



**UNIVERSIDAD POLITÉCNICA SALESIANA**  
**SEDE CUENCA**  
**CARRERA DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA**

**DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE UN ROBOT MÓVIL OMNIDIRECCIONAL BASADO EN  
ROS PARA LA ENSEÑANZA DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS A ESTUDIANTES DE  
BACHILLERATO**

Trabajo de titulación previo a la obtención  
del título de Ingeniero Electrónico

**AUTORES: ANDREA GABRIELA CABRERA CASTRO**  
**JHON PAUL REINOZO CHACÓN**  
**TUTOR: ING. LUIS ENRIQUE GONZÁLEZ DELGADO, MSc.**

Cuenca - Ecuador

2022

## CERTIFICADO DE RESPONSABILIDAD Y AUTORÍA DEL TRABAJO DE TITULACIÓN

Nosotros, Andrea Gabriela Cabrera Castro con documento de identificación N° 0105363709 y John Paul Reinozo Chacón con documento de identificación N° 0105319792; manifestamos que:

Somos los autores y responsables del presente trabajo; y, autorizamos a que sin fines de lucro la Universidad Politécnica Salesiana pueda usar, difundir, reproducir o publicar de manera total o parcial el presente trabajo de titulación.

Cuenca, 12 de agosto del 2022.

Atentamente,



Andrea Gabriela Cabrera Castro

0105363709



John Paul Reinozo Chacón

0105319792

**CERTIFICADO DE CESIÓN DE DERECHOS DE AUTOR DEL TRABAJO DE  
TITULACIÓN A LA UNIVERSIDAD POLITÉCNICA SALESIANA**

Nosotros, Andrea Gabriela Cabrera Castro con documento de identificación N° 0105363709 y John Paul Reinozo Chacón con documento de identificación N° 0105319792, expresamos nuestra voluntad y por medio del presente documento cedemos a la Universidad Politécnica Salesiana la titularidad sobre los derechos patrimoniales en virtud de que somos autores del Proyecto técnico: “Diseño y construcción de un robot móvil omnidireccional basado en ROS para la enseñanza de conceptos matemáticos a estudiantes de bachillerato”, el cual ha sido desarrollado para optar por el título de: Ingeniero Electrónico, en la Universidad Politécnica Salesiana, quedando la Universidad facultada para ejercer plenamente los derechos cedidos anteriormente.

En concordancia con lo manifestado, suscribimos este documento en el momento que hacemos la entrega del trabajo final en formato digital a la Biblioteca de la Universidad Politécnica Salesiana.

Cuenca, 12 de agosto del 2022.

Atentamente,



Andrea Gabriela Cabrera Castro

0105363709



John Paul Reinozo Chacón

0105319792

## **CERTIFICADO DE DIRECCIÓN DEL TRABAJO DE TITULACIÓN**

Yo, Luis Enrique González Delgado con documento de identificación N° 0104540273, docente de la Universidad Politécnica Salesiana, declaro que bajo mi tutoría fue desarrollado el trabajo de titulación: DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE UN ROBOT MÓVIL OMNIDIRECCIONAL BASADO EN ROS PARA LA ENSEÑANZA DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS A ESTUDIANTES DE BACHILLERATO, realizado por Andrea Gabriela Cabrera Castro con documento de identificación N° 0105363709 y por John Paul Reinozo Chacón con documento de identificación N° 0105319792, obteniendo como resultado final el trabajo de titulación bajo la opción Proyecto técnico que cumple con todos los requisitos determinados por la Universidad Politécnica Salesiana.

Cuenca, 12 de agosto del 2022.

Atentamente,



Ing. Luis Enrique González Delgado, MSc.

0104540273

## **DEDICATORIA**

Este trabajo de titulación está dedicado principalmente a Dios y a mis hijos Pedrito y Juan Agustín que son mi principal fuente de motivación e inspiración para superarme cada día, son mi orgullo y sé que lograrán grandes triunfos en sus vidas.

También dedico este proyecto a mi amado esposo Pedro que ha sido un gran apoyo y un pilar fundamental en mi vida, quien, con su amor, gran sacrificio, esfuerzo y comprensión me ha guiado y apoyado tanto en mi vida diaria como en este proceso para culminar mi carrera, juntos hemos superado adversidades y logrado muchos objetivos, juntos siempre hasta el final.

Pedro, Pedrito y Agustín son lo más grande y valioso que tengo, los amo con todo mi corazón.

A mis suegros Ramón y María del Carmen a quienes admiro y quiero mucho, con su paciencia y cariño me han brindado un gran apoyo, ustedes son un pilar fundamental y un gran ejemplo para mis hijos, mi esposo y para mí, con su apoyo, cariño y ayuda he podido lograr todo esto.

A mi tía Carmen a quien considero como una madre y quiero mucho, siempre me ha apoyado e incentivado para lograr lo que me proponga.

A todos ellos, quienes son lo más importante en mi vida.

*Andrea Gabriela Cabrera Castro*

Dedico el presente trabajo a Dios y mediante él, lo dedico a mi familia y padres: Nélide Chacón y Edgar Reinozo, mi abuelita Esther Reinoso, hermanos Micaela y Ángel Reinozo, y mis Tíos, pues todos y cada uno de ellos aportaron con un granito de arena en el momento exacto cuando así yo lo requería, para que pueda avanzar y estudiar un ciclo más, hasta poder culminar con mi carrera universitaria.

Dedico este trabajo a dos grandes amigos esposos Fernando y María quienes me abrieron las posibilidades de poder autofinanciarme en mis estudios, al brindarme acogida y sostén en su hogar.

Hago extensa mi dedicatoria a mis compañeros de estudio y de vida que hoy en día son mis colegas y con quienes sé que puedo contar cuando así lo requiera.

*John Paul Reinozo Chacón*

## **AGRADECIMIENTOS**

Agradezco a Dios por sus bendiciones y por otorgarme esta maravillosa familia, a mi esposo por su gran amor, apoyo, sacrificio y esfuerzo que hace diariamente por mis hijos y por mí, a mi hijo Pedrito que ha sabido pacientemente comprender el esfuerzo que conlleva esta carrera, a mi hijo Juan Agustín, a mis suegros Ramón y María por su gran apoyo y cariño, a mi Tía Carmen por creer en mí. También quiero agradecer al Ing. Luis González que con su conocimiento y guía se pudo concluir este trabajo.

*Andrea Gabriela Cabrera Castro*

Quiero agradecer a Dios, a mis Padres, familia, docentes y amigos pues su apoyo fue incondicional en mi vida ya que me permitieron crecer profesionalmente como un buen ser humano pues no permitieron que me desvíe en el camino.

Agradezco el apoyo pues no solo fue económico, además de eso me aportaron con conocimientos profesionales, personales y religiosos, en ellos existe la predisposición a transmitirme una enseñanza en cada ocasión disponible.

Agradezco haber conocido el significado del esfuerzo y trabajo duro.

*John Paul Reinozo Chacón*

# ÍNDICE

ÍNDICE.....	1
LISTA DE FIGURAS.....	4
INTRODUCCIÓN.....	7
JUSTIFICACIÓN.....	8
OBJETIVOS.....	9
Objetivo general.....	9
Objetivos Específicos.....	9
CAPÍTULO 1: Proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.....	10
1.1. Importancia de las matemáticas en la vida cotidiana.....	10
1.2. Aspectos psicológicos en la enseñanza de matemáticas.....	11
1.2.1. Teoría del aprendizaje significativo en el área de las matemáticas.....	12
1.2.2. Inteligencia lógico-matemático.....	12
1.3. Proceso de aprendizaje de las ciencias exactas.....	13
1.3.1. Etapas del aprendizaje de las matemáticas.....	14
1.3.2. Desafíos en la enseñanza y aprendizaje.....	16
1.3.3. Métodos de estimulación.....	17
1.4. Enseñanza de matemáticas a estudiantes de secundaria.....	18
1.4.1. Aprendizaje abductivo, inductivo y deductivo.....	18
1.4.2. De la teoría a la práctica.....	20
1.4.3. Destrezas adquiridas en el proceso.....	21
CAPÍTULO 2: La robótica como didáctica de soporte en la enseñanza de las matemáticas.....	23
2.1. La robótica en la actualidad.....	23
2.2. Robótica como soporte a la enseñanza.....	24
2.2.1. Beneficios del uso de la robótica en la enseñanza.....	25
2.2.2. Robótica educativa.....	26
2.3. Etapas para organizar una clase con robótica.....	27
2.4. Herramientas robóticas utilizadas en la enseñanza de matemáticas.....	29
CAPÍTULO 3: Modelo matemático del robot omnidireccional.....	34
3.1. Robots móviles omnidireccionales.....	34
3.1.1. Rueda Universal.....	35
3.1.2. Rueda esférica.....	36

3.1.3.	Rueda mecanum o rueda sueca .....	37
3.2.	Modos de locomoción de un robot móvil de cuatro ruedas mecanum.....	39
3.3.	Modelo matemático de un robot móvil omnidireccional con ruedas mecanum .....	42
3.3.1.	Modelado cinemático de un robot móvil omnidireccional con ruedas mecanum	42
3.3.2.	Velocidades del robot sobre el plano XY – Cinemática directa .....	43
3.3.3.	Relación velocidad robot y velocidad de las ruedas – Cinemática directa.....	45
3.3.4.	Relación velocidad robot y velocidad de las ruedas – Cinemática inversa .....	47
CAPÍTULO 4: Diseño de hardware.....		48
4.1.	Componentes utilizados .....	48
4.1.1.	Partes mecánicas y componentes electrónicos utilizados para armar el robot.....	48
Mini voltímetro medidor de batería .....		50
4.2.	Diseño de la carcasa .....	54
4.2.1.	Diseño de la base .....	55
4.2.2.	Distribución del espacio interno de la base del robot .....	55
4.2.3.	Diseño de soportes laterales y frontales.....	56
4.2.4.	Diseño de la cubierta.....	57
4.3.	Esquema electrónico .....	58
4.3.1.	Diseño de la placa electrónica (Shield).....	59
4.3.2.	Ruteo de la placa.....	62
4.4.	Ensamblaje final del robot .....	63
CAPÍTULO 5: Desarrollo de software .....		65
5.1.	Esquema de funcionamiento del robot.....	65
5.1.1.	Diagrama de flujo del sistema .....	66
5.2.	Robot Operative System (ROS).....	68
5.2.1.	Implementación y funcionamiento de ROS.....	69
5.2.2.	Instalación de ROS .....	70
5.3.	Programación en Arduino .....	71
5.4.	Interfaz de usuario.....	71
CAPÍTULO 6: Control del robot móvil Omnidireccional.....		76
6.1.	Control de velocidad de las ruedas.....	76
6.1.1.	Sentido de giro del motor.....	76
6.1.2.	Resolución del encoder .....	77

6.1.3.	Modelo dinámico de un motor: Respuesta en lazo abierto .....	78
6.1.4.	Control PID y sintonía Lambda .....	81
6.1.5.	Control PID y sintonía fina .....	84
6.2.	Control no lineal y teoría de Lyapunov .....	86
6.2.1.	Teoría de Lyapunov .....	86
6.2.2.	Función candidata de Lyapunov .....	86
6.2.3.	Sistema estable .....	88
6.2.4.	Sistema asintóticamente estable .....	89
6.3.	Control de posición del robot .....	90
6.3.1.	Control de posición del robot móvil omnidireccional sin una orientación determinada .....	92
6.3.2.	Control de posición del robot móvil omnidireccional con una orientación determinada .....	96
6.4.	Control de trayectoria del robot .....	98
6.5.	Planta de control general del robot .....	100
CAPÍTULO 7: Pruebas y evaluación de resultados .....		102
7.1.	Pruebas experimentales .....	102
7.1.1.	Control de posición - pruebas experimentales .....	103
7.1.2.	Control de trayectoria - pruebas experimentales .....	114
7.2.	Pruebas con jóvenes .....	124
7.2.1.	Manual de ensamblaje e instructivo de prácticas .....	124
7.2.2.	Resultados del taller .....	126
Conclusiones .....		128
Recomendaciones .....		129
Trabajo futuro .....		131
ANEXOS .....		132
Apéndice 1 – Listado de materiales y costos .....		132
Apéndice 2 – Planos del robot .....		133
Apéndice 3 – Manual de ensamblaje .....		136
Apéndice 4 – Registro de asistentes Taller OmniMatic .....		144
Apéndice 5 – Guía de prácticas para el taller OmniMatic .....		145
Apéndice 6 – Fotografías taller OmniMatic .....		148
Referencias .....		151

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Izquierda: Lego Mindstorms EV3; derecha: Lego CyberMaster [43].....	29
Figura 2. Estudiantes de colegios de Barrancas - Chile, trabajan con un kit robótico implementado por el ministerio de educación de Chile (JUNAEB) [46]. .....	30
Figura 3. Captura de pantalla del emulador “Karel el robot”, 2011 [48].....	30
Figura 4. Plataforma móvil “KUKA youBot” [49].....	31
Figura 5. Plataforma robótica móvil omnidireccional REAS [51]. .....	32
Figura 6. Robot didáctico de experimentación científica – tecnológica, desarrollado por estudiantes de la UPS [53]. .....	33
Figura 7. Izquierda: Robot móvil para transporte de carga pesada; derecha: Robot In situ Fabricator, creado para el área de la construcción en el Laboratorio de Fabricación Robótica de ETH Zurich [54].....	34
Figura 8. Distribución de ruedas en robots móviles omnidireccionales [55]. .....	35
Figura 9. Rueda Universal Omnidireccional de tres filas de rodillos [56]. .....	36
Figura 10. Robots empleando una rueda esférica; Izquierda: desarrollado en la universidad de Tohoku Gakuin, Japón, en 2008; derecha: desarrollada en ETH, Zurich, Suiza, en 2010 [57].....	37
Figura 11. Rueda Mecanum.....	38
Figura 12. Izquierda: rueda Mecanum con $\alpha=45^\circ$ ; derecha: rueda Mecanum con $\alpha=-45^\circ$ [58]. ..	38
Figura 13. Distribución de ruedas zurdas y diestras en el robot móvil omnidireccional. ....	39
Figura 14. Orientación de los rodillos para las ruedas zurda con ángulo $\alpha=45$ y diestra con ángulo $\alpha=-45$ [59]. .....	40
Figura 15. Modos básicos de locomoción del robot móvil omnidireccional con cuatro ruedas mecanum.....	41
Figura 16. Modelo de rueda mecanum con ángulo $\delta$ marcado gráficamente. ....	43
Figura 17. Diagrama de cuerpo libre del robot en el plano XY.....	44
Figura 18. Esquema general del robot móvil omnidireccional. ....	46
Figura 19. Diseño 3D de la base del robot móvil omnidireccional. ....	55
Figura 20. Diseño de la rejilla lateral del robot móvil omnidireccional. ....	56
Figura 21. Diseño de la rejilla frontal y trasera del robot móvil omnidireccional.....	57
Figura 22. Diseño 3D de la cubierta superior del robot móvil direccional.....	58
Figura 23. Distribución de los pines del Shield para los drivers y Arduino mega 2560. ....	60
Figura 24. PCB Shield para el Arduino Mega 2560, vista superior. ....	61
Figura 25. PCB Shield para el Arduino Mega 2560, vista inferior.....	62
Figura 26 (a) Ruteado de la capa superior de la PCB, (b) Ruteado de la capa inferior de la PCB	63
Figura 27. Elementos utilizados para unir los componentes del robot móvil omnidireccional. ...	63
Figura 28. Ensamblaje del robot móvil omnidireccional.....	64
Figura 29. Diagrama general del robot. ....	65
Figura 30. Diagrama de flujo del sistema. ....	67
Figura 31. Interfaz gráfica utilizando la herramienta Qt Designer. ....	72
Figura 32. Menú de opciones de la interfaz gráfica.....	73

Figura 33. Interfaz gráfica para el control de trayectoria.....	74
Figura 34. Interfaz gráfica para el control de posición. ....	75
Figura 35. Señales de salida denominadas A y B generadas por los encoders de efecto Hall del encoder.....	76
Figura 36. Diagrama de bloques para desarrollar el algoritmo de identificación de parámetros de control [65].....	79
Figura 37 Respuesta a una entrada escalón ( $Pv_{real}$ ) / aproximación ( $Pv_{estimated}$ ) con variables del sistema de primer orden.....	80
Figura 38. Valores de las variables de proceso ( $Pv$ ) y variable deseada o Set Point ( $Sp$ ),.....	84
Figura 39 Respuesta del sistema PID – $Sp_{Pv}$ aplicando los métodos de sintonía.....	85
Figura 40. Representación de función definida positiva.....	87
Figura 41. Función semidefinida negativa que cumple con las condiciones de sistema estable. .	88
Figura 42. Representación gráfica del sistema asintóticamente estable. ....	90
Figura 43. Control de posición sin una orientación deseada. ....	91
Figura 44. Control de posición con una orientación deseada. ....	92
Figura 45. Diagrama del robot con orientación deseada [58]. ....	96
Figura 46. Planta general de control del robot.....	100
Figura 47. Lona 1 - Plano cartesiano vacío.....	103
Figura 48. Lona 2 - Ejercicio 1 - Control de posición: Triángulo isósceles .....	104
Figura 49.Comparación de resultados Ejercicio 1 Control de Posición – trayectoria en lona vs trayectoria en interfaz .....	105
Figura 50. Resultados Ejercicio 1 - Control de Posición - Triángulo isósceles – Gráficas .....	106
Figura 51. Lona 3 - Ejercicio 2 - Control de posición: Cuadrado.....	108
Figura 52.Comparación de resultados Ejercicio 2 Control de Posición – trayectoria en lona vs trayectoria en interfaz .....	109
Figura 53. Resultados Ejercicio 2 - Control de Posición - Cuadrado – Gráficas.....	110
Figura 54. Lona 4 - Ejercicio 2 - Control de posición: Cuadrado.....	111
Figura 55.Comparación de resultados Ejercicio 3 Control de Posición – trayectoria en lona vs trayectoria en interfaz .....	112
Figura 56. Resultados Ejercicio 2 - Control de Posición – Hexágono – Gráficas .....	113
Figura 57. Lona 5 - Ejercicio 1 - Control de trayectoria: Círculo.....	114
Figura 58.Comparación de resultados Ejercicio 1 Control de Trayectoria – trayectoria en lona vs trayectoria en interfaz .....	115
Figura 59. Resultados Ejercicio 1 - Control de Trayectoria - Círculo – Gráficas .....	116
Figura 60. Lona 6 - Ejercicio 2 - Control de trayectoria: Óvalo.....	118
Figura 61.Comparación de resultados Ejercicio 2 Control de Trayectoria – trayectoria en lona vs trayectoria en interfaz .....	119
Figura 62. Resultados Ejercicio 2 - Control de Trayectoria - Óvalo – Gráficas.....	120
Figura 63. Lona 7 - Ejercicio 3 - Control de trayectoria: Infinito.....	121
Figura 64.Comparación de resultados Ejercicio 3 Control de Trayectoria – trayectoria en lona vs trayectoria en interfaz .....	122
Figura 65. Resultados Ejercicio 3 - Control de Trayectoria - Infinito – Gráficas .....	123
Figura 66. Manual de ensamblaje – OmniMatic (Apéndice 3 – Manual de ensamblaje).....	125

Figura 67. Guía de prácticas - Taller OmniMatic (Apéndice 5 – Guía de prácticas para el taller OmniMatic).....	126
Figura 68 Participantes del taller - Grupos 1 y 2 .....	127
Figura 69. Participante controlando el robot desde la interfaz gráfica. ....	128
Figura 70. Kit 1 - Robot OmniMatic. ....	148
Figura 71. Kit 2 - Robot OmniMatic. ....	148
Figura 72. Grupo 1 ensamblando el robot. ....	149
Figura 73. Grupo 2 ensamblando el robot. ....	149
Figura 74. Robot ensamblado por los participantes.....	150
Figura 75. Demostración del movimiento del robot. ....	<b>¡Error! Marcador no definido.</b>
Figura 76. Participantes del taller OmniMatic luego de armar los robots. ....	150

# INTRODUCCIÓN

A lo largo de la historia, las matemáticas han sido una de las ciencias más relevantes para la humanidad, brindando importantes aportes al desarrollo científico, intelectual y tecnológico de la sociedad, transformando la vida diaria de las personas y el entorno que les rodea. Las matemáticas se constituyen actualmente como la base de varias ciencias, siendo indispensable su aprendizaje y comprensión [1].

La enseñanza de matemáticas en colegios y escuelas puede convertirse en un desafío, sobre todo en materias que conllevan cierta dificultad y que se encuentran asociadas a esta ciencia como lo son computación, física, contabilidad, economía, entre otras. El poco interés, bajo compromiso e incluso el miedo por parte de los estudiantes puede llevar a que esta enseñanza sea aún más difícil. Una ayuda para solventar esta problemática puede ser el uso de herramientas tecnológicas y actualmente se ha visto en la robótica una alternativa para crear entornos más lúdicos de aprendizaje [1] [2].

Previamente, se han incorporado robots como herramientas de soporte a la enseñanza en diferentes países a lo largo del mundo como se menciona en [3] [4] [5]. En estos proyectos se dotó a las escuelas y colegios secundarios con prototipos robóticos que dan soporte al aprendizaje de una manera más didáctica, esta integración en las aulas de clases permitió despertar el interés e incrementó el compromiso y motivación de los estudiantes en el aprendizaje de matemáticas y programación.

En este proyecto de tesis ilustraremos el desarrollo de un robot que pueda ser utilizado como herramienta para reforzar el aprendizaje de las matemáticas en niños y jóvenes.

# JUSTIFICACIÓN

El presente proyecto de titulación nació de la necesidad de motivar y reforzar el aprendizaje de las ciencias exactas y a su vez dar una solución diferente a los métodos convencionales impartidos en los centros educativos, de esta forma forjar una motivación en el estudiante por aprender, investigar y practicar en esta área, incrementando a su vez el interés por las carreras de ingeniería y la tecnología.

Por tanto, se pretende desarrollar una herramienta académica de refuerzo para los estudiantes y docentes en los centros educativos, especialmente del bachillerato. Se busca principalmente complementar la teoría con la práctica y demostrar de modo tangible cuáles serían los resultados del uso correcto o incorrecto de los conceptos aprendidos en clase, demostrando, por ejemplo, cómo podría afectar el mal uso de un signo dentro de una función matemática.

Lo que se busca desarrollar es un robot móvil omnidireccional basado en ROS que pueda influenciar positivamente en el aprendizaje de matemáticas de manera visual, brindando al estudiante una representación descriptiva a través del movimiento del robot, simulando un plano cartesiano con ejes X Y, sobre el cual se podrá dibujar distintas funciones matemáticas, además de controlar la trayectoria del robot de acuerdo a determinadas tareas que el estudiante deberá completar con la intención de lograr una mejor comprensión de los conceptos aprendidos.

# OBJETIVOS

## Objetivo general

Diseñar y construir un robot móvil omnidireccional basado en ROS para la enseñanza de conceptos matemáticos dirigido a estudiantes de bachillerato

## Objetivos Específicos

- Estudiar los modelos cinemáticos existentes para el control de ruedas mecanum y su funcionamiento en vehículos omnidireccionales.
- Dotar a la plataforma móvil con la capacidad de desplazarse omnidireccionalmente y seguir una trayectoria definida.
- Definir una red ROS que permita la interacción usuario - robot.
- Elaborar una guía de prácticas de laboratorio que den soporte a la enseñanza de matemáticas a estudiantes de bachillerato.

# CAPÍTULO 1: Proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

## 1.1. Importancia de las matemáticas en la vida cotidiana

El aprendizaje de las matemáticas brinda al ser humano un conocimiento más profundo del mundo que nos rodea y que será parte de su vida cotidiana, por lo que, el perfeccionamiento de estos conceptos conlleva a una mejora en los siguientes aspectos cognitivo/intelectuales [6]:

- **Pensamiento analítico:** Es la capacidad que tiene el ser humano de descomponer y encontrar patrones en la información que recibe obteniendo soluciones simples, ágiles y fáciles a problemas complejos. Este proceso es importante para resolver problemas matemáticos.
- **Razonamiento ordenado:** Está estrechamente ligado a un proceso de análisis coherente, requerimiento necesario para organizar los pensamientos y expresarlos correctamente. Según Santo Tomás “Quien ordena, no se repite; quien no se repite, es breve y conciso; quien es ordenado, breve y conciso, es claro y profundo al mismo tiempo.”
- **Agilidad mental:** Es la macro destreza que abarca las dos anteriores, cuyo objetivo es desarrollar las habilidades cognitivas superiores tales como: facilidad y velocidad para abordar cualquier tipo de situación que requiera de cálculo de probabilidades, pensamiento lógico y toma de decisiones.

Adicional a ello, se puede englobar el uso de las matemáticas en casi todo lo que hacemos ya sea en nuestra vida diaria como en campos más avanzados de la ciencia y tecnología, debido a que son únicas, de carácter universal y auxiliar inevitable e inexcusable del resto de ciencias y actividades [6].

Las matemáticas se encuentran ampliamente relacionadas con la mayoría de las carreras profesionales que hoy en día se conocen y con las que se desarrollan nuevos campos de estudios: ingeniería, informática, medicina, filosofía, arquitectura, química, contabilidad, etc.

Estas son algunas opciones dentro de las ciencias, aunque existen más por ser evaluadas, todas están en constante crecimiento y desarrollo, esto ha hecho que salgan al mercado tecnologías que brindan soporte a las necesidades del ser humano con base a los avances científicos de sus casos de estudio.

Existen dos aspectos esenciales que relacionan la vida diaria con las matemáticas: La utilidad y su ayuda a la comprensión. Son útiles porque nos permite relacionarnos con las situaciones cotidianas, porque deben ser realizadas, aunque tratemos de evitarlas. Y por qué ayuda a clarificar la razón de la acción. Su carácter se corresponde con alguna de las seis actividades matemáticas universales identificadas por Bishop [7]: contar, medir, localizar, diseñar, jugar o explicar.

Las nuevas tecnologías y el alcance científico se deben al avance y a la investigación que se desarrollan en las matemáticas a lo largo de todo el mundo. Las matemáticas se han convertido en aliado estratégico de otras ciencias, por lo que forman cimientos sustanciales en la investigación y desarrollo de nuevas teorías.

En la actualidad es muy importante contar con el uso de la tecnología, entre ellas vuelos de aviones, naves espaciales, automóviles, transacciones digitales, navegación GPS, telecomunicaciones, software y hardware de alto rendimiento. ¿Qué tienen en común todas estas tecnologías? Pues que su usual denominador es la alta complejidad matemática, haciendo posible la aplicación tecnológica que hace pocos años era solo una idea [8].

