-} f(x) =$

**Figura 135**



### 2.7.3 *Asíntota inclinada*

La asíntota oblicua o inclinada de una función es una recta cuya ecuación es la que conocemos:

$y = mx + b$, de donde $m$ (pendiente de la recta) se determina realizando el siguiente límite:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad m \neq 0$$

Y $b$ (intercepto con el eje $y$) obtenemos al resolver el límite:

$$b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] \qquad b \neq \mp\infty$$

#### Ejercicios resueltos

**ER1.** Sea la función $f(x) = (x^2+1)/(x-1)$, determine la asíntota oblicua

#### Solución

Vamos a determinar la asíntota oblicua cuya ecuación obedece la forma $y = mx+b$

De donde:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad m \neq 0$$

$$m = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{\frac{x^2+1}{x-1}}{x}\right] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2+1}{x^2-x}\right]$$

Analizando el límite se puede observar que se trata de una expresión racional, el grado mayor de la variable es el mismo tanto en el numerador como en el denominador, por lo tanto la razón de sus coeficientes nos indica el valor del límite, es decir *m = 1*. También se puede resolver dicho límite dividiendo cada término para la variable de mayor exponente del denominador

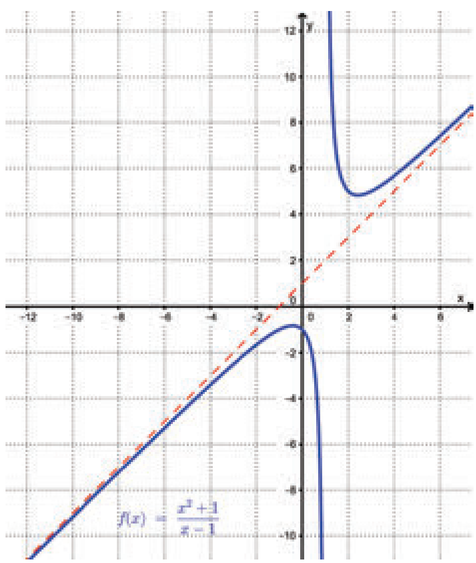
Para determinar el intercepto con el eje *y*:

$$b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx] \qquad b \neq \mp\infty$$

$$b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x^2 + 1}{x - 1} - x\right]$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x + 1}{x - 1}\right]$$

**Figura 136**



Asimismo:

$b = 1$

De tal forma:

$y = x + 1$, es la asíntota oblicua

Otra forma para determinar la asíntota oblicua es realizar la división:

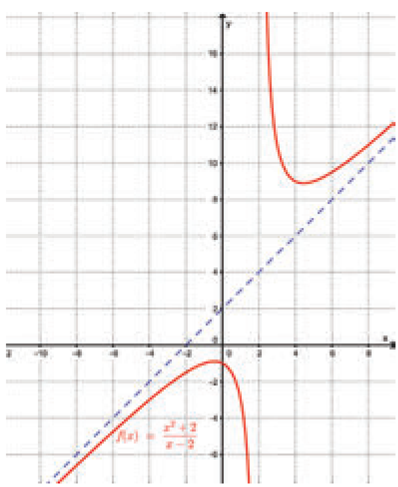
$$x^2 + 1 \;\big|\; \underline{x - 1}$$

Lo que nos da como resultado es $x + 1 + \frac{2}{x-1}$, , el cociente igualado a la variable $y$ constituye la asíntota oblicua, es decir:

$y = x+1$

**ER2.** Determine la ecuación de la recta que es asíntota oblicua de la función correspondiente a la gráfica:

**Figura 137**



## EJERCICIOS PROPUESTOS

**EP1.** En los siguientes casos indique las funciones que pueden tener asíntotas oblicuas justificando su respuesta:

- $f(x) = (x^2+5)/x$
- $g(x) = (x^2+x)/x$
- $h(x) = (x^2+1)/(x-3)$

## 2.8 Continuidad

Un proceso es continuo cuando se lleva a cabo gradualmente y sin ninguna interrupción o cambio brusco, por ejemplo las clases de la universidad no son continuas porque se interrumpen en las vacaciones y se regresa a estudiar luego de las vacaciones, un proceso continuo sería por ejemplo el movimiento de la tierra en torno a su propio eje lo que provoca el día y la noche; este concepto aplicado a las matemáticas nos indicaría que una función es continua en un punto, en un intervalo o en toda la función si al asignarse el valor de la o las variables independientes en la función, nos da un valor para la variable dependiente.

**Tabla 33**

| DEFINICIÓN |
|---|
| Una función $f$ es continua en un número $x = a$ si: $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$<br>Lo que implica que:<br>a) $f(a)\ existe\ \ (a\ pertenece\ al\ dominio\ de\ f)$<br>b) $\lim_{x \to a} f(x)\ \ existe$<br>c) $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$ |

## EJERCICIOS RESUELTOS

**ER1.** Sea $f(x) = \begin{cases} x+1 & si\ x > 1 \\ x & si\ x < 1 \end{cases}$ Determinar si $f$ es continua en $a = 1$

## Solución

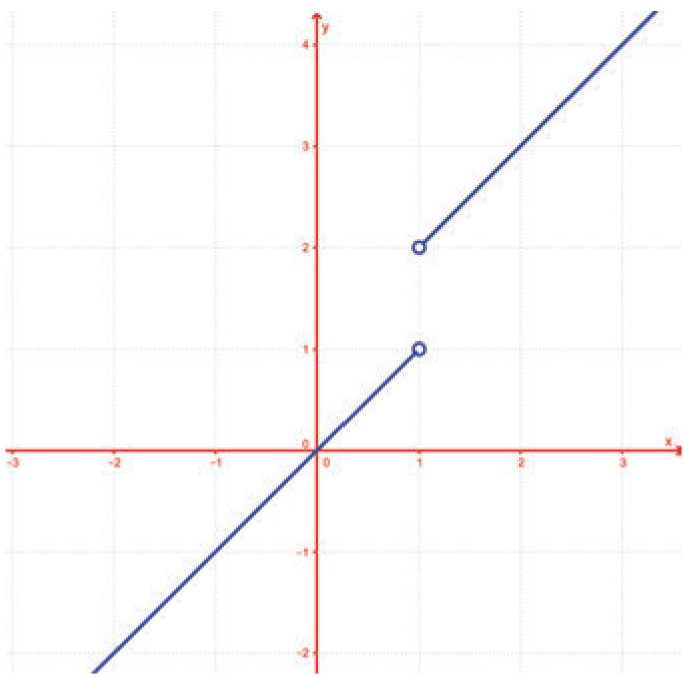
Aplicando la definición tenemos: Una función *f* es continua en un número *x=a* si:

- *f(a)* existe, *a* pertenece al dominio de *f*

*f(1)* no existe, 1 no pertenece al dominio de la función, por lo tanto no hace falta verificar b) y c).

Se concluye que la función es discontinua en dicho valor.

**Figura 138**




**ER2.** Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & si\ x \leq 2 \\ x + 4 & si\ 2 < x < 6 \\ 6 & si\ x = 6 \end{cases}$

a. Determinar si *f* es continua en $a = 2$
b. Determinar si *f* es continua en $a = 6$

## Solución

a. Determinar si *f* es continua en $a = 2$

- El valor $a = 2$ pertenece al dominio en el primer tramo de la función, evaluando dicho punto tenemos: $f(2) = 6$
- Verificamos si $\lim_{x \to a} f(x) \ \ existe$ : existe

$$\lim_{x \to 2} f(x) =$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 6 \qquad \lim_{x \to 2^-} f(x) = 6$$

Como los límites unilaterales son iguales, se concluye que: $\lim_{x \to 2} f(x) \ = 6$

- Ya que 6 = 6, se tiene que $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$

Por lo tanto la función es continua en $a = 2$

b. Determinar si *f* es continua en $a = 6$

- El valor $a = 6$ pertenece al dominio en el tercer tramo de la función, evaluando dicho punto tenemos: $f(6) = 6$

$\lim_{x \to a} f(x) \ \ existe$

$$\lim_{x \to 6} f(x) =$$

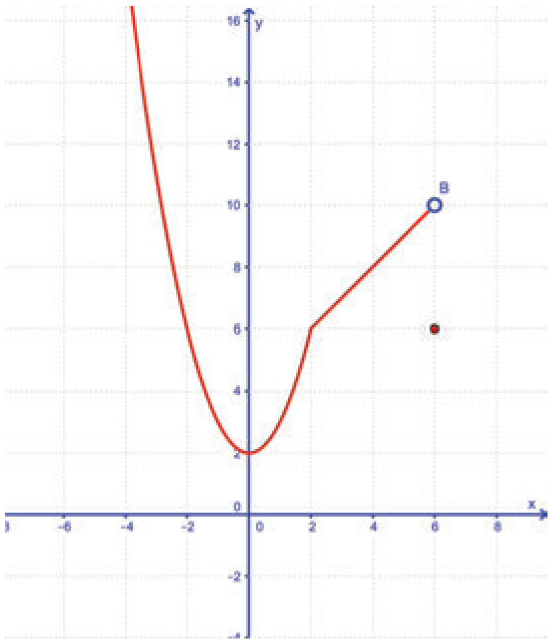
$$\lim_{x \to 6^+} f(x) = NE \qquad \lim_{x \to 6^-} f(x) = 10$$

Como los límites unilaterales no son iguales, se concluye que: $\lim_{x \to 6} f(x) \; = NE$

La función es discontinua en $a = 6$

Graficando tenemos:

**Figura 139**



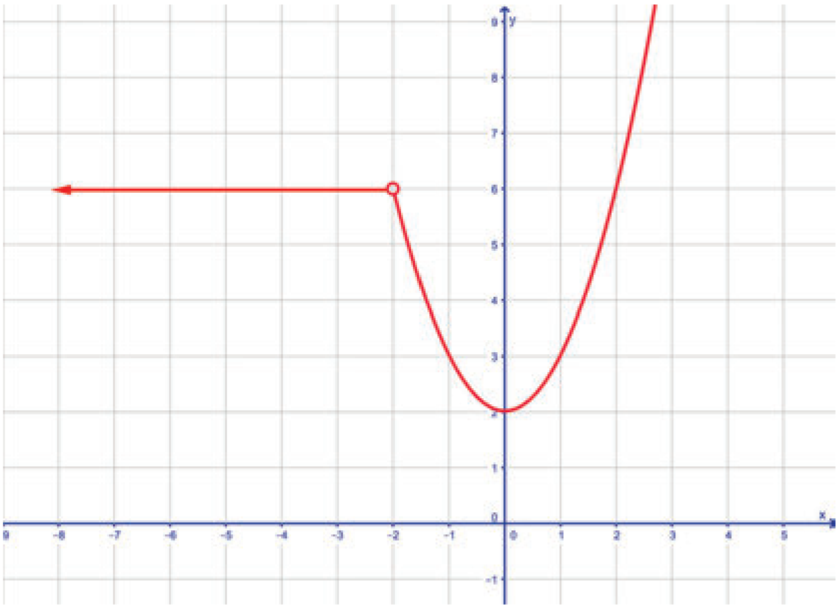

## Ejercicios propuestos

**EP1.** De la gráfica propuesta, determine:

La función que la representa

Si la función es continua en $x = -2$

Figura 140



**EP2.** Bosqueje una gráfica con las siguientes condiciones:

a) $f(a)\ exista$, pero el $\lim\limits_{x\to a} f(x)\ \ no\ exista$

b) $\lim\limits_{x\to a} f(x)\ \ exista$, pero $f(a)\ no\ exista$

c) $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$

## *2.8.1 Tipos de discontinuidad de funciones*

**DISCONTINUIDAD REMOVIBLE**.- Llamada también eliminable, ya que se puede eliminar la discontinuidad redefiniendo la función.

## Ejercicios resueltos

**ER1.** Determinar si la función es continua en *a = 1*

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & si\ x > 1 \\ x & si\ x < 1 \\ 2 & si\ x = 1 \end{cases}$$

Analizando tenemos:

a) $f(a)\ existe$

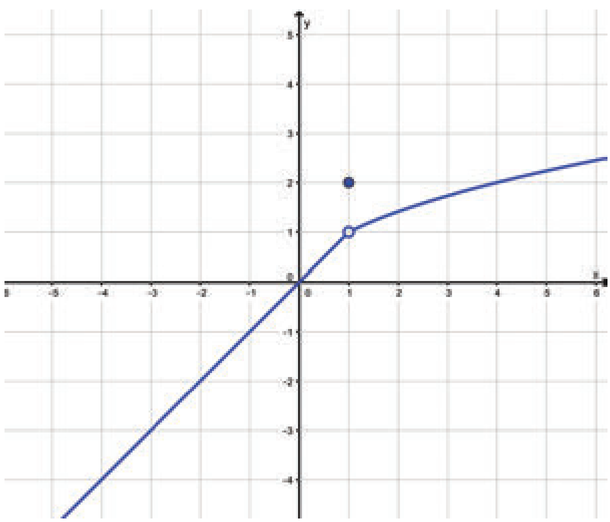
$f(1) = 2$

$\lim_{x \to a} f(x)\ \ existe$

a) $\lim_{x \to 1} f(x)\ = 1$

b) $2 \neq 1$

**Figura 141**



Como podemos ver en el análisis y en la gráfica la función es discontinua en $a = 1$ ya que $f(a) \neq \lim\limits_{x \to a} f(x)$, sin embargo redefiniendo la función en el tercer tramo la podemos volver continua, así:

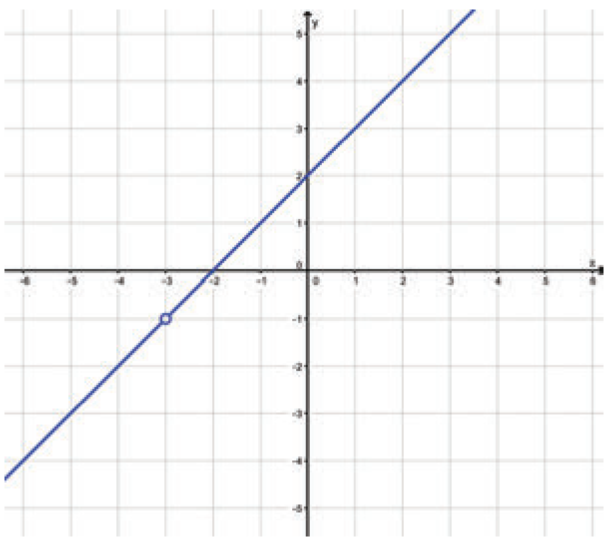
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & si\ x > 1 \\ x & si\ x < 1 \\ 1 & si\ x = 1 \end{cases}$$

## Ejercicios propuestos

**EP1.** Sea la función

$f(x) = (x^2 + 5x + 6)/(x+3)$, cuya gráfica está representada en la figura 142. Analizar la continuidad en la función en $a = -3$, de no ser continua y poder redefinirla, hacerlo.

**Figura 142**



**DISCONTINUIDAD DE SALTO.-** Llamada así porque se produce un salto de un valor a otro.

## Ejercicios resueltos

**ER1.** Determinar si la función es continua en $a = 4$

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & si\ x \geq 4 \\ 2 - x & si\ x < 4 \end{cases}$$

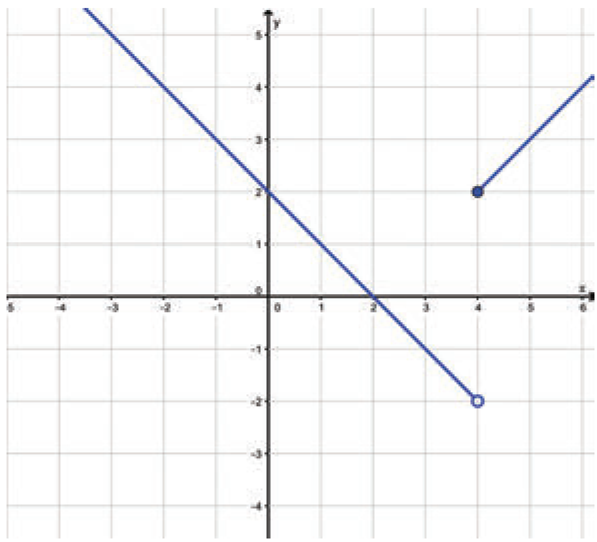
Analizando tenemos:

a) $f(a)\ existe$

$f(4) = 2$

b) $\lim_{x \to 1} f(x) \ = NE$

**Figura 143**




Como se observa en la gráfica hay un salto de un valor a otro, podemos observar que existen los límites laterales, pero como no coinciden no existe el límite cuando $x \to a$, en este caso se llama discontinuidad por salto finito.

Para determinar el salto podemos usar la siguiente fórmula:

$$\left| \lim_{x \to a^-} f(x) - \lim_{x \to a^+} f(x) \right|$$

**ER2.** La gráfica propuesta corresponde a la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x \leq 3 \\ \dfrac{2}{x-3} & si\ x > 3 \end{cases}$$

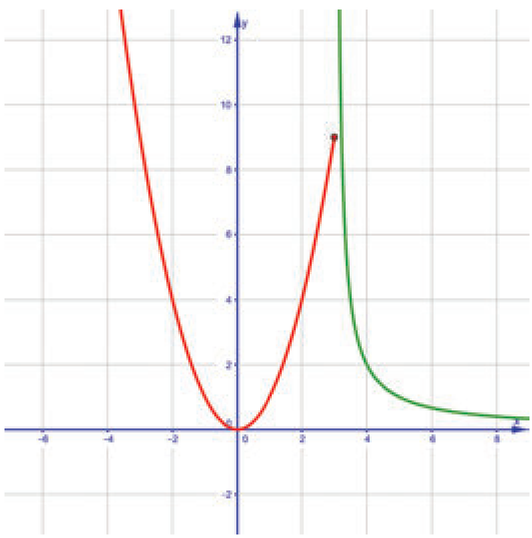
Determinar:

a) $f(3)$

b) $\lim_{x \to 3^-} f(x)$

c) $\lim_{x \to 3^+} f(x)$

**Figura 144**



## Solución

a) $f(3) = 9$

b) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 9$

c) $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = NE$

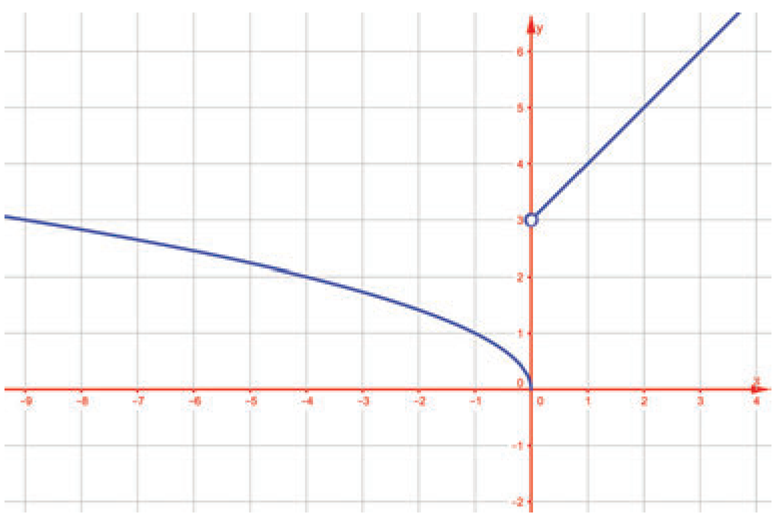
A esta clase de discontinuidades donde el un límite es infinito y el otro es finito se le conoce como discontinuidad por salto infinito.

## Ejercicios propuestos

**EP1.** De la gráfica de la figura 145. Determinar:

a. La función
b. La discontinuidad cuando *a = 0*
c. ¿Cómo se llama a ese tipo de discontinuidad?

**Figura 145**



**DISCONTINUIDAD ASINTÓTICA.-** Se denomina así por que los dos límites laterales de la función en el punto $x = a$ son infinitos, es decir:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$

## EJERCICIOS RESUELTOS

**ER1.** Sea la función $f(x) = 1/(x-1)$, determinar si la función es continua en $a = 1$

## SOLUCIÓN

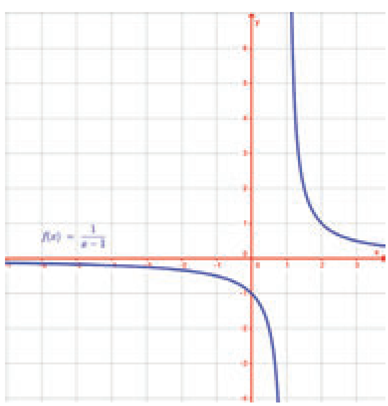
Determinamos:

$$f(1) = NE$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$$

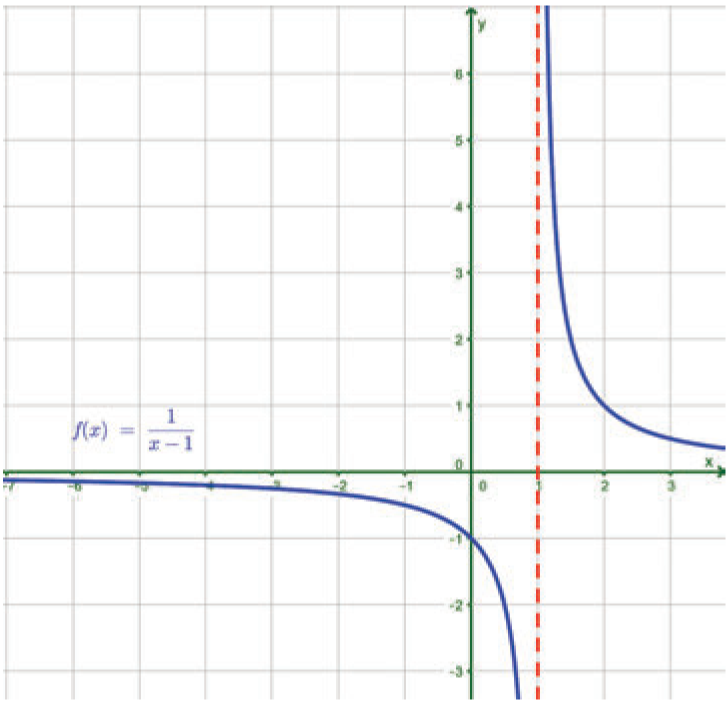
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$$

**Figura 146**



Concluimos que la función es discontinua cuando $a = 1$, además como se puede observar en la figura 147, $x = 1$ es la recta asíntota vertical de la función.

**Figura 147**




## *Ejercicios propuestos*

**EP1.** De acuerdo a la gráfica adjunta (figura 148) indicar el tipo de discontinuidad

Figura 148

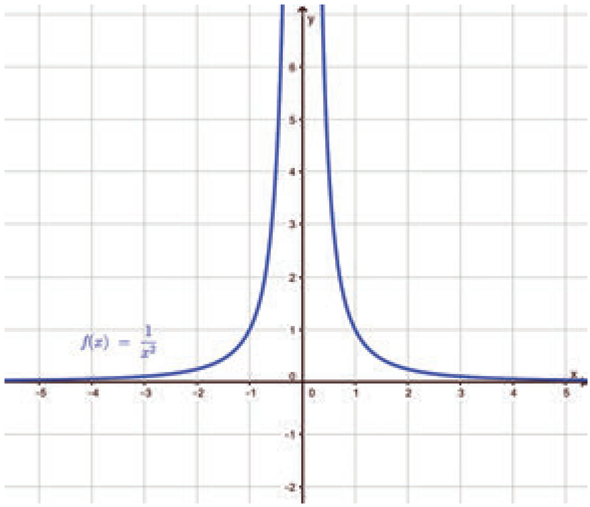



Tabla 34

**DEFINICIÓN DE CONTINUIDAD POR LA DERECHA EN UN NÚMERO** a
Una función $f$ es continua por la derecha en un número $x = a$ si y sólo sí:

a) $f(a)$ $existe$ $(a$ $pertenece$ $al$ $dominio$ $de$ $f)$

b) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ $existe$

c) $f(a) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$

Tabla 35

**DEFINICIÓN DE CONTINUIDAD POR LA IZQUIERDA EN UN NÚMERO** a
Una función $f$ es continua por la izquierda en un número $x = a$ si y sólo sí:

a) $f(a)$ $existe$ $(a$ $pertenece$ $al$ $dominio$ $de$ $f)$

b) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ $existe$

c) $f(a) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$

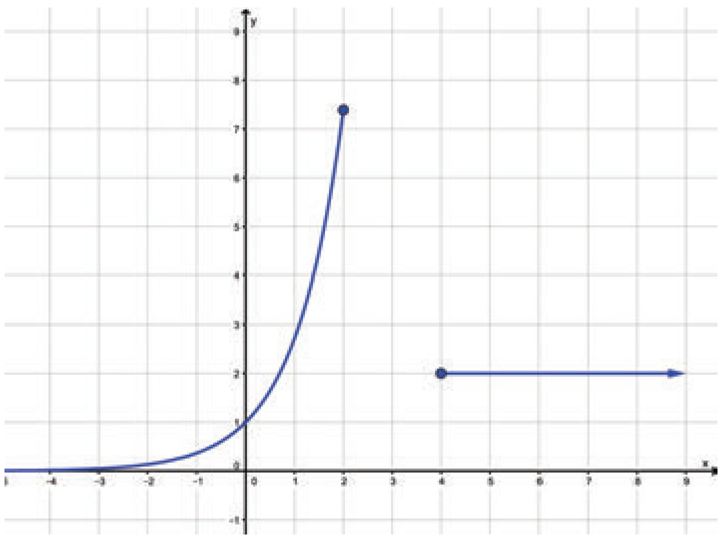
## Ejercicios resueltos

**ER1.** Sea la función $f(x) = \begin{cases} e^x \; si \; x \leq 2 \\ 2 \; si \; x \geq 4 \end{cases}$

a. Graficar la función
b. Analizar la continuidad lateral

## Solución

**Figura 149**



Según la gráfica de la función podemos observar que cuando *a = 4*, la función es continua por la derecha, ya que:

a) *f(4) = 2*

b) $\lim\limits_{x \to 4^+} = 2$

c) $f(4) = \lim\limits_{x \to 4^+} f(x)$

Y que cuando $a = 2$, la función es continua por la izquierda, ya que:

a) $f(2)=e^2$

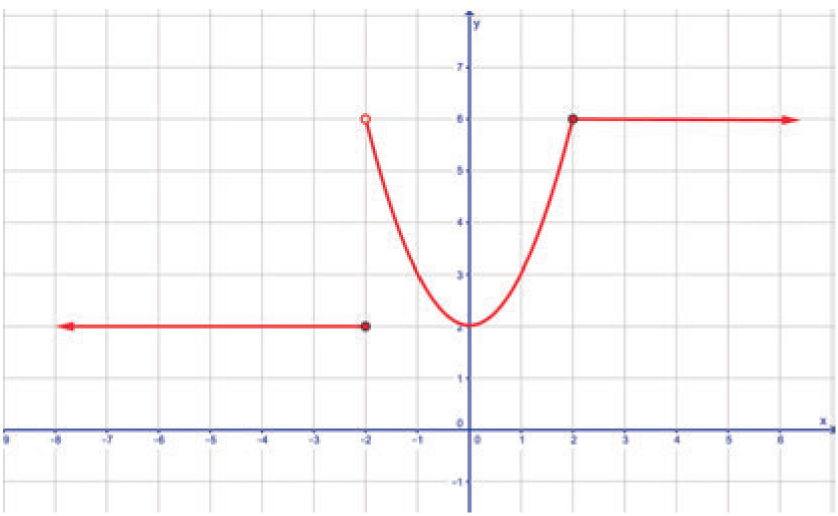
b) $\lim\limits_{x \to 2^-} = e^2$

c) $f(2) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$

## EJERCICIOS PROPUESTOS

**EP1.** Se presenta la gráfica determinar los valores en los cuales la función es continua por la derecha y los valores en los cuales es continua por la izquierda.