Como conclusión podemos exteriorizar que las matemáticas las usamos en casi todos los ámbitos de nuestro alrededor, son uno de los patrimonios más antiguos e importantes de la humanidad, han servido para la evolución y desarrollo de las civilizaciones a lo largo de la historia.

## **1.2. Aspectos psicológicos en la enseñanza de matemáticas.**

Un aporte importante de este conocimiento son los últimos avances en la psicología cognitiva aplicada a la educación de la matemática. Entre ellos, se resuelven tres problemas centrales: el del desarrollo que no es más que el problema de la evolución, autodesarrollo y

genética del pensamiento matemático, como segundo problema se tiene los mecanismos cognitivos involucrados en el procesamiento matemático basado en dos rubros tales como procedimientos de cálculo y resolución de problemas, visualizando la dicotomía entre los procedimientos de algoritmos y procedimientos heurísticos, como último problema se tiene el de la enseñanza aprendizaje, cubierto por dos enfoques diferentes a las preguntas complementarias sobre cómo el niño aprende matemáticas y cómo se deben enseñar [9].

### **1.2.1. Teoría del aprendizaje significativo en el área de las matemáticas.**

Según Jean Piaget (1896-1980), Psicólogo suizo, manifiesta que las etapas del pensamiento lógico matemático son las siguientes [10]:

- **Conocimiento físico.** – Mediante la manipulación de objetos.
- **Conocimiento lógico matemático.** – Se construye con abstracción reflexiva
- **Conocimiento social.** – Convencional y no convencional.

Para Jean Piaget el conocimiento es un proceso, no un estado. Por cuanto el saber es relativo, sujeto a cambios y a variaciones de acuerdo con los nuevos avances, y que además es progresivo de lo más fácil a lo más complejo, de ello surge la última de las etapas donde el adolescente manifiesta su capacidad para realizar operaciones y su predisposición al pensamiento abstracto, facilitando la aplicación de las técnicas de razonamiento por medio de la crítica y la perfección. En esta etapa el desarrollo cualitativo alcanza el punto más alto debido a que se desarrollan sentimientos idealistas. Además de ello se manejan las dos reversibilidades en forma integrada, simultánea y sincrónica [10].

### **1.2.2. Inteligencia lógico-matemático**

Según Howard Gardner, conocido en el ámbito científico por sus investigaciones en el análisis de las capacidades cognitivas y por haber formulado la teoría de las inteligencias múltiples,

entre ellas la inteligencia lógico matemático, la misma que comprende la capacidad para usar los números de manera efectiva y razonar adecuadamente, explica que la inteligencia lógico matemático se considera como la capacidad para formular soluciones y resolver dificultades, estructurar elementos para hacer inferencias y respaldarlos con argumentos coherentes [11].

Un buen razonamiento lógico matemático permite desarrollar las siguientes habilidades cognitivas básicas y superiores en los estudiantes, tales como:

- Disfrutar de la magia de los números y sus combinaciones.
- Emplear fórmulas aún fuera del laboratorio
- Experimentar, preguntar, resolver problemas lógicos, explorar y pensar
- Manipular materiales y objetos de ciencias.
- Desarrollar la capacidad de localizar e instaurar relaciones entre objetos que otros repetidamente no ven.
- Esforzarse con problemas cuya resolución demanda el uso del raciocinio crítico y divergente.
- Desarrollan excelentes habilidades de razonamiento inductivo y deductivo para dominar retos lógico-matemáticos complejos.
- Se divierten aplicando sus extraordinarias habilidades matemáticas a situaciones de la cotidianidad.
- Son interrogadores, curiosos e investigadores obstinados.
- Se sienten muy atraídos por los juegos de estrategia, que requieren mucha planificación y predicción de movimientos [11].

### **1.3. Proceso de aprendizaje de las ciencias exactas**

Las ciencias exactas son fundamentales y necesarias en la vida de las personas, la mayoría de las actividades que se realizan diariamente requieren de conocimientos matemáticos, ya sea en las cosas más simples como comprar un producto, administrar dinero, calcular distancias y tiempo, etc.

La aplicación de las matemáticas es esencial en la mayoría de las profesiones y quienes tienen mayor dominio en esta área, así como en la resolución de problemas, tendrán más opciones

al momento de elegir una carrera profesional [12]. Aprender matemáticas permite a los estudiantes desarrollar destrezas que son aplicadas día a día como son el razonamiento, el pensamiento crítico y lógico, así como la resolución de problemas.

No todos los estudiantes al final de su formación académica desarrollan las mismas destrezas y gusto por las ciencias exactas, por lo que es primordial buscar que todos tengan las mismas oportunidades y facilidades de aprendizaje para la adquisición de conceptos matemáticos de forma equitativa. De este modo, es importante comprender las etapas del aprendizaje de las matemáticas que se presentan a continuación.

### **1.3.1. Etapas del aprendizaje de las matemáticas**

El estudio de las matemáticas es parte del desarrollo intelectual general de las personas, esto conlleva varios procesos cognitivos que empiezan desde una edad temprana como es la infancia y siendo trascendentales para la vida adulta, tomando en cuenta que la manera en que los niños adquieren conocimientos matemáticos y los utilizan para resolver problemas de la vida diaria contribuirá a determinar su orientación vocacional en el futuro.

Durante la infancia se desarrollan habilidades cruciales para la futura comprensión matemática, los niños de 0 a 5 años observan, manipulan y experimentan en el entorno que les rodea, ya sea al percibir las fracciones que se presentan a su alrededor como trozos de pizza o pedazos de pastel, con lo cual desarrollan una imagen mental de ese concepto matemático. Además, se suman las actividades psicomotrices que realizan los niños en esta etapa y que influyen de gran manera en el aprendizaje matemático. De acuerdo con el estudio ejecutado por Kobayashi, Hiraki y Hasegawa [13] a un grupo de bebés de seis meses de edad para determinar el emparejamiento intermodal auditivo-visual de pequeñas numerosidades en la infancia, usando las diferencias entre la información visual y la auditiva sobre el número de elementos en un conjunto.

Al finalizar el estudio, se demostró que los niños en la infancia son capaces de distinguir cantidades numéricas.

Cuando los niños se encuentran en la edad preescolar, el proceso de aprendizaje de las matemáticas es flexible. Conforme los niños crecen, desarrollan habilidades en torno al aprendizaje de conceptos matemáticos de manera progresiva dependiendo de la edad [14].

demonstraron en su estudio que los niños y adolescentes desarrollan mejores habilidades cuando se establecen métodos didácticos de enseñanza, favoreciendo el aprendizaje y reforzando los conceptos aprendidos por los estudiantes.

Aprender matemáticas puede ser complejo al principio, pero con las herramientas y la guía adecuada es posible facilitar el aprendizaje y lograr que la persona comprenda de mejor manera los conceptos matemáticos, para lo cual es necesario conocer las etapas del aprendizaje que de acuerdo con J. A. Walker [15] son 4:

**Etapas 1 - Desconcierto:** En esta etapa la persona se siente desorientada, los símbolos y números le parecen algo nuevo y complicado. La lectura y refuerzo de esos conceptos matemáticos ayudará a mejorar la comprensión.

**Etapas 2 - Tropezar:** Al principio no siempre se comprenden en su totalidad los conceptos matemáticos, en este punto la persona puede resolver los primeros pasos del problema y luego quedarse atascado en la resolución, por lo que puede generar frustración en el estudiante y, por lo tanto, desánimo en aprender las ciencias exactas, la solución está en observar ejemplos y revisar notas apuntes obtenidas cuando el profesor impartía la clase. Estos tropiezos son importantes porque el cerebro realiza las conexiones necesarias para pasar a la siguiente etapa.

**Etapas 3 - Comprensión robótica:** Una vez superadas las dos etapas anteriores, el estudiante se siente capacitado para resolver los problemas, aunque no siempre comprenda el porqué de ciertos pasos y estos sean confusos, el estudiante puede resolver los problemas y obtener una respuesta correcta, en su mayoría, muchas personas se sienten conformes en esta etapa, pero es relevante reforzar y comprender todos los pasos y conceptos que se presentan, por lo que reforzar, practicar y estudiar permite mejorar esa comprensión que el estudiante necesita.

**Etapas 4 - Verdadera comprensión:** Esta es la etapa final en la que el estudiante comprendió en su totalidad el concepto o idea matemática, por lo tanto, puede resolver ideas o problemas que impliquen complejidad y aplicar estas nuevas ideas a la resolución de problemas, muy aparte de sí se equivoca o tiende a errar en la resolución.

### **1.3.2. Desafíos en la enseñanza y aprendizaje.**

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas conlleva dificultades significativas que son provocadas por varios factores, entre ellos el miedo que tienen los estudiantes hacia esta ciencia, el cual es transmitido a temprana edad y trasciende a lo largo de su vida escolar, creándose una idea errada sobre la complejidad de estudiar las ciencias exactas. Esto finalmente desemboca en desmotivación y desinterés por aprender las matemáticas y genera mayores dificultades al momento de transmitir estos conocimientos por parte del docente.

Todas estas manifestaciones se producen por ideas y prácticas erradas en donde los estudiantes han degradado fuertemente la imagen de la ciencia y en el que la desmotivación por investigar, leer y practicar ha aumentado significativamente. Estas razones conllevan un reto fuerte que deben afrontar los docentes, así como los estudiantes y de manera indirecta los padres de familia, al respecto D'Amore, J. Godino y M. Fandiño [16] mencionan: “lo que aleja a los estudiantes de la matemática no es ella misma en sí, sino la forma como esta se les presenta, la falta de interacción entre el mundo real y los contenidos orientados en el aula; ellos se desestimulan cuando descubren que la matemática que se enseña en la escuela no se relaciona con la vida cotidiana”, de modo que los estudiantes generan una idea errónea creyendo que las matemáticas no tendrán ninguna relevancia en su vida profesional.

La didáctica de las matemáticas ha demostrado que estas pueden ser accesibles y agradables si se lleva una orientación y enseñanza adecuada que implique una permanente interacción entre el maestro y sus alumnos, y entre estos y el entorno que les rodea. Logrando que, a través de la exploración, abstracción, clasificación, medición y estimación, sean capaces de llegar a resultados que permitan comunicarse en forma matemática y descubrir que estas se encuentran íntimamente relacionadas con la realidad y con las situaciones que los rodean [17].

Las formas de enseñanza cambian con el pasar de los años, por lo tanto, la educación debe buscar procesos innovadores para cumplir con las expectativas que implica la educación en las nuevas generaciones, de esta manera la adaptación a los avances tecnológicos es importante. Buscar maneras didácticas e interactivas en la enseñanza de esta ciencia ayudarán a generar motivación y gusto por aprender y experimentar con las matemáticas.

Por otro lado, entre otros factores relevantes que influyen en la enseñanza y el aprendizaje en la educación son: la pobreza, la desigualdad y la exclusión social, para solucionar esta

problemática las autoridades y el estado deben cumplir un papel fundamental y su deber es afrontar desafíos como son elevar la calidad de vida de los ciudadanos en especial en los sectores más vulnerables, mejorar la calidad de la educación así como la formación docente, fomentar la justicia y la seguridad, entre otros retos que son de vital importancia para facilitar la enseñanza y aprendizaje.

### **1.3.3. Métodos de estimulación.**

En muchos casos las matemáticas son percibidas como difíciles, aburridas y poco motivadoras, a menudo por la forma en la que esta materia es impartida, por ello se han realizado varias investigaciones en las que se ha estudiado la forma de estimular el aprendizaje de esta ciencia relacionando este proceso a las distintas funciones del cerebro.

Entre las funciones asociadas al aprendizaje de matemáticas se encuentran la memoria de trabajo, esta función es crucial, puesto que permite la ejecución de tareas cognitivas tales como la comprensión, el razonamiento y la resolución de problemas. Como otra función importante se tiene la atención, que involucra la aplicación voluntaria de los sentidos y la actividad mental, permitiendo captar cualquier tipo de estímulo para responder correctamente al medio, por último, se presenta la metacognición definida por Ruiz Martín [18] como “el acto de pensar sobre nuestro propio pensamiento” en consecuencia, este proceso permite acrecentar tácticas de aprendizaje relacionadas con diferentes tipos de actividades y se relaciona con el autoconcepto, la autoeficacia y la motivación.

Entre algunos métodos de estimulación se considera el trabajo en equipo, el cual consta de agrupar parejas de estudiantes, uno con un buen rendimiento en matemáticas y otro que presente dificultades, el estudiante con habilidades debe buscar métodos o maneras de enseñar al estudiante con dificultades, permitiéndole reforzar el conocimiento de los conceptos matemáticos y ayudándole a captar estos conocimientos.

Otro método de estimulación consiste en implementar un entorno interactivo en el cual se utilizan diferentes materiales u objetos que permitan contextualizar y dar un significado al conocimiento matemático implantado, Del Ángel [19] en su investigación detalla la importancia de implementar entornos de aprendizaje que incluyan experiencias sociales, físicas, culturales y

psicológicas, esto permitirá analizar y aplicar los conceptos matemáticos, así como captar la atención de los estudiantes y despertar el interés por aprender las matemáticas.

La implementación de un laboratorio de matemáticas en el cual los estudiantes trabajen de manera didáctica ya sea manipulando objetos o realizando actividades en donde la organización, interiorización, retención e identificación les permita reforzar y dar sentido a los conceptos matemáticos que no hayan sido bien entendidos en el aula de clase. Estas herramientas aportarán no solo a la adquisición de conocimientos, sino también al almacenamiento de la información a largo plazo.

Entre otras estrategias importantes, de acuerdo con Mogollón [20], se explican algunas formas de estimulación como son:

- Promover actividades que estimulen la memoria de trabajo. Aplicando tareas de memorización, ejercicios de cálculo simple, enigmas y juegos metódicos.
- Captar la atención de los estudiantes a través de la creatividad y la innovación.
- Aplicar aprendizaje enriquecedor mediante desafíos de diversa dificultad.
- Aplicación de técnicas de relajación, especialmente al tratamiento de la ansiedad matemática.
- Estimulación sensoriomotora en la que se realicen actividades y no solo centrarse en explicaciones.

## **1.4. Enseñanza de matemáticas a estudiantes de secundaria.**

### **1.4.1. Aprendizaje abductivo, inductivo y deductivo.**

Numerosas investigaciones se han realizado con el objetivo de encontrar métodos más adecuados para enseñar a razonar a los estudiantes en el proceso de aprendizaje de conceptos matemáticos, tal es el caso de [21] [22] [23] [24] [25] [26] [27] quienes han realizado varios estudios profundizando en la forma en que los alumnos resuelven problemas matemáticos, los procesos cognitivos, las estrategias y habilidades que utilizan, entre otros, obteniendo resultados significativos y que les acercan cada vez más a una forma adecuada de enseñar a razonar y que los

estudiantes mediante este criterio sean capaces de obtener resultados a partir de sus propias estrategias y formas de resolución de problemas matemáticos.

Campos [28] en su libro habla sobre la teoría del razonamiento desarrollada por Charles Sanders Peirce, quien dedicó gran parte de su vida al estudio de la lógica en la actividad matemática.

La teoría de Pierce sobre el razonamiento habla sobre la interpretación de las diferentes acciones que son llevadas a cabo por los estudiantes cuando ejecutan actividades propias de la resolución de problemas matemáticos, en su obra se muestran varias posiciones acerca de lo que es razonar de forma inductiva, abductiva o deductiva. Esta teoría tiene un carácter evolutivo y a lo largo de la vida de Pierce se realizaron ajustes en los que el mismo autor fue reevaluando y corrigiendo y de los que se hablará en el presente capítulo.

Pierce define el razonamiento como “el proceso mediante el cual se pasa de unas premisas a unas conclusiones por medio de un hábito general de pensamiento, que, aunque muchas veces no es reconocido por el razonador, es el que este considera que conduce al conocimiento verdadero, en el que no hay dudas” [29]. Pierce determina que existen tres formas de razonamiento como son: abductivo, deductivo e inductivo, los cuales se definen a continuación:

**Razonamiento abductivo:** Este razonamiento se da cuando a partir de un fenómeno o hecho que demanda una explicación se llega a una hipótesis, la cual explica las posibles razones del hecho y en caso de ser verdadera implica la verdad de los hechos, con lo cual busca ser la explicación más probable, de este modo la abducción es la operación lógica por la que surgen hipótesis novedosas.

**Razonamiento deductivo:** A diferencia del razonamiento abductivo en el caso de una deducción se obtiene una conclusión, esto quiere decir que para todos los razonamientos se trazan sus probables consecuencias, de este modo, partir de sus premisas se ofrecen fundamentos concluyentes.

**Razonamiento inductivo:** El razonamiento inductivo no es válido ni inválido, esto quiere decir que las premisas no necesariamente son válidas, pero ofrecen un fundamento, obteniendo de

ellas un principio más amplio y general, y como consecuencia la conclusión no siempre será verdadera.

Los métodos abductivo, deductivo e inductivo son estrategias de razonamiento lógico para la resolución de problemas matemáticos, al momento de resolver estos problemas se puede usar ya sea uno u otro método, o la combinación de los tres, dependiendo de la complejidad del problema.

Los tres tipos de razonamiento expuestos por Pierce determinan tres posibilidades de crear inferencias y que estas coexistan interdependientemente.

En la inducción se infieren verdades generales a partir de verdades particulares, mientras que en la deducción resulta lo contrario, por lo tanto, se infiere verdades particulares a partir de verdades generales.

#### **1.4.2. De la teoría a la práctica.**

Enseñar a los estudiantes conceptos matemáticos utilizando únicamente métodos teóricos no es suficiente para afianzar los conocimientos impartidos por el docente, en consecuencia, se requiere profundizar el tema utilizando métodos didácticos que permitan potenciar los resultados del proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas.

Varias investigaciones [23] [25] [30] [31] [32] dan cuenta del bajo nivel de conocimientos que los alumnos obtienen en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, debido a que los docentes tienden a extraer contenidos exactos de los libros de texto sin usar métodos didácticos de enseñanza, además señalan que algunos libros no dan un adecuado tratamiento didáctico al proceso de demostración, dando como resultado bajos niveles de aprendizaje y dificultades en la resolución de problemas matemáticos por parte de los estudiantes.

Mediante la práctica se afianza el aprendizaje de los conceptos matemáticos, ya sea realizando diversos ejercicios o resolviendo problemas que permitan entender mejor y consolidar los conceptos aprendidos. Para llegar a una solución al resolver un problema matemático no siempre se debe seguir el mismo procedimiento, por esta razón, aprender de memoria los procesos no es una solución conveniente, pero sí es importante aprender las fórmulas y conceptos que permitirán encontrar una forma más adecuada para resolver un problema, lo cual es logrado únicamente a través de la práctica.

El profesor deberá definir métodos de práctica adecuados, pudiendo hacer uso de herramientas tecnológicas necesarias en la actualidad, siendo la robótica un método innovador en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, según explica Daniel García Gálvez [33] en su tesis “Resolución de problemas matemáticos a través de la robótica educativa”.

La robótica sigue un aprendizaje basado en procedimientos, de tal manera que los estudiantes siguen retos para llegar a una solución y de esta forma adquieren, refuerzan y desarrollan los conocimientos necesarios en el estudio de las matemáticas.

Optar por métodos lúdicos como técnicas prácticas para la enseñanza de matemáticas permite al estudiante afianzar sus conocimientos en conceptos matemáticos, así como fomentar el entusiasmo y gusto por aprender las ciencias exactas.

Farias y Rojas [14] en su trabajo titulado "Estrategias lúdicas para la enseñanza de la matemática en estudiantes que inician estudios superiores" demostraron que la aplicación de métodos lúdicos en el aprendizaje de las matemáticas permite reforzar y afianzar lo aprendido por los estudiantes, además fortalece la socialización y el trabajo en equipo propiciando un cambio significativo en su actitud hacia el aprendizaje de matemáticas.

### **1.4.3. Destrezas adquiridas en el proceso.**

Las matemáticas brindan destrezas muy importantes para el desarrollo mental de las personas, puesto que mejoran la capacidad de razonamiento, el pensamiento analítico y la practicidad.

Las matemáticas estimulan el desarrollo de vías neuronales, aumentando las destrezas creativas y analíticas en los estudiantes. Una investigación liderada por la Dra. Tanya Evans [34] de la Universidad de Stanford muestra que: “los estudiantes que saben matemáticas son capaces de reclutar ciertas regiones del cerebro de manera más confiable y tienen un mayor volumen de materia gris en esas regiones que aquellos que tienen un desempeño más pobre en matemáticas. Las regiones del cerebro involucradas en las habilidades matemáticas superiores en los niños de alto rendimiento se asociaron con varias tareas cognitivas que implican atención visual y toma de decisiones”.

Patrick Ratchford , profesor de matemáticas en la Universidad de Keyston en Pensilvania, comparte sus puntos de vista acerca de las destrezas que se adquieren en el proceso de enseñanza - aprendizaje de las matemáticas, con lo cual señala que las matemáticas además de ser necesarias

en la vida diaria, aprenderlas permite entrenar nuestra mente para resolver problemas de manera lógica, ya que el proceso de descomponer las cosas y trabajar para llegar a una conclusión lógica es algo de lo que todos pueden beneficiarse, además señala que las matemáticas están a la par con la mayoría de profesiones, como son: el arte, la música, literatura, historia y ciencia, de esta manera el estudio de las matemáticas permite ampliar nuestra mente así como estimularla para desarrollar diversas actividades.

Según Tim Radford [35] escritor en The Guardian, en su artículo, señala que “Las matemáticas son una de las mejores formas de fortalecer el cerebro”, de esta manera mejora las habilidades para el desarrollo de problemas no solo matemáticos sino también del mundo real, proporcionando mayor claridad y mejores sistemas de resolución.

# **CAPÍTULO 2: La robótica como didáctica de soporte en la enseñanza de las matemáticas**

## **2.1. La robótica en la actualidad**

La robótica en la actualidad tiene un papel muy importante en la sociedad aportando grandes beneficios, por lo que es utilizada en diversos campos con muy buenos resultados. El progreso que se ha evidenciado con el pasar del tiempo ha demostrado que la robótica avanza a pasos agigantados, evolucionando así los sistemas de trabajo y mejorando la calidad de vida de las personas.

La robótica moderna empieza en el año 1954 cuando George C. Devol, Jr crea el primer robot industrial, más tarde en 1959 se implementa el primer modelo de prueba llamado “Unimate” en la planta de fundición de General Motors, posteriormente en 1961 se crea Unimation Inc, desde entonces el desarrollo de la robótica ha tenido un progreso acelerado y muy importante en nuestros tiempos [36].

El aporte de la robótica ha sido probado en numerosos sectores como: la medicina, química, en el ámbito militar, en el sector industrial, en la educación y muchos sectores más, logrando obtener un trabajo preciso y eficaz.

En el sector industrial la robótica es muy utilizada, puesto que aporta rapidez, precisión y puede funcionar por largos periodos de tiempo sin descanso, de acuerdo con la programación de las tareas asignadas.

En la medicina el uso de la robótica se ha convertido en un instrumento indispensable, ya que cumple tareas muy importantes como:

- Mediciones y tareas repetitivas
- Terapia y rehabilitación: miembros artificiales, robots de soporte a las terapias de rehabilitación o robots para proveer asistencia personal en hospitales
- Mejorar procesos quirúrgicos
- Almacenaje y distribución de medicamentos

En el campo militar es indispensable para labores de supervivencia, por ejemplo, desactivar bombas o en búsqueda y rescate en catástrofes. En cuanto a la educación, su aporte significativo permite fomentar e incentivar el aprendizaje y las habilidades mediante el uso de robots.

El empleo de unidades robóticas en la actualidad va aumentando significativamente, es así que, en 2019, según la Asociación de Industrias Robóticas (RIA) [37] "los pedidos de unidades robóticas norteamericanas de 2019 aumentaron un 1,6% en comparación con los resultados de 2018, con 29,988 unidades robóticas ordenadas". Los ingresos totales por pedidos para 2019 fueron de \$ 1.681 mil millones.

Existe un gran interés en el uso de robots con Inteligencia Artificial, ya que estos pueden acelerar los procesos para lograr la perfección en la producción, así también los robots que aporten gran fuerza son bien demandados y son utilizados especialmente en el sector automovilístico.

La robótica como método de enseñanza también tiene un aporte muy importante en la sociedad, es así que desde hace varios años se ha venido incorporando como herramienta de soporte a la enseñanza en diferentes países a lo largo del mundo como se menciona en [3] [4] [5], en estos proyectos se dotó a las escuelas y colegios secundarios con prototipos robóticos que dan soporte al aprendizaje de una manera más didáctica, esta integración en las aulas de clases permitió despertar el interés e incrementó el compromiso y motivación de los estudiantes en el aprendizaje de matemáticas y programación. En la actualidad existen diferentes kits para la construcción de robots que son utilizados como herramientas para incentivar el aprendizaje. Productos como LEGO Dacta, LEGO CyberMaster se encuentran en el mercado y se usan con frecuencia en universidades e instituciones educativas [38] [39].

## **2.2. Robótica como soporte a la enseñanza.**

A lo largo de la historia, las matemáticas han sido una de las ciencias más relevantes para la humanidad brindando importantes aportes al desarrollo científico, intelectual y tecnológico de la sociedad, transformando la vida diaria de las personas y el entorno que les rodea. Las matemáticas se constituyen actualmente como la base de varias ciencias, siendo indispensable su aprendizaje y comprensión [1].

La robótica está ofreciendo en los últimos tiempos una estrategia didáctica para facilitar un aprendizaje significativo mediante el empleo de las TIC, especialmente hoy que nos encontramos en plena era de la sociedad del conocimiento, la cual permite al estudiante responder a los retos que nos exige el presente siglo XXI tales como: Capacidad de abstracción, flexibilización, comprensión lectora, autonomía, interés por el conocimiento, responsabilidad, solidaridad e individualización, es por ello que la robótica como ciencia se ha convertido en un instrumento didáctico y pedagógico para brindar facilidades de comprensión, abstracción, y motivación para que los estudiantes puedan desarrollar desde tempranas edades, habilidades y destrezas complejas y superiores las mismas que se asocian con las actividades lúdicas para generar un valor agregado en el patrimonio cognitivo, afectivo y motriz.

### **2.2.1. Beneficios del uso de la robótica en la enseñanza.**

La robótica es un compendio de diferentes disciplinas que aporta a los niños conocimientos relativos a Ciencias, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas. Transmitirles de una manera transversal y divertida este abanico de conocimientos facilita el desarrollo del pensamiento lógico, al mismo tiempo que estimula su creatividad y les permite familiarizarse con el funcionamiento de objetos programables con lo que, de hecho, ya están en contacto a diario [40].