**Figura 150**



**EP2.** Investigar sobre la función $f(x) = [\![x]\!]$, determine:

a. Gráfica de la función
b. Continuidad por la derecha cuando $a = 1$
c. Continuidad por la izquierda cuando $a = 1$

Tabla 36

| |
|---|
| **DEFINICIÓN DE CONTINUIDAD SOBRE UN INTERVALO ABIERTO** (a, b)<br>Si una función *f* es continua en todos los número del intervalo *(a, b)*. |

Tabla 37

| |
|---|
| **DEFINICIÓN DE CONTINUIDAD SOBRE UN INTERVALO**<br>Una función *f* es continua sobre un intervalo si es continua en cada número en el intervalo. |

Tabla 38

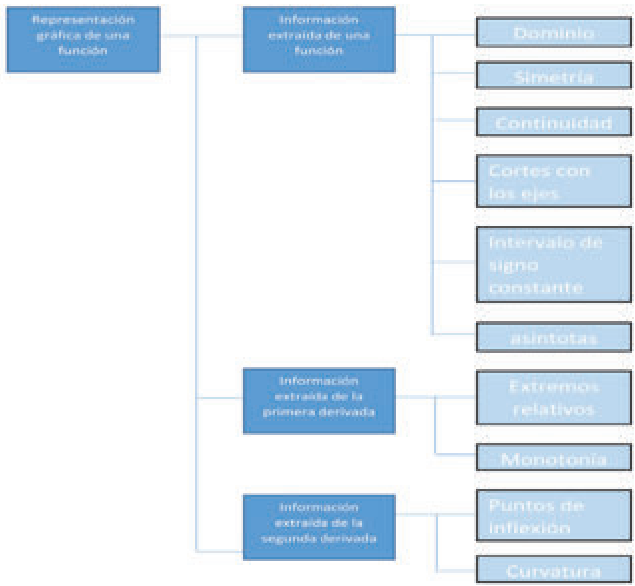
| |
|---|
| **DEFINICIÓN DE CONTINUIDAD SOBRE UN INTERVALO CERRADO *[a, b]***<br>Si una función *f* está definida en un intervalo cerrado *[a, b]*, entonces *f* es continua en *[a, b]* si es continua en *(a, b)* y además:<br>$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \qquad y \qquad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$ |

## 2.9 Gráfica de una función: dominio, rango, cortes, simetría, signo, asíntotas y continuidad

Ahora que ya se han visto algunas de las propiedades de las funciones vamos a realizar un ejercicio en donde se determine estos elementos, que nos ayudan a graficar una función.

Primero resumiremos en un esquema como se debe graficar una función:

**Figura 151**
**Esquema para graficar una función**




En este capítulo nosotros hemos visto la información necesaria para graficar una función a partir únicamente de la información extraída de la función misma, la información extraída de la primera y segunda derivada la vamos a estudiar en los siguientes capítulos.

Para desarrollar esta sección se darán los conceptos de cada parte y se irá desarrollando paso a paso el ejercicio.

**Ejemplo:** Graficar la siguiente función $y = 2x/(x-1)$

**Dominio.-** es el conjunto de valores de la variable independiente $x$ para los que está definida la función. $Dominio = \{x \in R / f(x) \in R\}$

Observamos en este ejercicio que el valor de $x$ no existe cuando el denominador es 0, es decir cuando $x$ es 1, por ende el dominio queda así: $Dominio = \{x \in R / x \neq 1\}$ o de la siguiente manera:

*Dominio* = $(-\infty,1)U(1,\infty)$

**Rango.-** el rango a diferencia del dominio no se puede determinar directamente, existen funciones en las que es imposible lograr determinar su rango. Para determinar el rango se debe despejar la variable independiente para este caso debe quedar $x = f(y)$ y se determina los valores para los que $y$ existe. Para el ejemplo tenemos:

$$y = \frac{2x}{x-1} \rightarrow \frac{1}{y} = \frac{x-1}{2x} \rightarrow \frac{1}{y} = \frac{2}{2x} - \frac{1}{2x} \rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x} \rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{y} = \frac{1}{2x}$$

$$\frac{y-2}{2y} = \frac{1}{2x} \rightarrow 2x = \frac{2y}{y-2} \rightarrow x = \frac{y}{y-2}$$

De esta expresión nos podemos dar cuenta que cuando $y$ es 2 la función no existe es decir volviendo a la función original el rango es:

*Rango* = $\{y \in R / y \neq 2\}$ o de la siguiente manera: *Rango* = $(-\infty,2)U(2,\infty)$

**Cortes o intersecciones con los ejes.-** Son los puntos en los que la gráfica corta al eje $x$ y al eje $y$

*Cortes con el eje x*

Para determinar el corte con el eje de las abscisas nos debemos dar cuenta que en este caso el valor de $y$ debe ser 0, hago $f(x) = 0$ es decir hago $y = 0$. Es decir:

$y = \frac{2x}{x-1} \rightarrow \frac{2x}{x-1} = 0$ aquí se va a determinar que valores nos da en $x$ cuando $y$ es 0

$2x = 0(x-1) \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$ es decir el punto de corte de la función con el eje de las $x$ es $(0,0)$.

*Cortes con el eje y*

Para ver los cortes que tiene la función con el eje de las ordenadas, el valor de la $x$ debe ser 0 por lo tanto en la expresión en donde este $x$ reemplazo por 0 y veo el valor de $y$.

$y = 2x/(x-1) \rightarrow y=(2(0))/(0-1) \rightarrow y=0$ es decir el corte de la función con el eje $y$ es $(0,0)$.

**Simetría.-** Para determinar si existe simetría con respecto al eje $y$ (función par) o con respecto al origen (función impar) o si no tiene ningún tipo de simetría aplico lo visto anteriormente.

Para determinar si existe simetría con respecto al eje $y$ uso la expresión: $f(-x) = f(x)$

$y = 2x/(x-1) \rightarrow$ reemplazamos en donde está $x$ le pongo $(-x)$ y compruebo:

$y = (2(-x))/((-x)-1) = (-2x)/(-x-1)$ lo cual es muy diferente que la función original por lo tanto no es simétrica con respecto al eje $y$.

Para determinar si es simétrica con respecto al origen aplico la siguiente expresión $f(-x) = -f(x)$

Para que la función sea impar al reemplazar $x$ por $(-x)$ nos debería quedar la expresión $-f(x) = -(2x/(x-1)) = (-2x)/(x-1)$ pero nos queda $(-2x)/(-x-1)$ por lo tanto tampoco es simétrica con respecto al origen.

**Conclusión:** La función no tiene ningúna simetría.

**Intervalos de Signo.-** Una función $f$ es positiva en un intervalo si $f(x) > 0$ para cualquier valor $x$ de ese intervalo. Análogamente, la función $f$ es negativa en un intervalo si $f(x) < 0$ en cualquier valor de ese intervalo.

En los intervalos en los que la función es positiva, su gráfica se encuentra por encima del eje $x$ y si la gráfica está por debajo del eje $x$ en ese intervalo la función es negativa. Para calcular dichos intervalos se estudia:

El signo de la función en intervalo cuyos extremos son los puntos en los que no está definida la función.

Los puntos de corte con el eje $x$

**Ejemplo:** Calcular los puntos de corte con los ejes y los intervalos de signo constante de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x - 1}$

Como $x = 0$ pertenece al dominio de $f$ podemos calcular el punto de corte con el eje $y$

$f(x) = -8 \rightarrow f$ corta al eje $y$ en el punto $(0,-8)$

Para los en que la función corta con el eje $x$ tenemos que $y = 0$

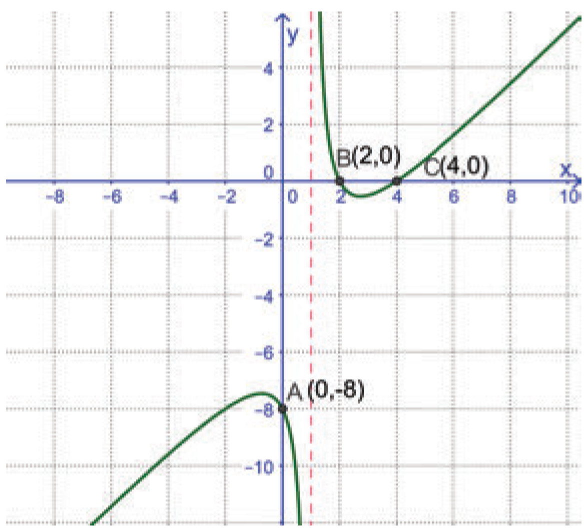
$(x^2 -6x +8)/(x-1)=0 \rightarrow x^2 -6x +8 = 0 \rightarrow (x-2)(x-4) = 0 \rightarrow x=2$ y $x=4$ por lo tanto los puntos de corte con el eje $x$ son (2, 0) y (4, 0)

$$(-\infty, 1)\text{U}(1,2)\text{U}(2,4)\text{U}(4, \infty)$$

Si sustituimos en la función cualquier punto en el interior de cada uno de los intervalos en los que se ha dividido el dominio de la función, el signo de $f$ en los diferentes intervalos queda:

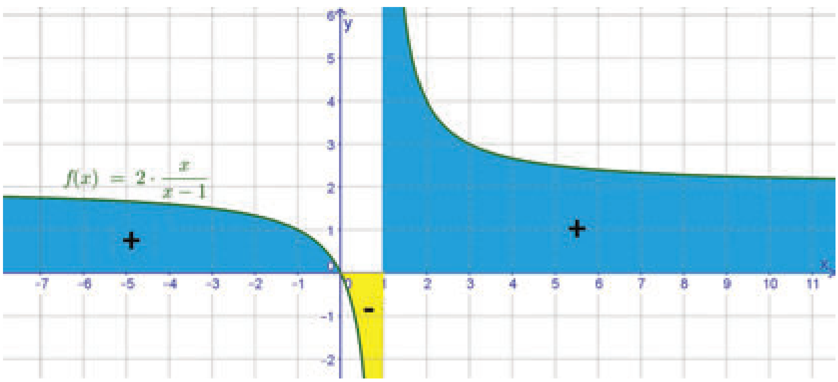
Positiva en los intervalos $(1,2)U(4,\infty)$
Negativa en los intervalos $(-\infty,1)U(2,4)$

**Figura 152**
**Gráfica: Intervalo de signo**



Ahora para el caso del ejemplo que estamos analizando se analizaría dentro de los intervalos de corte con el eje *x* (es decir en $x = 0$) y donde la función no existe (en $x = 1$) quedando los intervalos de la siguiente manera $(-\infty,0)U(0,1)U(1,\infty)$

**Figura 153**
**Gráfica: Signos de la función y = 2x/(x-1)**




## *Asíntotas*

### *Asíntota vertical*

Ya se vió $x = c$ es una asíntota vertical si se cumple que:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \pm\infty \;\; y/o \;\; \lim_{x \to c^+} f(x) = \pm\infty$$

Para este caso se estudia la función cuando $x = 1$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2x}{x-1} = -\infty \;\; y \;\; \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$$

Por lo tanto $x = 1$ es una síntota vertical

*Asíntota horizontal*

La recta $y = c$ es una síntota horizontal si:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = c \;\; y/o \;\; \lim_{x\to-\infty} f(x) = c$$

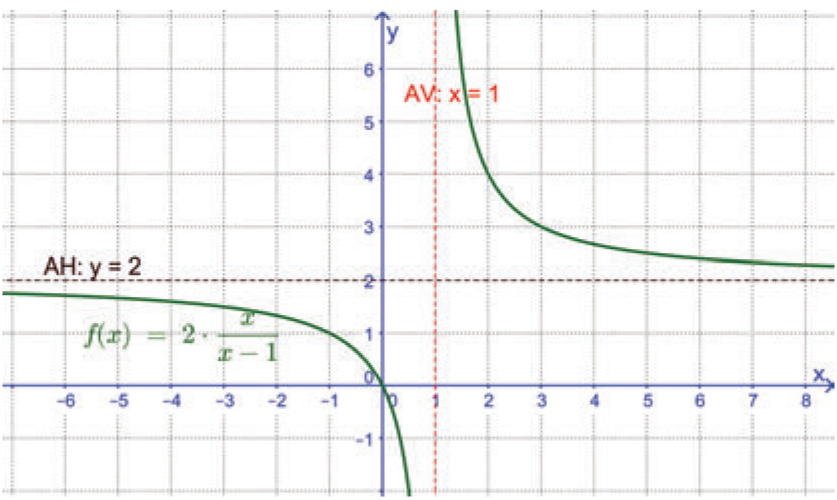
Para nuestro ejemplo $$\lim_{x\to\infty} = \frac{\frac{2x}{x}}{\frac{x-1}{x}} \to \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1-\frac{1}{x}} = \frac{2}{1-0} = 2$$

Por lo tanto la recta $y = 2$ es una asíntota horizontal

**Continuidad.-** Con los datos dados vemos que la función es continua en todos los puntos excepto cuando $x = 1$, por lo tanto la continuidad se da en los valores del dominio $(-\infty,1)U(1,\infty)$

La gráfica queda de la siguiente manera:

**Figura 154**
**Gráfica: Función** $\boldsymbol{y = \frac{2x}{x-1}}$



## Actividades complementarias de la subunidad

### *Preguntas de opción múltiple*

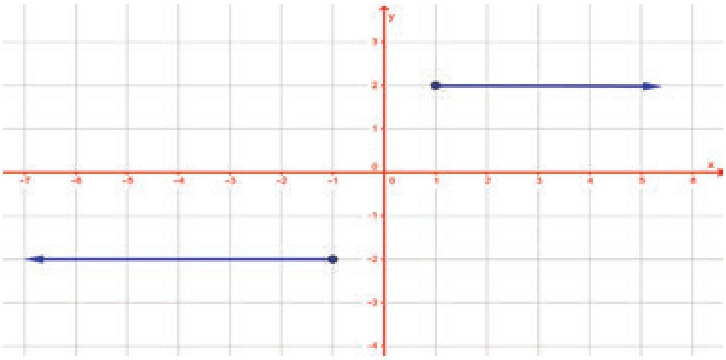
1. Señale la afirmación correcta:
   a. Si $f(2) \neq \lim_{x \to 2} f(x)$ la función es continua en $a = 2$
   b. Sea $f(x) = \frac{1}{x-a}$ la función tiene una asíntota en $y = a$
   c. Si $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ la recta $y = L$ es una asíntota horizontal de la función
   d. Si una función tiene una asíntota oblicua no puede tener una asíntota vertical

2. La función *f(x)* = *(2-x)/(x+3)* tiene una asíntota vertical en la recta:
   a. $x = 3$
   b. $x = -3$
   c. $x = 2$
   d. $x = 2/3$

3. La función *f(x)* = *(x+1)/(x-3)* tiene una horizontal en:
   a. $y = 3$
   b. $y = 1$
   c. $x = 1/3$
   d. $x = -1/3$

4. Señale la opción correcta según la gráfica de la figura 155
   a) $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$
   b) $\lim_{x \to 1^+} f(x) = -1$
   c) $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -1$
   d) $f(1) = 2$

Figura 155



5. Según la gráfica 156 señalar la opción correcta:

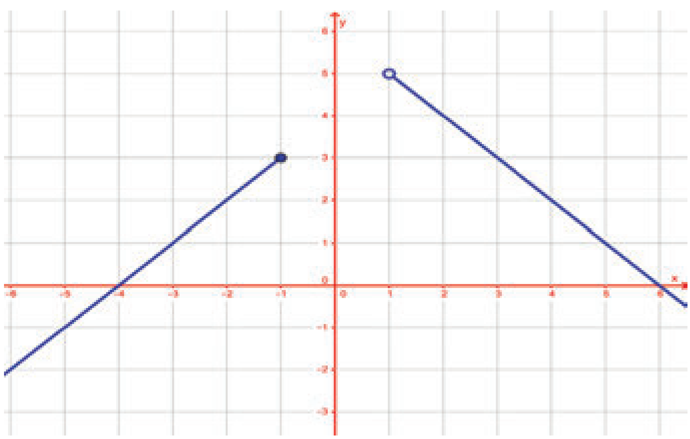
   a) La función tiene una asíntota en $x = 2$

   b) $f(1)$ existe

   c) $f(-1)$ no existe

   d) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = 3$

Figura 156



**AC1.** Con ayuda de una tabla de datos y las respectivas gráficas, determinar los siguientes límites:

- $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{x+1}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2}{x}$
- $\lim\limits_{x \to 0} x^2 + 2x$
- $\lim\limits_{x \to 2} -3$

**AC2.** Resolver los siguientes límites

- $\lim\limits_{x \to 2} \frac{5x}{x-3}$
- $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} -\frac{1}{x^2}$
- $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2-2x}{4x^2-4}$

**AC3.** Graficar una función que cumpla con las siguientes condiciones:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

**AC4.** Determinar el siguiente límite

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$$

**AC5.** Determinar si la siguiente función por partes presenta límite en el punto *a = 1*. Justifique su respuesta

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1 & x \leq 1 \\ 2x + 1 & x > 1 \end{cases}$$

**AC6.** Determinar si la siguiente función por partes presenta límite en el punto *a = 1*. Justifique su respuesta

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3 & x \leq 1 \\ -\frac{x}{2} + 3 & x > 1 \end{cases}$$

**AC7.** Graficar las siguientes funciones en un programa graficador y determinar qué tipo de asíntotas tienen.

a) $f(x) = \ln(x)$

b) $f(x) = e^x$

c) $f(x) = \frac{10}{(x^2+4)^{3/2}}$

d) $y = \frac{2x^4+3x^3-2x-4}{x^3-1}$

e) $g(x) = \frac{6}{(9-x^2)}$

**AC8.** Encuentre la asíntota horizontal de:

$$f(x) = 3 + 0.2e^{-2x}$$

$y = \frac{\pi}{4} + tan^{-1}\left(\frac{2}{3}x\right)$ Nota: usar grados radianes

**AC9.** Encuentre todas las asíntotas de las siguientes funciones:

$$y = -\frac{4}{x^2 - 4}$$

$$f(z) = \frac{z+3}{z+2}$$

$$h(t) = \frac{t^2 - 3}{2t - 4}$$

**AC10.** En las siguientes ilustraciones grafique las asíntotas que cree que tengan las funciones, además determine las ecuaciones de dichas asíntotas:

**AC11.** Explique si los siguientes fenómenos tendrán un límite o no, argumentando sus respuestas.

- El crecimiento de una población de la ciudad de Cuenca
- La altura de un ser humano
- La contaminación de un río
- El desgaste de las pastillas de freno
- La temperatura del refrigerante de un motor

**AC12.** Trace la gráfica de la función dada en un programa graficador y haga un análisis visual y deductivo de la siguiente ecuación que representa el movimiento de un sistema masa resorte cuando *t* tiende a infinito.

$$x(t) = e^{-\frac{t}{4}}(2\cos(t) + 2sen(t)) - 1.3\cos(4t) + sen(4t)$$

- Cuál es el dominio y rango de la función
- Investigue que es el término transitorio y el término estable e identifíquelo en la gráfica.
- Qué puede explicarse sobre esta función cuando *t* tiende al infinito.

**AC13.** Se realiza un análisis del aceite de un motor diesel estacionario. La función que expresa el valor de concentración de hierro en partes por millón (ppm) en horas de funcionamiento del motor es la siguiente:

$$x(t) = \frac{100}{1 + 99e^{-0.1t}} + 40$$

Donde *x(t)* representa la concentración de partículas de hierro en el aceite y *t* el número de horas continuas de funcionamiento.

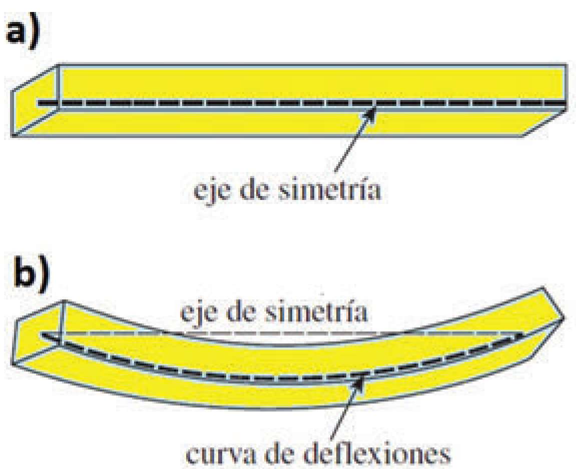
¿En qué tiempo el aceite alcanzará el valor máximo permisible de *100 ppm* de concentración de partículas de hierro en el aceite de lubricación?

Mediante el uso del límite determine el valor máximo al cual llegará la concentración de hierro en el aceite.

## EJERCICIOS DE APLICACIÓN

**EA1**. En el estudio de la deflexión de una viga al aplicársele una carga entran varios elementos como: la forma de la viga, el material, la carga aplicada, entre otros elementos importantes.

**Figura 157**
**Gráfica: a) Viga sin carga b) Viga con carga aplicada**



Si una carga en Newtons que es aplicada a una viga de longitud $L$ presenta la siguiente configuración:

$$w(x) = \begin{cases} 1000\left(1 - \dfrac{2x}{L}\right) & 0 < x \leq \dfrac{L}{2} \\ 0 & \dfrac{L}{2} < x \leq \dfrac{3L}{4} \\ 500\left(2 - \dfrac{4}{3}Lx\right) & 3\dfrac{L}{4} < x \leq L \end{cases}$$

En donde:

La longitud $L = 4$ metros

La carga $W(x)$ está dada en Newtons y depende de la distancia en $x$

Graficar esta función por partes con las escalas y magnitudes adecuadas.

¿Existen discontinuidades? ¿En dónde se encuentran? ¿De qué tipo son?

**EA2.** El refrigerante de un motor se encuentra a 90 grados Celsius y apagamos el motor, el ambiente está a 15°C, lógicamente el refrigerante se enfriará; es decir, descenderá su temperatura, pero ¿hasta qué temperatura llegará? Un postulado simple de la física expresa que dos cuerpos intercambiarán calor hasta que la temperatura de los dos sea la misma si dejamos transcurrir un tiempo suficientemente largo para que se llegue al equilibrio. La función temperatura que se la puede representar con la letra *"T"* es la variable dependiente ya que depende del tiempo que se puede representar con la letra *"t"* que en este caso sería la variable independiente; el dominio serían todos los valores que puede ir teniendo el tiempo *"t"* y el rango es el conjunto de todos los valores que irá teniendo la temperatura *"T"* mientras va enfriándose; lógicamente el dominio empezará en 0 (tiempo 0) e irá transcurriendo el tiempo es decir el dominio irá cambiando, el rango empezará con la temperatura de 90°C e irá descendiendo conforme transcurre el tiempo hasta que tienda a estabilizarse cuando haya transcurrido cierto tiempo.

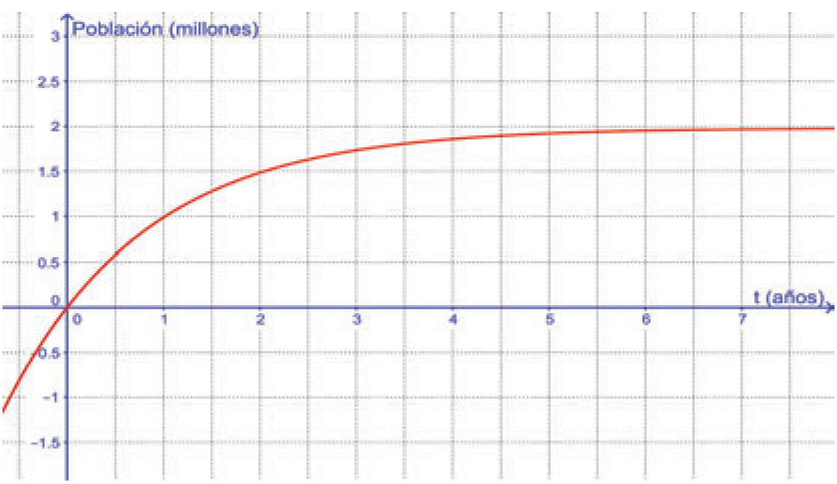
a. Grafique manualmente el comportamiento del enfriamiento del motor y coloque en la gráfica los datos mencionados.
b. Trace la asíntota de este problema

**EA3.** Una nueva marca de vehículos se introduce por medio de unas campañas de publicidad a una población con cierta cantidad de clientes potenciales. La curva que modela la cantidad de personas que se entera del producto es $f(t) = 1.98 - e^{-0.69t-0.99}$

La escala del eje de las ordenadas es de un millón de personas.

a. Determinar analíticamente la asíntota horizontal de la expresión.
b. ¿Qué representa esta asíntota?
c. Observando la gráfica, pronosticar en qué tiempo la cantidad de clientes potenciales se enterará del nuevo producto

**Figura 158**



CAPÍTULO 3

# La derivada

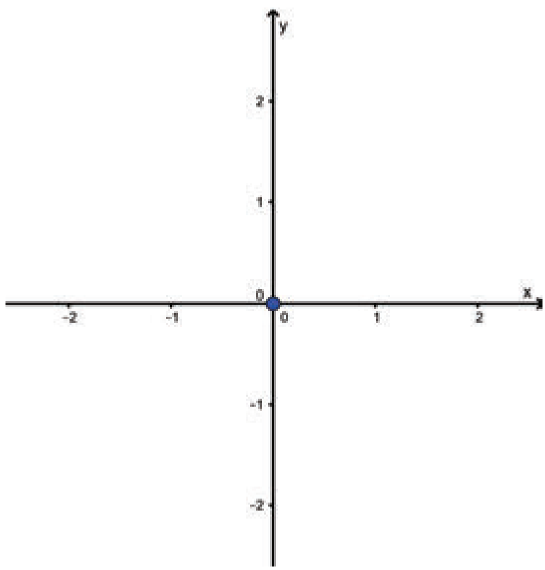
## 3.1 Incrementos y diferenciales

Si tenemos la función: $y = \sqrt{x}$

Cuando $x=0$, $y=0$

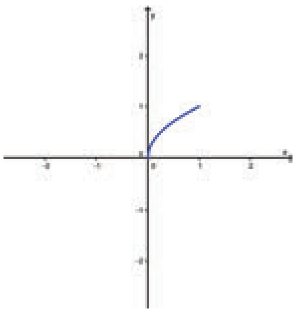
Si incrementamos en 1 a $x$, es decir cuando $x=1$, $y=1$

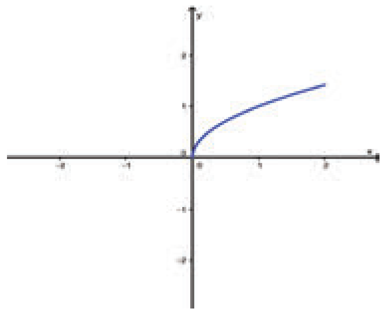
**Figura 1**




Si seguimos incrementando en $1$ a $x$, es decir cuando $x=2$, $y = \sqrt{2}$

Figura 2





Tenemos una tabla con algunos valores:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $y$ | 0 | 1 | $\sqrt{2}$ | $\sqrt{3}$ | 2 |

Con estos valores podemos ver que el incremento para *x* no es el mismo para *y*, lo que sugiere hacer un análisis.

### 3.1.1 *Incrementos*

Para empezar este tema analicemos los siguientes casos:

- Caso 1 Usted coloca una escalera para subir una pared de 1 metro
- Caso 2 Usted coloca la misma escalera para subir una escalera de 2 metros

**Nota: la posición de la escalera en cada caso debe ser de tal manera que la punta coincida con la parte alta de las paredes.**

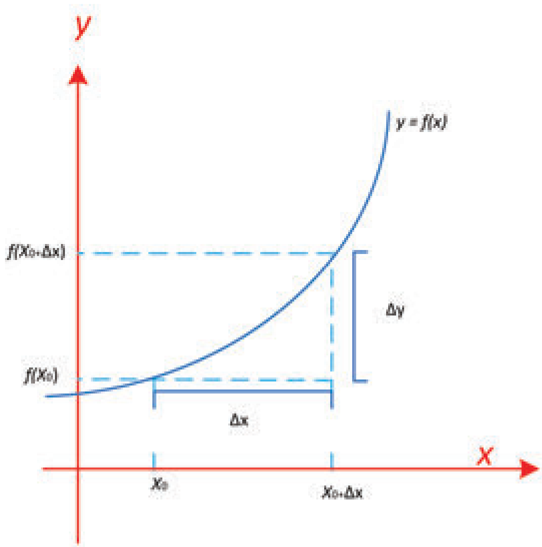
En ambos casos la distancia recorrido por la escalera será la misma pero las inclinaciones en ambos casos son diferentes.

Ahora que ya estamos familiarizados con el manejo del sistema cartesiano respondamos lo siguiente: Si la escalera se representa por una recta, usted se para al inicio de la escalera y realiza un desplazamiento en el eje $x$ de *20 cm*, ¿en cuál de los dos casos el desplazamiento en $y$ es mayor y en cuál es menor para el mismo desplazamiento en $x$ de *20 cm*?

Si $x$ cambia de $x1$ a $x2$ el cambio en $x$ conocido como incremento en $x$

Si $y$ cambia de $y1$ a $y2$ el cambio en $y$ conocido como incremento en $y$

**Figura 3**




Incremento en $x$:

$\Delta x = x_f - x_i$

Incremento en $y$:

$\Delta y = y_f - y_i = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$
$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

## 3.2 La derivada: interpretación geométrica, definición matemática y notación

### *3.2.1 Interpretación geométrica de la derivada*

La Derivada se interpreta geométricamente como la pendiente de la recta tangente a una curva. Una vez que se conoce el concepto de tasa de cambio promedio se puede empezar a explorar el concepto de derivada de una forma geométrica. Desde un punto de vista simple la derivada de una función es una tasa de cambio promedio en un intervalo extremadamente pequeño definido como $x_1 \leq x \leq x_1 + h$ cuando $h$ tiende a cero.

Que daría:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} = \frac{dy}{dx}$$

**Nota:** observe que se puede encontrar con ejercicios donde puede tener diferente nomenclatura para la variación en $x$, es decir puede encontrar como $\Delta x$ o simplemente como $h$.

**Ejemplo 1:** Determinar la derivada de la siguiente función

$$f(x) = 3x - 2$$

$$f(x + \Delta x) = 3(x + \Delta x) - 2$$

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(x + \Delta x) - 2 - (3x - 2)}{\Delta x}$$

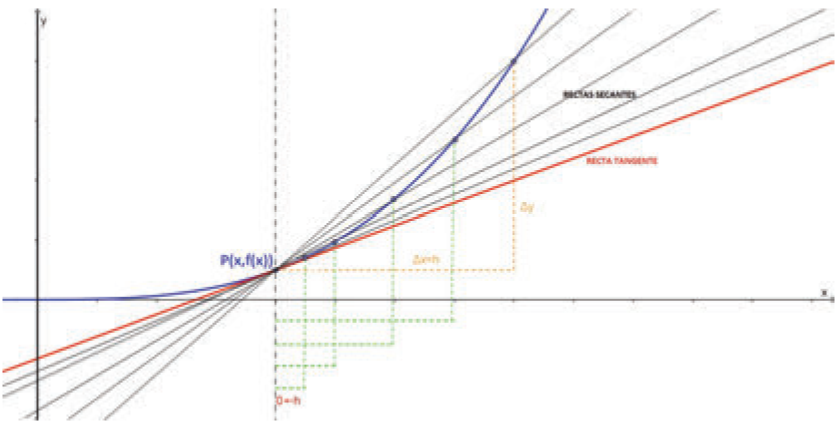
$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x + 3\Delta x - 2 - 3x + 2}{\Delta x} = \frac{3\Delta x}{\Delta x}$$

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} 3 = 3$$

Más adelante analizaremos con detenimiento su significado matemático pero en este momento lo que nos interesa es ver qué sucede con la recta secante cuando la variación de $x$ que llamamos $h$ va tendiendo a cero.

**Figura 4**

**Tendencia de recta secante a recta tangente cuando h tiende a cero**




Como se puede ver fácilmente cuando $h$ tiende a cero las rectas secantes terminan en un límite, que es la recta tangente a la curva en un punto $(x, f(x))$.

En conclusión, la derivada de una función $f$ es otra función $f'$ (que se lee $f$ prima) y que está definida como:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Siempre que el límite exista.

Debe entenderse que la derivada de una función *f(x)* es otra función *f´(x)* que como es lógico depende de la misma variable independiente *x*. Aquí se puede decir que la función derivada cambia con respecto a la variable independiente *x*. Si sabemos que la derivada geométricamente representa la pendiente de la recta tangente en un punto, se puede decir que la primera derivada *f´(x)* es una función que muestra como está cambiando la pendiente de una recta tangente, cuando cambia el valor de la variable independiente *x*.

### *Definición de derivada en un punto*

La derivada de una función *f* evaluada en un punto cuya abscisa es *c* se denota *f´(c)* y su valor se calcula como:

$$f'(c) = \lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

Siempre que el límite exista.

**Ejemplo 2:** Calcular la derivada de la función $f(x)=x^2+1$ en $x=2$ y $x=-1$

## Solución

$$f'(2) = \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x^2+1)-5}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$$

$$f'(-1) = \lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to -1}\frac{(x^2+1)-2}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x\to -1}(x-1) = -2$$

**Ejemplo 3:** Derive usando la definición de derivada: $f(x)=x^3-x+3$

## Solución

Aplicando la definición dada tenemos:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{((x+h)^3 - (x+h) + 3) - (x^3 - x + 3)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\left((x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - (x+h) + 3\right) - (x^3 - x + 3)}{h}$$

Simplificando y factorizando el numerador:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2 - 1)}{h}$$

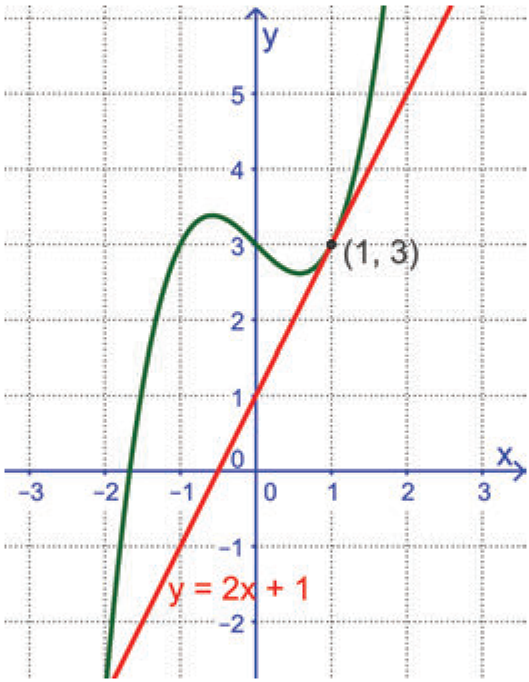
Aplicando el límite: $f'(x)=3x^2-1$

Con esta nueva función derivada determinaremos la derivada en el punto $x=1$. Para este caso simplemente en la función derivada encontrada se reemplazas el valor de $x$ y tenemos que $f'(1)=3(1)^2-1$ es decir $f'(1)=2$ lo que nos dice que la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $(1,3)$ es igual a $2$. Pero ¿cómo podemos confirmar visualmente esto? Como sabemos la pendiente está asociada a una recta así que el problema que nos plantearemos ahora es graficar la curva y la recta tangente para observar que lo que calculamos es correcto. La grafica de la curva no es problema pues tenemos la función; lo que hace falta es encontrar la ecuación de la recta que como sabemos debe pasar por el punto de tangencia $(1,3)$ y tiene pendiente $2$,

$$(y-y_1)=m(x-x_1)$$
$$(y-3)=2(x-1)$$
$$y=2x+1$$

Graficando la función y la recta tenemos

**Figura 5**
**Ejemplo 3**




## *3.2.2 Definición matemática de derivada*

La derivada de una función $f$ en un número $x=a$, es:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Si este límite existe.

### 3.2.3 Notación de derivadas

Para denotar la derivada puede existir distintas nomenclaturas siendo *y* una función de *x*:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = Df(x) = D_x f(x)$$

### 3.2.4 Cuando una funcion no es derivable

Una función no es derivable en los siguientes casos:

1. Si la gráfica de una función *f* tiene esquinas o rizos, es decir no tiene tangentes en esos puntos.
2. Si al intentar derivar los límites por la izquierda y por la derecha son diferentes.
3. Cuando la curva tenga una tangente vertical cuando $x = a$

**Ejemplo 4:** Considerar la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & si\ x \geq 1 \\ 4x - 1 & si\ \ x < 1 \end{cases}$$

Si se desea determinar la existencia o no de la derivada de *f* en el punto $x_1 = 1$, para lo cual las derivadas laterales $f'_+(1)$ y $f'_-(1)$ nos proporcionan la información

$$f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x^2 + x + 1) - 3}{x - 1}$$

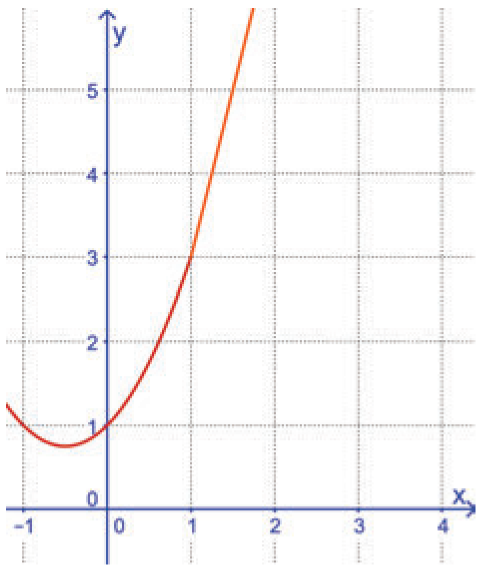
$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x + 2)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} (x + 2) = 3$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(4x - 1) - 3}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{4x - 4}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{4(x - 1)}{x - 1} = 4$$

Puede notarse que las derivadas laterales son diferentes, y en consecuencia, *f' (1)* no existe.

En la figura se muestra el comportamiento de la función *f* en el punto $x = 1$. Nótese que en el punto *P (1, 3)* la gráfica presenta un "pico", indicando con esto de manera intuitiva que *f* no es derivable allí.

**Figura 6**
**Gráfica ejemplo 4**




## 3.3 Reglas de derivación

### *3.3.1 Derivadas de funciones básicas*

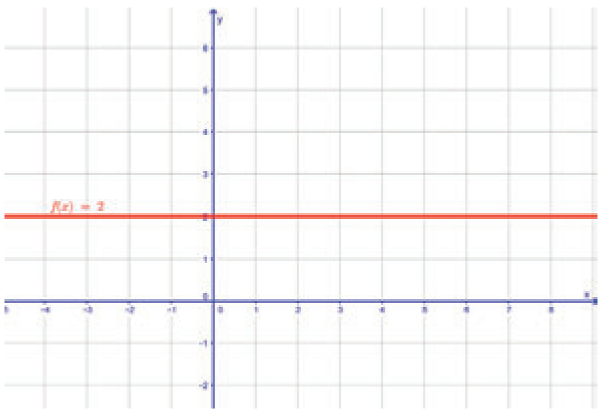
En la figura 7 tenemos una función constante $f(x)=2$

Utilizamos la definición de derivada para determinar la derivada de dicha función:

$$f^{'}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Tenemos:

**Figura 7**




*Derivada de una función constante*

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

En la figura 8 tenemos la función lineal *f(x)=x*

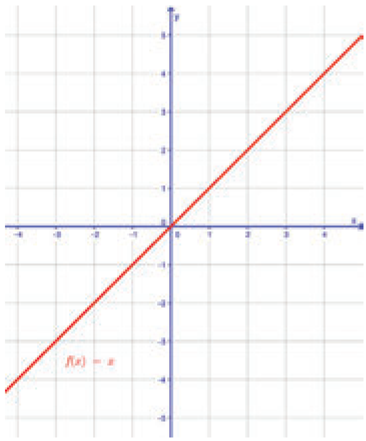
Utilizamos la definición de derivada para determinar la derivada de dicha función:

$$f^{'}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Tenemos:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} = 1$$

**Figura 8**




*Derivada de la función lineal cx*

$$\frac{d}{dx}(cx) = c$$

## Ejercicios resueltos

**ER1**. Determinar:

a. $\frac{d}{dx}(2)$

b. $\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{2}\right)$

c. $\frac{d}{dx}(2x)$

d. $\frac{d}{dx}(-5x)$

## Solución

a. $\frac{d}{dx}(2) = 0$

b. $\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

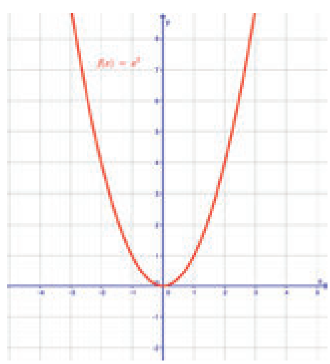
c. $\frac{d}{dx}(2x) = 2$

d. $\frac{d}{dx}(-5x) = -5$

Continuamos con una función cuadrática en la figura 9

Utilizamos la definición de derivada para determinar la derivada de dicha función

**Figura 9**



$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Tenemos:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(2x+h)h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 2x + h$$

$$= 2x$$

*Derivada de la función cuadrática $cx^2$*

$$\frac{d}{dx}(cx^2) = 2cx$$

Con una función cúbica que se muestra en la figura 10 $f(x)=x^3$

Utilizamos la definición de derivada para determinar la derivada de dicha función:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Tenemos:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

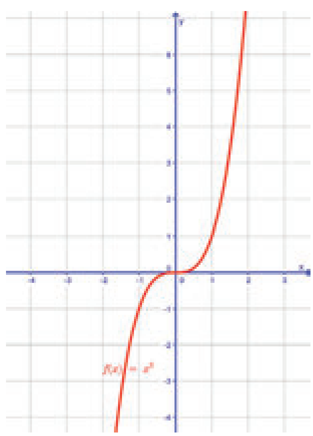
$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(3x^2 + 3xh + h^2)h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 3x^2 + 3xh + h^2$$

$$= 3x^2$$

**Figura 10**



*Derivada de la función cúbica $cx^3$*

$$\frac{d}{dx}(cx^3) = 3cx^2$$

Según los ejemplos realizados podemos indicar para cualquier potencia en general que:

> *Regla de la Potencia*
>
> $$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

A continuación se presenta una tabla de derivadas simples y reglas de derivación:

**Tabla 1 Derivadas simples y reglas de derivación**

| TABLA DE DERIVADAS SIMPLES Y REGLAS DE DERIVACION | |
|---|---|
| $\frac{d}{dx}(c) = 0$ | Derivada de una función constante |
| $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ | Regla de la potencia |
| $\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}f(x)$ | Regla del múltiplo constante, siendo *f* una función derivable y *c* una constante |
| $\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$ | Regla de la suma |
| $\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x)$ | Regla de la diferencia |
| $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]$ | Regla del producto |
| $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$ | Regla del cociente |
| $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ | Derivada de la función exponencial natural |

## Ejercicios resueltos

**ER2.** Derivar $y = \sqrt[3]{x^5}$

## Solución

Para resolver podemos primero representar esta expresión en forma de potencia fraccionaria y nos queda:

$$y = x^{\frac{5}{3}}$$

Aplicando la regla de la potencia tenemos:

$$y' = \frac{5}{3}x^{\left(\frac{5}{3}-1\right)} = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$$

**ER3.** Derivar $y = \dfrac{\sqrt[4]{x^3}}{2x}$

## Solución

Expresamos le numerador en forma de potencia fraccionaria:

$$y = \frac{x^{\frac{3}{4}}}{2x}$$

Derivamos aplicando la regla del cociente de acuerdo a la tabla 1.

$$y' = \frac{\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}(2x) - x^{\frac{3}{4}}(2)}{4x^2} = \frac{\frac{3}{2}x^{\frac{3}{4}} - 2x^{\frac{3}{4}}}{4x^2} = \frac{-\frac{1}{2}x^{\frac{3}{4}}}{4x^2} = -\frac{1}{8x^{\frac{5}{4}}}$$

### 3.3.2 Regla de la cadena

Si tenemos la función $y=x^2$ su derivada es $y'=2x$. Pero si tenemos la funció $y=(x^2+5x-1)^2$ ya que ahora es una función que está elevada a la potencia $2$, se debe aplicar una regla especial denominada regla de la cadena para derivar.

Si $f$ es una función diferenciable de $u$ y $u$, a su vez, es una función diferenciable de $x$, entonces la función compuesta $f(u)$ es una función diferenciable de $x$, y además

$$\frac{d}{dx}[f(u)] = f'(u)\frac{du}{dx}$$

**ER4.** Derivar la función dada $y=(x^2+5x-1)^2$

#### SOLUCIÓN

Si hacemos $u=x^2+5x-1$ la función queda $f(u)=u^2$

$$\frac{d}{dx}[f(u)] = 2(u)\frac{du}{dx}$$

Reemplazando y resolviendo tenemos:

$$\frac{d}{dx}(x^2+5x-1)^2 = 2(x^2+5x-1)\frac{d}{dx}(x^2+5x-1)$$

#### EJERCICIOS PROPUESTOS

**EP1.** Derivar $y=(-5x^4-4x^2+2x)^3$
**EP2.** Derivar $y=-3x^3+6x^2-x$
**EP3.** Derivar $y=(3x^2+5x)(4x^3-7x)$

**EP4.** Derivar $y = \dfrac{2x}{4x^2 - 2x + 3}$

**EP4.** Derivar $y = \dfrac{(x^2 - 1)^3}{(x + 2)^2}$

**EP5.** Derivar $y = \sqrt{\dfrac{5x - 2}{2x + 1}}$

## 3.4 Derivadas de funciones: trigonométricas, exponenciales, logarítmicas, y trigonométricas inversas

### *3.4.1 Derivadas de funciones trigonometricas*

$$\frac{d}{dx}[tan(x)] = \frac{d}{dx}\left[\frac{sen(x)}{cos(x)}\right]$$

Aplicando la regla del cociente de dos funciones tenemos:

$$= \frac{cos(x)\frac{d}{dx}[sen(x)] - sen(x)\frac{d}{dx}[cos(x)]}{cos^2(x)}$$

$$= \frac{cos(x)cos(x) - sen(x)[-sen(x)]}{cos^2(x)}$$

$$= \frac{cos^2(x) + sen^2(x)}{cos^2(x)}$$

$$= \frac{1}{cos^2(x)}$$

$$= sec^2(x)$$

Tabla 2 Derivadas de funciones trigonométricas

| **TABLA DE FÓRMULAS DE DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS**<br>**Si *u=g(x)* es una función diferenciable, entonces** | |
|---|---|
| $\frac{d}{dx}[sen(x)] = cos(x)$ | $\frac{d}{dx}[sen(u)] = cos(u)\frac{du}{dx}$ |
| $\frac{d}{dx}[cos(x)] = -sen(x)$ | $\frac{d}{dx}[cos(u)] = -sen(u)\frac{du}{dx}$ |
| $\frac{d}{dx}[tan(x)] = sec^2(x)$ | $\frac{d}{dx}[tan(u)] = sec^2(u)\frac{du}{dx}$ |
| $\frac{d}{dx}[cot(x)] = -csc^2(x)$ | $\frac{d}{dx}[cot(u)] = -csc^2(u)\frac{du}{dx}$ |
| $\frac{d}{dx}[sec(x)] = sec(x)tan(x)$ | $\frac{d}{dx}[sec(u)] = sec(u)tan(u)\frac{du}{dx}$ |
| $\frac{d}{dx}[csc(x)] = -csc(x)cot(x)$ | $\frac{d}{dx}[csc(u)] = -csc(u)cot(u)\frac{du}{dx}$ |

## Ejercicios resueltos

**ER1.** Sea $f(x)=2cos(x)$

Determinar $f'(x)$

$f'(x)=-2sen(x)$

**ER2.** Sea $g(x) = \frac{\text{sen}\,(x)}{1+cos(x)}$

Determinar $g'(x)$

$$g'(x) = \frac{[1+cos(x)]\frac{d}{dx}[sen(x)] - sen(x)\frac{d}{dx}[1+cos(x)]}{[1+cos(x)]^2}$$

$$= \frac{[1+cos(x)]cos(x) - sen(x)[-sen(x)]}{[1+cos(x)]^2}$$

$$= \frac{cos(x) + cos^2(x) + sen^2(x)}{[1+cos(x)]^2}$$

$$= \frac{cos(x) + 1}{[1+cos(x)]^2}$$

$$= \frac{1}{1+cos(x)}$$

### 3.4.2 Derivadas de funciones exponenciales

La función exponencial $f(x)=a^x$ en donde $a>0, a\neq 1$ es una función continua y diferenciable en todas partes. La tabla de derivadas de funciones exponenciales de base $e$ y de cualquier otra base es:

**Tabla 3 Derivadas de funciones exponenciales**

| DERIVADA DE FUNCIONES EXPONENCIALES<br>Si $u=g(x)$ es una función diferenciable, entonces | |
|---|---|
| $\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$ | $\frac{d}{dx}[e^u] = e^u \frac{du}{dx}$ |
| $\frac{d}{dx}[a^x] = a^x(lna)$ | $\frac{d}{dx}[a^u] = a^u(lna)\frac{du}{dx}$ |

### Ejercicios resueltos

**ER3.** Derivar la función: $y = e^{\frac{1}{x^2}}$

## SOLUCION

En este caso la exponente de la base *e* es $u=1/x^2$ que podemos reescribir como $u=x^{-2}$ por lo tanto aplicado la regla de la cadena de la tabla 3 tenemos:

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\frac{1}{x^2}}\right] = e^{\frac{1}{x^2}}\frac{d}{dx}(x^{-2}) = e^{\frac{1}{x^2}}(-2x^{-3}) = \frac{-2e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3}$$

**ER4.** Derivar la siguiente expresión $f(x)=4^{6x}$

## SOLUCION

Este ejercicio tiene la forma $a^u$ donde la base es 4 y el exponente es $u=6x$, de acuerdo a la tabla tenemos que:

$$\frac{d}{dx}[4^{6x}] = 4^{6x}(ln4)\frac{d}{dx}(6x) = (ln4)4^{6x}(6) = 6(ln4)4^{6x}$$

### *3.4.3 Derivadas de funciones logarítmicas*

Como sabemos la inversa de la función exponencial $y=a^x$ es la función logarítmica $y=\log_a x$. La tabla de derivadas de funciones logarítmicas es la siguiente:

**Tabla 4 Derivadas de funciones logarítmicas**

| DERIVADA DE FUNCIONES LOGARÍTMICAS<br>Si $u=g(x)$ es una función diferenciable, entonces | |
|---|---|
| $\frac{d}{dx}[lnx] = \frac{1}{x}$ | $\frac{d}{dx}[\ln(u)] = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$ |
| $\frac{d}{dx}[log_a x] = \frac{1}{xln(a)}$ | $\frac{d}{dx}[log_a(u)] = \frac{1}{uln(a)}\frac{du}{dx}$ |

## Ejercicios resueltos

**ER5.** Derivar la función $f(x)=ln(cosx)$

## Solucion

De acuerdo a la tabla la debemos aplicar la derivada de logaritmo natural en donde $u=cosx$.

$$\frac{d}{dx}[\ln(cosx)] = \frac{1}{cosx}\frac{d}{dx}(cosx) = \frac{1}{cosx}(-senx) = -tanx$$

### 3.4.4 Derivadas de funciones trigonometricas inversas

Las funciones tangente inversa y cotangente inversa son diferenciables para todo $x$, mientras que las otras cuatro funciones trigonométricas inversas no son diferenciables en $x=-1$ o $x=1$. A continuación se presenta la tabla de derivadas de funciones trigonométricas inversas.

**Tabla 5 Derivadas de funciones trigonométricas inversas**

| **DERIVADA DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS**<br>**Si $u=g(x)$ es una función diferenciable, entonces** | |
|---|---|
| $\frac{d}{dx}[sen^{-1}x] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\frac{d}{dx}[sen^{-1}u] = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$ |
| $\frac{d}{dx}[cos^{-1}x] = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\frac{d}{dx}[cos^{-1}u] = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$ |
| $\frac{d}{dx}[tan^{-1}x] = \frac{1}{1+x^2}$ | $\frac{d}{dx}[tan^{-1}u] = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$ |
| $\frac{d}{dx}[cot^{-1}x] = \frac{-1}{1+x^2}$ | $\frac{d}{dx}[cot^{-1}u] = \frac{-1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$ |

| | |
|---|---|
| $\frac{d}{dx}[sec^{-1}x] = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ | $\frac{d}{dx}[sec^{-1}u] = \frac{1}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$ |
| $\frac{d}{dx}[csc^{-1}x] = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$ | $\frac{d}{dx}[csc^{-1}u] = \frac{-1}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$ |

**ER6.** Derivar la función $y=sen^{-1}(4x)$

## Solución

Con $u=4x$ aplicando la fórmula del seno inverso en la tabla 5 tenemos:

$$\frac{d}{dx}[sen^{-1}4x] = \frac{1}{\sqrt{1-(4x)^2}}\frac{d}{dx}(4x) = \frac{4}{\sqrt{1-16x^2}}$$

## Ejercicios propuestos

**EP1**. Derivar las siguientes funciones trigonométricas

a. $y=-cos\ (x)$
b. $y=sen(x)+cos\ (x)$
c. $f(x)=4x\ senx$
d. $y=x^2+2sen(3x)$
e. $g(x)=sen^2\ (x)+cos^2\ (x)$
f. $y=sen(x^2)+cos\ (x^2)$
g. $h(x)=cos\ (2x^2+1)$
h. $y=(x^4+x)\ tan\ (x)$
i. $y=sen(cosx)$
j. $h(x)=sen(x)sec(x)$
k. $y=2/(x+cot(3x))$

**EP2.** Derivar las siguientes funciones exponenciales

a. $y = e^{-x}$

b. $y=3e^{-2x}$

c. $y=5^{4x}$

d. $y = 2^{\sqrt{-x}}$

e. $y = x^2\ e^{3x}$

f. $g(x)=e^{x+5}$

g. $f(x) = \sqrt[3]{6 - e^{-2x}}$

h. $y=e^{\cos(4x)}$

i. $f(x)=e^{x}\ tan(\pi x)$

**EP3.** Derivar las siguientes funciones logarítmicas

a. $y=5lnx$

b. $y=ln(2x)e^{3x}$

c. $y=ln(x^3+5x^2+3)$

d. $y = (lnx)^{\frac{1}{3}}$

e. $y = \ln(x^{\frac{1}{3}})$

f. $y = log_2\left(\sqrt[2]{4x^3 + 2x}\right)$

g. $f(x) = \dfrac{log_3(x^2 - 1)}{log_{10}(x^2 + 1)}$

h. $f(x) = ln\left(2x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

**EP4.** Derivar las siguientes funciones trigonométricas inversas

a. $y = sen^{-1}(3x + 2)$

b. $y = cos^{-1}\left(\dfrac{x^2 + 1}{2}\right)$

c. $y = 6cot^{-1}\left(\dfrac{x^2}{3}\right)$

d. $f(x) = 3x - 5sec^{-1}(2x)$

e. $h(x) = \dfrac{sen^{-1}(2x)}{sen(2x)}$

f. $h(x) = x^3tan^{-1}(2x^2 + 4)$

g. $y = \sqrt{x}cos^{-1}(\sqrt{x})$

## 3.5 Derivación implícita y derivación logarítmica

### 3.5.1 Derivación implícita

En algunas ocasiones nos encontramos con expresiones como: $xy^2+3xy-5y=1$ donde la mayor dificultad es despejar la variable $y$ para determinar $dy/dx$. En tales casos podemos hacer uso de la derivación implícita.