Según Alfredo Pineda [40], profesor de Informática en la Universidad Pública de Navarra (UPNA) manifiesta que la robótica educativa estimula a los alumnos la agilidad mental, la habilidad investigadora, el pensamiento, la crítica y el razonamiento ordenado.

Hoy en día, con la era de la sociedad del conocimiento, los padres y docentes deben modificar su esquema mental y derivar sus prácticas educativas mediante el uso de la tecnología como es la robótica, instrumento auxiliar en la didáctica para la transmisión de los conocimientos hacia los estudiantes desde los niveles inferiores hasta los superiores, por cuanto los niños y niñas actuales ya son nativos digitales y frente a ello no queda otra opción que aprovechar esas bondades del estudiante para desarrollar la curiosidad y el interés por redescubrir [40].

Son muchas las bondades que la robótica aporta a la educación y al desarrollo intelectual de los estudiantes, por lo tanto, las autoridades que administran educación mediante un amplio

juicio ponderado deberían rediseñar el currículo e introducir la robótica y el pensamiento lógico en el pensum de estudio de cada nivel.

A continuación, se detalla las bondades que ofrece la robótica como ciencia para la formación académica de los estudiantes [40].

- Permitir que los estudiantes se involucren en sus propios procesos de aprendizaje.
- Mejorar su autoestima y su afán de superación, al mismo tiempo que les ayuda a mejorar su tolerancia frente a la frustración.
- Fomentar el desarrollo del pensamiento lógico, de la intuición científica y de la creatividad.
- Desarrollar habilidades para la resolución de problemas y para la investigación.
- Desarrollar habilidades de lectoescritura.
- Facilitar que la consecución de metas y objetivos se convierta en un hábito.
- Formar como sujetos capaces de pensar por sí mismos y de apreciar el valor de la motivación propia.
- Alimentar su evolución como autodidactas.
- Fomentar y estimular habilidades que serán de enorme importancia en sus futuras profesiones como el razonamiento analítico, el razonamiento lógico o el pensamiento crítico.
- Estimular el interés por las ciencias tecnológicas, uno de los campos con mayor futuro profesional.

### **2.2.2. Robótica educativa.**

La Robótica Educativa permite a las generaciones de relevo llevar a cabo el aprendizaje basado en entornos para desarrollar la iniciativa y la actividad de los estudiantes. La pedagogía cibernética y la robótica pedagógica está destinada a la solución de problemas que se presentan en las diferentes áreas del conocimiento científico, tales como: la matemática, las ciencias naturales y experimentales, la tecnología, las ciencias de la información y la comunicación, entre otras.

Durante estos últimos tiempos la aplicación de la robótica en la enseñanza a nivel de educación básica, secundaria y universitaria entró en auge, especialmente en las áreas técnicas ha crecido significativamente, tanto así que industrias como LEGO, pionera en esta área,

desarrollaron los primeros kits robóticos, para capacitación de niños y jóvenes. Hoy LEGO lidera el mercado de robots educativos, expandiéndose para todas las edades. La robótica en un entorno pedagógico debidamente organizado y sistematizado, permite que su incursión en etapas académicas como la secundaria hasta llegar a la universidad, sean una realidad [41].

Cabe añadir, que el proceso de enseñanza-aprendizaje en esta área, motiva y desarrolla el pensamiento convergente como es la creatividad del estudiante, enlaza directamente con la ciencia, tecnología e ingeniería, donde la física, las matemáticas y la programación, son las bases que se fundamentan y consolidan utilizando la robótica como método de estimulación en el aprendizaje [41].

La robótica permite el progreso y desarrollo tecnológico. Por ello, la apropiación del conocimiento en este campo es clave, para conseguir los más altos niveles de competitividad y productividad a futuro en un país [41].

Para concluir podemos exteriorizar que el objetivo de la enseñanza de la robótica es despertar el interés por las ciencias y la ingeniería en los estudiantes desde sus primeros niveles de formación académica.

### **2.3. Etapas para organizar una clase con robótica**

De acuerdo con Bravo & Forero [42], el proceso por el cual se implementa un proyecto de robótica en el aula consta de cuatro etapas:

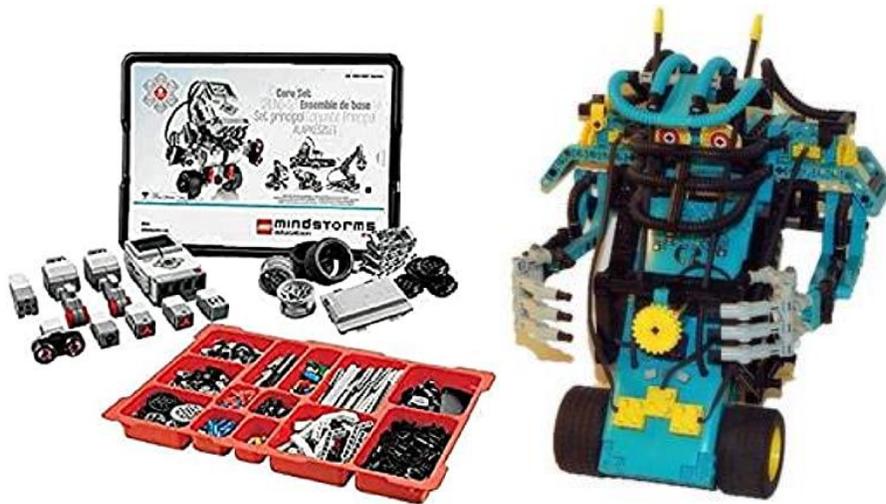
- a. **Etapas de integración de recursos tecnológicos al currículo:** Uno de los problemas por el cual atraviesan los docentes es no tener claro la manera de como incluir la robótica en la clase, es por ello, que lo primero que se debe hacer es realizar una actividad extraescolar a través de talleres con un número pequeño de participantes o a su vez mediante proyectos robóticos en el aula sin conectarlos con el resto de las materias. No podemos por ninguna razón tratar de considerar que la robótica deba ser algo desvinculado del aula, más bien introducirla como un recurso que permita generar ambientes interdisciplinarios de aprendizaje, tomando conciencia de las ventajas que presenta emplear esta técnica como un elemento idóneo en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

- b. **Etapa de reestructuración en las prácticas pedagógicas:** Al tratar de cambiar las prácticas escolares en el salón de clases, se debe modificar el estilo de enseñanza, estableciendo una metodología que favorezca el proceso de enseñanza-aprendizaje utilizando modelos robóticos y programas especializados con fines pedagógicos. Este cambio exige una transformación del alumno y del docente. Donde el estudiante se vuelve más activo siendo el protagonista de su aprendizaje, y el docente asume el papel de mediador pedagógico, organizando los contextos y orientando el proceso de aprendizaje, permitiendo una comprensión profunda de los temas tratados.
  
- c. **Etapa de instrumentación:** A la hora de incluir un proyecto robótico se debe contar con herramientas que permitan construir y programar diferentes modelos. En el salón de clases se cuenta con más de una herramienta robótica porque si solo se trabaja con una, es posible que los estudiantes pierdan interés por aprender, puesto que no pueden actuar directamente en la actividad. Muchas veces se cree que el manejo de esta herramienta robótica en el aula debe ser manejada únicamente por alguien con conocimientos, es decir, únicamente por el docente.
  
- d. **Etapa de definición del uso pedagógico de los recursos tecnológicos:** En los diferentes salones de clases no únicamente se debe contar con estas herramientas o recursos robóticos para generar ambientes de aprendizaje, sino que también hay que saber aplicarlas adecuadamente en el aula. Las actividades diseñadas a través de herramientas robóticas permiten un planteamiento pedagógico previo que guíe y regule su empleo.

Este tipo de actividades permite al estudiante participar, generando diversos ambientes de aprendizaje donde ponen en práctica los temas vistos y consideren sus propias ideas de los conceptos que están aplicando. Es necesario que cuando un docente tenga problemas en el uso de esta herramienta, recurra a personas expertas que le brinden apoyo en el diseño de estas actividades y den pautas a los docentes para realizar nuevas actividades.

## 2.4. Herramientas robóticas utilizadas en la enseñanza de matemáticas.

En la actualidad existen diferentes kits para la construcción de robots que son empleados como herramientas para incentivar el aprendizaje. Productos como Lego Mindstorms EV3, LEGO CyberMaster se encuentran en el mercado y se usan con frecuencia en universidades e instituciones educativas [38] [39].



*Figura 1. Izquierda: Lego Mindstorms EV3; derecha: Lego CyberMaster [43].*

En América Latina, varias investigaciones han demostrado que la integración de la robótica como método alternativo para elevar la calidad de la educación ha obtenido muy buenos resultados. Desde hace varios años se han insertado herramientas robóticas en las aulas de clase, en 1998 se inició el proyecto “Robótica y Aprendizaje por Diseño”, realizado conjuntamente por el Centro de Innovación Educativa de la Fundación Omar Dengo y el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, este proyecto está dirigido a niños, niñas y adolescentes de escuelas y colegios rurales de Costa Rica, cuyo propósito es elaborar ambientes de aprendizaje utilizando el diseño, construcción y programación con robótica y las TIC. Para profundizar el aprendizaje, los estudiantes desarrollan proyectos utilizando tecnologías digitales existentes, con las cuales elaboran prototipos de solución a problemas que presentan las diferentes comunidades del país [44] [45].



Figura 2. Estudiantes de colegios de Barrancas - Chile, trabajan con un kit robótico implementado por el ministerio de educación de Chile (JUNAEB) [46].

En 1981, Richard E. Pattis creó el emulador “Karel el robot” dirigido a principiantes en el estudio de la programación, esta herramienta permite programar un robot virtual que sigue instrucciones sencillas como trasladarse por calles y avenidas en las que deberá recoger trompos, guardarlos y llevarlos a otro lugar dependiendo de la finalidad que se le dé, los estudiantes aprenden a programar de forma lógica, creativa y ordenada, de esta manera se promueve y se incentiva el aprendizaje de la programación, este emulador usa un lenguaje de programación que se encuentra distribuido como software educativo de código abierto [47].

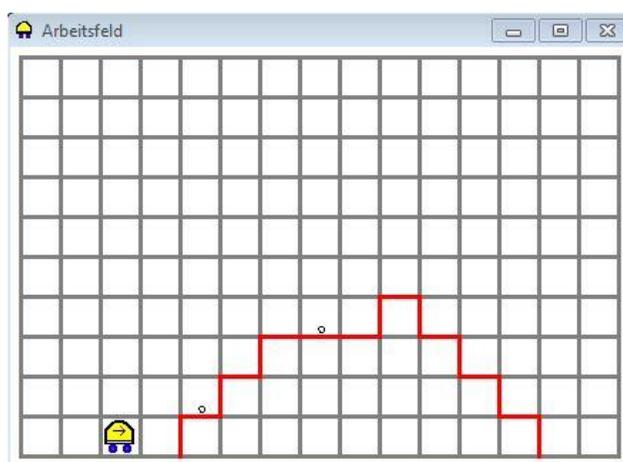


Figura 3. Captura de pantalla del emulador “Karel el robot”, 2011 [48].

La empresa KUKA construyó el robot Kuka youBot, una plataforma móvil compuesto por un base con desplazamiento omnidireccional, y un brazo manipulador de cinco ejes y una pinza de dos dedos montados sobre el chasis, fue diseñado para servir de ayuda a la investigación y a la enseñanza científica, desarrollada como una plataforma de código abierto, utiliza el sistema operativo Ubuntu y cuenta con una API, ya que posee una minicomputadora a bordo. Además de ello, se puede emplear con ROS, para facilitar flexibilidad a los estudiantes que tienen afinidad por la robótica en el desarrollo de aplicaciones con esta plataforma [49].



*Figura 4. Plataforma móvil “KUKA youBot” [49].*

En México también se han desarrollado importantes aportes para la aplicación de los robots en los ambientes educativos, la empresa Sual Labs diseña y desarrolla productos en los cuales se integran materiales de electrónica y robótica 100 % nacionales, involucrando así currículos, contenidos programáticos y manuales de alumno para incentivar el conocimiento tecnológico [50] [2]. En Argentina, la empresa Robot Group se dedica a la investigación, diseño, capacitación y fabricación de material didáctico para la inserción de la robótica dentro del ámbito educativo, es así como esta empresa provee a las escuelas de todo el país material pedagógico para promover y motivar el aprendizaje por la ciencia y la robótica tanto en estudiantes como en docentes [50].

En cuanto a las plataformas móviles omnidireccionales existen diferentes prototipos que han sido desarrollados y enfocados a la educación, tal es el caso de la Plataforma REAS desarrollada por el grupo de investigación DEDALO y ARMOS de la Universidad Distrital

Francisco José de Caldas y la Universidad Nacional de Colombia la cual está destinada exclusivamente para ser utilizada en laboratorios, su diseño consta de tres ruedas una de ellas es omnidireccional, logrando evitar el bloqueo de movimiento hacia cualquier dirección, la superficie de movilidad en la cual opera esta plataforma es plana, se utilizan sensores de distancia y de posición para detectar obstáculos a 1m de distancia [50].



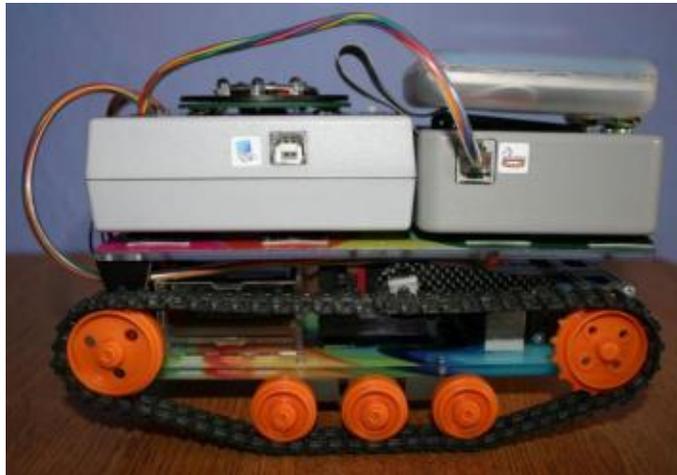
*Figura 5. Plataforma robótica móvil omnidireccional REAS [51].*

En 2015, miembros de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas de Colombia desarrollaron una plataforma móvil empleando ROS como software de comunicación y control, esta herramienta estuvo destinada a fortalecer la formación profesional de estudiantes de Ingeniería Eléctrica implementando estrategias de aprendizaje que implican el diseño de tareas de navegación, evasión de obstáculos y la construcción del robot, permitiendo de esta manera a los estudiantes modificar e incluso a rediseñar por completo el prototipo. La plataforma robótica consta de una estructura mecánica móvil, un procesador Cortex-A7 y un entorno de programación de alto rendimiento ROS OS. Se realizaron algunas pruebas a los estudiantes de la facultad, llegando a la conclusión de que esta herramienta es un excelente motivador tanto para el aprendizaje como para la participación en temas de investigación [52].

En 2010 se desarrolló por parte de estudiantes egresados de la carrera de ingeniería electrónica de la Universidad Politécnica Salesiana la tesis “Diseño y construcción de un Kit didáctico de experimentación científica - tecnológica para motivar a niños y niñas entre 10 y 11 años por la ciencia y la tecnología” en este proyecto se crearon una serie de módulos básicos con contenidos sobre electricidad, magnetismo, energías renovables, aparatos digitales y un módulo de aplicación que implica la construcción mecánica y programación de un robot el cual desarrolla

funciones determinadas, también contiene una guía multimedia que sirve como herramienta para seguir los contenidos de los distintos módulos y de esta forma interactuar de manera amigable y adaptada al lenguaje y nivel de comprensión de los niños y niñas que fueron parte de esta investigación [53].

La implementación de este proyecto consiguió muy buenos resultados, logrando un porcentaje promedio de motivación por parte de los niños de un 90,32% y el nivel de aprendizaje aumentó en un 74,33% basándose en el estudio que se realizó, demostrando que la tecnología puede servir como una herramienta sólida para la motivación y el aprendizaje en el área de la ciencia y la tecnología [53].

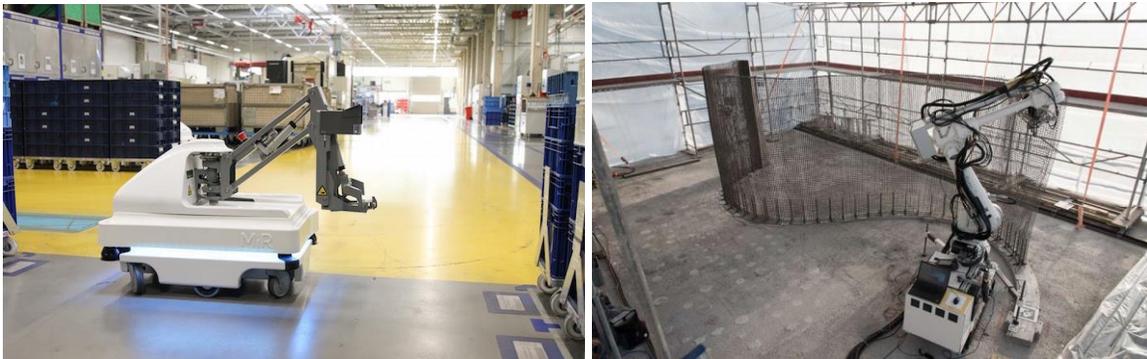


*Figura 6. Robot didáctico de experimentación científica – tecnológica, desarrollado por estudiantes de la UPS [53].*

## CAPÍTULO 3: Modelo matemático del robot omnidireccional

Los robots móviles (ARM) tienen la capacidad para desplazarse de un sitio a otro de manera autónoma, con o sin la asistencia externa de un operante. Los robots móviles, a diferencia de los robots industriales que únicamente pueden moverse bajo un área específica de trabajo, tienen la particularidad de moverse libremente sobre diferentes áreas de trabajo, cumpliendo así las tareas encomendadas.

Este tipo de robots son útiles para aplicaciones típicas con estructuras mecánicas poco complejas y con bajo consumo de energía, sus múltiples funciones han demostrado su eficacia ya sea en tareas para empresas o la sociedad en general.



*Figura 7. Izquierda: Robot móvil para transporte de carga pesada; derecha: Robot In situ Fabricator, creado para el área de la construcción en el Laboratorio de Fabricación Robótica de ETH Zurich [54].*

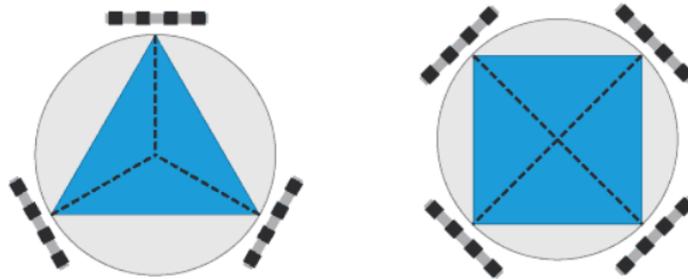
Los robots móviles también incluyen manipuladores ligeros equipados sobre sus plataformas para realizar tareas con fines múltiples o específicos, pero estos poseen una limitación en su movimiento que dependerá de la distribución y el tipo de sus ruedas, razón por la cual en este proyecto optaremos por un tipo más específico de robot, detallado a continuación.

### 3.1. Robots móviles omnidireccionales

Se caracterizan por poseer máxima maniobrabilidad sobre un área plana, es decir, puede desplazarse en cualquier dirección sin necesidad de rotar o reorientarse, a diferencia de otros robots

que no disponen de este tipo de movilidad para llegar hasta una ubicación establecida, puesto que deben girar y cambiar su dirección.

Estos tipos de robots por lo regular emplean una disposición axial, pero existen infinitas disposiciones posibles, todo depende del tipo de control que se aplique. Por lo regular se las ejecuta usando tres, cuatro o más ruedas omnidireccionales, con la restricción de que las ruedas queden alineadas perfectamente y sus ejes corten en un único punto. Cualquiera sea la distribución, el chasis puede adquirir cualquier forma, sea esta: circular, cuadrada, poligonal, como se muestra en la Figura 8



*Figura 8. Distribución de ruedas en robots móviles omnidireccionales [55].*

Los robots móviles con tres ruedas por lo general utilizan ruedas de tipo universal, que tienen un ángulo de rodillo de  $90^\circ$  debido a que su control y dirección es simple y disponen de una estabilidad limitada, por otra parte, los robots omnidireccionales que utilizan cuatro ruedas pueden usar las de tipo mecanum con un ángulo de rodillo de  $\pm 45^\circ$ , aunque esto dependerá del diseño y la funcionalidad del robot. Las ruedas mecanum permiten mejor estabilidad y tracción en sus cuatro ruedas por su mecánica y controles complejos.

Los tipos de ruedas más comunes que se usan sobre los robots móviles omnidireccionales como medio para desplazar el vehículo sobre superficies planas son:

### **3.1.1. Rueda Universal**

Constituida por pequeños rodillos montados perpendicularmente al eje de rotación de la rueda sobre su diámetro exterior. Permitiendo el giro paralelo de la rueda con su eje como una

rueda normal. Este tipo de rueda restringe la combinación de movimientos, pero no restringe su giro.

Una plataforma robótica puede moverse de manera omnidireccional mediante el uso de varias ruedas universales distribuidas alrededor de esta, las fuerzas que se aplican a cada rueda proporcionan dicha movilidad, permitiendo obtener un desplazamiento en cualquier dirección, la estabilidad de la plataforma dependerá de la distribución y el número de ruedas universales que se empleen.

Las ruedas universales pueden tener una o varias filas de rodillos, un mayor número permite disminuir las discontinuidades del rodillo, sin embargo, del número de filas dependerá la complejidad de la odometría y el control, puesto que el punto de contacto de la rueda se desplaza entre las filas de rodillos interior y exterior.

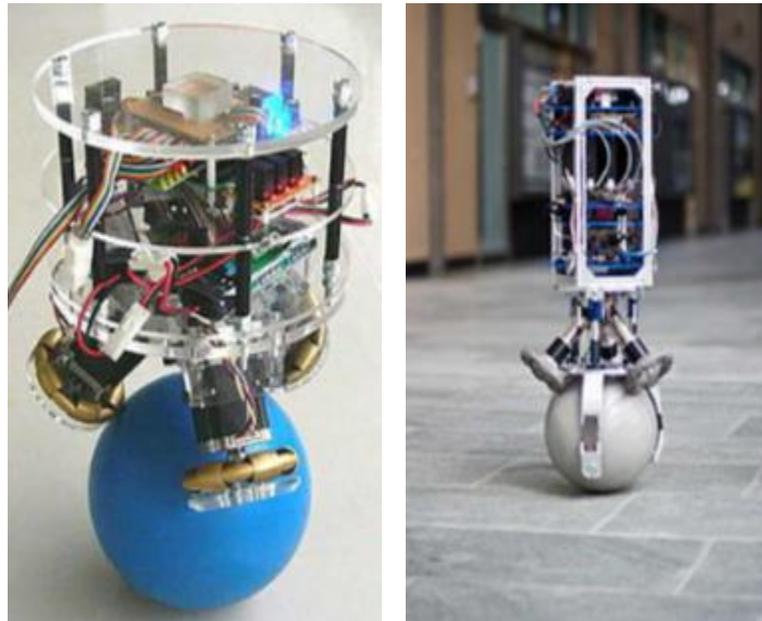


*Figura 9. Rueda Universal Omnidireccional de tres filas de rodillos [56].*

### **3.1.2. Rueda esférica**

Las ruedas esféricas tal como su nombre lo indica tienen forma de esfera, como se puede observar en la Figura 10. Los robots que utilizan este tipo de rueda requieren un control de posicionamiento activo puesto que el robot podría resultar inestable y este simplemente se caerá.

La rueda esférica puede realizar movimientos en todas las direcciones, ya sea en una superficie plana, horizontal o inclinada, los motores que se utilicen para generar el movimiento de la rueda deben estar coordinados entre sí y ser lo suficientemente potentes para romper la inercia y transmitir la potencia necesaria a la rueda sin pérdidas de energía debido a la fricción [57].



*Figura 10. Robots empleando una rueda esférica; Izquierda: desarrollado en la universidad de Tohoku Gakuin, Japón, en 2008; derecha: desarrollada en ETH, Zurich, Suiza, en 2010 [57].*

### **3.1.3. Rueda mecanum o rueda sueca.**

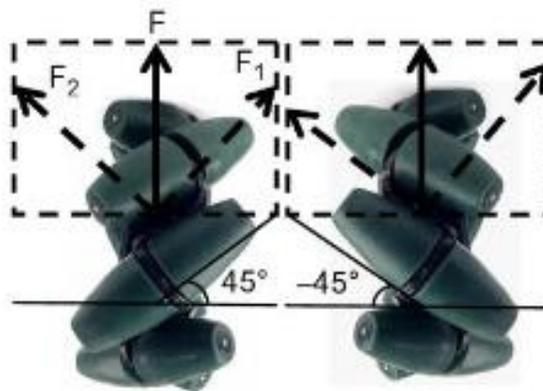
Las ruedas mecanum al igual que las ruedas universales y esféricas, realizan movimientos omnidireccionales, por lo que la plataforma o robot que contenga este tipo de ruedas puede moverse en cualquier dirección del espacio, la característica principal del diseño de estas ruedas son sus rodillos los cuales están unidos oblicuamente a toda la circunferencia de la llanta y orientados de forma perpendicular a la dirección normal del avance [27], por lo general cada uno de estos rodillos tiene un eje de rotación a  $45^\circ$  con respecto al plano de la rueda y a  $45^\circ$  con respecto a la línea del eje. Cada rueda tiene su propio sistema de propulsión y es independiente, sin dirección [28].

Por lo general este tipo de ruedas deben tener contacto con superficies planas y sin rugosidades para que la fuerza producida por los rodillos pueda actuar sobre el suelo.



*Figura 11. Rueda Mecanum.*

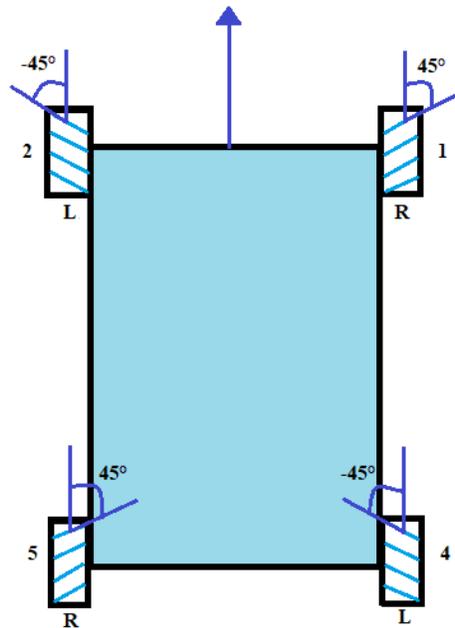
Como se puede observar en la Figura 12, sobre el rodillo se descomponen dos fuerzas: la primera  $F_1$  es paralela al eje del rodillo y la segunda  $F_2$  es perpendicular al eje del rodillo. La fuerza paralela al rodillo  $F_1$  ejerce una fuerza sobre la rueda y esta a su vez sobre el vehículo, lo que resulta en la velocidad central  $v_h$ . La velocidad perpendicular al rodillo  $F_2$  permite una pequeña rotación de los rodillos a la que denominaremos  $v_r$ . La velocidad actual  $v_t$  del vehículo es la combinación de las dos velocidades  $v_h$  y  $v_r$  [58].



*Figura 12. Izquierda: rueda Mecanum con  $\alpha=45^\circ$ ; derecha: rueda Mecanum con  $\alpha=-45^\circ$  [58].*

### 3.2. Modos de locomoción de un robot móvil de cuatro ruedas mecanum

El diseño del robot móvil omnidireccional de este proyecto dispone de cuatro ruedas mecanum, dos de ellas conocidas como zurdas y las otras dos conocidas como diestras, estas ruedas están distribuidas a cada lado del robot como se puede ver en la siguiente figura.



*Figura 13. Distribución de ruedas zurdas y diestras en el robot móvil omnidireccional.*

La diferencia principal entre estos dos tipos de ruedas mecanum es la orientación de los rodillos, como se puede observar en la Figura 14. Los rodillos de la rueda izquierda están orientados desde la parte inferior derecha hacia la superior izquierda, mientras que para la rueda derecha la orientación es al revés.



*Figura 14. Orientación de los rodillos para las ruedas zurda con ángulo  $\alpha=45$  y diestra con ángulo  $\alpha=-45$  [59].*

Cuando se aplica una fuerza lateral a la rueda, los rodillos giran sobre sí mismos y permiten tener velocidad en la dirección del eje de giro, de esta manera, cada rueda generará un empuje aproximadamente paralelo a la diagonal del marco correspondiente. Cuando cada rueda varía su velocidad de rotación y dirección, se produce la suma de vectores de fuerza de cada rueda, creando así movimientos lineales o rotacionales del robot. [30] A continuación, se presenta algunos modos básicos de locomoción de un robot móvil omnidireccional con cuatro ruedas mecanum.

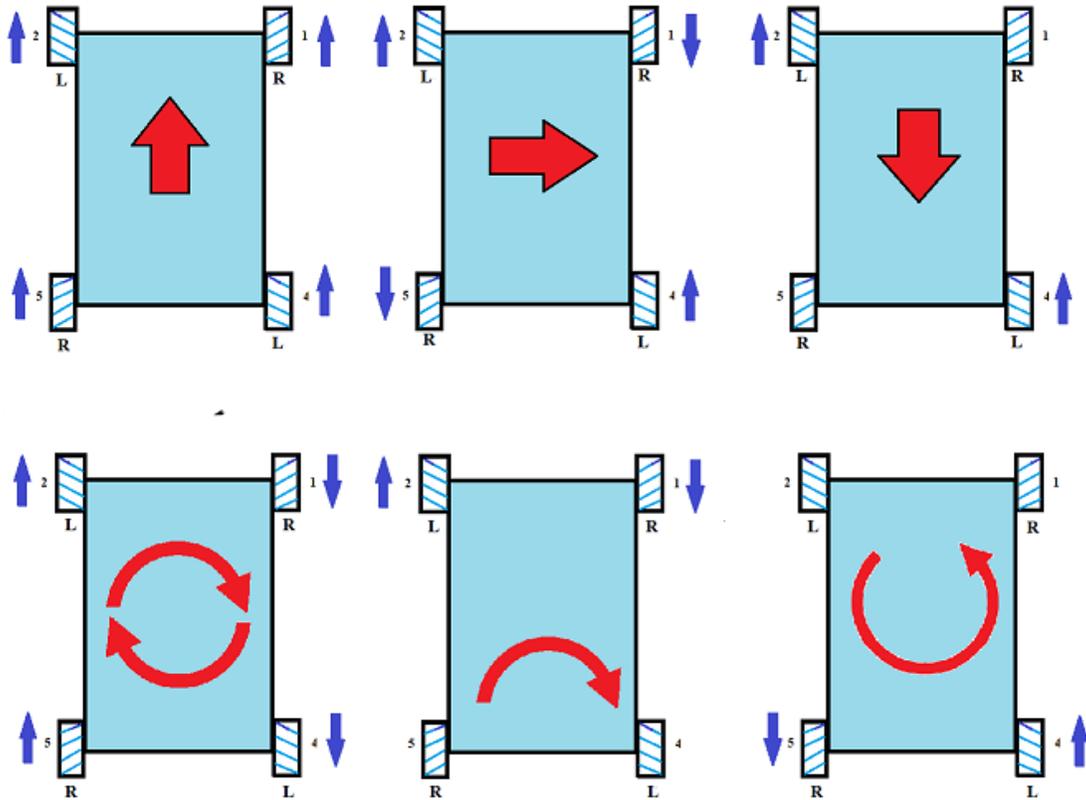


Figura 15. Modos básicos de locomoción del robot móvil omnidireccional con cuatro ruedas mecanum.

Las flechas sobre la plataforma del robot indican la dirección del movimiento del robot. Dependiendo el movimiento de las ruedas el robot se moverá en una dirección determinada, por ejemplo:

- Si se desea que el robot se mueva hacia adelante, las cuatro ruedas deben girar en la misma dirección y velocidad, por el contrario, si se desea que el robot se mueva hacia atrás, las ruedas deben moverse en sentido contrario al giro hacia delante, en la misma dirección y velocidad, esto provocará que los vectores de fuerza longitudinal se sumen y que los vectores transversales se cancelen entre sí.
- Si dos ruedas a un lado del robot giran en una dirección y las otras dos del otro lado de la plataforma giran en dirección contraria, todas a una misma velocidad, se generará una rotación estacionaria, esto se produce debido a que los vectores longitudinales se acoplan

generando un par alrededor del eje vertical central del robot y los vectores transversales se cancelan entre sí.

- Si un par de ruedas diagonales del robot giran a una misma dirección y el otro par de ruedas diagonales giran en dirección opuesta, todas a una misma velocidad, generará un movimiento lateral debido a que los vectores transversales se suman y los vectores longitudinales se cancelan.

Una combinación de movimientos diferenciales de las ruedas permitirá el movimiento del vehículo en casi cualquier dirección con cualquier rotación.

### **3.3. Modelo matemático de un robot móvil omnidireccional con ruedas mecanum**

El modelo matemático utilizado para este proyecto es el que se utiliza en [60] y se explica a continuación.

La obtención de la cinemática directa e inversa son factores clave para el estudio dinámico de los robots móviles, la cinemática analiza la configuración de los robots en su lugar de trabajo, tales como: características de estabilidad y control del robot, además de la relación directa con sus parámetros geométricos y las limitaciones impuestas en sus trayectorias.

De la estructura geométrica, los grados de libertad disponibles y la naturaleza que tenga el robot se derivarán sus ecuaciones cinemáticas.

La cinemática estudia el movimiento del robot en función de su geometría, fijándose en la posición, velocidad y aceleración sin considerar las fuerzas que lo ocasionan. Del modelo matemático partirá la solución a los problemas de control del robot móvil omnidireccional.

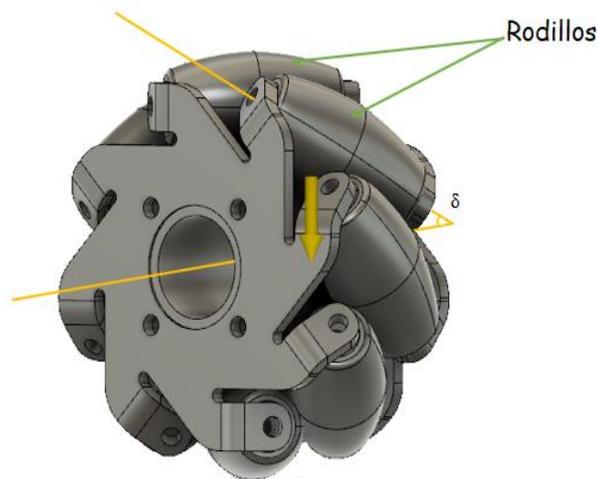
#### **3.3.1. Modelado cinemático de un robot móvil omnidireccional con ruedas mecanum**

La cinemática diferencial relaciona las velocidades en el punto de interés con las velocidades que gobiernan el movimiento del robot, esta relación está determinada por una matriz

jacobiana y mediante esta se desarrollan los algoritmos de control que son diseñados para este proyecto, con los cuales se determinan la posición en la que se encuentra el robot con relación a un sistema de referencias, el seguimiento de trayectoria parametrizada en el tiempo y el seguimiento de camino dado por un conjunto de puntos.

Para la obtención del modelo cinemático se considera lo siguiente:

- El robot móvil omnidireccional consta de una plataforma colocada sobre cuatro ruedas mecanum, cada rueda está conectada a un motor de corriente continua. Para el análisis se asume que todas las ruedas tienen ángulos idénticamente orientados  $\delta$ .
- Llamamos  $\delta$  al ángulo que se produce entre el eje de rotación propia de la rueda y el eje de rotación del rodillo, tal como se ilustra en la Figura 16.
- El robot móvil se desplaza por una superficie plana y no contiene ninguna parte flexible en la estructura del robot.



*Figura 16. Modelo de rueda mecanum con ángulo  $\delta$  marcado gráficamente.*

### **3.3.2. Velocidades del robot sobre el plano XY – Cinemática directa**

Como primer paso para la obtención del modelo cinemático se describe el comportamiento del robot en el plano.

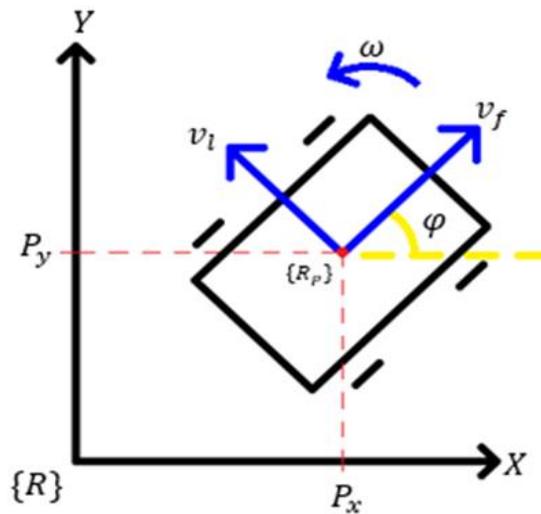


Figura 17. Diagrama de cuerpo libre del robot en el plano XY.

Donde se considera los vectores auxiliares:

$v_l =$  Velocidad lineal en x

$v_f =$  Velocidad lineal en y

$\omega =$  Velocidad angular

Como siguiente paso se calcula el modelo matemático mediante identidades trigonométricas para obtener un conjunto de ecuaciones que relacionan las velocidades del punto de trabajo con las velocidades que gobiernan el movimiento del robot.

$$\dot{P}_x = v_f \cos(\varphi) - v_l \sin(\varphi) \quad (1)$$

$$\dot{P}_y = v_f \sin(\varphi) + v_l \cos(\varphi) \quad (2)$$

$$\dot{\varphi} = \omega \quad (3)$$

Expresando las ecuaciones en su forma matricial, se tiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{P}_x \\ \dot{P}_y \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\text{sen}(\varphi) & 0 \\ \text{sen}(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_f \\ v_l \\ \omega \end{bmatrix} \quad (4)$$

Aplicando la cinemática inversa, se tiene:

$$\begin{bmatrix} v_f \\ v_l \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \text{sen}(\varphi) & 0 \\ -\text{sen}(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{P}_x \\ \dot{P}_y \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \quad (5)$$

### 3.3.3. Relación velocidad robot y velocidad de las ruedas – Cinemática directa

Para obtener la relación entre la velocidad del robot y la velocidad de las ruedas es necesario encontrar la relación de las velocidades de los motores con las velocidades globales.

En la Figura 18 se puede observar el diagrama de cuerpo libre del robot móvil omnidireccional en un marco referencial (X, Y), donde a y b representan la distancia del sistema de referencia al centro de cada una de las ruedas y {G} representa el centro del robot, se puede apreciar también que cada rueda tiene una componente de velocidad perpendicular a la dirección de los rodillos.

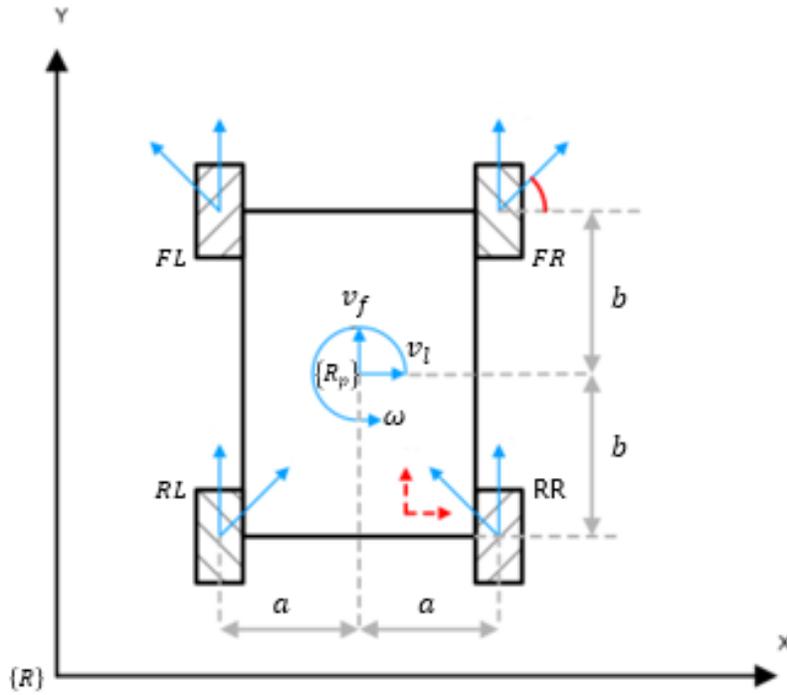


Figura 18. Esquema general del robot móvil omnidireccional.

Resolviendo el producto matricial se encuentran las ecuaciones para cada uno de los motores, con esto se calculan las velocidades de referencia a las que giran los motores.

$$\begin{bmatrix} W_{FR} \\ W_{FL} \\ W_{RL} \\ W_{RR} \end{bmatrix} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -(a+b) \\ 1 & 1 & (a+b) \\ 1 & 1 & -(a+b) \\ 1 & -1 & (a+b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_f \\ v_l \\ \omega \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$W_{FL} = \frac{1}{R} (v_f - v_l - (a+b)\omega) \quad (7)$$

$$W_{FR} = \frac{1}{R} (v_f + v_l + (a+b)\omega) \quad (8)$$

$$W_{RL} = \frac{1}{R} (v_f + v_l - (a+b)\omega) \quad (9)$$

$$W_{RR} = \frac{1}{R} (v_f - v_l + (a+b)\omega) \quad (10)$$

Los valores que se obtienen mediante el conjunto de ecuaciones serán la referencia o setpoint que se utiliza en el algoritmo PID y que se implementa en cada uno de los motores.

### 3.3.4. Relación velocidad robot y velocidad de las ruedas – Cinemática inversa

Aplicando la cinemática inversa obtenemos la velocidad global dadas las velocidades de los motores. Mediante los encoders se miden las velocidades a las que se mueven cada uno de los motores y en base a esto se determina la velocidad global a la que el robot se está moviendo, estas velocidades medidas son aplicadas al modelo cinemático.

$$\begin{bmatrix} v_f \\ v_l \\ \omega \end{bmatrix} = \frac{R}{4} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{a+b} & \frac{1}{a+b} & \frac{1}{a+b} & \frac{1}{a+b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{FR} \\ W_{FL} \\ W_{RL} \\ W_{RR} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$v_f = \frac{R}{4} (-W_{FR} + W_{FL} - W_{RL} + W_{RR}) \quad (12)$$

$$v_l = \frac{R}{4} (W_{FR} + W_{FL} + W_{RL} + W_{RR}) \quad (13)$$

$$\omega = \frac{R}{4} \left( \frac{W_{FR}}{a+b} - \frac{W_{FL}}{a+b} - \frac{W_{RL}}{a+b} + \frac{W_{RR}}{a+b} \right) \quad (14)$$

## **CAPÍTULO 4: Diseño de hardware**

En este capítulo se describen los elementos electrónicos que componen el robot móvil omnidireccional, así como el diseño de la carcasa en el software SolidWorks con sus bases, soportes laterales y frontales, además se describe el diseño, desarrollo e implementación de la placa electrónica (shield) que se conecta al Arduino mega, esto facilita la conexión de los diferentes dispositivos que conforman el circuito, mejorando la conexión y evitando cables sueltos o conexiones externas que puedan provocar daños en el circuito del robot.

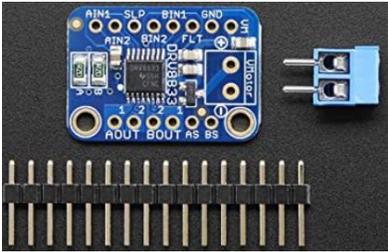
### **4.1. Componentes utilizados**

Los componentes eléctricos y electrónicos que se utilizan en el robot móvil omnidireccional son seleccionados de acuerdo con los requerimientos y necesidades del robot, por otra parte el diseño mecánico comprende la base de robot (parte inferior) que sirve de soporte para colocar los componentes eléctricos y electrónicos; un segundo diseño es la cubierta (parte superior) que sirve de protección para los componentes internos del robot, además de permitir el acoplamiento de nuevos elementos que se podrían agregar en un futuro como cámaras, LIDAR, etc. Por último, se diseñan e incorporan las bases, soportes laterales y frontales.

#### **4.1.1. Partes mecánicas y componentes electrónicos utilizados para armar el robot**

En la Tabla 1 se describen los componentes que conforman el robot móvil omnidireccional, entre ellos se encuentran los actuadores que proporcionan el movimiento del robot como son los motores, drivers e indicadores; los sensores internos como el encoder de cuadratura que permite determinar la posición, velocidad y dirección del eje del motor, por otro lado se describe el sistema de control que está conformado por un controlador y un microprocesador, adicional se describen componentes como pilares y tornillos que son útiles para fijar y separar los componentes que constituyen la plataforma del robot, por último se presenta el tipo de batería que se utiliza para alimentar el circuito.

Tabla 1. Componentes del robot omnidireccional

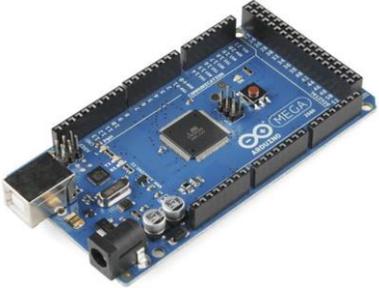
<b><u>ACTUADORES</u></b>		
<b><u>Imagen</u></b>	<b><u>Componente</u></b>	<b><u>Descripción</u></b>
	<p>Ruedas Mecanum + Kit de acoplamiento a los motores</p>	<p><b>Características:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Permiten el desplazamiento del robot sobre una superficie plana</li> <li>▪ Cantidad: 2 zurdas, 2 diestras</li> <li>▪ Acoplamiento: motor 6 mm</li> </ul> <p><b>Medidas:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Diámetro Interior: 8.26 mm</li> <li>▪ Diámetro exterior: 97mm</li> <li>▪ Grosor: 45 mm</li> </ul> <p><b>Propiedades Físicas:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Masa: 150 g</li> <li>▪ Material: Plástico</li> <li>▪ Carga: 10 Kg</li> </ul>
	<p>Driver de motor paso a paso Breakout</p>	<p><b>Características:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Permite determinar la posición, velocidad o dirección del motor, encoder</li> <li>▪ Consumo de corriente: 1.2 A</li> <li>▪ Consumo de voltaje: 2.7-10.8 V</li> <li>▪ Cantidad: 3</li> </ul> <p><b>Medidas:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Dimensiones: 76 x 51 x 25 mm</li> </ul> <p><b>Propiedades físicas:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Masa: 13.6 g</li> </ul>

		Material: Plástico, componentes electrónicos
	Motor Pololu 37Dx70L	<p><b>Características:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Resolución: 64 conteos por revolución (CPR) en eje del motor</li> <li>▪ Conteos: 4480 CPR del eje de salida de la caja de engranajes</li> <li>▪ Relación de transmisión: 70:1</li> <li>▪ Potencia: 10 W</li> <li>▪ Rendimiento sin carga: 150 RPM, 200mA</li> <li>▪ Extrapolación de parada: 27 kg·cm (380 oz·in), 5,5 A</li> <li>▪ Voltaje: 10 V</li> <li>▪ Torque: 25 Kg.cm</li> <li>▪ Velocidad: 150 rpm</li> <li>▪ Cantidad: 4</li> </ul> <p><b>Medidas:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Diámetro del eje: 7mm</li> <li>▪ Tamaño: 37 x 70 mm</li> </ul> <p><b>Propiedades físicas:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Masa: 27kg</li> <li>▪ Material: Aluminio, Plástico</li> </ul>
	Mini voltímetro medidor de batería	<p><b>Características:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Voltímetro de tres cables, la conexión de tres cables permite el rango de prueba de voltaje de 0,00 a 30 V</li> <li>▪ Precisión de medición: 0.01 (0.01 - 9.99 V) / 0.1 (10.0 - 30.0 V)</li> <li>▪ Tipo de fuente de energía: pilas</li> </ul> <p><b>Medidas:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Tres tubos LED digitales de 0.36 pulgadas</li> <li>▪ Peso: 0.160 onzas</li> </ul>

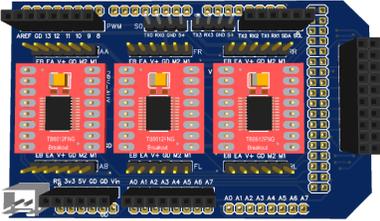
		<p><b>Propiedades físicas:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Color: Rojo</li> <li>▪ Estilo: Digital</li> <li>▪ Tipo de pantalla: led</li> </ul>
--	--	--

**SISTEMA DE CONTROL**

	<p>Raspberry Pi Zero W Kit</p>	<p><b>Características:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Sirve como medio de comunicación entre la interfaz de usuario y el robot</li> <li>▪ Conectividad: LAN-Bluetooth-HDMI-USB</li> <li>▪ RAM: 16GB</li> <li>▪ Fuente de alimentación: 2.5A</li> <li>▪ Tira de pines 2x20</li> </ul> <p><b>Medidas:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Dimensiones: 65x31x5 mm</li> </ul> <p><b>Propiedades físicas:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Masa: 10.8oz</li> <li>▪ Material: PVC</li> </ul>
---	--------------------------------	--

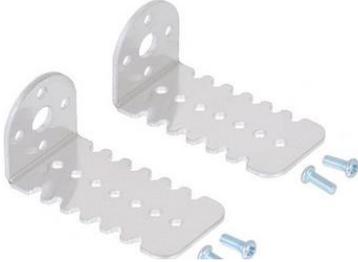
	<p>Arduino Mega 2560</p>	<p><b>Características:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Microcontrolador usado para el control del robot móvil omnidireccional, en este dispositivo se encuentran los parámetros para realizar sus movimientos.</li> <li>▪ Voltaje de operación: 5V</li> <li>▪ Pines de E/S digital: 54</li> <li>▪ Pines analógicos: 16</li> <li>▪ Corriente por cada pin: 20mA</li> <li>▪ Memoria Flash 256 KB</li> <li>▪ Frecuencia de reloj: 16MHz</li> </ul>
---	--------------------------	--

		<p><b>Medidas:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Dimensiones del producto: 101.52x53.3x1 mm</li> </ul> <p><b>Propiedades físicas:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Material: PVC y componentes electrónicos</li> <li>▪ Masa: 37g</li> </ul>
--	--	--

	<p>Placa Shield para los drivers</p>	<p><b>Características:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Placa usada para el control de los drivers del robot móvil omnidireccional</li> <li>▪ Voltaje de operación: 2.7- 10.8V</li> <li>▪ Control del PWM del motor</li> <li>▪ Cantidad: 3</li> <li>▪ Corriente por canal: 1.2 A</li> <li>▪ Se Adapta al arduino mega 2560 para usar todos sus puertos disponibles</li> <li>▪ Frecuencia de reloj: 16MHz</li> </ul> <p><b>Medidas:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Dimensiones del producto: 101.52x53.3x1 mm</li> </ul> <p><b>Propiedades físicas:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Material: PVC</li> <li>▪ componentes electrónicos</li> <li>▪ Masa: 37g</li> </ul>
---	--------------------------------------	---

**ELEMENTOS DE UNIÓN**

	<p>Soporte de latón hexagonal</p>	<p><b>Características:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Pernos y tuercas que sirven de soporte para fijar los componentes del robot</li> </ul>
---	-----------------------------------	--

		<p><b>Medidas:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ M2.5: 6 x 10, 15 x 20mm</li> </ul> <p><b>Propiedades físicas:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Material: Latón</li> </ul>
	<p>Pilar de PCB</p>	<p><b>Características:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Tornillos espaciadores hexagonales hembra - macho</li> </ul> <p><b>Medidas:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Tamaño: M3 x 50mm</li> <li>▪ Longitud: 50mm</li> <li>▪ Tamaño de la rosca: 3mm</li> <li>▪ Tamaño de tornillo opuesto: M3</li> </ul> <p><b>Propiedades físicas:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Material: Latón</li> </ul>
	<p>Pololu 25D mm Metal Gearmotor Bracket Pair</p>	<p><b>Características:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Sirve de soporte para los motores, encoders</li> <li>▪ Cantidad: 4</li> </ul> <p><b>Medidas:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Largo: 52 mm</li> <li>▪ Alto: 27 mm</li> <li>▪ Espesor: 2 mm</li> </ul> <p><b>Propiedades físicas:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Masa: 8.5g</li> <li>▪ Material: Aluminio</li> </ul>
<p><b><u>ALIMENTACIÓN</u></b></p>		
	<p>Baterías Litio 18650 + Cargador</p>	<p><b>Características:</b></p>

		<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ 2 baterías de litio recargables</li> <li>▪ Capacidad de voltaje: 3.7 V</li> <li>▪ Capacidad de corriente: 1200mA</li> <li>▪ Cargador de 4 puertos para las baterías</li> </ul> <p><b>Medidas:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Dimensiones del paquete: 185 x 133 x 36</li> </ul> <p><b>Propiedades físicas:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Desempeño: 4-7 horas</li> <li>▪ Masa: 270 g</li> <li>▪ Material: Litio</li> <li>▪ Tiempo de carga 6-8 horas</li> </ul>
---	--	---

## 4.2. Diseño de la carcasa

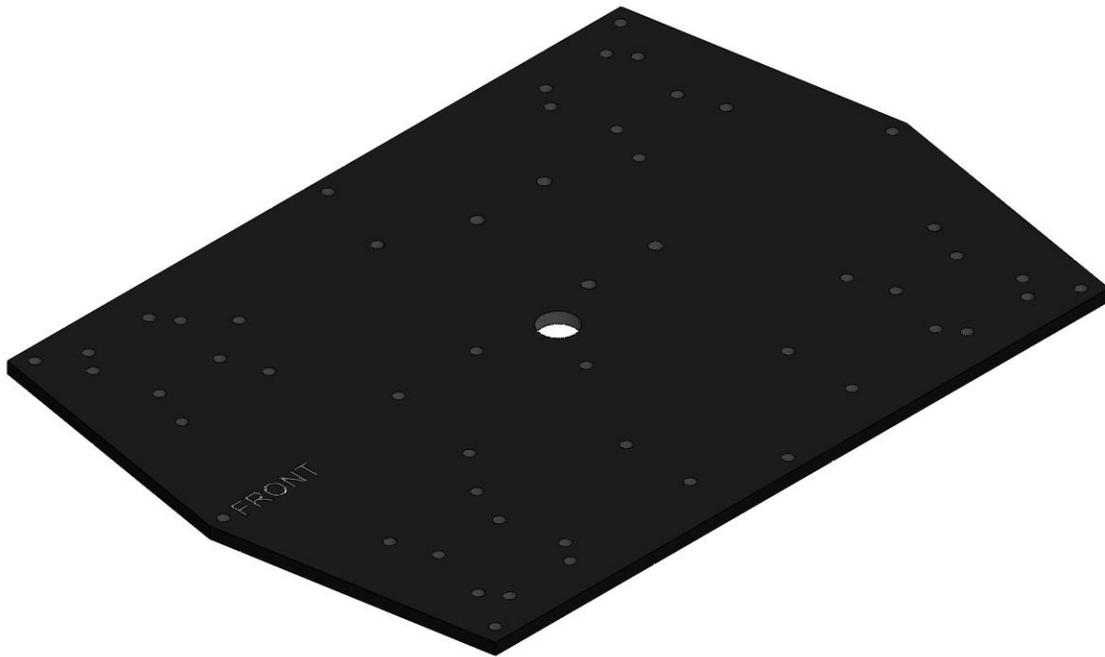
Para el diseño de la carcasa del robot móvil omnidireccional se utilizó el software de diseño asistido por computador (CAD) “SolidWorks”, en él se diseñan cada uno de los componentes de la carcasa, los mismos que son impresos en 3D o cortados con láser en acrílico para ensamblarlos como un solo conjunto. En la impresión y cortes es necesario tomar en cuenta la resolución y la triangulación de cada diseño para obtener un mejor acabado. Se utilizó filamento PLA (ácido poliláctico) para la impresión 3D que permite un mejor acabado en las piezas.