**Ejemplo 1:** Determine $y'$ en las siguientes expresiones:

a. $-5x^2+y^2=-30$

## Solución

Derivamos ambos miembros de la ecuación:

$$\frac{d}{dx}(-5x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(-30)$$

$$\frac{d}{dx}(-5x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(-30)$$

Para realizar: $\frac{d}{dx}(y^2)$

Sabemos que *y=f(x)*, utilizando la regla de la cadena tenemos:

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dy}(y^2)\frac{dy}{dx}$$

De donde:

$$\frac{d}{dx}(y^2) = 2y\frac{dy}{dx}$$

$$-5x^2 + y^2 = -30$$

$$-10x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

Despejando $\frac{dy}{dx}$ tenemos: $\frac{dy}{dx} = \frac{10x}{2y}$

$$\frac{dy}{dx} = 5\frac{x}{y}$$

## Ejercicios resueltos

**ER1.** Determine la ecuación de la recta tangente a la circunferencia: $x^2+y^2=9$ en el punto $A\left(1,\sqrt{8}\right)$

## Solución

Necesitamos conocer el punto de tangencia y la pendiente de la recta, el punto ya lo sabemos por lo que procedemos a derivar la ecuación de forma implícita para obtener la tangente que se necesita.

Derivamos:

$$\frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(y^2)=\frac{d}{dx}(9)$$

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

Despejamos:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{2y}$$

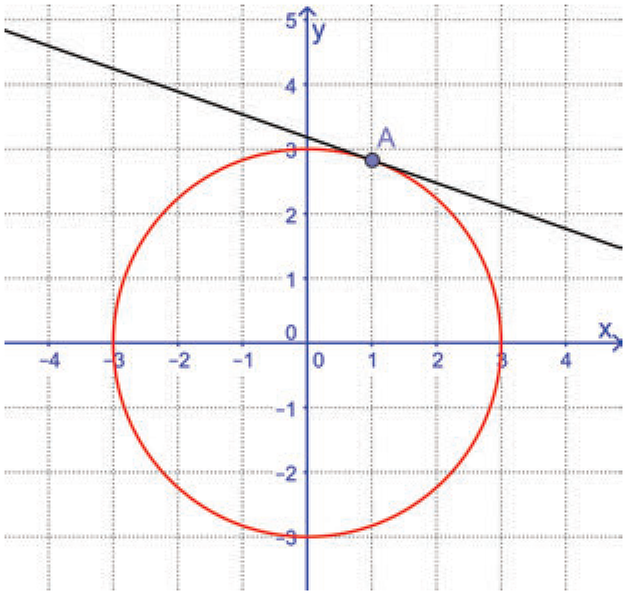
Simplificamos:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

Reemplazamos:

$$m_{tg}=-\frac{1}{\sqrt{8}}$$

Figura 11




Determinamos la ecuación:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - \sqrt{8} = -\frac{1}{\sqrt{8}}(x - 1)$$

$$\sqrt{8}y - 8 = -x + 1$$

$$x + \sqrt{8}y - 9 = 0$$

**ER2.** Determine: $\dfrac{dy}{dx}$

$$(y^2 - 2x)^2 = (3x^2 - 2x + 5)^4$$

## SOLUCIÓN

$$\frac{d}{dx}(y^2 - 2x)^2 = \frac{d}{dx}(3x^2 - 2x + 5)^4$$

$$2(y^2 - 2x)\left(2y\frac{dy}{dx} - 2\right) = 4(3x^2 - 2x + 5)^3(6x - 2)$$

$$4y^3\frac{dy}{dx} - 4y^2 - 8xy\frac{dy}{dx} + 8x = 8(3x^2 - 2x + 5)^3(3x - 1)$$

$$4y^3\frac{dy}{dx} - 8xy\frac{dy}{dx} = 8(3x^2 - 2x + 5)^3(3x - 1) + 4y^2 - 8x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8(3x^2 - 2x + 5)^3(3x - 1) + 4(y^2 - 2x)}{4(y^3 - 2xy)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(3x^2 - 2x + 5)^3(3x - 1) + (y^2 - 2x)}{(y^3 - 2xy)}$$

## EJERCICIOS PROPUESTOS

**EP1.** Determine: $\frac{dy}{dx}$

$$(x^2 - 2x)^2 = \cos(x + y)$$

**EP2.** Determine: $\frac{dy}{dx}$

$$\sqrt{xy} = x^2 + 2y^2 + 10$$

## 3.5.2 Derivación logarítmica

Se usa la derivación logarítmica en casos donde tenemos funciones como las potenciales o exponenciales, ya que hace uso de las propiedades de los logaritmos y facilitan bastante el cálculo.

Con el uso de las siguientes propiedades de los logaritmos se facilita la derivación:

### 3.5.2.1 Propiedades de los logaritmos

Si $a>0$ y $b>0$

1. $ln(ab) = ln(a)+ln(b)$
2. $ln\ (a/b)=ln(a)-ln(b)$
3. $ln\ a^r=r\ ln(a)$

### 3.5.2.2 Directrices para la diferenciación logarítmica

a. Tomar el logaritmo natural de ambos miembros de $y=f(x)$. Usar las propiedades generales de los logaritmos para simplificar tanto como sea posible el miembro derecho de $ln(y)=ln(x)$
b. Diferencie implícitamente la versión simplificada de $ln(y)=ln(x)$
c. Puesto que la derivada del miembro izquierdo es $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$ despejar $\frac{dy}{dx}$ y sustituir finalmente $y$ por $f(x)$.

**ER3.** Derivar la siguiente función $y=x^x$

**Solución:** $y=x^x$

A continuación aplicamos logaritmo natural a ambos lados: $lny=lnx^x$

Aplicamos la tercera propiedad de los logaritmos:

$$lny=xlnx$$

Derivamos a ambos lados con respecto a *x:*

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = lnx + x\frac{1}{x}$$

Despejamos:

$$\frac{dy}{dx} = x^x(lnx + 1)$$

## 3.6 Derivadas de orden superior

¿Cree usted que a una función a la cual se le sacó su derivada, se pueda volver a derivar una segunda vez?

En efecto una derivada de orden superior sería volver a derivar una función que ya ha sido derivada, dependiendo del número de veces que yo derive una función, ese será el orden de derivada que tenga. Por ejemplo una derivada de segundo orden sería derivar dos veces una función, una derivada de tercer orden sería derivar tres veces una función.

### *3.6.1 Notación de derivadas de orden superior*

**Tabla 6: Derivadas de orden superior**

| **Función** | **f(x)** | **y** |
|---|---|---|
| Primera derivada | f ‘(x) | $\frac{dy}{dx}$ |
| Segunda derivada | f ‘’(x) | $\frac{d^2y}{dx^2}$ |
| Tercera derivada | f ‘”(x) | $\frac{d^3y}{dx^3}$ |
| Cuarta derivada | $f^4$ (x) | $\frac{d^4y}{dx^4}$ |
| Enésima derivada | $f^n$ (x) | $\frac{d^ny}{dx^n}$ |

**Ejemplo 1:** Determinaremos la cuarta derivada para la siguiente función:

$$f(x) = x\sqrt[3]{x} - 2x^3$$

Primero debemos convertir esta expresión en algo más sencillo de interpretar y tenemos:

$$f(x) = xx^{\frac{1}{3}} - 2x^3$$

$$f(x) = x^{\frac{4}{3}} - 2x^3$$

A continuación derivamos la primera vez:

$$f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} - 6x^2$$

Derivamos una segunda vez:

$$f''(x) = \frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}} - 12x$$

Derivamos una tercera vez:

$$f'''(x) = -\frac{8}{27}x^{-\frac{5}{3}} - 12$$

Y por último derivamos una cuarta vez:

$$f^{(4)}(x) = \frac{40}{81}x^{-\frac{8}{3}}$$

## *3.6.2 Una aplicación de las derivadas de orden superior*

Una aplicación importante en física es que si se posee la función de la posición o trayectoria de un cuerpo (denominado también partícula), la primera derivada de la función es la velocidad de la partícula en cada posición y la segunda derivada de la posición es decir la derivada de la velocidad es la aceleración.

**Figura 12**


**ER1.** La función que describe la posición de una partícula que se mueve en línea recta está dada por $s(t)=t^3-12t^2+36t-10$

Donde $t$ se mide en segundos y $s(t)$ en metros. Determine el movimiento, la velocidad y la aceleración de $P$ durante el intervalo [0,8]

### Solución

Derivando la función posición para encontrar la función velocidad tenemos

$$s'(t)=v(t)=3t^2-24t+36=3(t-2)(t-6)$$

De esta expresión determinamos que la velocidad es 0 en $t=2$ y $t=6$

Derivamos ahora la función velocidad para encontrar la función aceleración

$$s''(t)=v'(t)=a(t)=6t-24=6(t-4)$$

La siguiente tabla describe las condiciones de *P* en subintervalos de *2* segundos.

**Tabla 7 Desplazamiento, velocidad y aceleración de la partícula**

| t | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| s(t) | -10 | 22 | 6 | -10 | 22 |
| v(t) | 36 | 0 | -12 | 0 | 36 |
| a(t) | -24 | -12 | 0 | 12 | 24 |

De acuerdo a la tabla si observamos la posición *s(t)* podemos ver que la partícula se mueve a la derecha en el intervalo [0,2) luego a la izquierda en el intervalo de (2,6) y nuevamente a la derecha en el intervalo (6,8]. Con respecto a la velocidad *v(t)* la velocidad va disminuyendo en el intervalo [0,4) y aumenta en el intervalo (4,8]. En cuanto a la aceleración se observa que es negativa en el intervalo de [0,4) y positiva en (4,8]. A continuación se presenta las gráficas de la posición (función cúbica), la velocidad (función cuadrática) y la aceleración (función lineal) de la partícula.

**Figura 13**
**Gráfica de la Posición de la partícula**

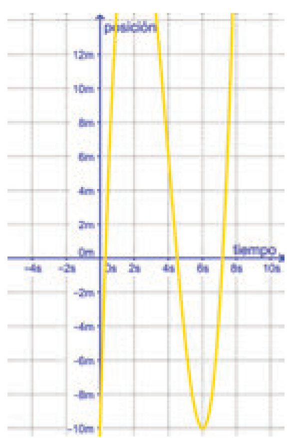


Figura 14
Gráfica de la velocidad de la partícula

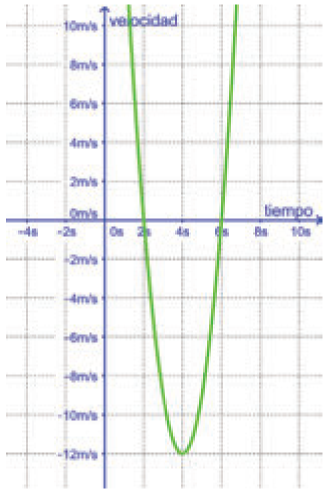
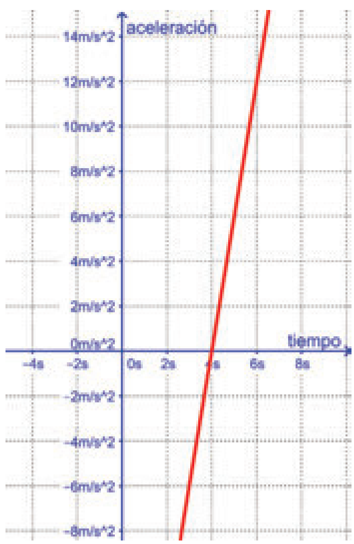



Figura 15
Gráfica de la aceleración de la partícula



*Actividades complementarias*

**AC1.** Un vehículo lleva un movimiento rectilíneo cuya relación entre la distancia recorrida *x* (en kilómetros) y el tiempo empleado *t* (en minutos) es: $x = \frac{t^2}{3} + 4$

a. Calcular su velocidad media entre $t = 2$ y $t = 4$
b. Calcular la velocidad instantánea para $t = 6$

**AC2.** Encuentre la derivada de:

a. $y = 2x^2 - 5x + 2$

b. $x = \frac{t^2}{3} + 4$

c. $y = \frac{1}{3}x^3 - 8x + 4$

d. $y = \frac{1}{x^2}$

e. $y = \frac{2x^4 - 5\sqrt{x}}{x^2}$

f. $f(x) = \left(\frac{12}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right)(4x - 5x^3)$

**AC3** Usando reglas, derive las siguientes funciones con respecto a su variable independiente.

a. $y = 5(-3x^2 + 4x - 8)^3$

b. $s(t) = (3t^2 + 2)\left(\frac{1}{t^2} - 5t\right)$

c. $p(r) = \frac{2 + \sqrt[3]{5r + 4}}{(3r - 3)^2}$

d. $f(x) = \left[\sqrt{\frac{3x^2 - xCos(5x+2)}{x^3}}\right]^3$

**AC4** Derivar las siguientes funciones

a. $y = log_3(e^{-2x}\,\text{sen}(2\pi x))$

b. $h(r) = log_2\left(\sqrt[3]{\frac{a^2 + r^2}{a^2 - r^2}}\right)$

**AC5** Derivadas de funciones trigonométricas, logaritmo natural y exponencial.

a. $y = \tan\left(\frac{1}{\theta - 2}\right)$

b. $y = \ln\left(\frac{1}{r^2}\right)$

c. $p = \frac{Cos\ (3r)}{5r}$

d. $y = e^{\left(x^3 - \frac{1}{3x}\right)}$

e. $y = x^5 sen\left(\frac{x}{2}\right)$

f. $r = sec^2(6\theta)$

g. $y = \arctan(2x^3 + 3x)$

**AC6** Determinar $\frac{dy}{dx}$ por medio de diferenciación implícita

a. $x^2+y^2=9$

b. $(4x\text{-}5)^3 = 2y^4$
c. $x^2\ seny + ycosx = 5$
d. $e^{2y}\ cos3x = 1 + sen(xy)$
e. $x^3 + y^3 = 3xy$

**AC7** Determinar $\frac{d^2y}{dx^2}$ por medio de diferenciación implícita

a. $x + y = cosy$
b. $3y^3 = 4x^2 + 2$
c. $x^3 + y^3 = 9$

**AC8** Resolver usando derivación logarítmica:

a. $y = (cos\ x)^{\ln x}$
b. $t = 2^{\tan z}$
c. $y = x^{\sqrt{x}}$
d. $y = x^{senx}$
e. $y = 3x(x-4)^x$
f. $y = \frac{x\sqrt{x+4}}{\sqrt[3]{4x^2+3}}$

**AC9** Dada las siguientes funciones, encontrar: *f' (x)*, *f'' (x)*

a. $x = 5t^2 + 2t + 1$
b. $f(x) = \frac{x^2+3x}{x+1}$
c. $f(x) = \sqrt{3x^2+2x+5}$
d. $f(x) = senx + \frac{tanx}{2}$

## Ejercicios de aplicación

**EA1.** Un fabricante produce un rollo con ancho fijo de un tejido para fabricar asientos de vehículos. El costo de producir *x* metros de este tejido es de $C=f(x)$ dólares.

a. ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(x)$? ¿Cuáles son sus unidades?
b. En términos prácticos, ¿qué significa decir que $f'(1000)=9$?
c. ¿Cuál piensa que es más grande $f'(50)$ o $f'(500)$? ¿Qué hay respecto a $f'(5000)$?

**EA2.** En la tabla se proporciona el número *N* de kilómetros de recorrido de un vehículo medidos al final de cada año

| Año | 2011 | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 |
|---|---|---|---|---|---|
| N | 18027 | 21005 | 25659 | 32650 | 38646 |

a. Determine la tasa promedio de crecimiento
   1. Desde 2012 a 2013
   2. Desde 2012 a 2014
   3. Desde 2011 a 2012
   4. Desde 2014 a 2015

   En cada caso incluya las unidades

b. Estime la razón de crecimiento instantáneo en 2012 considerando dos razones de cambio promedio ¿Cuáles son sus unidades?
c. Estime la razón de crecimiento instantáneo en 2012 midiendo la pendiente de una recta tangente
d. Estime la razón de crecimiento instantáneo en 2013 y compárela con la razón de crecimiento de 2012 ¿Qué concluye?

**EA3.** El desplazamiento (en metros) de una partícula que se mueve en línea recta está dado por $s=t^2-8t+18$, donde *t* se mide en segundos.

a. Encuentre la velocidad promedio en cada intervalo de tiempo:
   1. [3;4]
   2. [3,5;4]
   3. [4;5]
   4. [4;4,5]

b. Halle la velocidad instantánea cuando $t = 4$
c. Dibuje la gráfica de *s* como función de *t* y trace las rectas secantes cuyas pendientes son las velocidades promedio en el inciso a) y la recta tangente cuya pendiente es la velocidad instantánea en el inciso b).

**EA4. Crecimiento y Decaimiento exponencial** Una curva pasa a través del punto *(0,5)* y tiene la propiedad de que la pendiente de la curva en cualquier punto *P* es dos veces la coordenada y de *P*. La curva es $y=5e^{2x}$

a. Verifique la propiedad de la curva graficando la misma
b. Determine la razón de cambio funcional en el punto de abscisa $x=-1$

**EA5. La ley de enfriamiento de Newton** dice que la rapidez de enfriamiento de un objeto es proporcional a la diferencia de temperatura entre el objeto y su medio ambiente. Para ello utilice las variables *T=temperatura* del objeto; *t=tiempo*; $T_a$*=Temperatura del medio ambiente* (constante); *k* constante de proporcionalidad.

Si un recipiente con una bebida gasificada a temperatura ambiente *25 °C* se coloca dentro de un refrigerador donde la temperatura es *6 °C*. Después de media hora la bebida se ha enfriado hasta *16 °C*. La función de temperatura es $T=6+19e^{-0.0214t}$

Determine:

- Graficar la función de temperatura y verificar las condiciones dadas

- ¿Cuál es la temperatura después de otra media hora?
- ¿Cuánto tardará la bebida en enfriarse a 10 °C?
- ¿Cuál es la tasa de enfriamiento a los 45 minutos?

**EA6.** Si la parte de un vehículo que se encuentra a *60 ˚C* se deja enfriar en un ambiente cuya temperatura es *Ta=20 ˚C* y a los 5 minutos su temperatura ha descendido a *55˚C* La función de temperatura es $T=20+40e^{-0.027t}$. Determine:

a. Graficar la función de temperatura y verificar las condiciones dadas
b. ¿Cuál es la temperatura después de *15* minutos?
c. ¿Cuánto tardará en enfriarse a *40* °C?
d. ¿Cuál es la tasa de enfriamiento a los 10, 20, 30 y 40 minutos? ¿Qué puede deducir con estos resultados?

**EA7.** El desplazamiento teórico de un sistema masa-resorte sin fricción viene dado por la siguiente función $f(t)=5cos(2t)+3sen(2t)$ en donde el tiempo viene dado en segundos y el desplazamiento en centímetros.

a. Investigar qué es un sistema masa-resorte
b. Graficar la función dada
c. ¿Qué representa la derivada de esta función?
d. ¿Cuál es la tasa de cambio del desplazamiento a los 2,4 y 6 segundos?
e. ¿Qué podemos decir en cuanto al desplazamiento y a la velocidad?

**EA8.** El desplazamiento de un sistema masa-resorte con amortiguación dado por la siguiente función:

$$f(t) = e^{-t}\,(-2cos(3t) + \frac{2}{3}sen(3t))$$

En donde el tiempo viene dado en segundos y el desplazamiento en centímetros.

a. Investigar qué es un sistema masa-resorte con amortiguación
b. Graficar la función dada
c. ¿Qué representa la derivada de esta función?
d. ¿Cuál es la tasa de cambio del desplazamiento a los 1/2,1,2,4,6 y 8 segundos
e. ¿Qué podemos decir en cuanto al desplazamiento y a la velocidad?

**EA9.** La velocidad de un cuerpo está dada por:

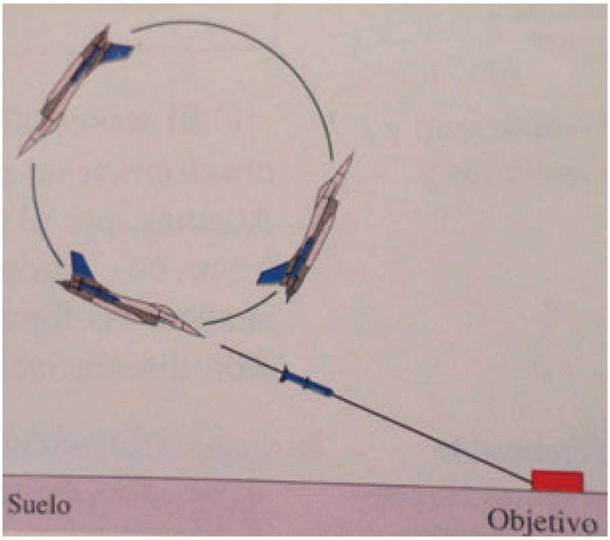
$$v(t) = -40e^{(-0.027\ (t\ +0.24898))} +\ 39.732$$

a. Graficar la función
b. ¿Qué representa la derivada de esta función?
c. ¿Cuál es la tasa de cambio de la velocidad a los *10, 50,100* y *200* segundos
d. ¿Qué podemos concluir?

**EA10.** Un avión caza describe una circunferencia de *1 Km* de radio como se muestra en la figura. Suponga que se escoge un sistema coordenado rectangular de modo que el origen está en el centro de la circunferencia. La nave dispara un misil que describe una trayectoria

Rectilínea tangente al círculo e impacta en un blanco sobre el suelo cuyas coordenadas son *(2,-2)*

a. Determine el punto sobre el círculo donde fue disparado el misil.
b. Si un misil se dispara en el punto $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ sobre el círculo, ¿En qué punto choca contra el suelo?




**EA11.** Se da la función de la posición de una partícula que se mueve en línea recta. Encontrar la posición, la velocidad y aceleración de la partícula en los instantes indicados. Graficar las funciones encontradas.

a. $s(t) = t^3 - 3t^2 - t \qquad t = -2 \qquad t = 2$

b. $s(t) = 4t^2 - 6t \qquad t = -3 \qquad t = 3$

c. $s(t) = \frac{t}{t+1} \qquad t = -1 \qquad t = 0 \qquad t = 1$

d. $s(t) = t + \cos(\pi t) \qquad t = 1 \qquad t = \frac{3}{2}$

## Capítulo 4
# Aplicación de la derivada

La derivada se puede aplicar de varias maneras, para entender cómo y en dónde se debe partir de los conceptos: geométrico, matemático y físico de derivada. En cuanto al concepto geométrico decíamos que la derivada es la pendiente de la recta tangente en un punto de la función; la definición matemática nos indica que la derivada es la razón de cambio de la variable dependiente con respecto a la variable independiente y el concepto físico nos dice que la derivada es la velocidad con la que cambia una variable con respecto a otra por ejemplo si tenemos una función que representa al desplazamiento de un cuerpo en el tiempo, su derivada representa la velocidad de ese objeto en cualquier instante de tiempo t.

## 4.1 Recta tangente y recta normal

De lo aprendido en la unidad de Geometría Analítica, se necesitan dos datos para encontrar la ecuación de una recta estas condiciones pueden ser o dos puntos o el punto y la pendiente de dicha recta.

### 4.1.1 Recta tangente

Para el primer caso necesitamos encontrar la ecuación de la recta tangente que es aquella que toca a la curva únicamente en el punto dado. Dado que la derivada nos permite obtener la pendiente de la recta tangente en cualquier punto de la curva. La ecuación de la recta en donde las variables son $x$ y $y$ con el punto $P(x_1,y_1)$ y la pendiente $m$

Viene dado por:

$$y\text{-}y_1 = m(x\text{-}x_1)$$

El valor de $x_1$ corresponderá al valor en el eje de las abscisas $x$ en donde se quiere encontrar la recta tangente y el valor de $y_1$ es el valor de evaluación de la función en el punto $x_1$ ; es decir $y_1 = f(x_1)$

## 4.1.2 Recta normal

La ecuación de la recta normal se obtiene fácilmente al considerar que pasa exactamente por el mismo punto $P(x_1 , y_1)$ y es perpendicular a la recta tangente.

Así la condición de perpendicularidad exige de acuerdo a lo aprendido en la Unidad 1 que la pendiente de la recta normal y la pendiente de la recta tangente cumplan $m_n m_t = -1$ (condición para que dos rectas sean perpendiculares) de donde:

$\boldsymbol{m}_n$ recta normal
$\boldsymbol{m}_t$ recta tangente

### Ejercicios resueltos

**ER 1.** Determinar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $f(x) = 3x^2+2x-1$ en el punto cuando $x=2$

### Solución

Observando la función podemos darnos cuenta de que es una parábola horizontal. Necesitamos encontrar el valor de $y$ de la coordenada del punto cuando $x=1$ para eso evaluamos dicho valor en la función $f(x)$ y tenemos $f(1) = 3(1)^2+2(1) -1 = 4$ , es decir el punto es $P(1;4)$. Ahora necesitamos encontrar la pendiente de la recta tangente a la curva en este punto, para ello trabajamos con la derivada de la función dada y reemplazamos en ella el valor de $x=1$ .La derivada de la función es $f'(x) = 6x + 2$, si evaluamos el valor de $x$ del punto tenemos $f'(x) = 6(1)+2 = 8$ que representa la pendiente $m=8$.