La carcasa y las bases están diseñadas de tal forma que los elementos eléctricos, electrónicos y mecánicos ocupen el menor espacio posible, facilitando las conexiones entre los componentes y que estos se acoplen adecuadamente, cumpliendo con los espacios asignados a los mismos y con características de robustez y un peso adecuado para su manipulación.

### 4.2.1. Diseño de la base

El diseño de la base del robot está dividido en espacios ranurados y agujeros en toda su superficie plana para colocar cada componente y acoplarlo mediante tornillos y espaciadores permitiendo una correcta sujeción. Se tomó en cuenta el espacio ocupado por las baterías, los motores, encoders, drivers, ruedas mecanum, raspberry, microcontrolador, microprocesador, placa electrónica, cableado y demás componentes electrónicos.

Los agujeros distribuidos en la base del robot están diseñados para obtener una distribución homogénea del peso del robot sobre su eje central. El diseño se puede apreciar en la Figura 19.



*Figura 19. Diseño 3D de la base del robot móvil omnidireccional.*

### 4.2.2. Distribución del espacio interno de la base del robot

La base está dividida por varios segmentos, entre ellos existe un espacio designado para las baterías, seguido de un espacio para colocar los drivers que controlan los motores, en las

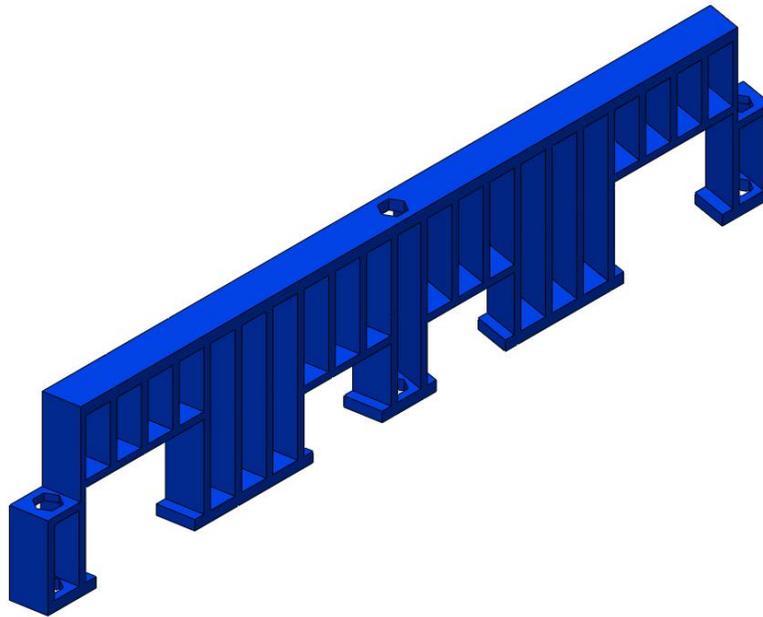
esquinas de la base se ubican los pares de brackets que sujetan a los motores y que transmiten su par de rotación a las ruedas omnidireccionales al acoplarse por medio de sus ejes.

Como última parte del diseño de la base, se designa un espacio con medidas de 65 x 31 x 5mm para colocar el Raspberry PI Zero W mientras que para el Arduino Mega 2560 se designa un espacio de 101.52x53.3x1mm.

### 4.2.3. Diseño de soportes laterales y frontales

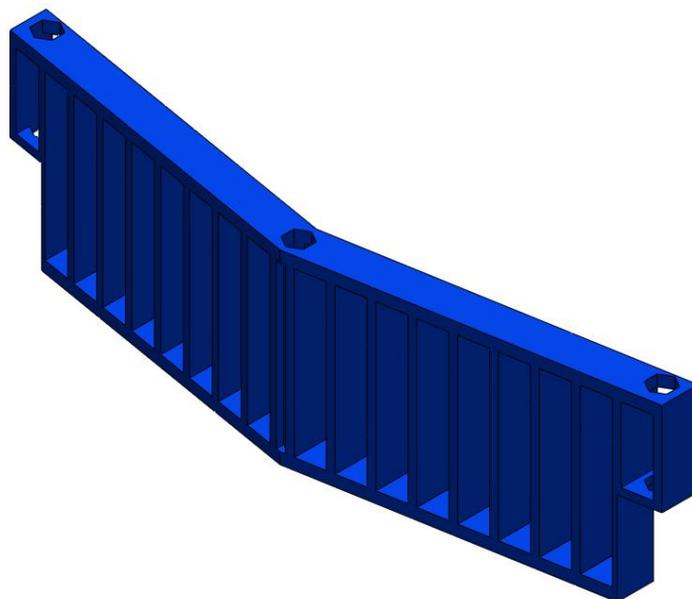
El diseño de las rejillas de la carcasa está desarrollado con el objetivo de acoplarlas a los bordes del robot y cubrirlo de tal manera que no ingrese ningún objeto extraño que pueda interferir o dañar la circuitería interna, Se diseñaron e imprimieron rejillas tanto laterales como frontales y traseras.

El diseño de las rejillas laterales se puede observar en la Figura 20.



*Figura 20. Diseño de la rejilla lateral del robot móvil omnidireccional.*

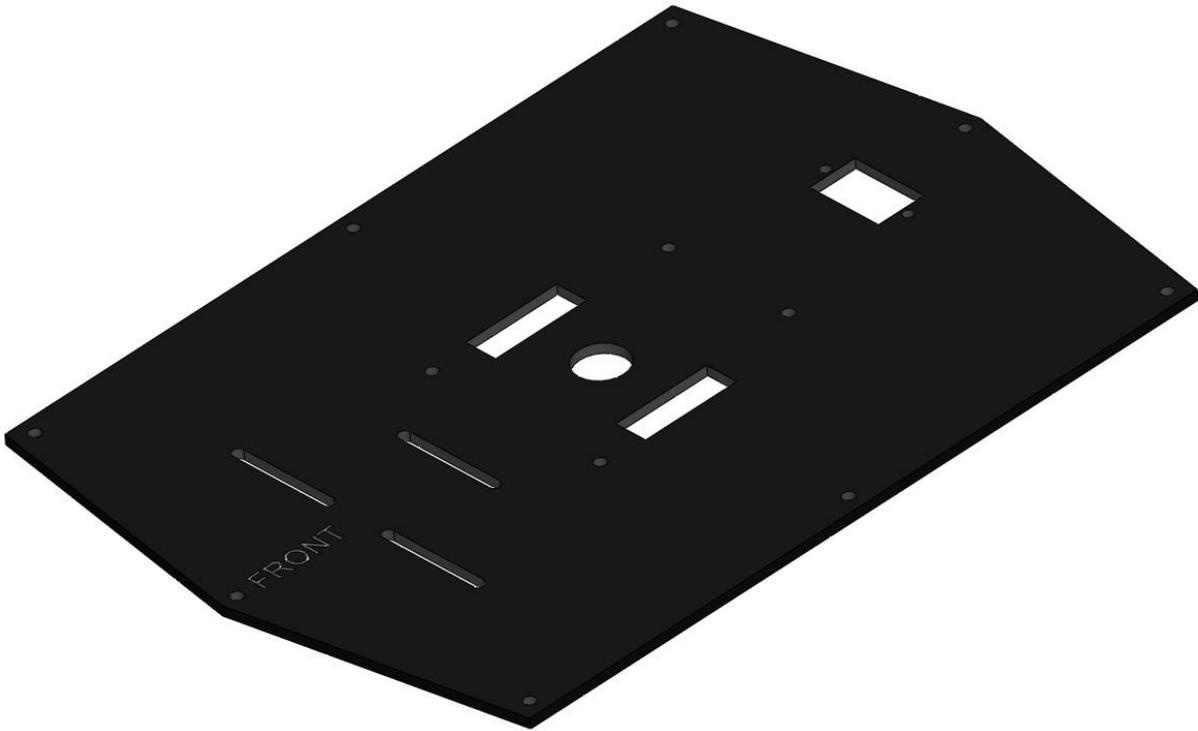
En la Figura 21 se puede observar el diseño de las rejillas frontal y trasera del robot móvil omnidireccional.



*Figura 21. Diseño de la rejilla frontal y trasera del robot móvil omnidireccional.*

#### **4.2.4. Diseño de la cubierta**

El diseño de la cubierta es similar al diseño de la base, esta sirve como soporte para conectar elementos como cámaras, LIDAR, etc. y para proteger las conexiones internas entre los componentes electrónicos; como parte del diseño se realizó un agujero de 12mm de diámetro en la mitad de la cubierta para colocar un marcador que traspasa la base con el fin de dibujar en cualquier superficie plana la trayectoria del robot. En las Figura 22 y se puede observar el diseño de la cubierta.



*Figura 22. Diseño 3D de la cubierta superior del robot móvil direccional.*

### **4.3. Esquema electrónico**

Como parte del hardware del robot se diseñó una tarjeta electrónica, dicha placa enlaza y controla todos los componentes eléctricos y electrónicos para su correcto funcionamiento a través del microcontrolador hacia los drivers y motores que en conjunto permitirán el movimiento del robot a través de las ruedas mecanum.

Una vez seleccionados los componentes óptimos y que mejor se adapten a los requerimientos y necesidades del robot, se procede a diseñar y probar el esquema electrónico del mismo, donde se muestran las alimentaciones, pines de entrada, salida y todas las conexiones entre todos los componentes, con esto se proporciona una información clara para reproducir o modificar el diseño adecuadamente.

Todos los símbolos de los componentes elegidos son colocados adecuadamente para realizar las conexiones mediante cables, considerando las especificaciones de las hojas de

características de los componentes, además es importante tomar en cuenta el conexionado de los componentes con los conectores y de estos con el Arduino para asegurar un mejor funcionamiento de la placa.

Una vez realizado el diagrama esquemático se verifica y comprueba que todas las conexiones se han ejecutado correctamente, tomando todas las consideraciones de diseño y seguridad, se presenta en la siguiente figura el esquemático de la placa desarrollada para este robot omnidireccional con sus correspondientes componentes y conexiones.

#### **4.3.1. Diseño de la placa electrónica (Shield)**

Con el objetivo de facilitar la conexión del robot omnidireccional, evitar cables sueltos y conexiones externas que puedan ocasionar errores o daños en el circuito del robot, se diseñó y desarrolló un Shield para el Arduino Mega 2560 que es utilizado en este proyecto.

Elaborado el diagrama esquemático de la placa se realiza el diseño del PCB, la forma y especificaciones son diseñadas de acuerdo con la forma del Arduino Mega 2560 por lo que sus conectores deben coincidir exactamente tanto en posición como en número para que no se generen problemas al momento de acoplarse, en la siguiente figura se puede observar el diseño de la placa y la distribución de los pines para el correcto acoplamiento de los componentes.

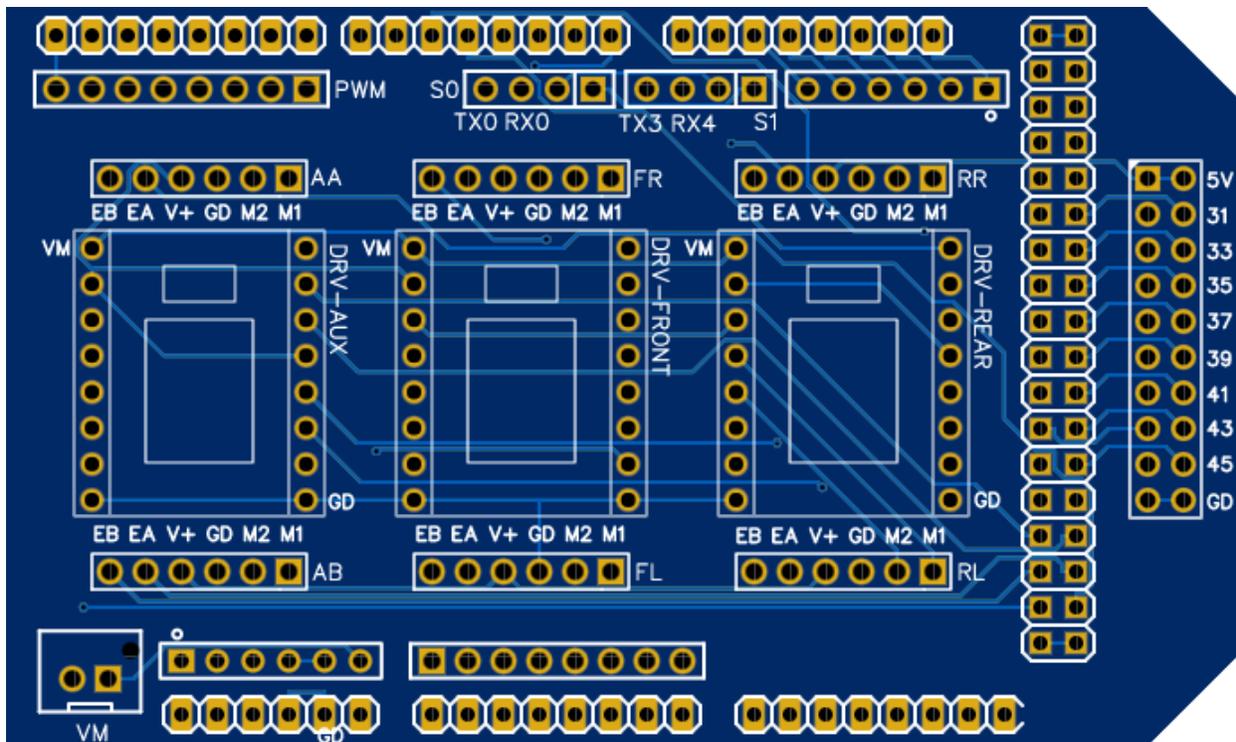


Figura 23. Distribución de los pines del Shield para los drivers y Arduino mega 2560.

El diseño de este Shield conecta todos los pines del Arduino Mega 2560 incluyendo aquellos que no están siendo usados por el robot, permitiendo así que puedan ser aprovechados posteriormente en nuevas funcionalidades.

Este shield permite el manejo y control de hasta 6 motores con sus respectivos encoders. Para el control de las cuatro ruedas omnidireccionales se utilizan dos drivers TB6612FNG, cada driver es capaz de controlar dos motores, esta placa dispone también de una entrada que es la señal PWM, adicionalmente se colocó un tercer driver con el objetivo de colocar dos motores adicionales para futuros trabajos o utilidades adicionales que se desee realizar en el robot.

Dentro del shield se colocaron dos puertos seriales que se conectan a los puertos S0 que va conectado al Raspberry y S1 que es el auxiliar, además dispone de todas las salidas que van conectadas a cada uno de los motores y los zócalos para los drivers TB6612FNG.

Los pines del bloque inferior del Arduino Mega son los pines que más se usan, estos son utilizados para controlar los motores usando las dos entradas del motor, además cada motor tiene un pin PWM que le da una señal de velocidad, este pin indica la velocidad a la que deben moverse los motores dependiendo el sentido en el que están girando.

A continuación, se puede observar la placa final con todos los componentes acoplados como corresponde.

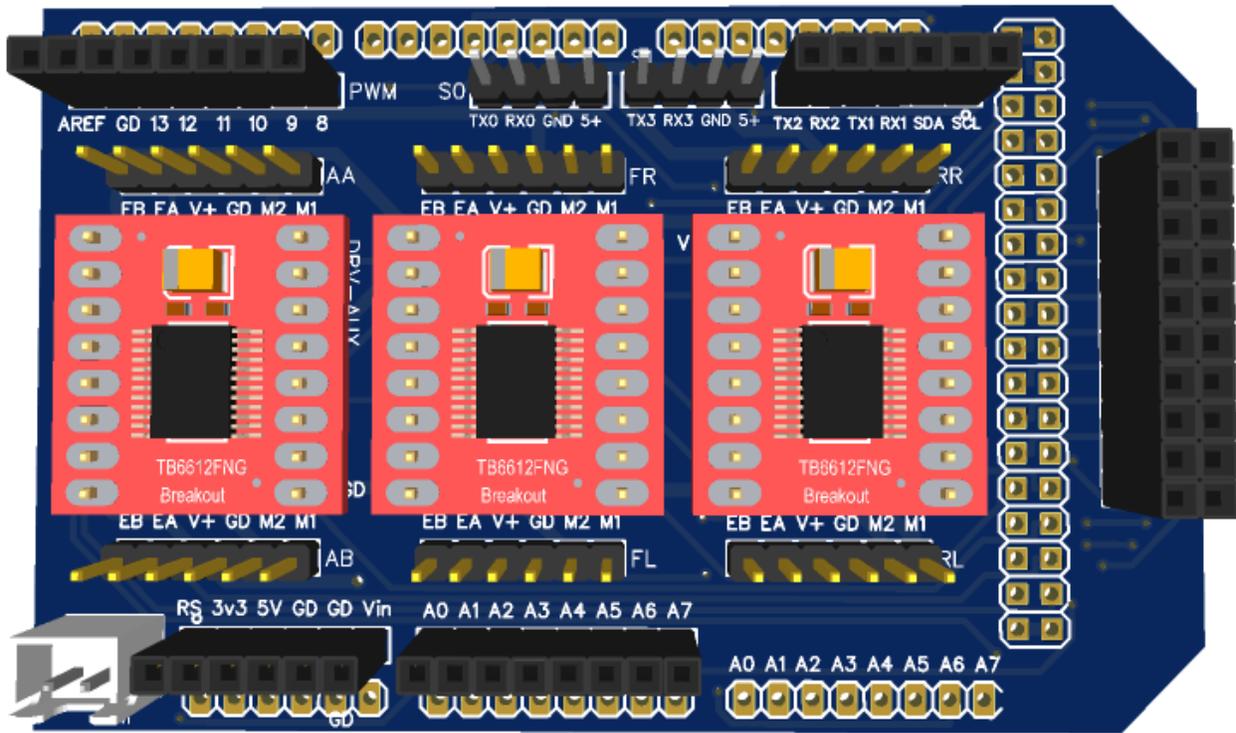
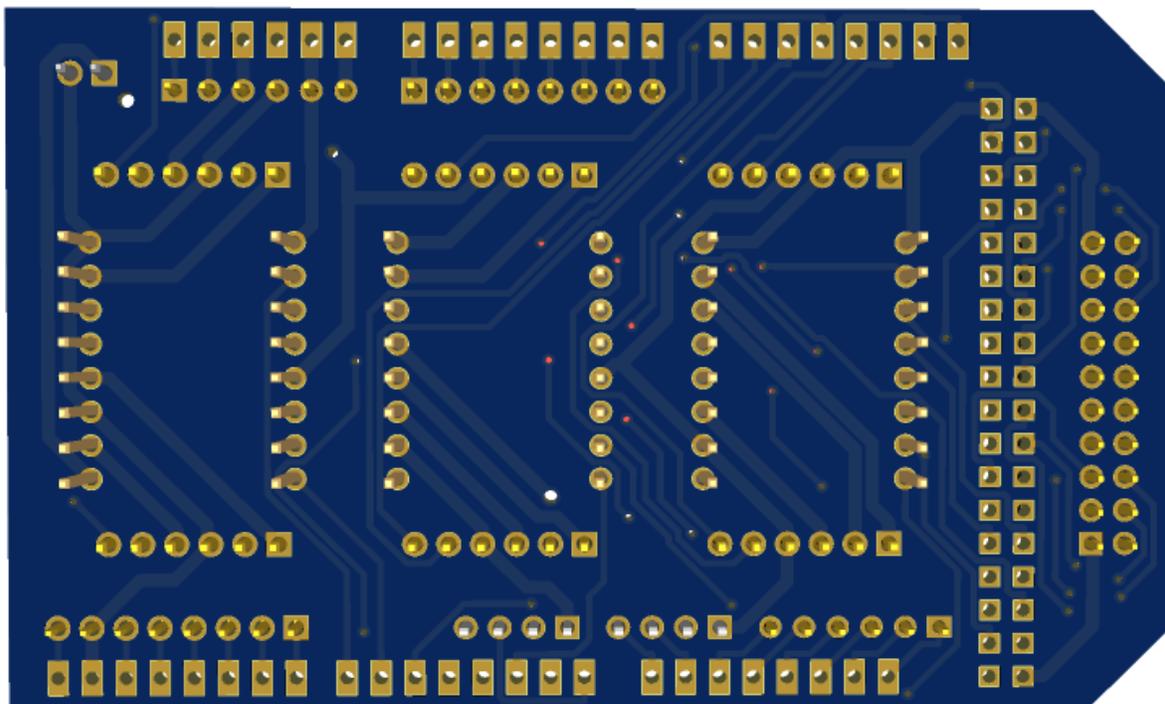


Figura 24. PCB Shield para el Arduino Mega 2560, vista superior.



*Figura 25. PCB Shield para el Arduino Mega 2560, vista inferior.*

### **4.3.2. Ruteo de la placa**

En este último paso se muestra el ruteo de la placa generado en base al diseño esquemático que interconecta las distintas partes del circuito, se opta por implementar dos capas en la placa para disminuir la cantidad de espacio requerido por la PCB tomando en cuenta el número de pistas y el número de componentes.

Una vez finalizado el ruteo se comprueba que no existan errores o posibles conexiones incorrectas y se da por terminado el diseño de la PCB.

Finalmente, se generan los ficheros que habrán de ser enviados al fabricante para imprimir la placa.

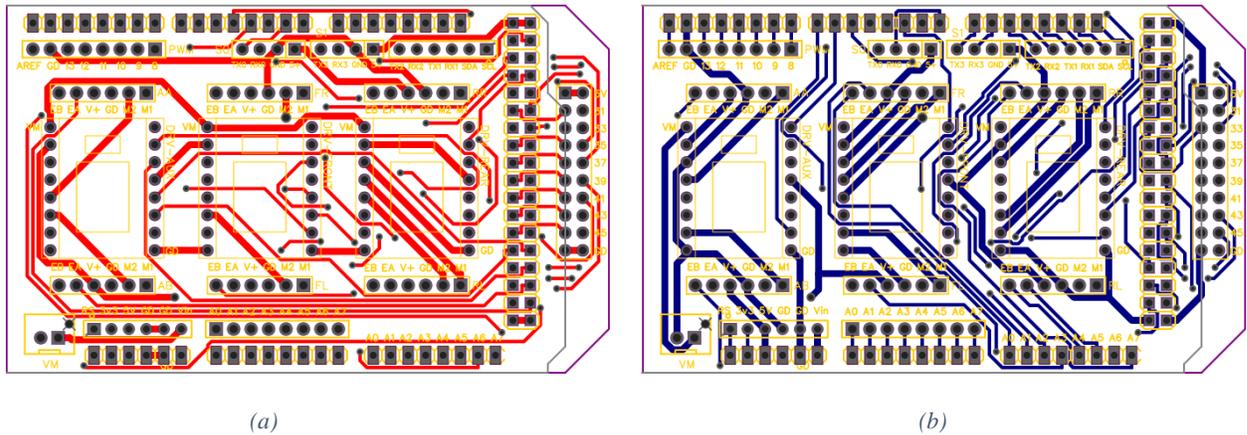


Figura 26 (a) Ruteado de la capa superior de la PCB, (b) Ruteado de la capa inferior de la PCB

Dada la importancia de facilitar mejoras al robot, este Shield está diseñado con el fin de agregar más funcionalidades al robot si se desea ampliar sus capacidades en futuros trabajos con este proyecto, por lo tanto, se ha colocado tres salidas adicionales, dos para conexiones seriales y una auxiliar, esto con el objetivo de realizar un debug o conectar un dispositivo adicional ya sea bluetooth, otro motor, etc.