Con los datos del punto y la pendiente reemplazamos en la fórmula de la ecuación de la recta.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 4 = 8(x-1)$$
$$y = 4 +8x -8$$

$y = 8x -4 \rightarrow$ recta tangente

La recta normal pasa por este mismo punto y es perpendicular a la recta tangente es decir: $m_n m_t = -1$, como ya tenemos la pendiente de la recta tangente despejamos la pendiente normal y tenemos $m_n = -1/m_t$ , reemplazando datos nos queda:

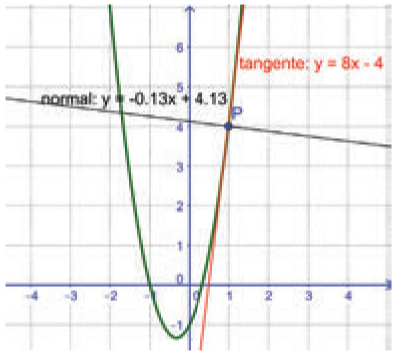
$$m_n=-1/8 = -1/8$$

Aplicando nuevamente la fórmula de la recta tenemos:

$$y - y_1 = m(x -x_1)$$
$$y -4 = -1/8(x-1)$$
$$y = 4 -x/8 +1/8$$

$y = -x/8 +33/8 \rightarrow$ recta tangente

Figura 1
Recta tangente y recta normal




## 4.2 Tasas de cambio relacionadas

Recordemos que la derivada es el cambio instantáneo que experimenta una variable (dependiente) con respecto a otra variable (independiente), para una función , se podría obtener la derivada o razón de cambio de las variables $x$ y $y$ con respecto al tiempo $t$, es decir: $dy/dt$ y $dx/dt$. Lo cual nos va a permitir resolver problemas de aplicación. En la mayoría de problemas de aplicación de ingeniería se requiere derivar las funciones con respecto al tiempo.

A un problema en que intervengan razones de cambio, respecto al tiempo, de variables relacionadas, se le llama problema de rapideces de variación relacionadas, las variables tienen una relación específica para valores de $t$. Esta relación suele expresarse en forma de una ecuación, con frecuencia, los valores de las variables y sus velocidades de cambio con respecto a $t$ se expresan en un instante dado ya que ellas cambian a cada momento.

### Ejercicios resueltos

**ER 1.** El tanque de combustible de un vehículo de competencia fabricado de fibra de vidrio tiene una forma de paralelepípedo de medidas en centímetros: base 80 x 40; altura 45. Se vierte combustible desde un surtidor con un caudal de 8000 $cm^3$/min. Determinar:

a. La rapidez a la cual el nivel del combustible sube
b. ¿En qué tiempo se llenará el tanque?

**Figura 2**
**Tanque de combustible del ER1**

## Solución

Como podemos darnos cuenta el problema está en llenar el volumen contenido dentro del tanque de combustible, al ser una figura homogénea no presenta mayor complicación; para ello debemos crear la función del volumen del tanque y saber que mientras se llena el tanque las medidas de la base se mantienen constantes mientras que lo que va variando es la altura de llenado del tanque.

El volumen de llenado y la altura por lo tanto dependerán del tiempo que vaya transcurriendo, la función queda definida de la siguiente manera:

$$V(t) = 80cm(40cm)h(t)$$

Si derivamos está expresión con respecto al tiempo tenemos:

$$dv/dt = 3200cm^2\ (dh/dt)$$

Despejando *dh/dt* que representa la rapidez a la cual sube el nivel de combustible en el tanque nos queda:

$$dh/dt=(dv/dt)/(3200cm^2)$$

Reemplazando el dato del caudal que representa la rapidez de cambio del volumen con respecto al tiempo tenemos:

$$dh/dt=(8000\ cm^3/min)/(3200\ cm^2\ ) = 2,5\ cm/min$$

Lo que significa que por cada minuto que pasa la altura sube 2,5 cm/min; esto para cualquier instante de tiempo debido a que el tanque tiene una forma homogénea.

b) Para determinar en qué tiempo se llenará el tanque, con el dato encontrado en el punto anterior y el valor de la atura del tanque podemos encontrar el tiempo de llenado. La altura del tanque es 45 cm, mientras que la rapidez a la cual sube el nivel de combustible es de $2,5\frac{cm}{min}$ eso significa que si dividimos 45 para 2,5 nos va a dar el tiempo de llenado del tanque y se puede comprobar que las unidades si son correspondientes.

$$tiempo\ de\ llenado = \frac{45cm}{2,5\frac{cm}{min}} = 18min$$

**ER 2.** En el mecanismo para levantar el cajón de una volqueta mostrada en la figura se sabe que el pistón tiene una rapidez de 0.25m/s se quiere averiguar cuál es la rapidez de rotación angular de la paila de la volqueta cuando esta tiene un ángulo de 30°. Las medidas de la base donde se asienta la paila y la paila son de 4m.

**Figura 3**
**Volqueta del ER2**
**(MarcadorDePosición4)**

## Solución


Debemos encontrar una relación entre las variables, se puede ver que el mecanismo forma un triángulo ABC y relacionaremos las variables con la ley de los cosenos ya que no es un triángulo rectángulo:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cos(\theta)$$

La rapidez del pistón se puede escribir como *dc/dt* y la rapidez angular como *d*θ/*dt* como la ecuación anterior relaciona las variables*c* y θ sin derivar, es necesario encontrar dichas derivadas con respecto al tiempo. Pero hay que fijarse bien que aquí es una derivación de tipo implícita ya que el tiempo no aparece en la ecuación. Derivando implícitamente con respecto al tiempo tenemos:

$$2c\frac{dc}{dt} = 0 + 0 + 2a\ c\ sen(\theta)\frac{d\theta}{dt}$$

Despejando

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{c}{a\ b\ sen(\theta)}\frac{dc}{dt}$$

De donde c se obtiene con la ley de los cosenos, con a=4m y b=4m. Además consideramos que *dc/dt = 0.25 m/s* y se quiere calcular cuando el ángulo de abertura de la paila de 30°, lo más conveniente es trabajar en radianes es decir el ángulo es π/6.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2abCos\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$c = \sqrt{4^2 + 4^2 - 2(4)4Cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = 2.07m$$

Reemplazando los datos en la expresión anterior tenemos:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2{,}07m(0{,}25\frac{m}{s})}{4m\ (4m)\ sen\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$

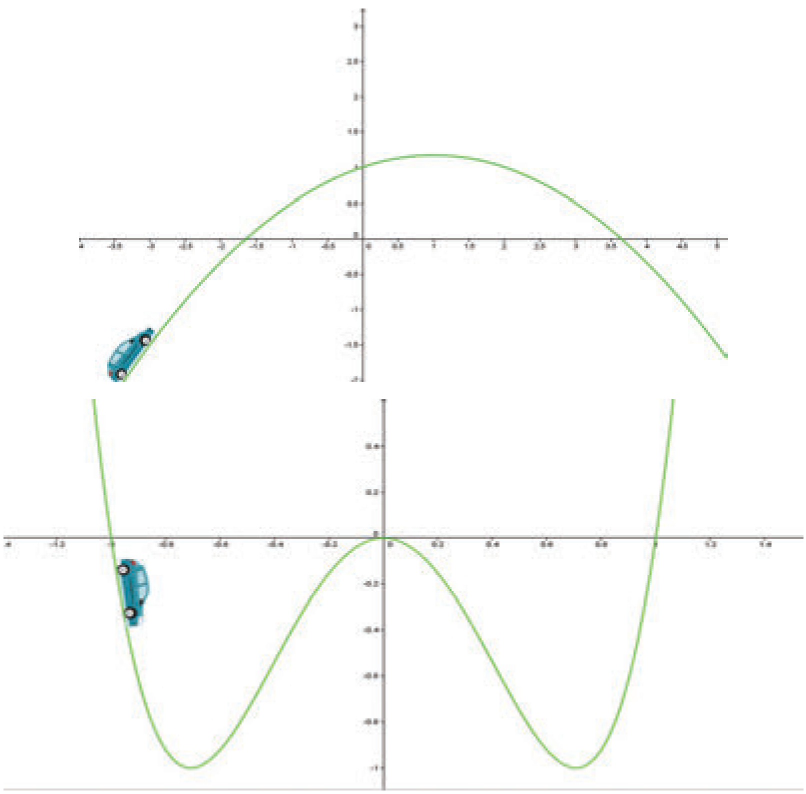
$$\frac{d\theta}{dt} = 0{,}064\frac{rad}{s}$$

Lo que significa que la rapidez de rotación angular de la paila es de 0,064 radianes por segundo lo que equivale a 3.7 grados por segundo.

## 4.3 Máximos y mínimos

Imaginemos que un vehículo está desplazándose por una carretera con la forma presentada en los gráficos. Contestar lo siguiente: ¿En qué puntos del camino está el vehículo en la parte más alta? ¿En qué puntos del camino el vehículo está en la parte más baja?

**Figura 4**
**Máximos y mínimos**

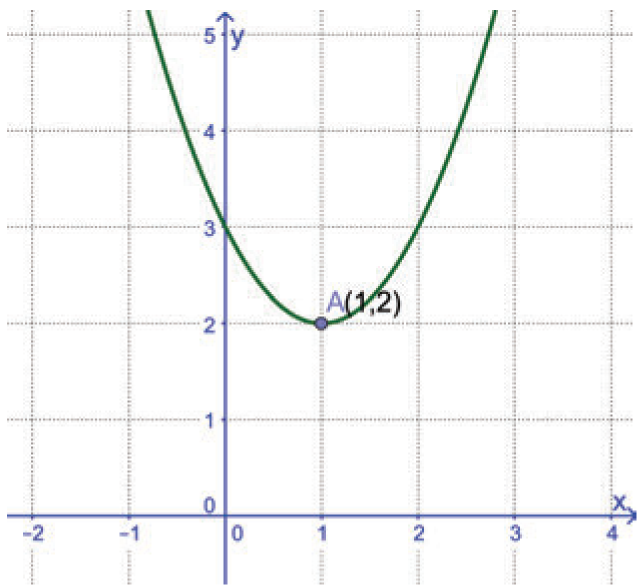


Se puede determinar los valores máximos y mínimos también denominados extremos de toda una función o de solo un intervalo de la misma. Se verá que al encontrar estos valores, resulta más fácil determinar la gráfica. El encontrar los extremos de una función es posible resolver ciertos tipos de problemas de optimización. Se establecerán definiciones importantes para encontrar los valores máximos y mínimos de una función *f* que es continua sobre un intervalo cerrado *f*.

## 4.3.1 Extremos absolutos

En la gráfica de la función $f(x) = x^2 -2x +3$ es evidente observar que hay un punto $A(1;2)$ que es el valor más bajo que toma la variable dependiente *y* denominándose este punto mínimo absoluto de la función $f(x) = x^2 -2x +3$

**Figura 5**
**Extremo absoluto**



## *4.3.2 Definiciones de máximos y mínimos locales y absolutos*

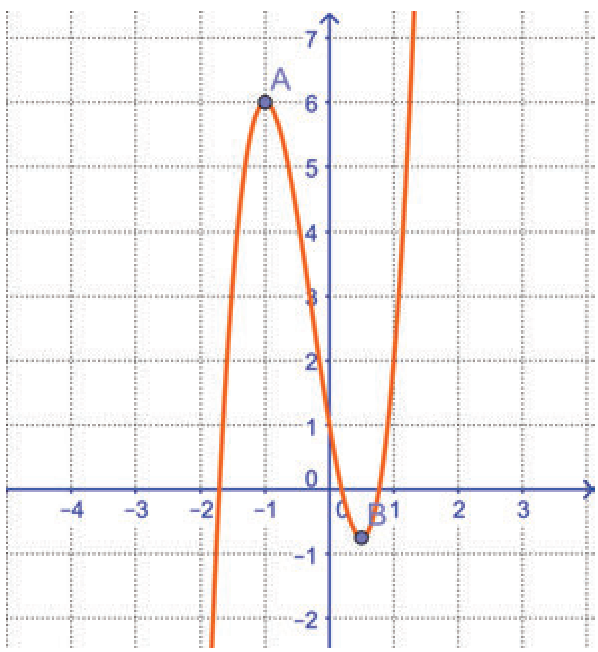
Una función $f$ tiene un máximo absoluto (o máximo global) en c si $f(c) \geq f(x)$ para todo $x$ en $D$, donde $D$ es el dominio de $f$. El número $f(c)$ se llama valor máximo de $f$ en $D$, de manera análoga, $f$ tiene un mínimo absoluto en $f(c) \leq f(x)$ para todo $x$ en $D$; el número $f(c)$ se denomina valor mínimo de $f$ en D. Los valores máximo y mínimo de $f$ se conocen como valores extremos de $f$

**Ejemplo 1:** Determinar gráficamente si la función

$f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ posee algún extremo absoluto.

### Solución

**Figura 6**
**Función del ejemplo 1**



Si graficamos esta función observamos que la función no presenta ningún extremo absoluto, pero se puede observar un máximo (punto A) y un mínimo (punto B) que se podrían denominar locales dependiendo del intervalo que se estudie.

### 4.3.3 Puntos estacionarios y puntos críticos

Teorema de valor extremo: si $f$ es continua sobre un intervalo cerrado $[a,b]$, entonces $f$ alcanza un valor máximo absoluto $f(c)$ y un valor mínimo absoluto $f(d)$ en algunos números $c$ y $d$ dentro del intervalo $[a,b]$.
Un número crítico de una función $f$ es un número $c$ en el dominio de $f$ tal que $f'(c) = 0$ o es indefinida. Si $f$ tiene un máximo o mínimo local en $c$, entonces $c$ es un número crítico de $f$

**Ejemplo 2:** Determinar los números críticos de $f(x) = 3x^3 -4x +8$

## Solución

Al diferenciar y factorizar obtenemos

$$f'(x) = 9x^2 -4$$

Igualamos a 0 para determinar en qué valores de $x$ la pendiente es 0 y tenemos:

$$9x^2 -4 = 0$$

Despejando tenemos que:

$$x = \pm\sqrt{\frac{4}{9}} = \pm\frac{2}{3}$$

Por lo tanto observamos que $f'(x)= 0$ es decir pendiente es igual a cero en la función en los puntos cuando $x = -2/(3\ )$ y$x = 2/3$ es decir estos son los números críticos.

## 4.3.4 Extremos de funciones definidos sobre un intervalo cerrado

Teorema de extremos de funciones definidos sobre un intervalo cerrado: El máximo o el mínimo de una función sobre un intervalo cerrado siempre se encuentra o en los puntos extremos del intervalo o en puntos críticos localizados dentro del intervalo

Vimos que una función *f* que es continua sobre un intervalo cerrado tiene tanto un **máximo absoluto como un mínimo absoluto**. A continuación se verá los pasos para encontrar extremos sobre un intervalo cerrado.

Evaluar *f* en los puntos frontera a y b del intervalo $[a,b]$

Encontrar todos los números críticos en el intervalo abierto $(a,b)$

Evaluar la función en todos los números críticos

Los valores mayores o menores en la lista serían el máximo y el mínimo absoluto de la función sobre el intervalo $[a,b]$.

**Ejemplo 3:** Determinar los extremos de la función $f(x) = x^3/3 - x^2/2 - 6x$ en el intervalo $[-4,6]$

### Solución

Evaluamos primero la función en los puntos frontera del intervalo $[-4,6]$

$$f(-4) = \frac{(-4)^3}{3} - \frac{(-4)^2}{2} - 6(-4) = -5{,}35$$
$$f(6) = \frac{(6)^3}{3} - \frac{(6)^2}{2} - 6(6) = 17{,}89$$

Encontramos ahora los puntos críticos en el intervalo abierto $(-4,6)$

$$f'(x) = \frac{1}{3}3x^2 - \frac{1}{2}2x - 6$$

$$f'(x) = x^2 - x - 6$$
$$x^2 - x - 6 = 0$$
$$(x-3)(x+2) = 0$$

Puntos críticos *x = -2 x = 3*

Evaluamos la función en estos puntos críticos

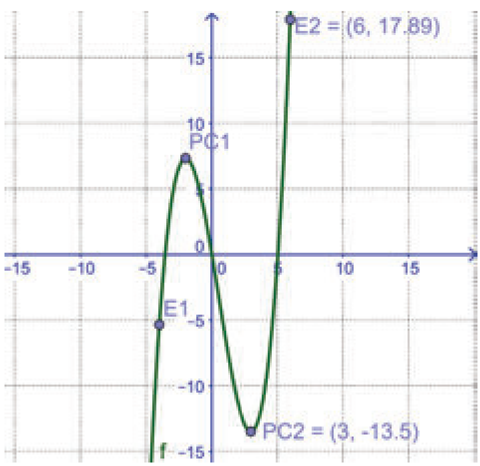
$$f(-2) = \frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} - 6(-2) = 7{,}33$$
$$f(3) = \frac{(3)^3}{3} - \frac{(3)^2}{2} - 6(3) = -13{,}5$$

Observando los valores evaluados tanto en los puntos de la frontera y en los puntos críticos determinamos que el máximo y mínimo sobre el intervalo *[-4,6]* son:

Máximo: el extremo derecho de la frontera *(6; 17,89)*

Mínimo: el segundo punto crítico *(3;-13,5)*

**Figura 7**
**Función del ejemplo 3**



## 4.4 Teorema del valor medio

Antes de entrar a este tema analicemos lo siguiente: Si usted viaja desde Cuenca a Guayaquil y lo hace en tres horas recorriendo una distancia de 210Km ¿a qué velocidad promedio ha viajado? ¿Significa que todo el tiempo usted ha viajado a esa velocidad? ¿Cuántas veces durante el trayecto habrá usted estado viajando a la velocidad promedio?

Para llegar al teorema del valor medio primero debemos entender un teorema denominado Teorema de Rolle que es:

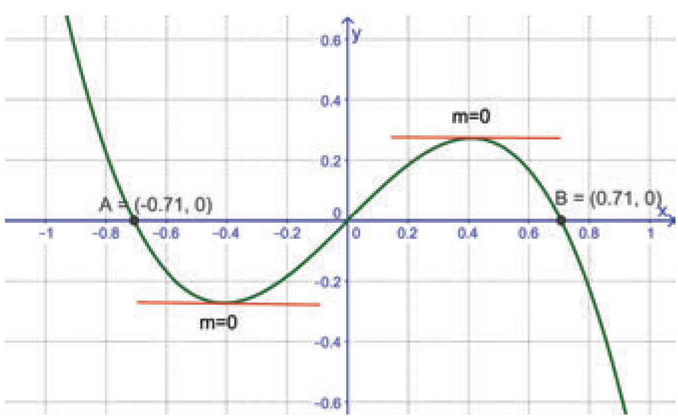
### 4.4.1 Teorema de rolle

Sea $f$ una función continua sobre $[a,b]$ y diferenciable sobre $(a,b)$. Si $f(a) = f(b) = 0$ entonces hay un número $c$ en $(a,b)$ tal que $f'(c)=0$.

**Ejemplo 1:** Comprobación del teorema de Rolle

Considere la función $f(x) = -2x^3 + x$ definida sobre $[-1,1]$ como se muestra en la siguiente gráfica:

**Figura 8**
**Función del ejemplo 1**



## Solución

La función $f$ es continua en $[-0,71;0,71]$ y diferenciable sobre $(-0,71;0,71)$. También $f(-0,71)=f(0,71)=0$ . Por tanto se cumplen la hipótesis del teorema de Rolle. Concluimos que debe haber por lo menos un número en $(-0,71;0,71)$para el cual $f'(x)=(-6x)^2+1$ es cero. Para encontrar este número se resuelve $f'(c) = 0$ o $-6c^2+1= 0$ Si resolvemos nos da dos respuestas que son las soluciones al ejercicio $c_1 = -0,41$ y $c_2 = 0,41$.

## 4.4.2 Teorema del valor medio

A partir del teorema de Rolle demostramos este nuevo teorema que establece que cuando un función $f$ es continua sobre $[a,b]$ y diferenciable sobre $(a,b)$, entonces debe haber por lo menos un punto sobre la gráfica donde la pendiente de la recta tangente es la misma que la recta secante que pasa por los puntos $(a,f(a))$ y $(b,f(b))$. La palabra medio se refiere aquí a un promedio; es decir al valor de la derivada en algún punto es el mismo que la razón de cambio media de la función sobre el intervalo. Para el ejemplo del viaje de Cuenca a Guayaquil como mínimo en algún punto del viaje habré pasado por la velocidad promedio que es de 70 Km/h durante las aceleraciones y desaceleraciones que se hacen en todo el trayecto. Esto trasladado a una forma matemática tenemos que:

Sea $f$ una función continua sobre $[a,b]$ y diferenciable sobre $(a,b)$ existe un número $c$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

**Ejemplo 2:** Comprobación del teorema del valor medio

Dada la función $f(x) = 2x^3 - 6x$ definida sobre el intervalo cerrado $[-2,2]$ ¿existe un número c en el intervalo abierto $(-2,2)$ que cumple la conclusión del teorema del valor medio?

## Solución

Ya que *f* es una función continua sobre *[-2,2]* y diferenciable sobre *(-2,2)*. Entonces *f(-2) = -4*, *f(2) = 4*

$$f^{'}(c) = 6c^2 - 6$$

$$6c^2 - 6 = \frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)}$$

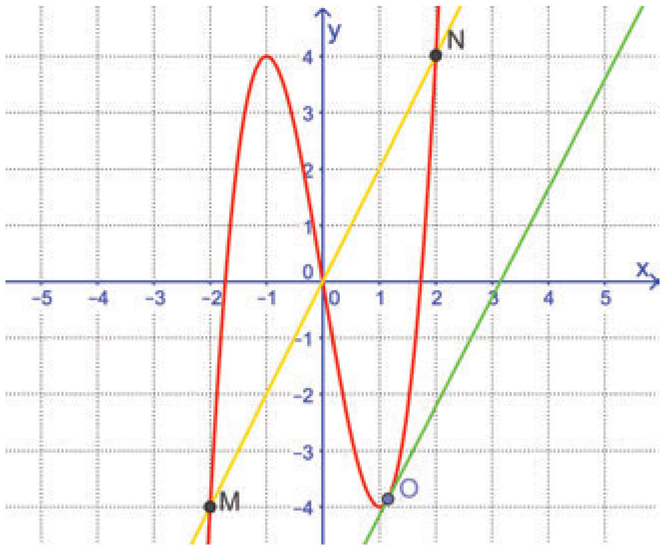
$$6c^2 - 6 = \frac{4 + 4}{2 + 2} \qquad 6c^2 - 6 = \frac{8}{4}$$

$$6c^2 = 8 \qquad c = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$$

Aunque esta expresión tiene dos respuestas la verdadera es *c = 1,15*

En la gráfica de la función que se muestra a continuación podemos ver la recta secante de color azul que pasa por los puntos M y N que son los extremos del intervalo, y se puede ver que de acuerdo al teorema del valor medio se encontró el punto O en donde *c = 1,15* que es el punto de la curva dentro del intervalo donde la pendiente de la recta tangente tiene el mismo valor que la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos M y N.

Figura 9
Función del ejemplo 2




## 4.5 Regla de l'hopital

Recordemos que cuando vimos el tema de límites, ciertos límites se podían determinar fácilmente y que había otros que eran más complicados ya que al reemplazar el valor en la expresión nos daba una indeterminación y debíamos levantar esa indeterminación de acuerdo al caso.

Por ejemplo si resolvemos el siguiente límite $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2-4x+2}{x-1}$ al reemplazar los datos nos da como resultado una indeterminación del tipo *0/0*, para esto había una técnica para levantar esa indeterminación y resolverla.

Ahora veremos otra aplicación de la derivada para calcular ciertos límites con formas indeterminadas como la que acabamos de ver.

### *4.5.1 Regla de l´hopital para formas del tipo 0/0*

Suponga que $f$ y $g$ son funciones diferenciables sobre un intervalo abierto que contiene al valor $a$, excepto posiblemente en $a$ mismo, y qué $g'(x) \neq 0$ para toda $x$ en el ntervalo salvo posiblemente en $a$. Si $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ es una forma indeterminada *0/0,* y

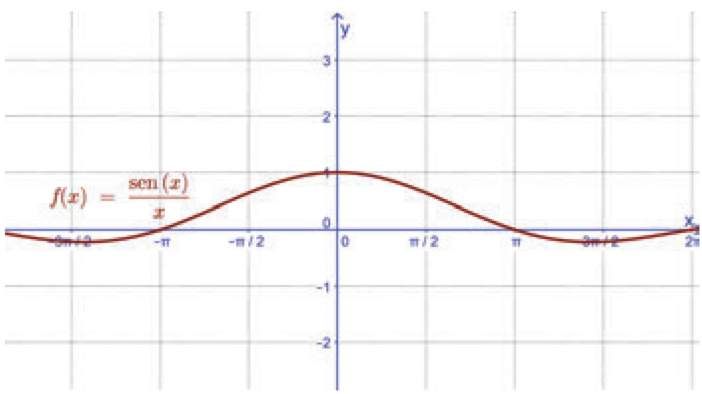
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

**Ejemplo 1:** Evalúe $\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x}$

## Solución

Observaremos primero la gráfica de esta función y determinaremos visualmente el límite o valor de la función cuando $x$ tiende a *0*, podemos darnos cuenta que el valor del límite es 1.

**Figura 10**
**Función del ejemplo 1**




Ahora lo demostraremos analíticamente. Si reemplazamos el valor de $x = 0$ en la expresión del límite el resultado nos da la indeterminación *0/0,* por lo tanto aplicando la regla de L'Hopital tenemos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{d}{dx} senx}{\frac{d}{dx} x} = \lim_{x \to 0} \frac{cosx}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

**Ejemplo 2:** Determinar el siguiente límite

## Solución

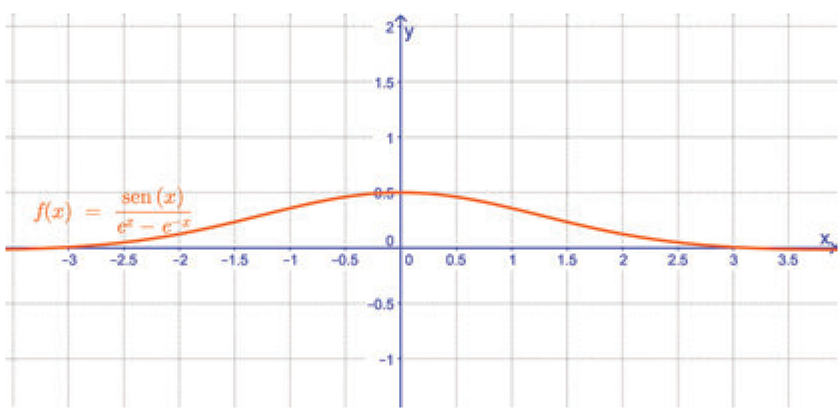
Si reemplazamos el valor de $x$ en la expresión tenemos el siguiente valor $\lim_{x \to 0} \frac{senx}{e^x - e^{-x}} = \frac{sen0}{e^0 - e^{-0}} = \frac{0}{1-1} = \frac{0}{0}$ que es una indeterminación

Aplicando L'Hopital tenemos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{senx}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{d}{dx} senx}{\frac{d}{dx}(e^x - e^{-x})} = \lim_{x \to 0} \frac{cosx}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Que podemos apreciar en la siguiente gráfica:

**Figura 11**
**Función del ejemplo 2**



## *4.5.2 Regla de l´hopital para formas del tipo ∞/∞*

Suponga que *f* y *g* son funciones diferenciables sobre un intervalo abierto que contiene al valor *a*, excepto posiblemente en *a* mismo, y qué *g'(x)≠ 0* para toda *x* en el ntervalo salvo posiblemente en *a*. Si $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ es una forma indeterminada ∞/∞, y $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L \ o \ \pm\infty$

entonces

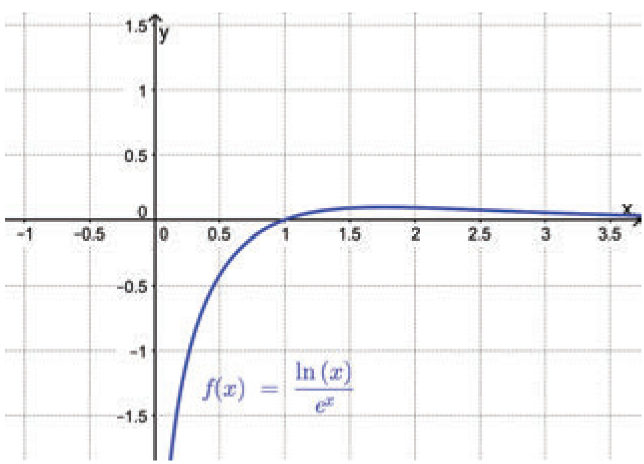
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

**Ejemplo 3:** Evalúe $\lim_{x\to\infty}\frac{lnx}{e^x}$

### Solución

Observaremos primero la gráfica de esta función y determinaremos visualmente el límite o valor de la función cuando *x* tiende a ∞, podemos darnos cuenta que el valor del límite es 0.