#### 4.4. Ensamblaje final del robot

La carcasa y los componentes utilizados fueron ensamblados usando separadores, pernos y tuercas de latón hexagonal hembra y macho de 3 mm de diámetro.

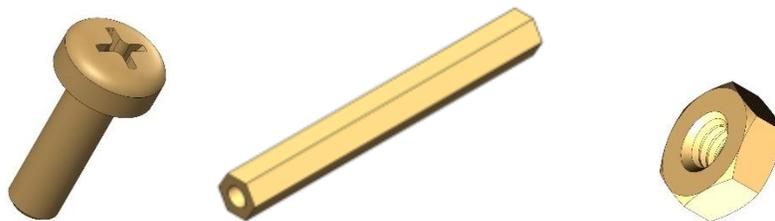
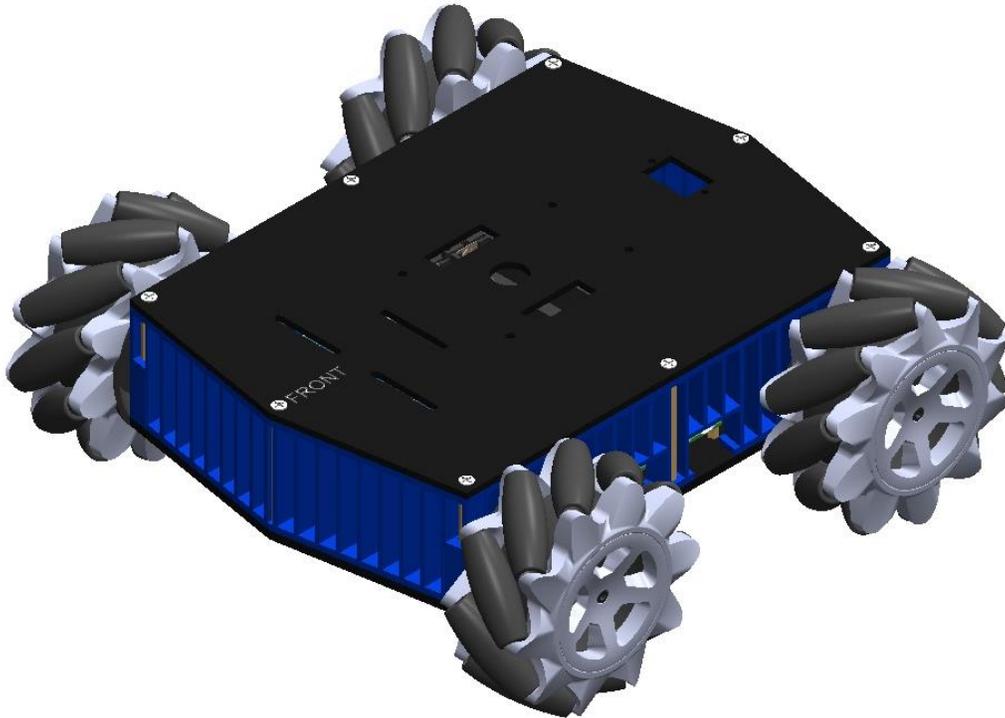


Figura 27. Elementos utilizados para unir los componentes del robot móvil omnidireccional.

Una vez ensamblado todas las piezas en el software obtenemos el diseño 3D que se puede observar en la Figura 28. En los anexos, se detalla el ensamblaje paso a paso del robot móvil omnidireccional a través de un manual de usuario.



*Figura 28. Ensamblaje del robot móvil omnidireccional.*



de vuelta hacia la interfaz gráfica a través del Raspberry y la red ROS. Finalmente se calcularán las nuevas velocidades generales deseadas del robot para que continúe con la trayectoria definida hasta cumplir el ejercicio y posterior los resultados son mostrados en la interfaz gráfica, donde el usuario podrá revisarla en tiempo real.

### **5.1.1. Diagrama de flujo del sistema**

A continuación, se presenta el diagrama de flujo del sistema donde se describe el proceso de trabajo del robot.

## Diagrama de flujo general del sistema

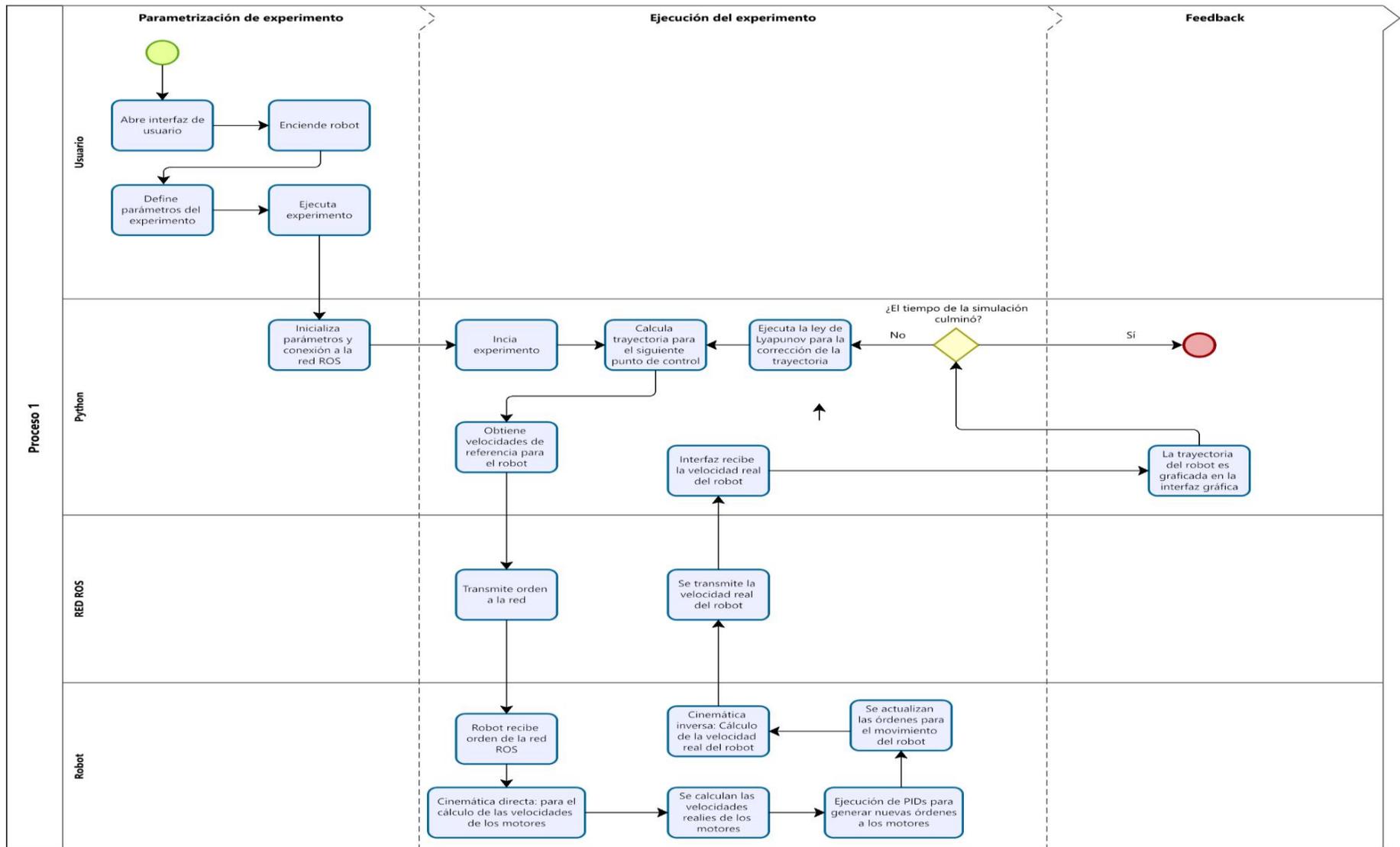


Figura 30. Diagrama de flujo del sistema.

**Usuario:** Enciende el robot y define los parámetros, se colocan las fórmulas de las ecuaciones y se ejecuta el experimento.

**Interfaz de usuario:** Python empieza a trabajar e inicializa el experimento, en seguida realiza la conexión a la red ROS, configura los parámetros definidos y los parámetros por defecto del robot.

**Cálculo de la trayectoria:** Se obtienen las velocidades de referencia del robot según la trayectoria definida y esto se transmite al robot a través de la red ROS, el robot recibe la orden de la red ROS a través del Raspberry y realiza la cinemática directa para que con base en las velocidades de referencia definidas se calculen las velocidades reales de cada una de las ruedas y con esto se ejecuta el PID para calcular las nuevas órdenes que son enviadas a los motores corrigiendo cualquier error que se detecte en la trayectoria designada, posterior a esto se realiza la cinemática inversa para calcular las velocidades del robot que serán enviadas a la red ROS y recibidas por la interfaz gráfica.

Una vez la interfaz gráfica recibe la actualización, el primer paso es mostrar la trayectoria realizada por el robot, si el tiempo de la simulación culminó se termina el experimento, caso contrario, se aplica la teoría de estabilidad de Lyapunov para generar nuevas velocidades de referencia que son enviadas al robot comenzando un nuevo ciclo hasta finalizar el experimento.

## **5.2. Robot Operative System (ROS)**

El Sistema Operativo Robótico (ROS) es un framework de código abierto para el desarrollo de aplicaciones de robótica, controladores, algoritmos de última generación, potentes herramientas de desarrollo, etc. mediante el uso de un conjunto de herramientas y bibliotecas de software.

ROS al ser de código abierto propicia que millones de desarrolladores y usuarios contribuyan y mejoren el vasto software de robótica que contiene este sistema operativo, además permite al usuario personalizar ROS según sus necesidades y decidir dónde y cómo usarlo.

Este sistema operativo usa nodos que no son más que archivos ejecutables dentro de un paquete de ROS para comunicarse con otros nodos, estos nodos utilizan una biblioteca cliente para comunicarse, pueden publicar o suscribirse a un topic y pueden utilizar o proporcionar algún servicio.

ROS tiene como característica principal la manera en la que se ejecuta y comunica el software, puesto que permite diseñar software complejo sin tener conocimiento del funcionamiento del hardware. ROS conecta una red de procesos o nodos con eje central de diversas maneras ya sea proporcionando servicios necesarios o definiendo conexiones de publicista o suscriptor con otros nodos, estos dos métodos comunican mediante tipos de mensajes específicos.

El apoyo de multiplataforma que dispone ROS permite conexiones entre procesos de dispositivos múltiples, además determina las clases de comunicaciones C++ o permite desarrollar clases manualmente para la interfaz de lenguaje.

### **5.2.1. Implementación y funcionamiento de ROS**

En este trabajo ROS está implementado tanto en la computadora como en el Raspberry para enviar o recibir órdenes. En la computadora se optó por instalar ROS en Windows puesto que su uso es común y se evitan problemas de compatibilidad con las librerías de las gráficas, al instalar ROS se instala una versión de Python, para este proyecto se requiere la versión 3.8.6 debido a la compatibilidad con varias librerías.

Como se explicó anteriormente ROS trabaja con nodos que corresponden tanto a la computadora como al Raspberry, es decir, cada dispositivo es un nodo, para este proyecto cada nodo dispone de un publicador y un suscriptor, por lo tanto, la interfaz gráfica al actuar primeramente como publicador envía al robot las velocidades de referencia y el Raspberry al actuar como suscriptor recibe estas velocidades que luego invirtiendo los papeles actúa como publicador y envía las velocidades reales a la interfaz gráfica que ahora actúa como suscriptor. El Raspberry recibe las velocidades reales a través del Arduino que son calculadas mediante el modelo matemático.

La publicación de las velocidades se realiza a los canales de comunicación que están implementados en el código cuyos nombres para las velocidades de referencia es “w\_Ref1” y para las velocidades reales es “w\_real\_R”, la definición del tipo de dato que se envía es de tipo punto (Point) en tres dimensiones que incluye X, Y, Z y es un tipo de dato especial de ROS compuesto por tres números decimales, posteriormente se inicializa los nodos para publicar y suscribirse entre ellos. Las velocidades de referencia son enviadas al Arduino mediante el mensaje del tipo “Point”.

### **5.2.2. Instalación de ROS**

ROS se instaló en Windows para facilitar la interacción y el manejo tanto del programa como del robot, la versión utilizada es la "NOETIC", como ROS no es una aplicación o un framework nativo de Windows existe una alternativa para adaptar todo lo que comprende ROS dentro de Windows y es instalando a través de un programa que simula un ambiente de Linux llamado Chocolatey, este programa es un gestor de paquetes de línea de comandos para Microsoft Windows [60]. Para llevar a cabo la instalación es necesario seguir un proceso de acuerdo con el manual de instalación que se encuentra detallado en la página oficial de ROS [61] donde se explica detalladamente los pasos a seguir y cómo se debe implementar.

Una vez instalado ROS es importante tomar en cuenta las variables de entorno que son necesarias para que Python pueda utilizar las librerías de ROS, para ello se agrega la variable de entorno PYTHONPATH que permite ubicar los paquetes y librerías de ROS con la finalidad de que puedan ser utilizados por los programas escritos en Python.

Otras variables de entorno que son importantes definir en todos los dispositivos que tienen ROS son ROS\_IP que permite identificar la IP de la computadora donde se encuentra el núcleo y ROS\_MASTER\_URI que indica la dirección con el puerto donde se localiza el núcleo.

Cabe recalcar que para la creación de un proyecto ROS para Windows es necesario instalar el SDK de Microsoft Windows 10 y Visual Studio Community seleccionando la opción "Desarrollo con C++ para escritorio" esto con la finalidad de mantener la compatibilidad de la cadena de herramientas con los archivos binarios publicados.

El control del Raspberry de forma remota se realiza mediante el protocolo de comunicación SSH a través del cual se instala ROS compilando sus fuentes y siguiendo los pasos descritos en la página oficial de ROS [62].

### **5.3. Programación en Arduino**

El Arduino Mega 2560 utilizado en este proyecto tiene como función el control del movimiento del robot a través de la rotación de las ruedas. Para completar este objetivo requiere que se le transmitan vía comunicación serial 3 datos, las velocidades frontal, lateral y angular deseadas a las que el robot debería moverse para llegar a un objetivo definido externamente.

Estas velocidades serán utilizadas para calcular las velocidades angulares deseadas de cada una de las ruedas del robot, posterior, a través del encoder de los motore se calculan las velocidades angulares reales de cada rueda y haciendo uso del PID correspondiente se comparan las velocidades reales y deseadas para generar una nueva orden para el movimiento del motor. Como último paso, utilizando la cinemática inversa se calculan las velocidades frontal, lateral y angular real del robot en base a las velocidades reales de cada rueda y estos tres datos son devueltos a través del puerto serial hacia el Raspberry.

Para la programación del Arduino se hizo uso de dos librerías la primera *PinChangeInterrupt.h* que permite agregar interrupciones para los dos canales del encoder de cada motor, la segunda librería es *motorControl.h* que permite crear un PID para controlar la velocidad de los motores siendo necesario crear cuatro PID para cada motor.

### **5.4. Interfaz de usuario**

La interfaz gráfica desarrollada en este proyecto se diseñó con el objetivo de facilitar la interacción entre el usuario y el robot, además de proporcionar un entorno visual sencillo, permitiendo observar y analizar los resultados de los experimentos tanto del control de posición como del control de trayectoria de forma rápida y sencilla, es así que los estudiantes podrán usar

esta interfaz de manera amigable, didáctica e intuitiva, con botones que permitan un fácil manejo de la interfaz y una buena adaptación a las tareas encomendadas.

Se desarrolló la interfaz gráfica en Python utilizando la librería PyQt5, esta librería dispone de la herramienta Qt Designer que proporciona una interfaz de usuario para desarrollar interfaces gráficas, además se utilizó la librería PyVista que es un módulo de ayuda para Visualization Toolkit (VTK) y proporciona una interfaz Pythonic que expone el poderoso backend de visualización de VTK para facilitar la creación rápida de prototipos, el análisis y la integración visual de conjuntos de datos espacialmente referenciados, de este modo permite desarrollar gráficas dinámicas como la simulación 3D donde se observa cómo el robot se mueve en el plano X,Y además del desarrollo de las gráficas de velocidades y errores.

En la Figura 31 se muestra el espacio de trabajo de la herramienta Qt Designer donde se puede observar el desarrollo de la interfaz gráfica con todas las opciones de ingreso de datos que posee.

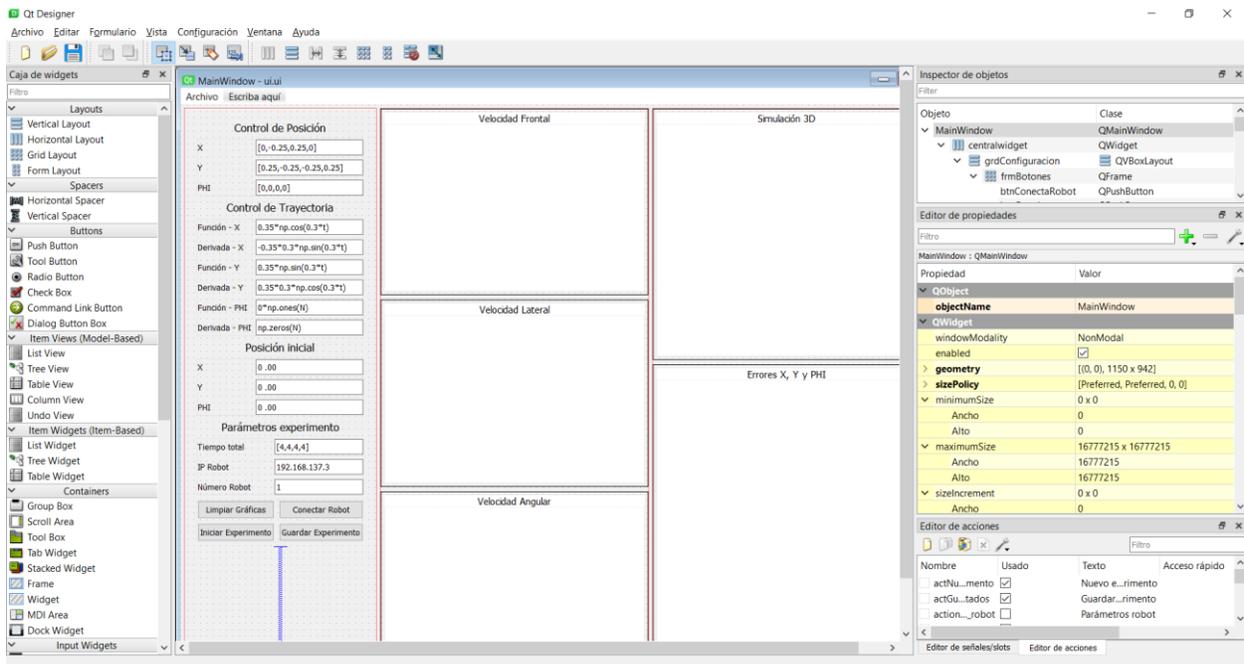


Figura 31. Interfaz gráfica utilizando la herramienta Qt Designer.

La interfaz muestra las gráficas de las velocidades y los errores del control de posición y trayectoria que realiza el robot ya sea en base a uno o varios puntos para el control de posición o en base a ecuaciones para el control de trayectoria.

La interfaz gráfica funciona una vez se inicializa ROS de lo contrario no es posible su funcionamiento, la conexión entre la interfaz y el robot se realiza mediante el protocolo SSH colocando la dirección IP del robot, inmediatamente se inicia el programa desarrollado para el Raspberry en Python y finalmente el robot estará listo para realizar y ejecutar los experimentos desde la interfaz gráfica.

El menú que dispone la interfaz gráfica permite cambiar los modos para escoger según los requerimientos del usuario ya sea el control de posición o el control de trayectoria, para el control de trayectoria se quieren derivadas, estas pueden ser activadas o desactivadas según la exigencia o nivel de conocimientos del usuario de igual manera se puede activar o desactivar la opción  $\phi$  que corresponde a la orientación del robot para el control de posición y de trayectoria.

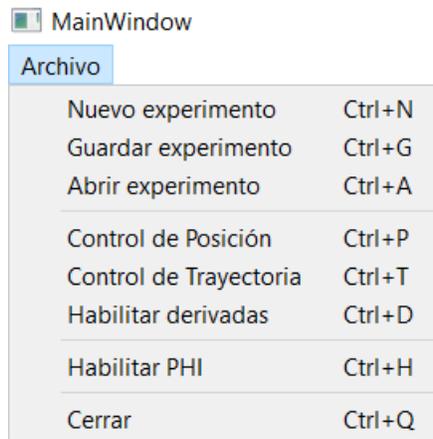


Figura 32. Menú de opciones de la interfaz gráfica.

A continuación, se muestra en la Figura 33 la interfaz desarrollada para el control de trayectoria, esta interfaz dispone de un panel en donde se colocan las funciones matemáticas necesarias para definir la trayectoria deseada, además de parámetros como el tiempo que dura el robot en trazar la trayectoria y las opciones para iniciar, limpiar, cancelar o guardar el experimento. Una vez colocadas las funciones y los parámetros del ejercicio, se observa la gráfica en 3D de la

trayectoria ejecutada por el robot, así como también las gráficas de las velocidades frontal, lateral, angular y los errores en X, Y y  $\varphi$ .

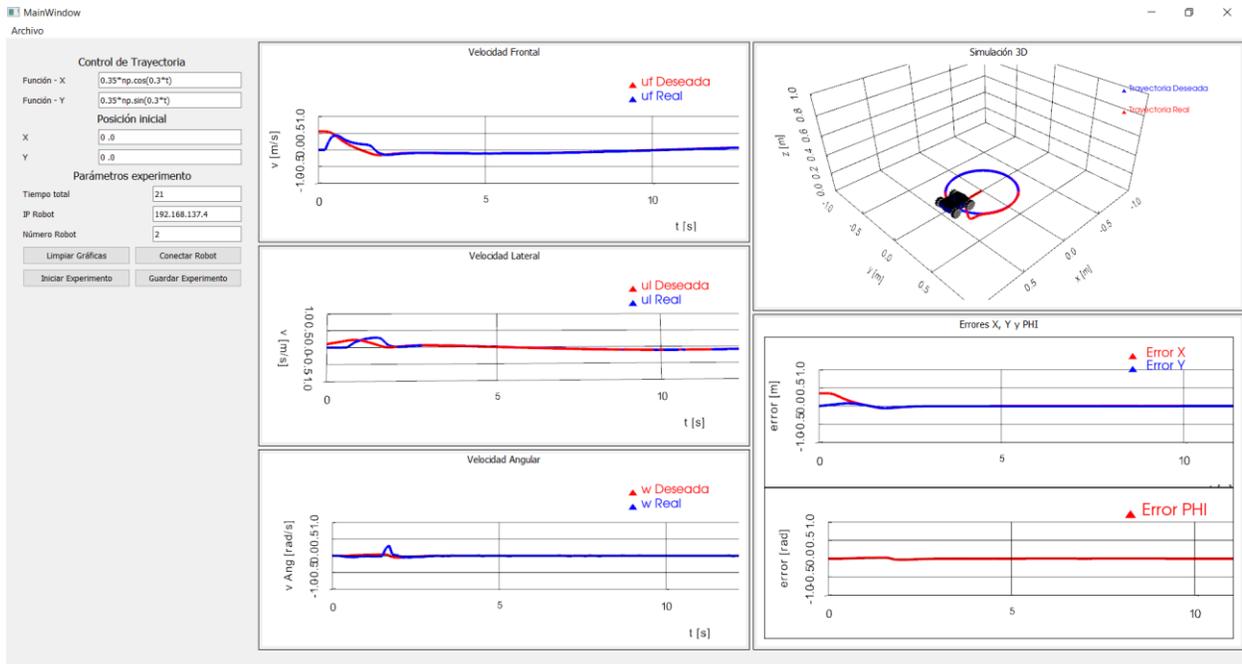


Figura 33. Interfaz gráfica para el control de trayectoria.

En la Figura 34 se puede observar el menú que posee la interfaz gráfica para realizar el control de posición, este menú dispone de un panel donde se coloca la posición inicial y el punto o grupo de puntos al que se desea que el robot se mueva, así como los tiempos requeridos para cada experimento y parámetros como el tiempo total, IP y nombre del robot. Una vez colocados todos los requerimientos que solicita la interfaz para realizar el ejercicio, se utilizan los botones para iniciar, cancelar, limpiar y guardar el experimento, finalmente se observa la gráfica en 3D que traza el robot para llegar al punto deseado, así como las gráficas de las velocidades frontal, lateral, angular y los errores en X, Y y  $\varphi$ .

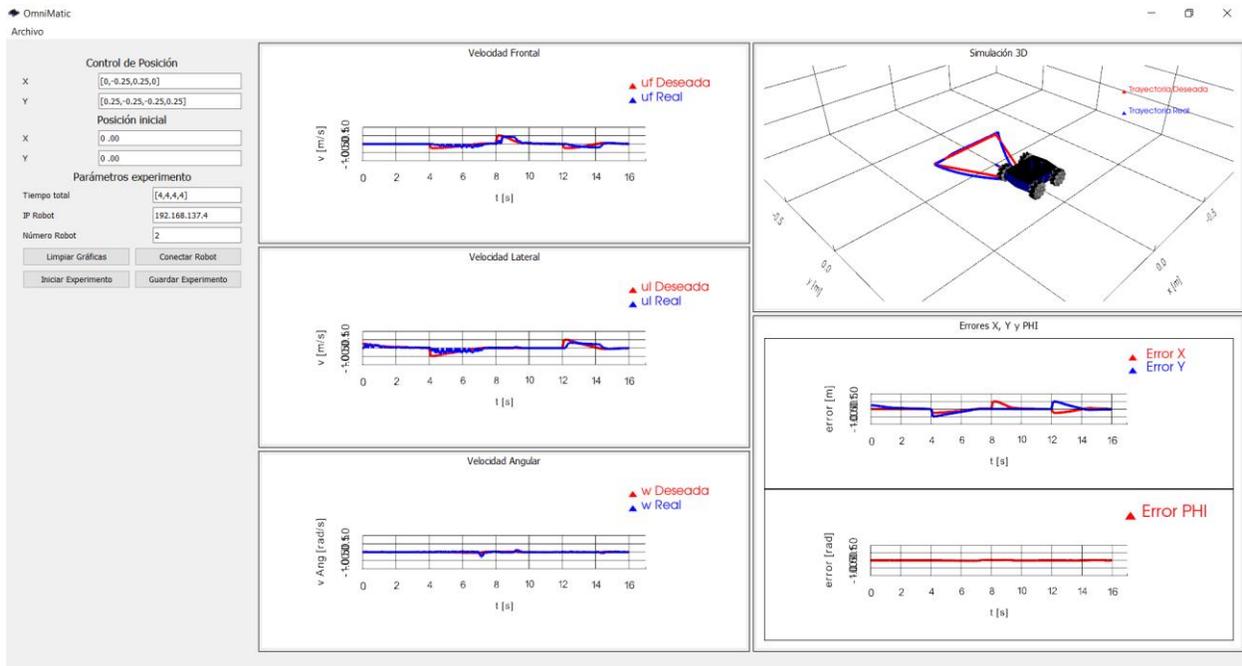


Figura 34. Interfaz gráfica para el control de posición.