**Figura 12**
**Función del ejemplo 3**



Si evaluamos la función cuando $x$ tiende a ∞ tenemos:

$\lim_{x\to\infty}\frac{lnx}{e^x}=\frac{ln\infty}{e^\infty}=\frac{\infty}{\infty}$ vemos que hay una indeterminación ∞/∞

Aplicando la regla de L´Hopital tenemos:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{lnx}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}lnx}{\frac{d}{dx}e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{e^x}=\frac{\frac{1}{\infty}}{\infty}=\frac{0}{\infty}$$

Que no es una indeterminación porque su valor es 0

### *4.5.3 Formas indeterminadas de la forma $0^0$, $\infty^0$, $1^\infty$*

Cuando existan indeterminaciones $0^0$, $\infty^0$, $1^\infty$ que son formas indeterminadas del tipo exponencial. Para resolverlo no debemos aplicar las propiedades de los logaritmos para levantar la indeterminación y aplicamos la regla de L´Hopital.

**Ejemplo 4:** Determine $\lim_{x\to 0^+}(x+1)^{\cot(x)}$

## Solución

Al evaluar en la forma directa tendremos la indeterminación $1^\infty$. Aplicando el logaritmo a ambos lados de la expresión tendremos:

$$lny=\cot(x)ln(x+1)=\frac{\ln(x+1)}{\tan(x)}.$$

Mediante la regla de L´Hopital para formas 0/0, obtenemos:

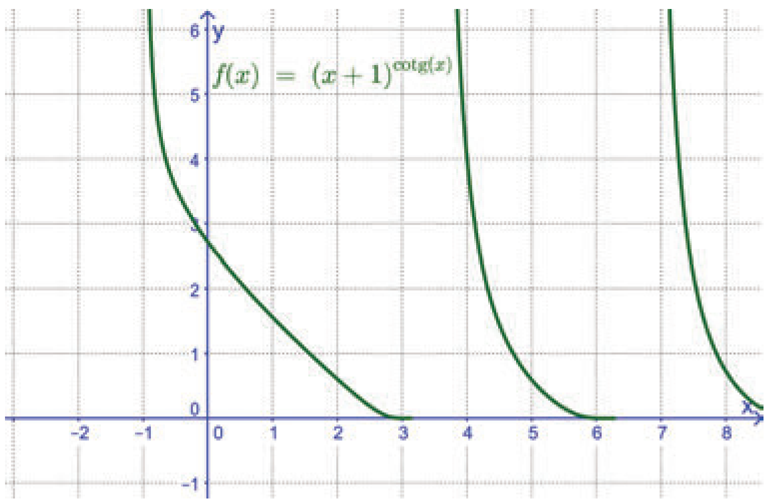
$$\lim_{x\to 0^+}lny=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x+1)}{tanx}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x+1}}{sec^2x}=1$$

Si observamos esta no es todavía la respuesta ya que tenemos del lado izquierdo de la expresión el *ln (y)*, entonces aplicamos la función exponencial ambos lados de la expresión

$$e^{\ln y} = e^{1}$$
$$y = e$$

Observemos la siguiente gráfica y compare con el resultado, recordemos que e ≈ 2,7182

**Figura 13**
**Función del ejemplo 4**

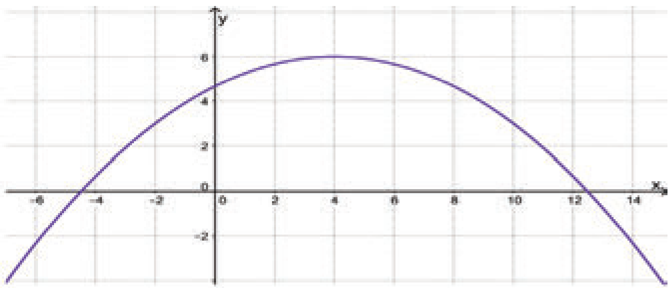



## 4.6 Función creciente y decreciente. Criterio de la primera derivada para determinar maximos y minimos

Dada la gráfica siguiente de una función *f* responder lo siguiente:

- ¿En qué intervalos *f* es creciente?.¿En qué intervalos *f* es decreciente?
- ¿En qué valores de *x* la función *f* tiene un máximo local o un mínimo local?

**Figura 14**
**Intervalo de crecimiento y decrecimiento**




> Si $f'(x) > 0$ sobre un intervalo, entonces $f$ es creciente en ese intervalo.
> Si $f'(x) < 0$ sobre un intervalo, entonces $f$ es decreciente en ese intervalo.

## *4.6.1 Proceso para la determinación de máximos y mínimos locales*

Supongamos que $c$ es un número crítico de una función continua $f$.

Si $f'$ cambia de positiva a negativa alrededor de c, entonces $f$ tiene un máximo local en $c$.

Si $f'$ cambia de negativa a positiva alrededor de c, entonces $f$ tiene un mínimo local en $c$.

Si $f'$ no cambia de signo en c(es decir $f'$ es positiva en ambos lados de c, o negativa en ambos lados), entonces $f$ no tiene máximo ni mínimo locales en $c$.

**Ejemplo 1:** Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento además los máximos y mínimos de la siguiente función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$

### SOLUCIÓN

Para determinar se debe primero derivar la función y encontrar los puntos críticos de la misma igualando la derivada a cero y despejando los valores de $x$.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$$

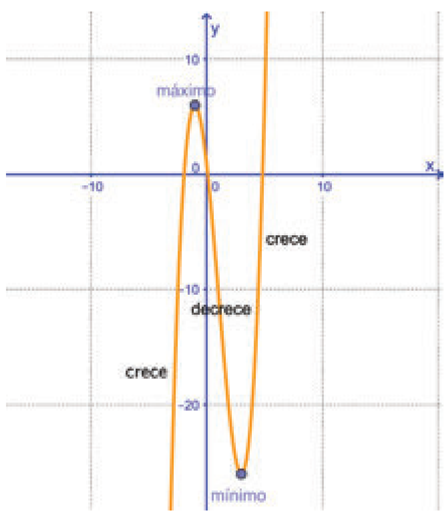
Los puntos críticos son -1 y 3 y con ellos vamos a elaborar un cuadro con estos intervalos y a evaluar en la función derivada con valores intermedios dentro de cada intervalo y si nos da valores positivos la función crece y si da negativo la función decrece.

**Tabla 1**
**Criterio de la primera derivada**

| **(-∞;-1)** | **(-1;3)** | **(3;∞)** |
|---|---|---|
| Evaluando $f'(x)$ en -2 | Evaluando $f'(x)$ en 0 | Evaluando $f'(x)$ en 4 |
| + | - | + |
| crece | Decrece | crece |

Se concluye además que en el punto crítico -1 existe un máximo ya que la función crece y luego decrece; y en el punto crítico3 existe un mínimo porque la función decrece y luego crece.

**Figura 15**
**Función del ejemplo 1**



## EJERCICIOS PROPUESTOS

**EP1.** Dada la función $f(x) = x^2 - 4$ determinar:

a. Puntos críticos
b. Intervalos de crecimiento y decrecimiento
c. Máximos y mínimos

**EP2.** Dada la función $f(x) = x^3 - x + 1$ determinar:

a. Puntos críticos
b. Intervalos de crecimiento y decrecimiento
c. Máximos y mínimos

**EP3.** Dada la función $f(x) = -4x^3 + 3x - 2$ determinar:

a. Puntos críticos
b. Intervalos de crecimiento y decrecimiento
c. Máximos y mínimos

## 4.7 Segunda derivada: concavidad, puntos de inflexión y criterio de la segunda derivada para determinar máximos y mínimos

La diferencia entre las figuras 16a y 16b es la concavidad, analicemos un breve concepto de concavidad:

La concavidad de una curva es la parte que se asemeja a la zona interior de una circunferencia.

En la figura 16a la gráfica se dobla hacia abajo y en la figura b la gráfica se dobla hacia arriba, por lo tanto las figuras tienen concavidad hacia abajo y hacia arriba respectivamente:

Figura 16a

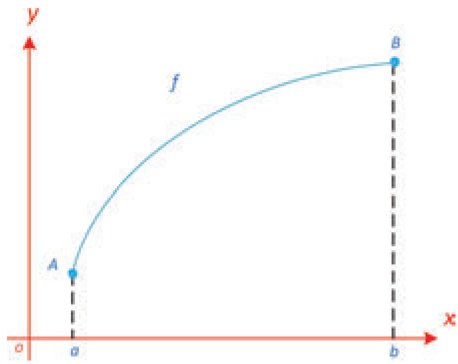
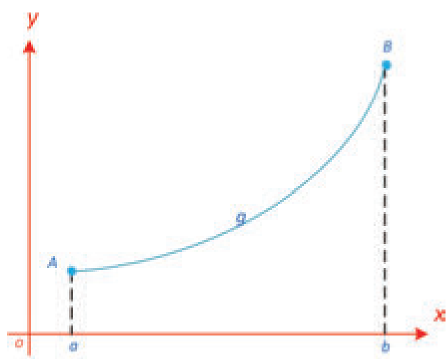



Figura 16 b

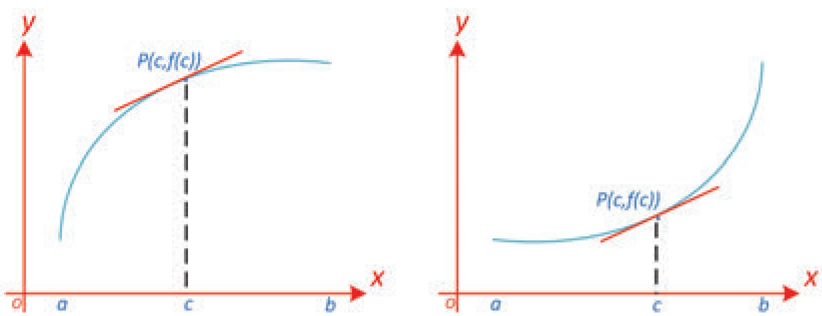



## 4.7.1 Definición de concavidad

Sea $f$ una función derivable en un número $c$.
La gráfica de $f$ tiene concavidad hacia arriba en el punto $P(c, f(c))$ si existe un intervalo abierto $(a,b)$ que contiene a $c$ tal que en él la gráfica de $f$ se encuentra arriba de la recta tangente en $P$.
La gráfica de $f$ tiene concavidad hacia abajo en el punto $P(c, f(c))$ si existe un intervalo abierto $(a,b)$ que contiene a $c$ tal que en él la gráfica de $f$ se encuentra abajo de la recta tangente en $P$.

La figura 17 corresponde a una función derivable en un número *c*, en el literal *a*la figura tiene concavidad hacia arriba y en el literal *b* concavidad hacia abajo.

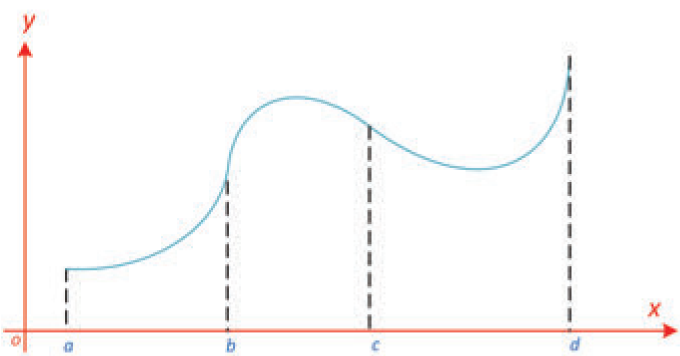
**Figura 17**




## Ejercicios resueltos

**ER1.** En el siguiente gráfico indique la concavidad según cada intervalo.

**Figura 18**
**Gráfica del ER1**



## Solución

En el intervalo $(a,b)$ es cóncava hacia arriba, en el intervalo $(b, c)$ es cóncava hacia abajo, y en el intervalo $(c,d)$ es cóncava hacia arriba.

## 4.7.2 La prueba de la concavidad

Si una función $f$ es derivable en $(a, b)$ y dicho intervalo contiene a c, entonces:
La gráfica tiene concavidad hacia arriba si $f''(c) > 0$
La gráfica tiene concavidad hacia abajo si $f''(c) < 0$

## Ejercicios resueltos

**ER2.** En la función $f(x) = x^3 +3x^2 -13x -15$ analice la concavidad con la prueba de la concavidad tomando un valor que esté dentro de cada intervalo e indique para cada intervalo:

$$(-\infty, -5)$$
$$(-5, -1)$$
$$(-1, 3)$$
$$(3, \infty)$$

## Solución

Usando la prueba de la concavidad:

La gráfica tiene concavidad hacia arriba si $f''(c) > 0$

La gráfica tiene concavidad hacia abajo si $f''(c) < 0$

Determinamos la segunda derivada de $f(x)$:

$$f(x) = x^3+3x^2 -13x -15$$
$$f'(x)= 3x^2 +6x -13$$
$$f''(x)= 6x + 6$$

En el intervalo $(-\infty, -5)$ podemos definir $c = -10$ que está dentro del intervalo

Determinamos $f''(c)$:

$$f''(-10) = 6(-10)+6$$
$$f''(-10) = -54$$

Entonces:

$$f''(c) < 0$$

Por lo tanto en el intervalo $(-\infty, -5)$ la función es cóncava hacia abajo

En el intervalo $(-5, -1)$ podemos definir $c = -3$ que está dentro del intervalo

Determinamos $f''(c)$:

$$f''(-3) = 6(-3)+6$$
$$f''(-3) = -12$$

Entonces:

$$f''(c) < 0$$

Por lo tanto en el intervalo $(-5, -1)$ la función es cóncava hacia abajo

En el intervalo $(-1, 3)$ podemos definir $c = 0$ que está dentro del intervalo

Determinamos $f''(c)$:

$$f''(0) = 6(0)+6$$
$$f''(0) = 6$$

Entonces:

$$f''(c) > 0$$

Por lo tanto en el intervalo $(-1, 3)$ la función es cóncava hacia arriba

En el intervalo $(3, \infty)$ podemos definir $c = 5$ que está dentro del intervalo

Determinamos $f''(c)$:

$$f''(5) = 6(5)+6$$
$$f''(0) = 36$$

Entonces:

$$f''(c) > 0$$

Por lo tanto en el intervalo $(3, \infty)$ la función es cóncava hacia arriba.

Resumiendo:

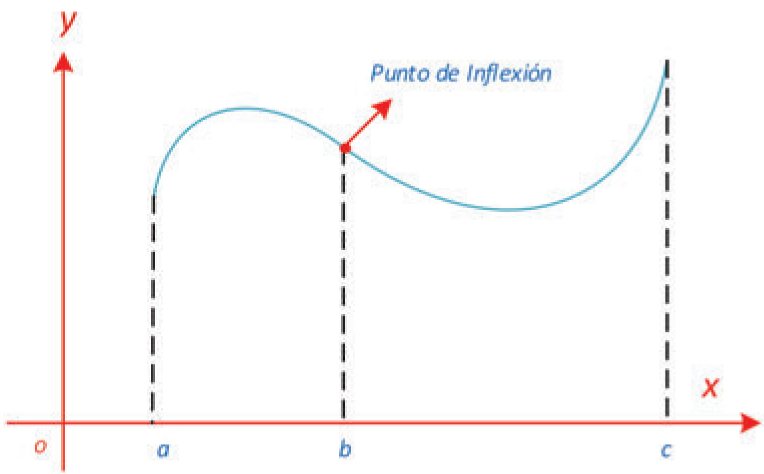
**Tabla 2**
**Intervalos de concavidad ER2**

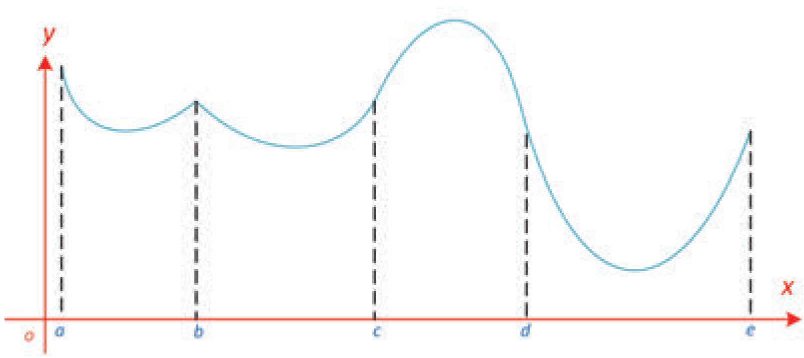
| INTERVALO | CONCAVIDAD |
|---|---|
| $(-\infty, -5)$ | Cóncava hacia abajo |
| $(-5, -1)$ | Cóncava hacia abajo |
| $(-1, 3)$ | Cóncava hacia arriba |
| $(-1, 3)$ | Cóncava hacia arriba |

## 4.7.3 *Punto de inflexión*

Un punto $P(b, f(b))$ sobre la gráfica de una función $f$ es un punto de inflexión si existe un intervalo abierto $(a, c)$, que contiene $b$, de tal forma que una de las siguientes afirmaciones se cumple:
$f''(b) > 0$ si $a < x < b$ y $f''(c) < 0$ si $b < x < c$; o
$f''(b) < 0$ si $a < x < b$ y $f''(c) > 0$ si $b < x < c$

Figura 19
Punto de inflexión




## Ejercicios resueltos

**ER3** Determinar el punto de inflexión y los intervalos de concavidades de la siguiente función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

El punto de inflexión o punto en donde cambia la concavidad se determina partir de la segunda derivada es decir:

$$f'(x) = 3x^2-6x$$
$$f''(x) = 6x-6$$

Ahora igualamos a $0$ la segunda derivada para obtener el punto crítico de la segunda derivada llamado punto de inflexión.

$$6x -6 = 0$$

Determinamos para que valor de $x$ la segunda derivada es 0, despejando $x$

$$x=1$$

Lo que nos indica que en $x = 1$ está el punto de inflexión (donde cambia el sentido de la concavidad); para determinar su valor en el eje $y$, evaluamos este resultado en la función original $f(1) = (1)^3 - 3(1)^2+4 = 2$

El punto de inflexión tiene coordenadas $I(1,2)$

Ahora determinamos los intervalos generados a partir del punto de inflexión, tenemos dos intervalos $(-\infty,1)$ y $(1,\infty)$. Procedemos como en el ER2 a evaluar la segunda derivada para determinar la concavidad en cada intervalo.

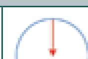
Para el primer intervalo ocupamos un $c = 0$

$f''(0) = -6$ lo que indica que hay una concavidad hacia abajo

Para el segundo intervalo ocupamos un $c = 3$

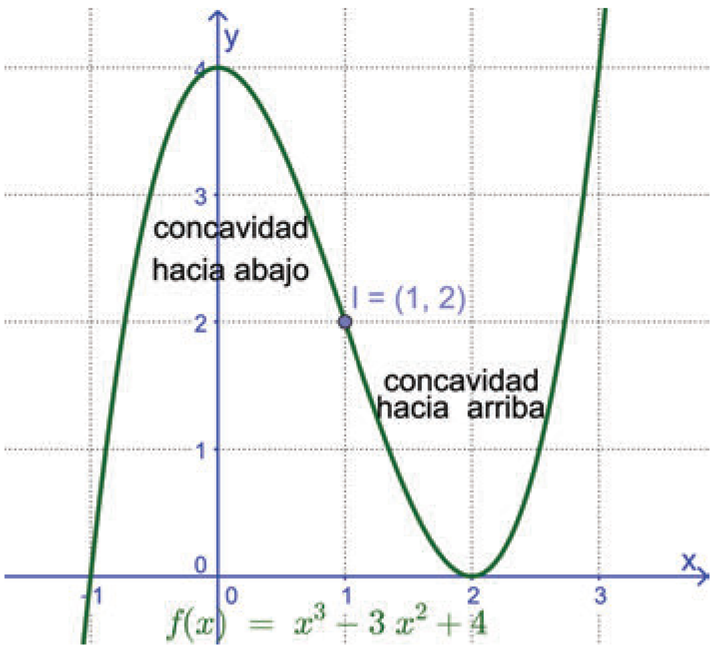
$f''(2) = 6(3) -6 =12$ lo que indica que hay una concavidad hacia arriba

**Tabla 3**
**Intervalos de concavidad ER3**

| INTERVALO | CONCAVIDAD | |
|---|---|---|
| $(-\infty,1)$ | Cóncava hacia abajo |  |
| $(1,\infty)$ | Cóncava hacia arriba |  |

En la siguiente gráfica se puede observar la ubicación del punto de inflexión y las concavidades determinadas.

**Figura 20**
**Gráfica del ER3**




## EJERCICIOS PROPUESTOS

**EP1.** Dada la función $f(x) = x^3 - x + 1$determinar:

a. Puntos de inflexión
b. Intervalos de concavidades

**EP2.** Dada la función $f(x) = -4x^3 + 3x - 2$ determinar:

a. Puntos de inflexión
b. Intervalos de concavidades

### *4.7.4 Criterio de la segunda derivada para determinar maximos y minimos*

Usar la segunda derivada para determinar si un punto crítico representa un máximo o un mínimo se denomina criterio de la segunda derivada.

#### *4.7.4.1 Pasos para el criterio de la segunda derivada*

1. Determinar los puntos críticos de la primera derivada de la función dada
2. Encontrar la segunda derivada de la función
3. Evaluar los puntos críticos en la segunda derivada
4. Si $f'(c) > 0$ el punto crítico es un mínimo
5. Si $f'(c) < 0$ el punto crítico es un máximo
6. Si $f'(c)=0$ no es ni un máximo ni un mínimo solo es un punto donde la pendiente es 0

A continuación vamos a ver un ejercicio resuelto donde contemplemos todo lo aprendido en esta parte.

**ER4** Dada la función $f(x) = 4x^4 - 4x^2$ determinar:

a. Puntos críticos
b. Intervalos de crecimiento y decrecimiento
c. Máximos y mínimos con el criterio de la primera derivada
d. Puntos de inflexión
e. Intervalo de concavidades
f. Máximos y mínimos con el criterio de la segunda derivada
g. Graficar

### SOLUCIÓN

a. Puntos críticos

Son los puntos en donde la pendiente es cero, se determinan a partir de igualar a $0$ la primera derivada.

Derivamos la función $f'(x)=16x^3 - 8x$

Igualamos a *0* $16x^3 - 8x = 0$

Despejamos $8x(2x^2 - 1) = 0$

Puntos críticos $x = 0 \quad x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

b. Intervalos de crecimiento y decrecimiento

A parir de los tres puntos críticos formamos intervalos

$$(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \; (-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0) \; (0, \frac{\sqrt{2}}{2}) \; (\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty)$$

Evaluamos con valores dentro de cada intervalo en la derivada

$f'(-1) = 16(-1)^3 - 8(-1) = -8$ $\qquad f'(-0{,}5) = 2$

$f'(0{,}5) = -2$ $\qquad f'(1) = 8$

Con estos datos tenemos los intervalos de crecimiento y decrecimiento en la siguiente tabla:

**Tabla 4**
**Intervalos de crecimiento y decrecimiento E.R.4**

| $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ | $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ | $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ | $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty)$ |
|---|---|---|---|
| Decrece | Crece | Decrece | Crece |

c. Máximos y mínimos con el criterio de la primera derivada

Con los datos de crecimiento y decrecimiento y la tabla generada encontramos:

**Tabla 5**
**Máximos y mínimos E.R.4**

| $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 0 | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
|---|---|---|
| Mínimo | Máximo | Mínimo |

Reemplazamos estos valores en la función original para determinar los valores de cada ordenada y tenemos:

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 - 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = -1$$

$$f(0) = 4(0)^4 - 4(0)^2 = 0$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 - 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = -1$$

Las coordenadas quedan de la siguiente manera:

Mínimo $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right)$ Máximo (0,0) Mínimo $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right)$

d. Puntos de inflexión

Llamados también puntos críticos de la segunda derivada

$$f''(x) = 48x^2 - 8$$

Igualamos a 0 $\quad 48x^2 - 8 = 0$

Despejamos $\quad x^2 = \frac{8}{48}$

Puntos críticos segunda derivada

Reemplazamos estos datos en la $x = -\frac{\sqrt{6}}{6} \quad x = \frac{\sqrt{6}}{6}$ función original para determinar los valores de las ordenadas de los puntos.

$$f\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = 4\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^4 - 4\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 =$$

e. Intervalos de concavidades

Con los puntos críticos de la segunda derivada creamos los intervalos

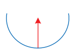
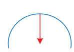
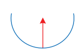
$$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right) \quad \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right) \quad \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \infty\right)$$

Evaluamos con valores dentro de cada intervalo en la segunda derivada

$f''(-0{,}5) = 48(-0{,}5)^2 - 8 = 4$ $\qquad$ $f''(0) = -8$ $\qquad$ $f''(0{,}5) = 4$

Con estos datos tenemos los intervalos de concavidades en la siguiente tabla:

**Tabla 6**
**Intervalos de concavidad E.R.4**

| $-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{6}$ | $-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}$ | $\frac{\sqrt{6}}{6}, \infty$ |
|---|---|---|
| Concavidad hacia arriba | Concavidad hacia abajo | Concavidad hacia arriba |
|  |  |  |

f. Máximos y mínimos con el criterio de la segunda derivada

Reemplazamos los puntos críticos de la primera derivada $x = 0 \quad x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ en la segunda derivada:

$f''\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 16$ lo cual indica que es un mínimo porque el valor es $> 0$

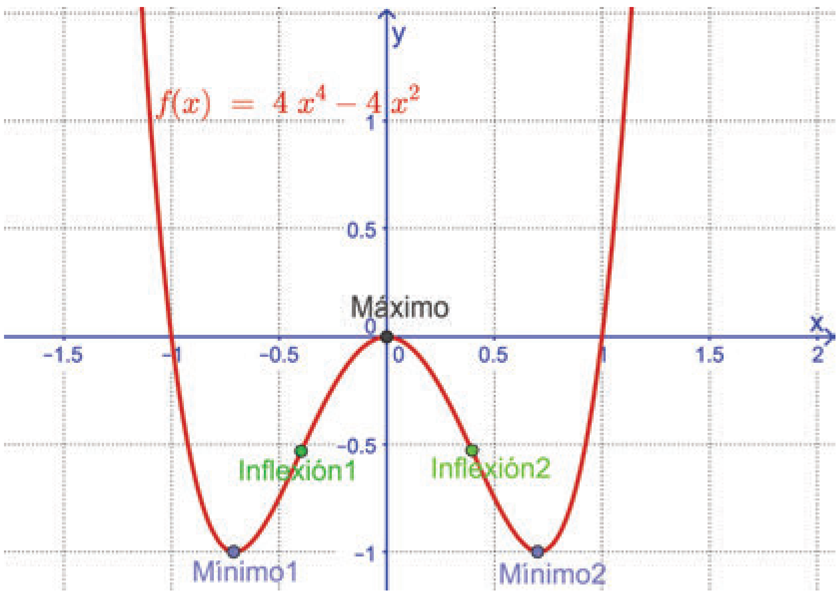
$f''(0) = -8$ lo cual indica que es un máximo porque el valor es $< 0$

$f''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 16$ lo cual indica que es un mínimo porque el valor es $> 0$

g. Graficar

Con todos los datos es posible graficar la función dada

**Figura 21**
**Gráfica E.R.4**




## Ejercicios propuestos

**EP1.** Dada la función $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2$

a. Puntos críticos
b. Intervalos de crecimiento y decrecimiento
c. Máximos y mínimos con el criterio de la primera derivada
d. Puntos de inflexión
e. Intervalo de concavidades
f. Máximos y mínimos con el criterio de la segunda derivada
g. Graficar

**EP2.** Dada la función determinar: $f(x) = -3x^4 + 2x^2 + 1$

a. Puntos críticos
b. Intervalos de crecimiento y decrecimiento
c. Máximos y mínimos con el criterio de la primera derivada
d. Puntos de inflexión
e. Intervalo de concavidades
f. Máximos y mínimos con el criterio de la segunda derivada
g. Graficar

## 4.8 Optimizacion

Una de las aplicaciones importantes del cálculo diferencial es en modelos de optimización en la ciencia, en la ingeniería y en muchos campos, en donde nos interesa analizar los valores máximos y mínimos de las funciones generadas, por ejemplo una ensambladora de vehículos tiene interés de maximizar sus ganancias a la vez que minimizar los costos. Muchos de los modelos de automóviles comparten características semejantes en sus diseños, esto es debido a que los ingenieros y diseñadores buscan siempre minimizar la cantidad de material usado por cada unidad producida, abaratando costos de fabricación y maximizando las ganancias; a este proceso se le llama Optimización.

A la función matemática con la cual se va a trabajar para optimizar (encontrar el máximo o el mínimo) se la denomina Función Objetivo (FO). Existen problemas que aparte de tener su Función Objetivo tienen Funciones de Restricción (FR) que lo que hacen es delimitar las condiciones del problema.

### *4.8.1 Pasos para resolver problemas de optimización*

1. Leer el problema cuantas veces sea necesario para entender el problema

2. Dibujar el problema y colocar los datos dados (variables) identificando cuál es la variable dependiente y la independiente.
3. Establecer la función matemática a partir del contexto del problema, los datos dados y de definir lo que se quiere optimizar (variable dependiente).
4. Definir el intervalo de dominio de la función (depende de la variable independiente)
5. Determinar los puntos críticos de la función a través de la derivación.
6. Si la función es continua y definida sobre el intervalo cerrado *[a, b]*, comprobar los extremos en los puntos frontera. Si el extremo deseado no ocurre en un punto frontera, debe ocurrir en un punto crítico en el intervalo abierto *(a, b)*.
7. Si la función está definida sobre un intervalo abierto, entonces es necesario aplicar una prueba de la derivada en cada punto crítico en ese intervalo.

## Ejercicios resueltos

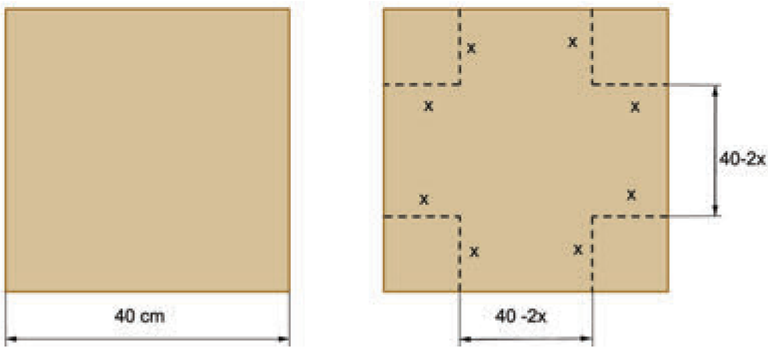
**ER1.** Se posee un pedazo cuadrado de cartulina de 40 cm de lado y se pide construir una caja sin tapa cortando pedazos cuadrados en las esquinas para doblar los lados y formar la caja. Encontrar la medida más adecuada para cortar de tal manera que el volumen de la caja sea el máximo.

## Solución

Se realizarán cortes cuadrados en las esquinas, como la medida del corte se debe determinar la definiremos como variable $x$.

La gráfica de la cartulina y de los cortes que se realizarán es la siguiente:

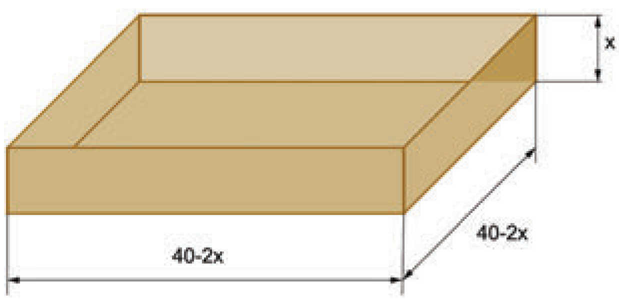
**Figura 22**
**Hoja de cartulina Ejemplo 11**




De acuerdo a la información dada el volumen en función del corte que hagamos en las esquinas de la caja es:

$$V(x) = (40 - 2x)(40 - 2x)x$$

**Figura 23**
**Caja armada E.R.1**




Realizando las operaciones para expresarlo en forma de polinomio tenemos

$$V(x) = (1600 - 80x - 80x + 4x^2)x$$

$V(x) = 4x^3 - 160x^2 + 1600x$ que sería nuestra Función Objetivo (FO)

Este problema no tiene Función Restricción.

Debemos darnos cuenta que se pueden realizar cortes cuadrados en las esquinas hasta un valor máximo de *20 cm* que sería llegar hasta la mitad de la cartulina que es cuando esta se dividiría en cuatro partes y no se podría formar la caja, por lo tanto el dominio de esta función es $0 \leq x \leq 20$ o también se puede expresar *[0,20]*

Procedemos ahora a determinar los puntos críticos de la función a través de la derivada e igualando a *0*.

$$V'(x) = 12x^2 - 320x + 1600$$

$$12x^2 - 320x + 1600 = 0$$

Para resolver podemos factorizar o aplicar la fórmula general: $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Aplicaremos la fórmula general y reemplazando los datos tenemos que:

$$x = \frac{-(-320) \pm \sqrt{(-320)^2 - 4(12)1600}}{2(12)}$$

$$x = \frac{320 \pm 160}{24}$$

$$x_1 = \frac{320 - 160}{24} = \frac{20}{3}$$

$$x_2 = \frac{320 + 160}{24} = 20$$

Para determinar si estos puntos críticos son máximos o mínimos aplicamos el criterio de la segunda derivada que decía que se deben evaluar estos valores en la segunda derivada y si la respuesta es positiva es un mínimo y si es negativa es un máximos

$$V''(x) = 24x - 320$$

$V''\left(\frac{20}{3}\right) = 24\left(\frac{20}{3}\right) - 320 = -160$ como es negativo significa que es un máximo

$V''(20) = 24(20) - 320 = 160$ como la función está definida sobre un intervalo cerrado *[0,20]* evaluamos ahora los valores frontera en la función para observar si se da el máximo en alguno de estos valores aunque el valor frontera derecho coincide con el segundo punto crítico que nos daba un mínimo.

$$V(0) = 4(0)^3 - 160(0)^2 + 1600(0)$$

$$V(0) = 0$$

$$V(20) = 4(20)^3 - 160(20)^2 + 1600(20)$$

$$V(20) = 0$$

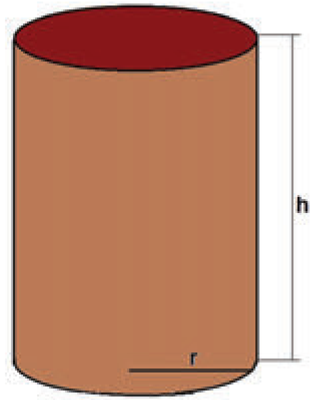
Lo que significa físicamente que tanto si no realizamos ningún corte como si cortamos cuadrados de 20 cm no podremos formar la caja por lo tanto el volumen es *0*

**Conclusión:** Los cortes cuadrados en las esquinas de la cartulina deben ser de 20/3 cm es decir aproximadamente 6,67 cm y con ello lograremos un volumen máximo en la caja de

$$V\left(\frac{20}{3}\right) = 4\left(\frac{20}{3}\right)^3 - 160\left(\frac{20}{3}\right)^2 + 1600\left(\frac{20}{3}\right) = 4740{,}74cm^3$$

**ER2.** Se desea construir un recipiente con la forma de un cilindro circular sin tapa con un volumen de $24\pi cm^3$ El precio del material que se usa para el fondo es el triple que el del material que se usa para las paredes. Encontrar las dimensiones del recipiente para las cuales el costo sea el mínimo.

**Figura 24**
**Caja armada E.R.2**




## Solución

Si designamos como *r* al radio de la base y *h* a la altura del recipiente y con la fórmula del volumen de un cilindro igualando al volumen que debe tener el mismo nos da $\pi r^2 h = 24\pi$

Esto nos da la relación $h = \frac{24}{r^2}$ que al ser la función que delimita las medidas de la lata en función del volumen que debe alcanzar sería nuestra Función Restricción (FR).

Para la construcción de la Función Objetivo (FO) debemos tener en cuenta que lo que queremos es minimizar el costo de fabricación por lo tanto nuestra función va a ser una función costo *C*.Para determinar el costo del material recordemos que el precio de la base es tres veces mayor que la parte curva por lo tanto si designamos como *a* al valor de la parte curva el valor de la base será *3a*.

El costo de fabricación del recipiente viene dado por:

$$C = 3a(\pi r^2) + a(2\pi rh) = a\pi(3r^2 + 2rh)$$

Y como $h = \frac{24}{r^2}$ tenemos

$$C = a\pi\left(3r^2 + 2r\frac{24}{r^2}\right) = a\pi\left(3r^2 + \frac{48}{r}\right)$$

Esta fórmula expresa al costo *C* como función del radio *r* ya que *a* es un valor dado por el costo del material y es un número fijo.

Determinamos ahora los puntos críticos derivando la función e igualando a *0*.

$$C'(r) = a\pi\left(6r - \frac{48}{r^2}\right)$$

$$a\pi\left(6r - \frac{48}{r^2}\right) = 0$$

$$6r - \frac{48}{r^2} = 0$$

$$6r = \frac{48}{r^2}$$

$$6r^3 = 48$$

$$r = \sqrt[3]{8} = 2$$

Si queremos comprobar si este valor es un máximo o un mínimo lo reemplazamos en la segunda derivada

$$C''(r) = a\pi\left(6 + \frac{48}{r^3}\right)$$

$C''(2) = a\pi\left(6 + \frac{48}{2^3}\right) = 12a\pi$ como es positivo significa que es un mínimo

El valor de la altura lo sacamos de $h = \frac{24}{r^2} = \frac{24}{2^2} = 6$

**Conclusión:** Las medidas que minimicen el costo de fabricación del envase de forma cilíndrica son el radio de 2 cm y la altura de 6cm.

## Ejercicios propuestos

**EP1.** Se producirá una lata para jugo en forma de cilindro circular recto con un volumen de 32 plg$^3$**.**Encontrar las dimensiones de tal manera que en su fabricación se ocupe la menor cantidad de material.

**EP2.** Se desea construir una caja rectangular cerrada con base cuadrada y volumen de 32000 cm$^3$**.** Encuentre las dimensiones de la caja que requiera la menor cantidad de material.

## Actividades complementarias

### *Resolver*

1. Marque las opciones correctas:
   a. Una función *f* es creciente en un intervalo si para cualquiera par de números $x_1$, $x_2$ del intervalo $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) < f(x_2)$
   b. Una función f es decreciente en un intervalo si para cualquiera par de números $x_1$, $x_2$ del intervalo $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) <$ $f(x_2)$
   c. Si *f* es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces f tiene tanto un mínimo como un máximo en el intervalo.
2. Considere la curva $y = f(x)$, y suponga que a $x$ se le da un incremento Δx. El cambio correspondiente en $y$ sobre la curva está denotado por __________, mientras que el correspondiente cambio en $y$ sobre la recta tangente está denotado por ___________
3. Seleccione la o las opciones correctas
   Sea *f* una función tal que $f'(c) = 0$ y cuya segunda derivada existe en un intervalo abierto que contiene a $c$; por lo tanto:
   a. Si $f''(c) > 0$ entonces $f(c)$ es un máximo relativo
   b. Si $f''(c) > 0$ entonces $f(c)$ es un mínimo relativo

4. Seleccione la o las opciones correctas
   Sea *f* una función tal que $f'(c) = 0$ y cuya segunda derivada existe en un intervalo abierto que contiene a *c*; por lo tanto:
   a. Si $f''(c) < 0$ entonces $f(c)$ es un mínimo relativo
   b. Si $f''(c) < 0$ entonces $f(c)$ es un máximo relativo
5. Si está fluyendo agua en el interior de un tanque esférico a una razón constante, entonces la altura del nivel del líquido crece a una tasa variable y positiva $dh/dt$, pero $d^2h/dt^2$ es _________ hasta que$h$ llega a la mitad de la altura del tanque, después de lo cual $d^2h/dt^2$ se vuelve ___________
6. Si la derivada de una función en un intervalo es mayor que cero es decir: $f'(x)>0$ entonces *f*es creciente en ese intervalo. Justifique el enunciado mediante un ejemplo.
7. Si la derivada de una función en un intervalo es menor que cero es decir: $f'(x)< 0$entonces *f* es decreciente en ese intervalo. Justifique el enunciado mediante un ejemplo.

*Recta tangente y normal*

**AC1.** Encuentre la ecuación de la recta tangente y normal a las curvas en el punto dado. Grafique.

a) $f(x) = -x^2 + 2x + 1 \quad P(2,1)$

b) $f(x) = x^2 + 5x + 4 \quad x = -\frac{5}{2}$

c) $y = \sqrt{x-2}, \quad P(3,1)$

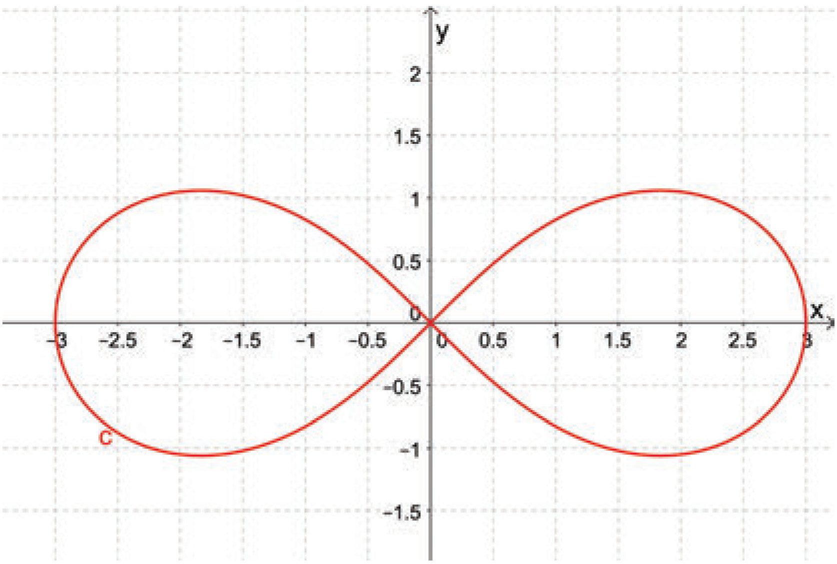
d) $g(t) = (2t-1)^3 \quad x = 4$

e) $x = \left(2 + \frac{7t}{3}\right)^3 \quad t = -\frac{1}{2}$

f) $y = \frac{5x}{x-3} + 2 \quad x = 8$

g) $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x} \quad x = 1$

**AC2.** La gráfica de la ecuación $(x^2 + y^2)^2 = 9\,(x^2 - y^2)$ mostrada en la figura, se llama lemniscata.




- Encuentre los puntos sobre la gráfica que corresponden a $x = 2$
- Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica en cada punto encontrado en el inciso a)
- Encuentre lo puntos sobre la gráfica en los que la recta tangente es horizontal.

**AC3.** Encuentre la ecuación de la recta tangente y la recta normal a la elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ en el punto (1 ; 2,9)

**AC4.** Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

$$y = sen(cos(x)), \quad P\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

*Razon de cambio*

**AC5. Crecimiento y Decaimiento exponencial.** Una curva pasa a través del punto (0,5) y tiene la propiedad de que la pendiente de la curva en cualquier punto *P* es dos veces la coordenada y de P. La curva es $y = 5e^{2x}$.

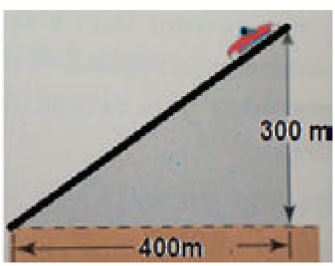
- Verifique la propiedad de la curva graficando la misma
- Determine la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa x=0.5
- Determine la razón de cambio funcional en el punto de abscisa $x= -1$

**AC6.** Un rectángulo originalmente tiene 16 cm. de base y 10 cm de altura. La longitud de la base se incrementa a razón de 6 cm/segy la altura se mantiene en 10 cm. Cuando la longitud de la base es de 28 cm. ¿Qué tan rápido se incrementa el área del rectángulo?

**AC7.** La base de un rectángulo se incrementa a razón de 10 cm/segy la altura en 4 cm/seg. Cuando la longitud de la base es de 40cm y la altura es de 25cm, ¿Qué tan rápido se incrementa el área del rectángulo?

**AC8.** Un vehículo desciende por una carretera recta a una rapidez de 60Km/h,

- ¿Cuál es la rapidez con la que cambia su altura con respecto al suelo en el instante mostrado?
- ¿Cuál es la rapidez con la que cambia su distancia horizontal?



**AC9.** Un cohete se desplaza a razón constante de 800 Km/h a un ángulo de 50° con respecto al suelo.

- ¿A qué razón crece su altitud?
- ¿Cuál es la velocidad del cohete con respecto a la tierra?

**AC10.** Para este ejercicio investigar sobre la expansión adiabática del aire. En la expansión adiabática del aire, la presión P y el volumen V están relacionados por $PV^{1.4} = k$ donde k es una constante. En cierto instante, la presión es de $100\frac{lb}{plg^2}$ y el volumen es 32 $plg^3$ ¿A qué razón cambia la presión en ese instante si el volumen disminuye a razón de $2\frac{plg^3}{s}$ ?

**AC11.** Una escalera de 5m de largo está apoyada contra un muro. La parte superior se desliza hacia abajo sobre el muro a razón de $\frac{1}{4}\frac{m}{s}$ ¿A qué razón se aleja del muro la parte inferior de la escalera en el instante en el que la parte superior de la escalera está a *3m* por arriba del suelo?

**AC12.** Una roca es lanzada en un estanque y provoca una onda circular. Suponer que el radio de la onda se expande a razón constante de $\frac{3}{4}\frac{m}{s}$

- ¿Cuán rápido crece el diámetro de la onda circular?
- Cuán rápido crece la circunferencia de la onda circular?
- ¿Cuán rápido se expande el área de la onda circular cuando el radio es de 1m ?
- ¿Cuán rápido se expande el área de la onda circular cuándo el área cuando el área es $4m^2$?

**AC13.** Tomando en cuenta el ejercicio AC12, supongamos que una segunda piedra es lanzada después de 2 segundos de haber lanzado la primera y el radio de la onda se expande a razón de $\frac{1}{2}\frac{m}{s}$?

- ¿Llega a tocar la segunda onda a la primera?
- ¿Cuán rápido cambia el área generada entre las dos ondas después de 3 segundos de haber lanzado la segunda piedra?

**AC13** Dos vasos de 15 cm de altura son llenados con agua que cae de la llave con un caudal constante de 10 $cm^3/s$. El primero tiene forma cilíndrica de 3 cm de radio y el segundo tiene forma de cono truncado de 2 cm de radio de base inferior y 4 cm de radio de base superior.

- Determinar la rapidez a la cual se eleva el nivel de agua en el vaso cuando está se encuentra a 5cm y a 10 cm.
- ¿Qué podemos concluir para los dos casos?

*Regla de l'hopital*

**AC14.** Calcular los siguientes límites mediante L'Hopital:

a) $\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x}}$

b) $\lim_{x\to 0}(\cot x)^{senx}$

c) $\lim_{x\to 0} x^{\left(\frac{3}{4+lnx}\right)}$

d) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(2xtanx - \frac{\pi}{cosx}\right)$

*Primera y segunda derivada. Analisis de funciones*

**AC15.** Halle los valores máximo y mínimo absolutos de *f* sobre el intervalo dado:

a) $f(x) = 3x^2 - 12x + 3 \qquad [0,3]$

b) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 2 \qquad [-3,3]$

c) $h(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t \qquad [-4,6]$

d) $g(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1 \qquad [-2,4]$

**AC16.** Dadas las siguientes funciones establecer: intervalo de crecimiento y decrecimiento, si la función tiene un máximo o un mínimo, esbozar la gráfica a partir de la información anterior.

a) $f(x) = -x^2 - 2x + 1$

b) $(x - 3)^2 = 16(y + 3)$

c) $y = xlnx$

**AC17.** Se vierte aceite de motor en un recipiente como se muestra en la figura, con una rapidez constante (medida en unidades de volumen por unidad de tiempo). Trace la gráfica aproximada de la altura ocupada por el aceite como función del tiempo. Explique la forma de la gráfica en términos de la concavidad. ¿Cuál es el significado del punto de inflexión?

**AC18.** En los siguientes ejercicios, obtener los extremos relativos de la función usando el criterio de la segunda derivada, además determinar los intervalos de concavidad y trazar la gráfica:

a) $1.\, f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 17$

b) $2.\ f(x) = (x-2)^2$

c) $3.\ x\sqrt{9-x^2}$

**AC19.** Dadas las siguientes funciones determinar : intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos aplicando el criterio de la primera derivada, puntos de inflexión , intervalos de concavidades, máximos y mínimos aplicando el criterio de la segunda derivada, esbozar la gráfica a partir de la información anterior.

a) $f(t) = t^3 - 5t + 8$

b) $f(x) = -4x^3 - 3x^2 + 6x - 1$

c) $y = x^4 - 4x^3$

d) $f(x) = -(x-1)^4 + 4(x-1)^2$

e) $h(x) = \frac{72}{x} + 2x + 30$

f) $f(r) = r^3 - 27r + 16$

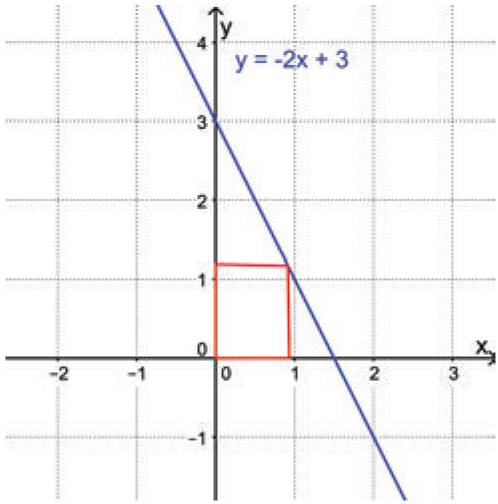
g) $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 10$

*Optimizacion*

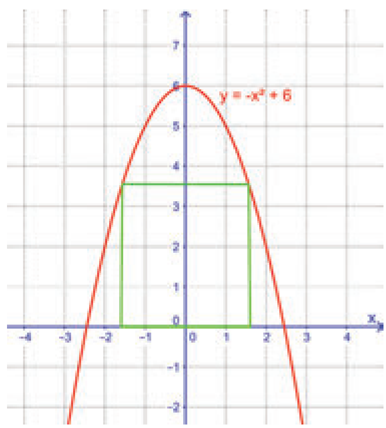
**AC20.** Encontrar dos números cuya suma sea 31 y cuyo producto sea un máximo

**AC21.** Encuentre dos números cuya diferencia sea 50 y cuyo producto sea un mínimo.

**AC22.** Encuentre las dimensiones del cuadrilátero de modo que su área sea máxima

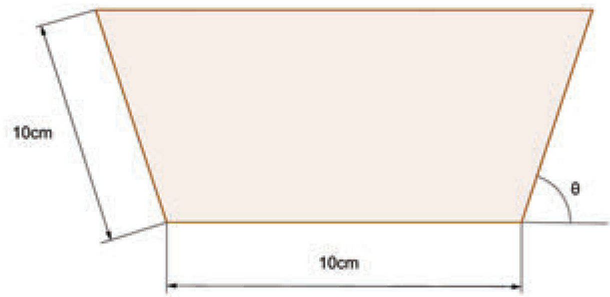



**AC23**. Encuentre las dimensiones del cuadrilátero de modo que su área sea máxima




**AC24.** Un canal de agua de 10 m de longitud tiene extremos de forma de triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 20 cm. Demostrar que la medida del tercer lado debe ser tal que se forme un triángulo rectángulo para que el volumen del canal sea máximo.

**AC25.** Se producirá un canalón cuya sección transversal es un trapezoide isósceles con las dimensiones indicadas en la figura. Determine el valor de $\theta$ tal que maximice el volumen.




**AC26**. Se quiere cercar un terreno para ganado vacuno, se disponen de 3000m de alambre, determinar las dimensiones que tendrá el terreno cercado de tal manera que contenga el área máxima.

**AC27**. Se quiere realizar una tarjeta de felicitación impresa y debe tener márgenes izquierdo y derecho de 2 cm. de espacio en blanco y márgenes superior e inferior de 1 cm. de espacio en blanco. El área de la porción impresa es de $32cm^2$ .Determinar las dimensiones de la tarjeta de modo que se use la menor cantidad de papel.

**AC28.** Se dispone de 1 metro de alambre y se quiere cortar en dos pedazos para formar un cuadrado y una circunferencia. Determine las dimensiones de cada pedazo de alambre de tal manera que la suma de las áreas del cuadrado y del círculo formado sea la máxima.

**AC29.** Encuentre las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en una circunferencia de radio 2.

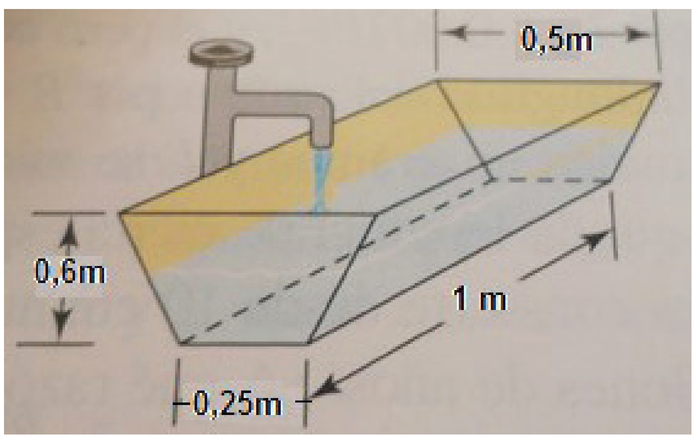
**AC30.** Encuentre las dimensiones del cilindro circular recto con volumen máximo que pueda inscribirse en un cono circular recto de 8cm de radio y 12 cm. de altura.