La opción “Guardar experimento” permite guardar todos los datos, resultados y el proceso que realiza el robot.

# CAPÍTULO 6: Control del robot móvil Omnidireccional

## 6.1. Control de velocidad de las ruedas

Para determinar la posición, velocidad y dirección del movimiento del eje del motor se usan encoders de cuadratura con sensores magnéticos de efecto Hall, estos encoders poseen dos sensores que generan dos señales de pulsos digitales desfasados en  $90^\circ$  eléctricos puesto que poseen un disco magnético giratorio montado en el eje trasero del motor; los sensores se van activando y desactivando en una secuencia que permite determinar la dirección y el número de desplazamientos que han ocurrido en el encoder [63].

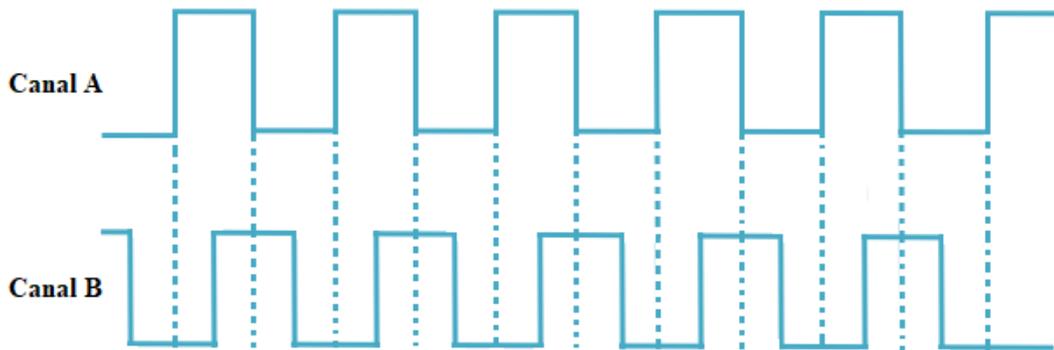


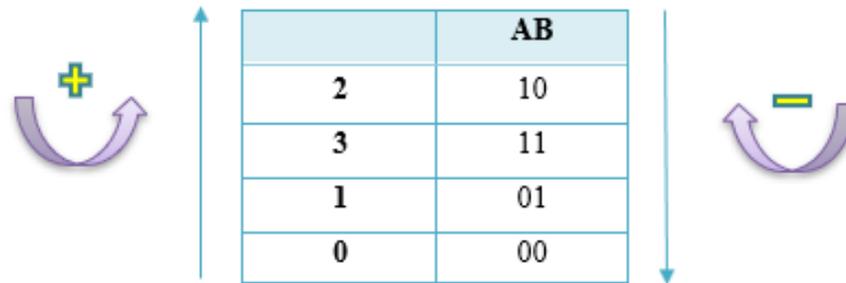
Figura 35. Señales de salida denominadas A y B generadas por los encoders de efecto Hall del encoder.

### 6.1.1. Sentido de giro del motor

En base a las señales generadas por los encoders se puede determinar el sentido de giro del motor tomando como referencia el desfase que existe entre estas señales. La combinación de las dos señales A y B permite obtener 4 estados, de esta manera se puede saber el sentido de giro del motor si se compara el estado actual con el anterior.

Asumiendo la salida A como el bit más significativo y B como el bit menos significativo se obtiene la siguiente tabla de verdad donde se puede ver la dirección de giro del motor.

Tabla 2. Sentido de giro del motor según los encoders.



En la Tabla 3 se presenta una matriz de incrementos donde se compara el estado anterior con el actual para saber la dirección del movimiento, por ejemplo, si en el encoder el estado anterior fue 01 y el estado actual es 11 se puede constatar que el motor gira en sentido antihorario, por otra parte, las combinaciones 11,00; 10,01; 01,10 y 00,11 son considerados errores en la señal o en el encoder.

Tabla 3. Matriz de incrementos para comparar el estado anterior con el actual.

	Anterior	0	1	2	3
Actual	AB	00	01	10	11
0	00	0	-1	+1	E
1	01	+1	0	E	-1
2	10	-1	E	0	+1
3	11	E	+1	-1	0

### 6.1.2. Resolución del encoder

La resolución es el número de cuentas que genera el encoder en cada vuelta, es decir es una medida en pulsos por revolución (PPR), el motor utilizado en esta tesis proporciona una resolución de 16 conteos por revolución del eje del motor al leer un solo flanco de uno de los canales del encoder.

Usando los datos descritos anteriormente se puede calcular la precisión cuádruple del motor al leer los dos flancos en ambos canales del encoder, es decir que tendríamos 64 pulsos por revolución en el eje del motor y multiplicándolos por la relación de transmisión de la caja de engranajes de este motor según su hoja de datos (70) podemos determinar que la resolución cuádruple es 4480 en el eje de salida de la caja de engranajes. Utilizando estos datos podemos determinar el sentido de giro del motor y de esta manera crear un código que establezca la posición en grados, así como la velocidad lineal en m/seg, velocidad angular (RPM) y velocidad en rad/seg.

### 6.1.3. Modelo dinámico de un motor: Respuesta en lazo abierto

En base al modelo matemático del robot se analiza su comportamiento con el objetivo de encontrar los parámetros de control del algoritmo PID que se va a implementar, por lo tanto, se optó por aproximar el comportamiento del motor a un sistema de primer orden con tiempo muerto.

El comportamiento del motor está determinado por parámetros tanto en el dominio del tiempo como de la frecuencia, estos parámetros son definidos mediante pruebas experimentales para observar la respuesta del sistema y de esta manera encontrar las variables requeridas.

Para la sintonización de los parámetros de control del algoritmo PID de los motores del robot omnidireccional, es preciso contar con la información del comportamiento dinámico del sistema de control con el fin de aproximar el comportamiento del motor a este sistema.

La identificación de parámetros como ganancia, tiempo muerto y constantes de tiempo se puede realizar a partir de la respuesta del proceso a un cambio, aplicando un escalón a la entrada del sistema.

La representación matemática tanto en el dominio de la frecuencia como en el tiempo del sistema de primer orden con tiempo muerto [64] se presenta a continuación:

$$G(s) = \frac{k_p e^{-Ls}}{\tau s + 1} \quad \longrightarrow \quad \text{Dominio de la frecuencia} \quad (15)$$

$$P_v(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < L \\ k_p(1 - e^{-(t-L)/\tau})\Delta C_v & t \geq L \end{cases} \quad \longrightarrow \text{Dominio del tiempo} \quad (16)$$

Donde:

$k_p$  = Ganancia del proceso

$L$  = retardo

$\tau$  = constante de tiempo en lazo abierto

$k_p$ ,  $L$  y  $\tau$  son los parámetros que determinan el comportamiento del motor, para obtener estos valores se aplican procedimientos experimentales usando la respuesta del sistema al escalón en el dominio del tiempo tal como se especificó anteriormente, para este fin se utiliza un algoritmo de identificación de parámetros de control cuyo proceso se especifica en el siguiente diagrama de bloques.

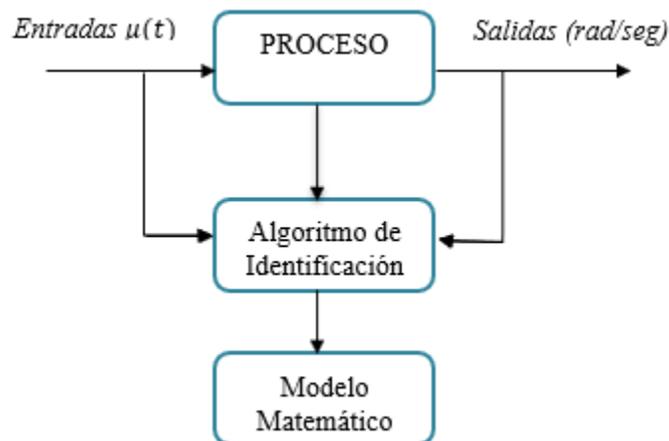


Figura 36. Diagrama de bloques para desarrollar el algoritmo de identificación de parámetros de control [65].

Al aplicar la función escalón unitario a la entrada del proceso se obtiene a la salida la velocidad en rad/seg a la que gira el eje del motor, en base a estas lecturas se aplica un algoritmo de identificación llamado PSO [66] que entrega de manera aleatoria los valores de  $k_p, L y \tau$  al modelo matemático y mediante pruebas experimentales se ajustan estos valores dependiendo el error entre la salida medida y la salida proporcionada por el algoritmo de identificación hasta obtener un error mínimo en la respuesta a la curva.

En la Figura 37  $Pv\_estimated$  indica la variable estimada del proceso,  $Pv\_real$  es la variable real del proceso y  $Cv$  la variable de control. Se observa la aproximación de las curvas entre la respuesta al algoritmo de identificación aplicando variables del sistema de primer orden y la aproximación real aplicando una entrada escalón, como se aprecia es una estimación adecuada entre estas curvas.

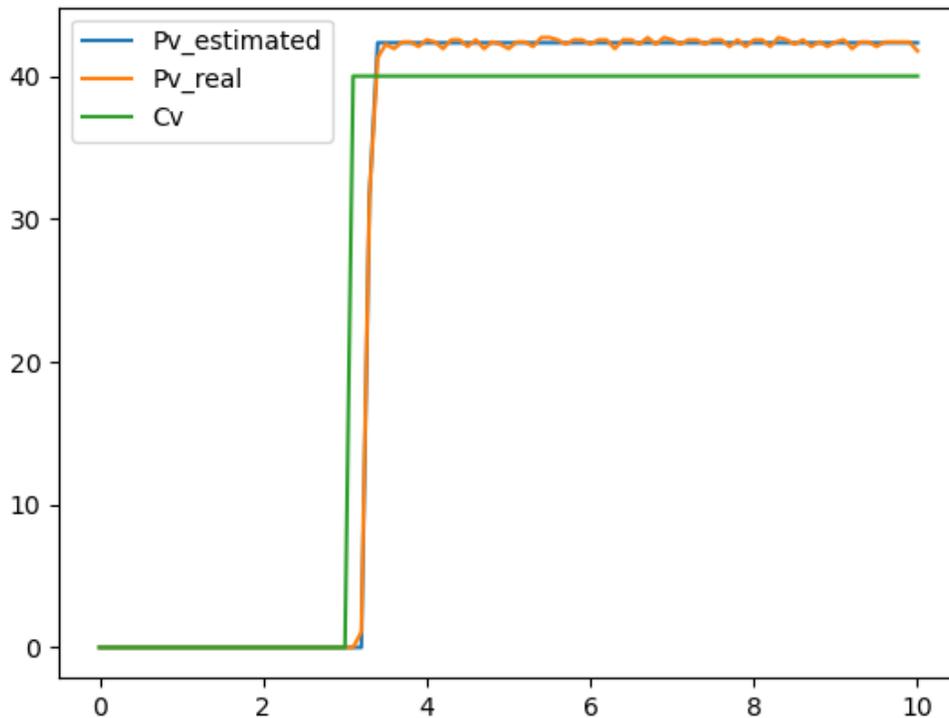


Figura 37 Respuesta a una entrada escalón ( $Pv\_real$ ) / aproximación ( $Pv\_estimated$ ) con variables del sistema de primer orden.

Una vez obtenidos los parámetros  $k_p$ ,  $L$  y  $\tau$  se realizan procesos para encontrar los valores de ganancia del algoritmo de control PID para lo cual aplicamos dos métodos de sintonía, el primer método utilizado es el de sintonía lambda que calcula los valores de ganancia del algoritmo de control PID que son la ganancia proporcional, el tiempo integral y el tiempo derivativo, estos valores son usados para aplicar el segundo método que es el de sintonía fina.

#### 6.1.4. Control PID y sintonía Lambda

El método de sintonía Lambda, es un caso especial de asignación de polos utilizado comúnmente en la industria de pulpa y papel, donde hay una conexión entre la uniformidad del papel y la eficiencia manufacturera [67].

Para la obtención de las variables para el PID [68], se considera la siguiente función de transferencia:

$$C'(s) = K'_c \left( \frac{(1 + sT'_i)(1 + sT'_d)}{sT'_i} \right) \quad (17)$$

Donde:

$K'_c$  = Ganancia Proporcional

$T'_i$  = Tiempo Integral

$T'_d$  = Tiempo Derivativo

El modelo de la planta correspondiente a un sistema de primer orden con retardo está dado como:

$$G(s) = \frac{K}{1 + sT} e^{-sL} \quad (18)$$

Donde:

$K$  = Ganancia del proceso

$T$  = Constante de tiempo en lazo abierto

$L$  = Retardo

Mediante la aproximación de Padé de primer orden [69] se calcula la siguiente expresión exponencial:

$$e^{-sL} = \frac{1 - L/2s}{1 + L/2s} \quad (19)$$

Sustituyendo en la ecuación del modelo de la planta se tiene:

$$G(s) = \left( \frac{K}{1 + sT} \right) \left( \frac{1 - L/2s}{1 + L/2s} \right) \quad (20)$$

El método de sintonía lambda consiste en cancelar los polos del proceso con los ceros del controlador [70].

Por consiguiente, reemplazando el tiempo integral y derivativo, se tiene:

$$T_i = T \quad (21)$$

$$T_d = L/2 \quad (22)$$

Y la función de transferencia del lazo queda de la siguiente forma:

$$G_1(s) = G(s)C'(s) = \frac{KK'_c(1 - sL/2)}{sT} \quad (23)$$

La ecuación característica del sistema en lazo cerrado está dada por:

$$s(T - KK'_c L/2) + KK'_c = 0 \quad (24)$$

El polo en lazo cerrado requerido es  $s = -1/\lambda$ , obteniendo las siguientes reglas de sintonía.

$$K'_c = \frac{T}{K(L/2 + \lambda)} \quad (25)$$

$$T'_i = T \quad (26)$$

$$T'_d = L/2 \quad (27)$$

Al aumentar  $\lambda$  la velocidad de respuesta disminuye, por el contrario, disminuyendo  $\lambda$  la velocidad de respuesta aumenta.

La forma no interactuante o estándar (ISA) del controlador PID se representa mediante las siguientes ecuaciones:

$$K_c = K'_c \frac{T'_i + T'_d}{T'_i} \quad (28)$$

$$T_i = T'_i + T'_d \quad (29)$$

$$T_d = \frac{T'_i T'_d}{T'_i + T'_d} \quad (30)$$

Realizando la sintonía Lambda del algoritmo PID, se muestra a continuación en la Figura 38 los valores de las variables de proceso (Pv) y variable deseada o setpoint (Sp),

Se observa que no existe ningún sobre impulso, por lo tanto, el resultado obtenido es óptimo para valores fijos.

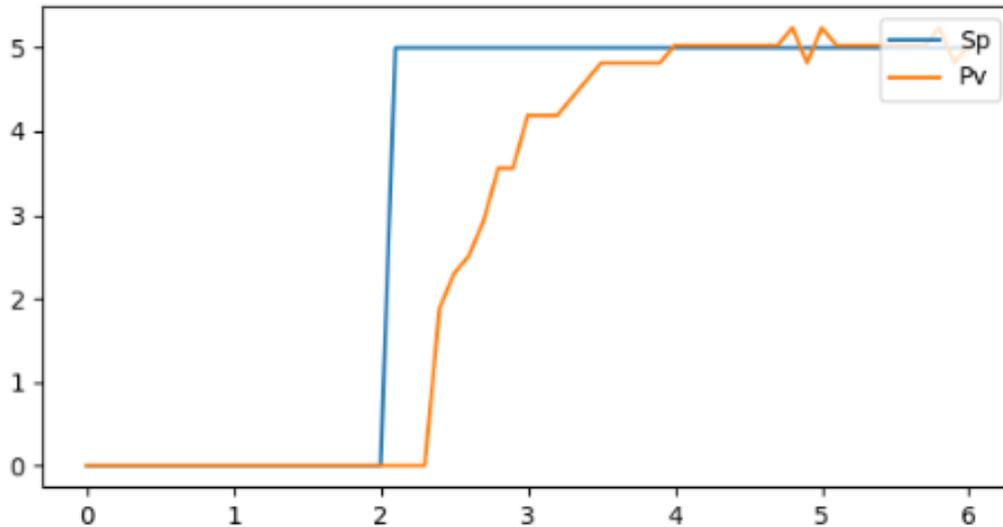


Figura 38. Valores de las variables de proceso (Pv) y variable deseada o Set Point (Sp).

Se realizaron pruebas para seguimiento de trayectorias, pero los resultados no fueron adecuados puesto que la señal de proceso presenta retardo con respecto a la señal deseada, para solucionar este problema se emplea la sintonía fina.

### 6.1.5. Control PID y sintonía fina

A partir de los valores obtenidos en la sintonía lambda se varía los parámetros de forma manual en base a las siguientes reglas:

- Aumentando la ganancia proporcional disminuye la estabilidad
- El error decae más rápidamente si se disminuye el tiempo de integración
- Disminuyendo el tiempo de integración disminuye la estabilidad
- Aumentando el tiempo derivativo mejora la estabilidad

De acuerdo con los resultados obtenidos en la sintonía lambda y aplicando la sintonía fina se consigue que el error tienda a cero más rápidamente. Como se puede observar en la Figura 39 la estimación entre la señal del setpoint y la señal del proceso es la deseada para los valores de los

parámetros que se obtuvieron en la sintonización del controlador y que se pueden observar en la Tabla 4, estos parámetros pueden ser aplicados a cada motor del robot omnidireccional debido a que son iguales.

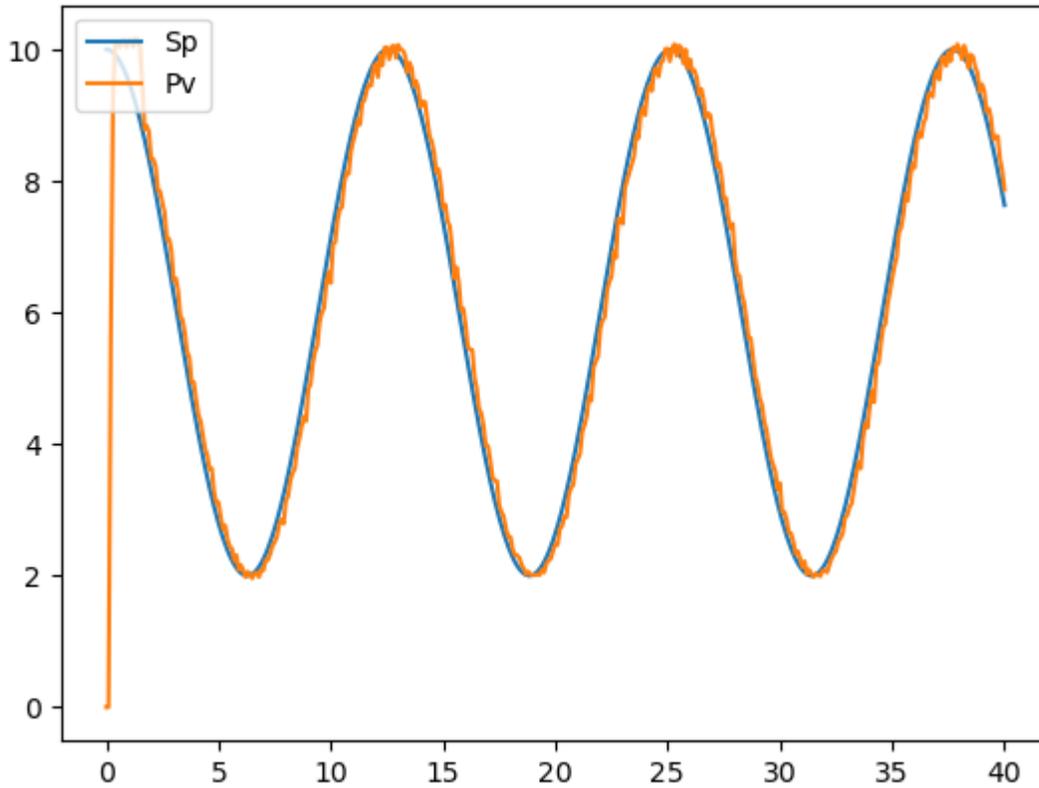


Figura 39 Respuesta del sistema PID – Sp\_Pv aplicando los métodos de sintonía.

Tabla 4 Resultados de los parámetros del sistema PID obtenidos mediante los métodos de sintonización.

Tuneo de parámetros								
Variables sistema primer orden			Sintonía Lambda			Sintonía fina		
Kp	Tau	delay	K	ti	td	k	Ti	Td
1.0798	0.0241	0.1053	0.57	0.08	0.02	0.5	0.07	0.02
1.0583	0.0081	0.1889	0.82	0.1	0.01	0.6	0.06	0.01

## 6.2. Control no lineal y teoría de Lyapunov

Dado el modelo matemático, sus restricciones y el comportamiento deseado, el objetivo es obtener una ley de control de modo que el sistema realimentado se comporte como se desea.

En este proyecto se realiza el control de movimiento para lo cual se determinan los principales problemas de este control, como se especifican a continuación:

- **Control de posición:** El objetivo es situar al robot de manera autónoma en un punto determinado con una orientación deseada.
- **Control de seguimiento de trayectoria:** El objetivo es lograr que el robot siga una trayectoria deseada con error que tienda a cero, es decir que siga una ruta parametrizada en el tiempo.

Para resolver estos problemas se utiliza como estrategia de control la teoría de estabilidad de Lyapunov utilizada para el análisis de sistemas no lineales y sistemas que varían en el tiempo.

### 6.2.1. Teoría de Lyapunov

La aplicación de esta teoría va a permitir el análisis de estabilidad para el controlador PID, el objetivo de este método es encontrar una función candidata de Lyapunov que cumpla con ciertas condiciones asegurando así la estabilidad de sus estados de equilibrio, siendo estos estados los errores y el punto de equilibrio cero.

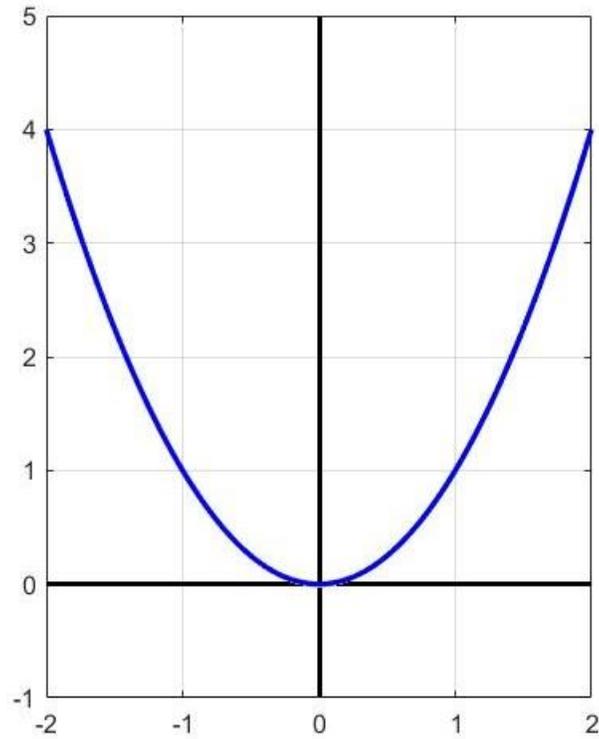
### 6.2.2. Función candidata de Lyapunov

Es una función  $V(x)$  de los estados  $x$  (errores) y cumple con las siguientes condiciones:

- $V(x)$  es continua, al igual que sus derivadas (31)

- $Vx=0$  para  $x=0$  (32)

- $V(x) > 0$  para  $x \neq 0$  (33)



*Figura 40. Representación de función definida positiva.*

La Figura 40 muestra una función que cumple con las condiciones mencionadas anteriormente puesto que solo en el punto (0,0) la función candidata es igual a cero, mientras que para valores diferentes de cero ya sean estos negativos o positivos la función candidata tiene valores mayores a cero.

En base a la función candidata de Lyapunov se determina si el sistema es estable o asintóticamente inestable.

### 6.2.3. Sistema estable

Un sistema es estable alrededor de su punto de equilibrio en el origen si cumple las siguientes condiciones:

- $\frac{dV(x)}{dt} = 0$  para  $x = 0$  (34)

- $\frac{dV(x)}{dt} \leq 0$  para  $x \neq 0$  (35)

En la se Figura 41 se muestra una representación gráfica de un sistema estable puesto que para valores de  $x$  iguales a cero la derivada de la función candidata de Lyapunov es igual a cero mientras que para valores de  $x$  diferentes de cero la derivada de la función candidata de Lyapunov tiene valores menores o iguales a cero.

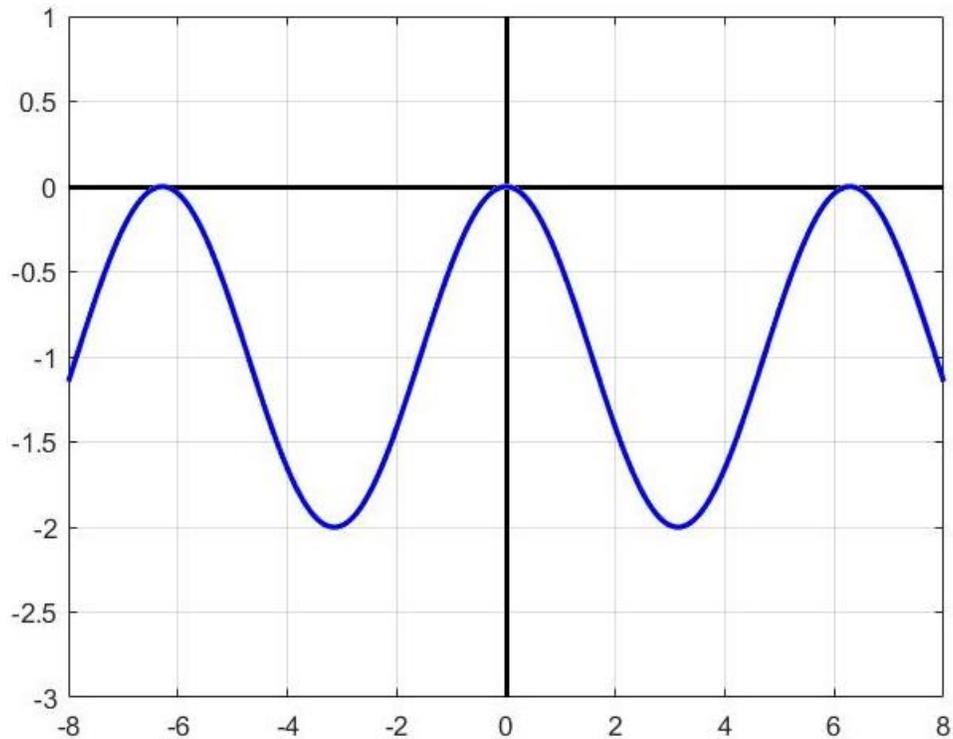


Figura 41. Función semidefinida negativa que cumple con las condiciones de sistema estable.