## Ejercicios de aplicación

**EA1.** Dos automóviles parten desde el mismo punto. Uno se dirige hacia el sur a 60 Km/hy el otro hacia el oeste a 30 Km/h ¿Con qué rapidez se incrementa la distancia entre los dos automóviles dos horas después?

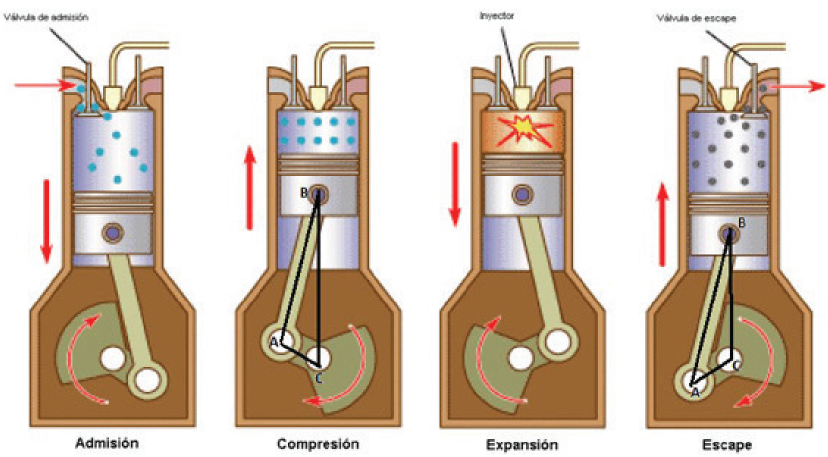
**EA2.** Dos automóviles parten desde el mismo punto. Uno se dirige hacia el norte a 80 Km/h y el otro al este a 50 Km/h, luego de una hora el automóvil que se dirige al norte se detiene mientras que el otro continua su marcha ¿Con qué rapidez se incrementa la distancia entre los dos automóviles tres horas después?

**EA3.** Imaginemos que tenemos un tanque de combustible con las medidas indicadas, si se llena de combustible a razón constante de 5000 $cm^3$ /s ¿Cuán rápido sube el nivel cuando se encuentra a la mitad de la altura?




**EA4.** El depósito de líquido de frenos en forma de cilindro recto de 6 cm de diámetro se drena de tal manera que el nivel del líquido disminuye a razón constante de 0,5 cm/s para colocar nuevo líquido de frenos. ¿Cuán rápido decrece el volumen del líquido?

**EA5.** El mecanismo de pistón y cigüeñal de un vehículo se modela como se observa en la figura




El cigüeñal está girando con velocidad angular constante de $\dot{\theta} = 100\ rad/s$ Determinar:

- La ecuación de velocidad del pistón
- La velocidad del pistón P en el instante $\theta = 30°$
- La posición del pistón en $\theta = 45°$

- Trace la gráfica de la velocidad del pistón
- Haga una descripción del comportamiento de la gráfica de velocidad
- ¿En qué posición del pistón la velocidad es cero, en qué posición del pistón la velocidad es máxima y/0 mínima momento la velocidad de máxima?

**EA6.** Rectificación de un cilindro. Se perfora un cilindro de 7 pulgadas de profundidad para colocar un pistón nuevo. La máquina rectificadora incrementa el radio del cilindro una milésima de pulgada cada 2 minutos ¿Qué tan rápido aumenta el volumen del cilindro cuando la perforación (diámetro) mide 3,6 pulgadas?

**EA7.** En el mecanismo para levantar el cajón de una volqueta mostrada en la figura se quiere determinar cuál es la rapidez de ascenso del pistón en el instante en que este se encuentra extendido 2,5 m, la rotación angular de la paila es de 4 grados por segundo, las medidas de la base donde se asienta la paila y la paila son de 4m.

**EA8.** El airbag de un vehículo es un sistema de seguridad que consiste en una bolsa que se hincha el momento que existe un choque, su respuesta es inmediata (en milisegundos). Supongamos que la bolsa al hincharse lo hace en forma esférica. Determinar la rapidez de creci-

miento del radio (en cm/s ) en el instante en el que el radio es 10 cm si el caudal de gas que ingresa es de $25000\frac{cm^3}{s}$.

**EA9** La velocidad de descenso de un pistón en la etapa de admisión es de 6 m/s determinar la rapidez de incremento del volumen de ingreso de la mezcla si el diámetro del pistón es 7,8 cm

**EA10** El área de contacto de una pastilla de frenos con el disco es de 44cm$^2$ , si la tasa de desgaste del material de la pastilla es de $80\frac{mm^3}{día}$ determinar:

- La tasa de desgaste de la altura de la pastilla de frenos
- ¿En qué tiempo habrá que cambiar la pastilla si la altura original es de 14mm y se tiene que cambiar cuando la altura sea de 5mm.

**EA11** La velocidad de rotación de las plumas de un limpiaparabrisas es de $\frac{2\pi}{3}\frac{rad}{s}$ determinar la tasa de barrido del área del parabrisas si la distancia desde el centro de giro de la pluma hasta el inicio y el final del caucho de la pluma es de 15 cm y 50 cm respectivamente.

**EA12** El recipiente del refrigerante de un vehículo tiene la forma mostrada (esférica) con radio 13 cm; se vierte refrigerante en su interior con una caudal constante de 60 cm$^3$ /s. El refrigerante debe ser vertido únicamente hasta la mitad del recipiente, es decir debe adoptar una forma hemisférica (mitad de la esfera). El volumen de agua en un depósito hemisférico de radio $R$ $V = \left(\frac{\pi}{3}\right)y^2(3R - y)$ es cuando el nivel del agua se encuentra a $y$ cm de profundidad.

- ¿A qué razón cambia el nivel del líquido cuando el agua tiene 8 cm de profundidad?
- ¿Cuál es el radio *r* de la superficie del agua cuando esta tiene *y* cm de profundidad?
- ¿A qué razón cambia el radio *r* cuando el agua tiene 8 cm de profundidad?

**EA13** En física la cantidad de movimiento $p$ de un cuerpo cuya masa es $m$ y que se mueve en línea recta con velocidad $v$ está dada por $p=mv$ . Suponer que un vehículo de 2000 kg de masa se mueve en línea recta, su masa disminuye a razón de 2.72 kg/hdebido a que se consume el combustible del tanque.

- ¿A qué razón cambia la cantidad de movimiento del vehículo si se mueve a razón constante de 60 km/h ?
- ¿A qué razón cambia la cantidad de movimiento del vehículo en t = 1h si en ese instante su velocidad es 50 km/h y aumenta a razón de 5 km/h?

**EA14.** Se mide el radio de una esfera de un cojinete y se encuentra que es igual a 0.7 cm. Si la medición no tiene un error mayor que 0.01 cm, estimar el error propagado en el volumen $V$ de la esfera del cojinete.

**EA15.** Entre 0 °C y 30 °C el volumen $V$ (en $cm^3$) de 1 kg de agua a una temperatura $T$ se expresa aproximadamente mediante la fórmula:

$$V(T) = 999{,}87 - 0{,}06426T + 0{,}0085043T^2 - 0{,}0000679T^3$$

**EA16** Sin tomar en cuenta la resistencia del aire, el alcance horizontal $H$ de un proyectil está dado por $H(\theta) = \frac{{v_0}^2}{g} sen(2\theta)$ ; donde $v_0$ es la velocidad inicial constante, $g$ es la aceleración de la gravedad y θ es el ángulo de elevación o salida.

Determinar el alcance máximo del chorro de agua del limpiaparabrisas si el ángulo de salida es de 30° con una velocidad inicial de 1 m/s, considerar la gravedad $g = 9{,}81 \frac{m}{s^2}$

**EA17** El travesaño del chasis de un vehículo soporta una carga constante $w_u$ distribuida uniformemente, la curva de desviación debido a la carga está dada por

$$y(x) = \frac{w_0 L^2}{24EI}x^2 - \frac{w_0 L}{12EI}x^3 + \frac{w_0}{24EI}x^4$$

Donde: $L$ es la longitud del travesaño, $E$es el módulo de elasticidad de Young e $I$ es el momento de inercia de la sección transversal del travesaño.

- Determinar la deflexión máxima del travesaño
- Trazar la gráfica $y(x)$

**EA18** El aceite que se utiliza en los motores viene en diferentes tipos de envase, uno de ellos son los envases de un galón ( $4000cm^3$ ), determinar las medidas más adecuadas que debe tener este envase de forma cilíndrica sin la tapa de tal manera que se use la menor cantidad de material en su fabricación.

**EA19** Se desea fabricar el depósito del líquido de una dirección hidráulica, este debe almacenar 800 $cm^3$ de líquido hidráulico. Determinar:

- Entre una forma esférica, cilíndrica o paralelepípedo, escoja la forma más adecuada de tal manera que se use la menor cantidad de material en su fabricación? Considere como recipiente cerrados.
- ¿Cuáles serían sus medidas?

**EA20** Para este ejercicio deberá investigar conceptos de economía referentes a costo marginal, función costo, función demanda y función de ingreso.

Un almacén de llantas ha estado vendiendo 200 juegos de llantas mensuales a 350 dólares cada juego. Un estudio indica que por cada 10 dólares de descuento ofrecido a los compradores, el número de juegos vendidos se incrementará en 20 a la semana.

- Encuentre la función demanda y la función ingreso.
- ¿Qué tan grande debe ser el descuento que ofrezca la tienda para para maximizar sus ingresos?

# Formulario

## Leyes de exponentes

| | |
|---|---|
| $a^m a^n = a^{m+n}$ | $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$ |
| $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ | $(a * b)^m = a^m * b^m$ |
| $a^0 = 1$ | $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$ |
| $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^m$ | $(a^m)^n = a^{mn}$ |

## Leyes de radicales

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$ | $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$ | $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ | $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ |

## Propiedades de los logaritmos

Para cualquier $M, N, b > 0$ $y$ $b \neq 0$, se cumple que: $\log_b 1 = 0$

1. $\log_b b = 1$

2. $\log_b MN = \log_b M + \log_b N$

3. $\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$

**4.** $\log_b M^n = n \log_b M$

**5.** $\log_b \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_b M$

## Identidades trigonométricas

### *Identidades trigonométricas básicas*

**1.** $\frac{sen\,(\theta)}{co\ s(\theta)} = ta\,n(\theta) = \frac{1}{cot\,(\theta)}$

**2.** $\frac{cos\,(\theta)}{sen\,(\theta)} = cot(\theta) = \frac{1}{tan\,(\theta)}$

**3.** $\frac{1}{cos\,(\theta)} = sec(\theta)$

**4.** $\frac{1}{sen\,(\theta)} = csc(\theta)$

**5.** $sen(-\theta) = -sen(\theta)$

**6.** $cos(-\theta) = cos(\theta)$

**7.** $tan(-\theta) = -tan(\theta)$

**8.** $sen^2(\theta) + cos^2(\theta) = 1$

**9.** $1 + tan^2(\theta) = sec^2(\theta)$

**10.** $1 + cot^2(\theta) = csc^2(\theta)$

## *Identidades trigonométricas de ángulo doble y medio angulo*

1. $sen(2\theta) = 2sen(\theta)cos(\theta)$

2. $cos\ (2\theta) = \begin{cases} cos^2(\theta) - sen^2(\theta) \\ 1 - 2sen^2(\theta) \\ 2cos^2(\theta) - 1 \end{cases}$

3. $tan(2\theta) = \frac{2tan\,(\theta)}{1-tan^2(\theta)}$

4. $sen^2(\theta) = \frac{1-cos\,(2\theta)}{2}$

5. $cos^2(\theta) = \frac{1+cos\,(2\theta)}{2}$

6. $tan^2(\theta) = \frac{1-cos\,(2\theta)}{1+cos\,(2\theta)}$

De estas 3 últimas ecuaciones si consideramos que φ=2θ obtenemos las siguientes formulas:

1. $sen\left(\frac{\phi}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-cos\,(\phi)}{2}}$
2. $cos\left(\frac{\phi}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+cos\,(\phi)}{2}}$
3. $tan\left(\frac{\phi}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-cos\,(\phi)}{1+cos\,(\phi)}}$

## *Identidades trigonométricas de la suma y la diferencia de dos ángulos*

1. $sen\,(x + y) = sen\,x cos\,y + cos\,x sen\,y$
2. $sen\,(x - y) = sen\,x\,cos\,y - cos\,x\;sen\,y$
3. $cos\,(x + y) = cos\,x\;cos\;y - sen\,x\,sen\,y$
4. $cos\,(x - y) = cos\,x cos\,y + sen\,x sen\,y$
5. $\tan(x + y) = \frac{tanx + tany}{1 - tanx\;tany}$
6. $tan(x - y) = \frac{tanx - tany}{1 + tanx\;tany}$
7. $cot(x + y) = \frac{cot\;x\,cot\;y - 1}{cot\;y + cot\;x}$
8. $\cot(x - y) = \frac{cot\;x\,cot\;y + 1}{cot\;y - cot\;x}$

## *Identidades de producto y de suma de seno y coseno*

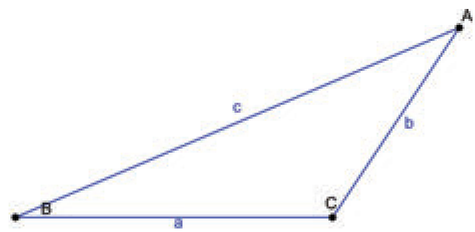
1. $cos(a)cos(b) = \frac{cos\,(a+b) + cos\,(a-b)}{2}$
2. $sen(a)sen(b) = \frac{cos\,(a-b) - cos\,(a+b)}{2}$
3. $sen(a)cos(b) = \frac{sen\,(a+b) + sen\,(a-b)}{2}$
4. $cos(a)sen(b) = \frac{sen\,(a+b) - sen\,(a-b)}{2}$

## *Ley de los senos*

$$\frac{senA}{a} = \frac{senB}{b} = \frac{senC}{C}$$

## *Ley de los cosenos*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cosA$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ cosB$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cosC$$




## Geometría analítica

| | |
|---|---|
| Distancia entre dos puntos | $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ |
| Coordenada de un punto que divide un segmento de recta en una razón dada | $x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}\ ;\quad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}$ |
| Pendiente de una recta | $\mathrm{m} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ |
| Ángulo entre dos rectas | $\propto_1 = arc\ tan\left(\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right)$ |

| | |
|---|---|
| Distancia entre dos puntos | $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ |
| Coordenada de un punto que divide un segmento de recta en una razón dada | $x = \dfrac{x_1 + rx_2}{1 + r}\ ; \quad y = \dfrac{y_1 + ry_2}{1 + r}$ |
| Pendiente de una recta | $\mathrm{m} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ |
| Ángulo entre dos rectas | $\propto_1 = arc\ tan\left(\dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right)$ |

| | |
|---|---|
| Ecuación de la recta dado un punto y la pendiente | $y - y_1 = m(x - x_1)$ |
| Condición de paralelismo entre dos rectas | $m_1 = m_2$ |
| Condición de perpendicularidad entre dos rectas | $m_1 m_2 = -1$ |
| La distancia del punto P($x_1$, $y_1$) a la recta $Ax + By + C = 0,\ \ B > 0$ | $d = \dfrac{\lvert Ax_1 + By_1 + C \rvert}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ |

| | |
|---|---|
| Ecuación de la recta dados dos puntos | $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ |
| Ecuación ordinaria de la circunferencia | $r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$ |
| Ecuación general de la circunferencia | $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + F = 0$<br>$A = B$ |
| Ecuación ordinaria de la parábola | $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ horizontal<br>$(x - h)^2 = 4p(y - k)$ vertical |

| | |
|---|---|
| Ecuación de la recta dado un punto y la pendiente | $y - y_1 = m(x - x_1)$ |
| Condición de paralelismo entre dos rectas | $m_1 = m_2$ |
| Condición de perpendicularidad entre dos rectas | $m_1 m_2 = -1$ |
| La distancia del punto P($x_1$, $y_1$) a la recta $Ax + By + C = 0,\ \ B > 0$ | $d = \dfrac{\lvert Ax_1 + By_1 + C\rvert}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ |

| | |
|---|---|
| Ecuación de la recta dados dos puntos | $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ |
| Ecuación ordinaria de la circunferencia | $r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$ |
| Ecuación general de la circunferencia | $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + F = 0$<br>$A = B$ |
| Ecuación ordinaria de la parábola | $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ horizontal<br>$(x - h)^2 = 4p(y - k)$ vertical |

| | |
|---|---|
| Ecuación general de la parábola | $Ax^2 + Bx + Dy + F = 0$ |
| Ecuación ordinaria de la elipse | $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ horizontal<br>$\frac{(y-h)^2}{a^2} + \frac{(x-k)^2}{b^2} = 1$ vertical |

| | |
|---|---|
| Ecuación general de la elipse | $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + F = 0$<br>$A$ y $B$ tienen el mismo signo y diferentes valores |
| Ecuación ordinaria de la hipérbola con eje transverso paralelo al eje $x$ | $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ |
| Ecuación ordinaria de la hipérbola con eje transverso paralelo al eje $y$ | $\frac{(y-h)^2}{a^2} - \frac{(x-k)^2}{b^2} = 1$ |
| Ecuación general de la hipérbola | $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + F = 0$<br>$A$ y $B$ tienen diferente signo |

# TRANSFORMACIÓN DE FUNCIONES

| DESPLAZAMIENTO VERTICAL | |
|---|---|
| Sea $y = f(x)$ | $a > 0$ |
| $y = f(x) + a$, desplace $a$ unidades hacia arriba la gráfica de $y = f(x)$ | |
| $y = f(x) - a$, desplace $a$ unidades hacia abajo la gráfica de $y = f(x)$ | |

| DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL | |
|---|---|
| Sea $y = f(x)$ | $a > 0$ |
| $y = f(x + a)$, desplace $a$ unidades hacia la izquierda la gráfica de $y = f(x)$ | |
| $y = f(x - a)$, desplace $a$ unidades hacia la derecha la gráfica de $y = f(x)$ | |

| ALARGAMIENTO VERTICAL | |
|---|---|
| Sea $y = f(x)$ | $a > 1$ |
| $y = af(x)$, alargada en un factor de $a$ en la dirección vertical la gráfica de $y = f(x)$ | |

| CROMPRESIÓN VERTICAL | |
|---|---|
| Sea $y = f(x)$ | $a > 1$ |
| $y = \frac{1}{a}f(x)$, comprimida en un factor de $a$ en la dirección vertical la gráfica de $y = f(x)$ | |

| ALARGAMIENTO HORIZONTAL | |
|---|---|
| Sea $y = f(x)$ | $a > 1$ |
| $y = f\left(\frac{x}{a}\right)$, alargada en un factor de $a$ en la dirección horizontal la gráfica de $y = f(x)$ | |

| CROMPRESIÓN HORIZONTAL | |
|---|---|
| Sea $y = f(x)$ | $a > 1$ |
| $y = f(ax)$, comprimida en un factor de $a$ en la dirección horizontal la gráfica de $y = f(x)$ | |

| REFLEXIONES | |
|---|---|
| Sea $y = f(x)$ | |
| $y = -f(x)$, refleja la gráfica de $y = f(x)$ sobre el eje "$\boldsymbol{x}$" | |
| $y = f(-x)$, refleja la gráfica de $y = f(x)$ sobre el eje "$\boldsymbol{y}$" | |

# LÍMITES

## LÍMITE FUNDAMENTAL ALGEBRAICO

$$\lim_{f(x)\to\infty} \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$$

## LÍMITE FUNDAMENTAL TRIGONOMÉTRICO

$$\lim_{f(x)\to 0} \frac{\operatorname{sen}(f(x))}{f(x)} = 1$$

## Límite de funciones racionales cuando la variable independiente tiende a infinito

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0} = \frac{a_n}{b_n}$$

Si el grado del polinomio de numerador es igual al grado del polinomio del denominador la expresión es racional impropia y el limite cuando la $x$ tiende a infinito se obtiene del cociente entre las constantes que acompañan a la variable de mayor exponente.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + \ a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0}{b_{n-1}x^{n-1} + \ b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_2x^2 + b_1x + b_0} = \infty$$

Si el grado del polinomio de numerador es mayor al grado del polinomio del denominador la expresión es racional impropia y el limite cuando la *x* tiende a infinito es también ∞.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_{n-1}x^{n-1} + \ a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0}{b_n x^n + \ b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_2x^2 + b_1x + b_0} = 0$$

Si el grado del polinomio de numerador es menor al grado del polinomio del denominador la expresión es racional propia y el limite cuando la *x* tiende a infinito es 0.

## *Indeterminaciones*

| Son indeterminaciones | | No son indeterminaciones |
|---|---|---|
| cero para cero | $\frac{0}{0}$ | $\frac{c}{0} = \infty$ |
| infinito para infinito | $\frac{\infty}{\infty}$ | $\frac{0}{c} = 0$ |
| infinito menos infinito | $\infty - \infty$ | $\frac{c}{\infty} = 0$ |
| cero por infinito | $0 \cdot \infty$ | $\infty + \infty = \infty$ |
| cero elevado a la cero | $0^0$ | $-\infty - \infty = -\infty$ |
| infinito elevado a la cero | $\infty^0$ | $0^{\infty} = 0$ |
| uno elevado al infinito | $1^{\infty}$ | $0^{-\infty} = 0$ |

## *Continuidad*

$$\boxed{f(a) = \lim_{x\to a} f(x)}$$

## *Tablas de derivadas*

| TABLA DE DERIVADAS SIMPLES Y REGLAS DE DERIVACIÓN | |
|---|---|
| $\frac{d}{dx}(c) = 0$ | Derivada de una función constante |
| $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ | Regla de la potencia |
| $\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}f(x)$ | Regla del múltiplo constante, siendo $f$ una función derivable y $\boldsymbol{c}$ una constante |
| $\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$ | Regla de la suma |
| $\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x)$ | Regla de la diferencia |
| $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]$ | Regla del producto |
| $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$ | Regla del cociente |

| **TABLA DE FÓRMULAS DE DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS** Si $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces | |
|---|---|
| $\frac{d}{dx}[sen(x)] = cos(x)$ | $\frac{d}{dx}[sen(u)] = cos(u)\frac{du}{dx}$ |
| $\frac{d}{dx}[cos(x)] = -sen(x)$ | $\frac{d}{dx}[cos(u)] = -sen(u)\frac{du}{dx}$ |
| $\frac{d}{dx}[tan(x)] = sec^2(x)$ | $\frac{d}{dx}[tan(u)] = sec^2(u)\frac{du}{dx}$ |
| $\frac{d}{dx}[cot(x)] = -csc^2(x)$ | $\frac{d}{dx}[cot(u)] = -csc^2(u)\frac{du}{dx}$ |
| $\frac{d}{dx}[sec(x)] = sec(x)tan(x)$ | $\frac{d}{dx}[sec(u)] = sec(u)tan(u)\frac{du}{dx}$ |
| $\frac{d}{dx}[csc(x)] = -csc(x)cot(x)$ | $\frac{d}{dx}[csc(u)] = -csc(u)cot(u)\frac{du}{dx}$ |

| **DERIVADA DE FUNCIONES EXPONENCIALES** Si $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces | |
|---|---|
| $\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$ | $\frac{d}{dx}[e^u] = e^u\frac{du}{dx}$ |
| $\frac{d}{dx}[a^x] = a^x(lna)$ | $\frac{d}{dx}[a^u] = a^u(lna)\frac{du}{dx}$ |

| DERIVADA DE FUNCIONES LOGARÍTMICAS<br>Si $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces | |
|---|---|
| $\frac{d}{dx}[lnx] = \frac{1}{x}$ | $\frac{d}{dx}[\ln(u)] = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$ |
| $\frac{d}{dx}[log_a x] = \frac{1}{xln(a)}$ | $\frac{d}{dx}[log_a(u)] = \frac{1}{uln(a)}\frac{du}{dx}$ |

| DERIVADA DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS<br>Si $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces | |
|---|---|
| $\frac{d}{dx}[sen^{-1}x] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\frac{d}{dx}[sen^{-1}u] = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$ |
| $\frac{d}{dx}[cos^{-1}x] = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\frac{d}{dx}[cos^{-1}u] = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$ |
| $\frac{d}{dx}[tan^{-1}x] = \frac{1}{1+x^2}$ | $\frac{d}{dx}[tan^{-1}u] = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$ |
| $\frac{d}{dx}[cot^{-1}x] = \frac{-1}{1+x^2}$ | $\frac{d}{dx}[cot^{-1}u] = \frac{-1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$ |
| $\frac{d}{dx}[sec^{-1}x] = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ | $\frac{d}{dx}[sec^{-1}u] = \frac{1}{\|u\|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$ |
| $\frac{d}{dx}[csc^{-1}x] = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$ | $\frac{d}{dx}[csc^{-1}u] = \frac{-1}{\|u\|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$ |

| DERIVADA DE FUNCIONES HIPERBÓLICAS | |
|---|---|
| Si $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces | |
| $\frac{d}{dx}[senh(x)] = coshx$ | $\frac{d}{dx}[senh(u)] = \cosh(u)\frac{du}{dx}$ |
| $\frac{d}{dx}[\cosh(x)] = senhx$ | $\frac{d}{dx}[\cosh(u)] = senh(u)\frac{du}{dx}$ |
| $\frac{d}{dx}[\tanh(x)] = sech^2(x)$ | $\frac{d}{dx}[\tanh(u)] = sech^2(u)\frac{du}{dx}$ |
| $\frac{d}{dx}[coth(x)] = -csch^2x$ | $\frac{d}{dx}[coth(u)] = -csch^2(u)\frac{du}{dx}$ |
| $\frac{d}{dx}[\mathrm{sech}(x)] = -\mathrm{sech}(x)\tanh(x)$ | $\frac{d}{dx}[\mathrm{sech}(u)] = -sech(u)\,tanh(u)\frac{du}{dx}$ |
| $\frac{d}{dx}[csch(x)] = -csch(x)coth(x)$ | $\frac{d}{dx}[csch(u)] = -csch(u)coth(u)\frac{du}{dx}$ |

# Bibliografía


[1] J. STEWART., *Cálculo de Una Variable – Trascendentes tempranas,* Editorial Cengage Learning, Séptima edición, México, 2012.

[2] A. AGUILAR.,… [et al.]. *Geometría, Trigonometría y Geometría analítica,* Editorial Pearson Prentice Hall, Primera edición, México, 2010.

[3] G. THOMAS., *Cálculo: Una Variable,* Editorial Prentice Hall Pearson Educación, Doceava edición, México, 2010.

[4] S. CHAPRA., R. CANALE., *Métodos numéricos para ingenieros,* Editorial McGraw-Hill, Quinta Edición, México, 2007.

[5] E. SWOKOWSKI., *Calculus with analytic geometry,* Editorial Prindle, Weber & Schmith, Segunda edición, Boston Massachusetts, 1979.

[5] D. ZILL.,W. WRIGHT., *Cálculo Trascendentes tempranas,* Editorial Mc Graw-Hill, Cuarta Edición, México, 2011

[6] D. ZILL., *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería,* Editorial Mc Graw-Hill, Cuarta Edición, México, 2012

(n.d.).

(n.d.).

(n.d.). From http://images.evisos.com.co/2015/05/19/su-volqueta-importada-shacman-tecnologia-cummins-eaton_7fd9f9e1b_3.jpg Gráfica Volqueta del ER3

(n.d.). From http://www.suaymar.com/wp-content/uploads