Para asegurar que el error tienda a cero se realiza el análisis para un sistema asintóticamente estable.

#### 6.2.4. Sistema asintóticamente estable

Un sistema es asintóticamente estable alrededor de su punto de equilibrio en el origen si cumple las siguientes condiciones:

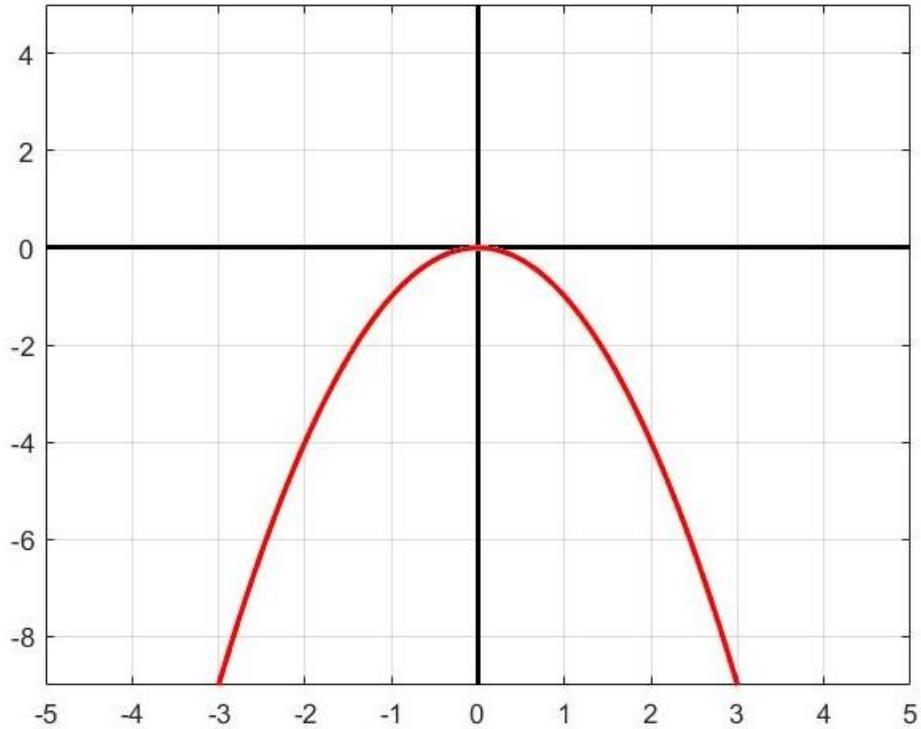
$$\bullet \frac{dV(x)}{dt} = 0 \text{ para } x = 0 \quad (36)$$

$$\bullet \frac{dV(x)}{dt} < 0 \text{ para } x \neq 0 \quad (37)$$

Si  $x \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , se dice que el sistema es asintóticamente estable.

Para valores de  $x$  iguales a cero la derivada de la función candidata de Lyapunov es igual a cero mientras que para valores de  $x$  diferentes de cero la derivada de la función candidata de Lyapunov debe tener valores menores a cero, esto se puede observar en la Figura 42.

Por lo tanto, al cumplirse las dos condiciones mencionadas para un sistema asintóticamente estable da como resultado que si  $x \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , el sistema es asintóticamente estable, que es lo que se desea en un controlador, siendo este análisis el utilizado para el diseño de los controladores.

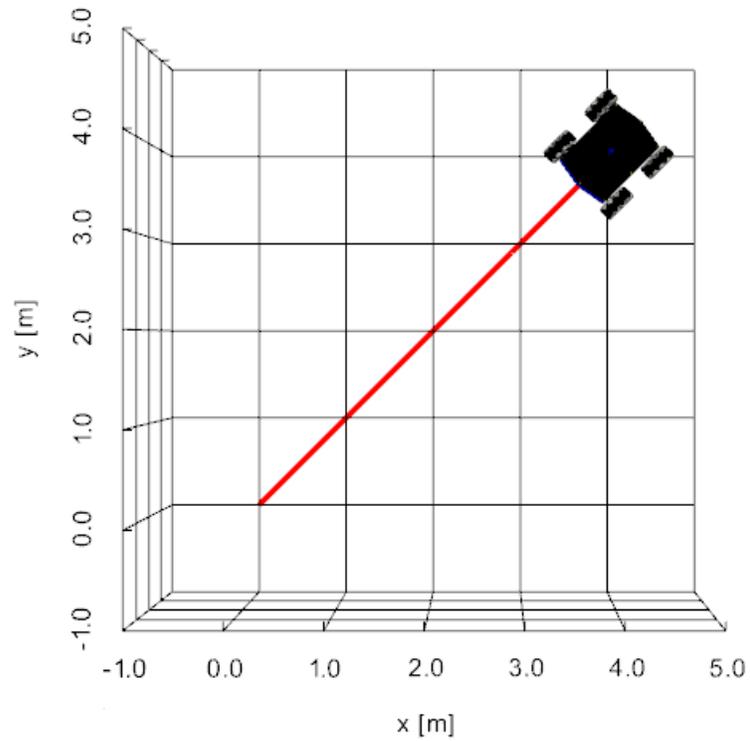


*Figura 42. Representación gráfica del sistema asintóticamente estable.*

### **6.3. Control de posición del robot**

El control de posición se basa en localizar al robot en un punto de referencia deseado, considerando dos casos:

**Primer caso:** Sin una orientación determinada, como se puede observar en la Figura 43 el robot inicia en una posición inicial y luego se traslada a una posición final sin tomar en cuenta la orientación.



*Figura 43. Control de posición sin una orientación deseada.*

**Segundo caso:** Con una orientación deseada, como se observa en la Figura 44 el robot inicia en una posición inicial y luego se traslada a una posición final tomando en cuenta la orientación deseada.

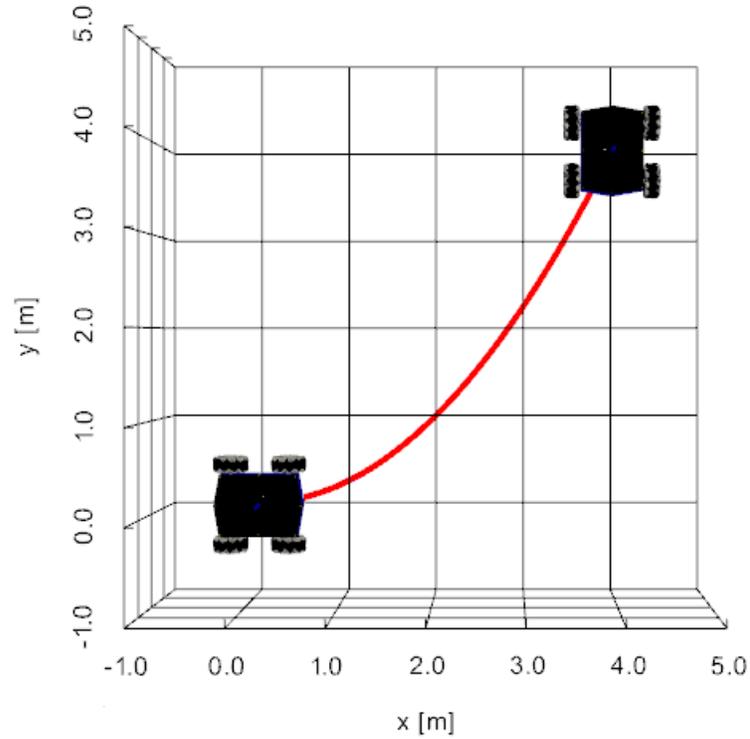


Figura 44. Control de posición con una orientación deseada.

Ambos casos se explican a continuación:

### 6.3.1. Control de posición del robot móvil omnidireccional sin una orientación determinada.

Para implementar la teoría de Lyapunov y obtener un sistema asintóticamente estable, se considera la siguiente expresión:

$$\dot{q} = J^{-1}(\dot{h}_d - \dot{h}_e) \quad (38)$$

Donde:

$\dot{q}$ : Velocidades del robot

$J^{-1}$ : Inversa de la matriz jacobiana

$\dot{h}_d - \dot{h}_e$ : Velocidades del punto de control

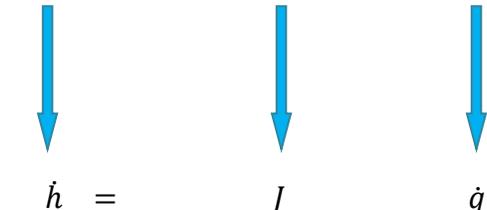
La obtención de esta expresión se consigue a partir del modelo cinemático que se explica en el capítulo 4, donde se obtiene las ecuaciones que representan las velocidades del robot en el plano X, Y:

$$\dot{P}_x = v_f \cos(\varphi) - v_l \sin(\varphi) \quad (39)$$

$$\dot{P}_y = v_f \sin(\varphi) + v_l \cos(\varphi) \quad (40)$$

$$\dot{\varphi} = \omega \quad (41)$$

Pasando estas ecuaciones a su forma matricial y representando la matriz en su forma compacta se tiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{P}_x \\ \dot{P}_y \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_f \\ v_l \\ \omega \end{bmatrix} \quad (42)$$


$\dot{h} = J \dot{q}$

Esta expresión representa la matriz Jacobiana ( $J$ ) que relaciona las velocidades del punto de control ( $\dot{h}$ ) con las velocidades del robot ( $\dot{q}$ ), de esta manera se obtienen las velocidades que se aplican al robot para llegar a un punto deseado (x, y).

Despejando de la ecuación (43) las velocidades que se deben aplicar al robot ( $\dot{q}$ ), se tiene:

$$\dot{q} = J^{-1} \dot{h} \quad (43)$$

A esta expresión se aplica el siguiente término que depende del error:

$$error(h_e) = posición\ deseada(h_d) - posición\ real(h) \quad (44)$$

Derivando se obtiene:

$$\dot{h}_e = \dot{h}_d - \dot{h} \quad (45)$$

Despejando  $\dot{h}$ :

$$\dot{h} = \dot{h}_d - \dot{h}_e \quad (46)$$

Reemplazando esta expresión en la ecuación (47) se obtiene:

$$\dot{q} = J^{-1}(\dot{h}_d - \dot{h}_e) \quad (47)$$

Debido a que se quiere desplazar el robot a un punto deseado,  $h_d$  resulta una constante a lo largo del tiempo, derivando, este término se anula, por lo tanto, la ecuación resulta de la siguiente manera:

$$\dot{q} = J^{-1}(-\dot{h}_e) \quad (48)$$

Es decir, las velocidades que se aplican al robot son iguales a la inversa de la matriz Jacobiana multiplicada por el error que indica la posición deseada en el punto X e Y menos la posición del robot en X e Y respectivamente.

Para desarrollar el controlador y asegurar que este sea asintóticamente estable se realiza el análisis de la estabilidad de Lyapunov, donde se asume que el seguimiento perfecto de velocidades de referencia que entrega el controlador es igual a las velocidades de lectura que tiene el robot.

$$\dot{q}_{ref} = \dot{q} \quad (49)$$

Considerando la función candidata de Lyapunov y efectuando las condiciones que debe cumplir esta función para que el controlador sea asintóticamente estable, se tienen las siguientes expresiones:

$$V(h_e) = \frac{h_e^T h_e}{2} \quad (50)$$

$$\dot{V} = h_e^T \dot{h}_e \quad (51)$$

Para cumplir la última condición de estabilidad, se realiza el análisis de la derivada donde se considera que esta debe ser definida negativa, por lo tanto, se reemplaza la derivada del error por  $-Kh_e$  donde,  $K$  es una matriz diagonal de ganancias y  $h_e$  es el error.

$$\dot{h}_e = -Kh_e \quad (52)$$

$$\dot{V} = -h_e^T Kh_e < 0 \quad (53)$$

La expresión (53) es menor a cero siempre y cuando la matriz  $K$  sea una matriz definida positiva, por lo tanto, se cumple que el sistema es asintóticamente estable.

Remplazando (52) en la expresión (49) se obtiene la siguiente ecuación final:

$$\dot{q}_{ref} = J^{-1}(Kh_e) \quad (54)$$

Donde las velocidades de referencia que se aplican al robot son iguales a la inversa de la matriz jacobiana multiplicada por una matriz  $K$  diagonal definida positiva por el error, con esta

expresión se desarrolla el algoritmo de control que determina las velocidades a las que se mueve el robot para llegar a un punto determinado.

### 6.3.2. Control de posición del robot móvil omnidireccional con una orientación determinada.

Para situar al robot móvil omnidireccional en un punto determinado considerando la orientación, se analiza el siguiente modelo:

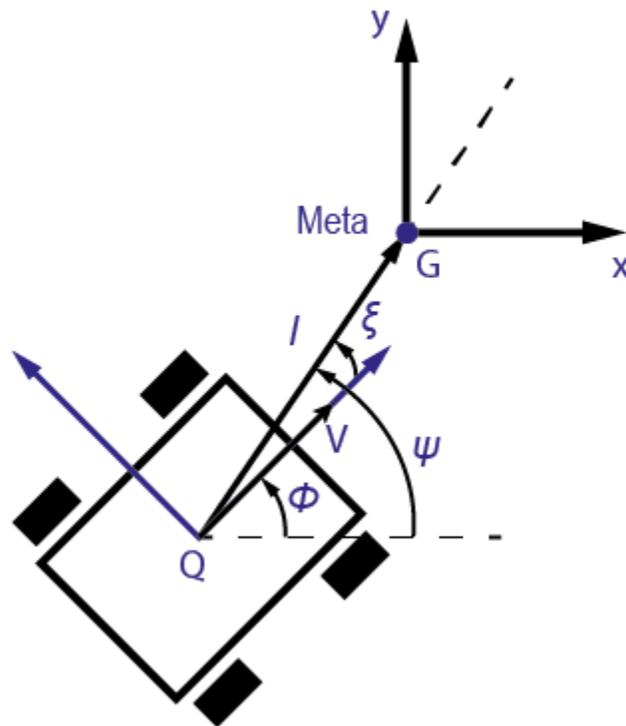


Figura 45. Diagrama del robot con orientación deseada [58].

Mediante resolución de funciones trigonométricas se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$l = \sqrt{(P_{xd} - P_x)^2 + (P_{yd} - P_y)^2} \quad (55)$$

$$\xi = \psi - \varphi \quad (56)$$

$$\psi = \arctan 2 \left( (P_{yd} - P_y), (P_{xd} - P_x) \right) \quad (57)$$

En donde  $l$  es la distancia entre el punto de control y el punto deseado que viene dada por la distancia euclidiana,  $\psi$  es el ángulo de orientación al que se desea que llegue el robot y  $\xi$  es el ángulo formado por la diferencia entre el ángulo deseado ( $\psi$ ) que se va a posicionar el robot y el ángulo  $\varphi$  de orientación del robot, por lo tanto, usando funciones trigonométricas se obtienen las ecuaciones (55), (56) y (57).

Derivando el conjunto de ecuaciones se obtiene el siguiente modelo diferencial:

$$\dot{l} = -v \cos \xi \quad (58)$$

$$\dot{\xi} = -\omega + \left( \frac{v}{l} \right) \sin \xi \quad (59)$$

$$\dot{\psi} = \left( \frac{v}{l} \right) \sin \xi \quad (60)$$

Para el diseño del controlador con orientación deseada se sigue el mismo procedimiento que en el apartado 6.3.1 en donde se considera la función candidata de Lyapunov y se efectúa el análisis de las condiciones que debe cumplir esta función para que el controlador sea asintóticamente estable, garantizando de esta manera que tanto  $l$ ,  $\xi$  y  $\varphi$  tiendan a cero.

Se obtienen las ecuaciones tanto para la velocidad lineal como para la velocidad angular:

$$v = K_1 (\cos \xi) l, \quad K_1 > 0 \quad (61)$$

$$\omega = K_2 \xi + K_1 (\cos \xi) (\sin \xi) (\xi + q_2 \psi) / \xi, \quad K_2 > 0 \quad (62)$$

## 6.4. Control de trayectoria del robot

El objetivo del control de trayectoria es conseguir que el robot omnidireccional siga una curva parametrizada en el tiempo mediante una ley de control en la que el robot alcance y siga con error cero estados deseados variantes en el tiempo, estos estados describen la trayectoria deseada a seguir, es decir la curva que sigue el robot depende de la ecuación que se le imponga en función del tiempo.

Para desarrollar el algoritmo de control se considera la expresión (38) del apartado 6.3.1 del control de posición, con la diferencia de que en este caso por ser control de trayectoria  $\dot{h}_d \neq 0$ , puesto que  $h_d$  ya no se considera una constante.

$$\dot{q} = J^{-1}(\dot{h}_d - \dot{h}_e) \quad (63)$$

Se asume el seguimiento perfecto de velocidad:

$$\dot{q}_{ref} = \dot{q} \quad (64)$$

Reemplazando la ecuación (65) en la ecuación (63), se tiene la siguiente ley de control:

$$\dot{h}_e = -Kh_e \quad (65)$$

$$\dot{q}_{ref} = J^{-1}(\dot{h}_d + Kh_e) \quad (66)$$

Para demostrar que la ley de control es asintóticamente estable se asume que el seguimiento de velocidad es perfecto (65) y se considera la función candidata de Lyapunov que se analizó en el control de posición.

$$V(h_e) = \frac{h_e^T h_e}{2} \quad (67)$$

Derivando la función (67):

$$\dot{V} = h_e^T \dot{h}_e \quad (68)$$

Considerando que el error  $h_e$  es igual a la trayectoria deseada menos la posición real y derivando esta ecuación se tiene la siguiente expresión:

$$\dot{h}_e = \dot{h}_d - \dot{h} \quad (69)$$

Despejando  $\dot{h}$ :

$$\dot{h} = \dot{h}_d - \dot{h}_e \quad (70)$$

Por último, se considera la ecuación del modelo matemático del robot:

$$\dot{h} = J\dot{q} \quad (71)$$

Una vez obtenidas las ecuaciones del modelo matemático del robot (71), la ley de control (66), el seguimiento perfecto de velocidades (64) y la derivada de la posición real del robot (70) realizamos los siguientes procedimientos matemáticos para comprobar la estabilidad asintótica de la función de Lyapunov.

Reemplazando (66) en (71) se obtiene la expresión que representa la ecuación en lazo cerrado del sistema de control:

$$\dot{h} = JJ^{-1}(\dot{h}_d + Kh_e) \quad (72)$$

Reemplazando (70) en (72):

$$\dot{h}_d - \dot{h}_e = JJ^{-1}(\dot{h}_d + Kh_e) \quad (73)$$

Como la matriz identidad vale 1, se tiene:

$$\dot{h}_d - \dot{h}_e = \dot{h}_d + Kh_e \quad (74)$$

Simplificando términos:

$$\dot{h}_e = -Kh_e \quad (75)$$

Reemplazando (75) en la ecuación que representa la derivada de la función candidata de Lyapunov (68) se obtiene la expresión de la siguiente manera:

$$\dot{V} = -h_e^T Kh_e \quad (76)$$

Esta ecuación es una función definida negativa, por lo tanto, de acuerdo con las condiciones de estabilidad de Lyapunov se cumple que el sistema es asintóticamente estable, con esto se demuestra la estabilidad del sistema y se procede a realizar el algoritmo de control.

## 6.5. Planta de control general del robot

A continuación, se presenta un diagrama general del sistema de control realimentado de la planta del robot móvil omnidireccional.

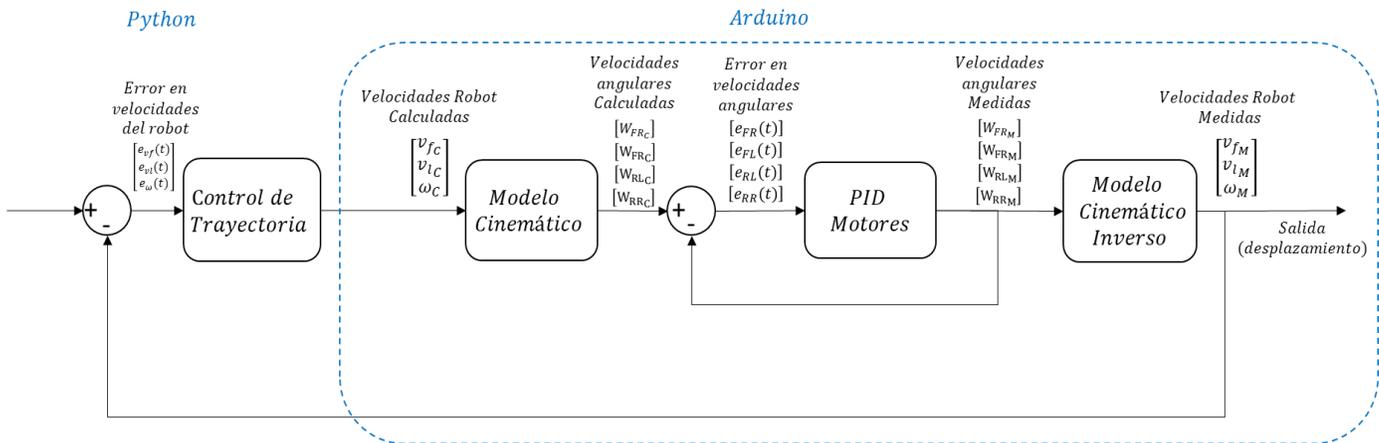


Figura 46. Planta general de control del robot.

La entrada del robot es la trayectoria que define el usuario, esta entrada puede ser cualquier función matemática ya sea un seno, coseno, círculo, parábola, etc. Para definir el Setpoint que corresponde a las velocidades lateral, frontal y angular deseadas para el control de posición y trayectoria se utiliza el control basado en la teoría de estabilidad de Lyapunov que fue explicado anteriormente, de esta forma se encuentra la función característica de la planta de tal manera que se pueda comparar el error con el Setpoint y sacar las velocidades que se deben aplicar para que el robot siga la trayectoria deseada, posteriormente estas velocidades lateral, frontal y angular que se calcula en el control de trayectoria son enviadas al Arduino.

## **CAPÍTULO 7: Pruebas y evaluación de resultados**

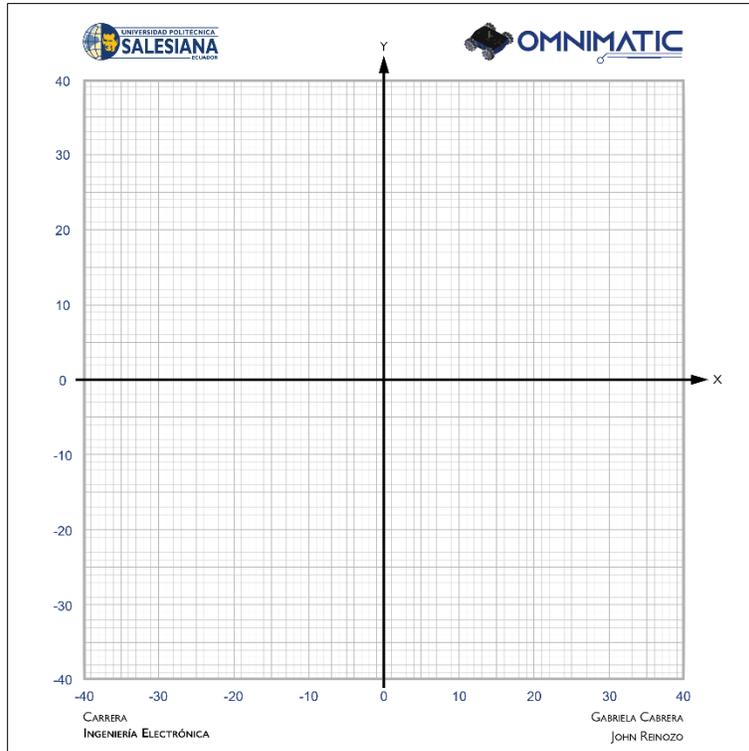
En este capítulo se procederá a evaluar el funcionamiento del robot a través de una serie de pruebas funcionales que se dividen en dos etapas. La primera etapa consiste en una serie de pruebas experimentales, en las cuales se evaluará el funcionamiento del robot y su capacidad para cumplir con las tareas especificadas. La segunda etapa de pruebas consiste en permitir que un grupo de jóvenes de edades entre 11 y 18 años proceda a ensamblar el robot y ejecute varios ejercicios a través de los cuales podrán interactuar con el robot y comprender su funcionamiento evaluando el nivel de dificultad que presentan los participantes durante su ensamblaje y uso.

### **7.1. Pruebas experimentales**

Como parte de las pruebas experimentales fue necesaria la creación de una serie de ejercicios que el robot debe ejecutar, para lo cual se imprimieron 6 lonas de 1x1mt sobre las que el robot se desplazará y dibujará su trayectoria haciendo uso de un marcador colocado en el centro de este. La trayectoria que sigue el robot será dibujada en una mica transparente que recubrirá la lona, pudiendo ser borrada al culminar la prueba.

Es importante tomar en cuenta que para fines prácticos y de usabilidad del robot de momento no se evalúa el uso de la orientación del robot (ángulo  $\phi$ ) debido a la complejidad superior que posee su explicación para jóvenes de las edades a las que este robot se encuentra dirigido.

Cada lona contiene un plano cartesiano de 0.8x0.8mts (Figura 47) y una figura que muestra el camino que el robot deberá seguir. Tomando en cuenta que el robot es capaz de ejecutar dos tareas, el control de posición y el control de trayectoria, se optó por generar 3 ejercicios para cada tipo de control.



*Figura 47. Lona 1 - Plano cartesiano vacío*

### **7.1.1. Control de posición - pruebas experimentales**

Los tres ejercicios planteados para el control de posición son los siguientes:

## Ejercicio 1 – Control de posición: Triángulo isósceles

Parámetros

Posiciones en X: [0, -0.25, 0.25, 0]

Posiciones en Y: [0.25, -0.25, -0.25, 0.25]

Tiempos: [4, 4, 4, 4]

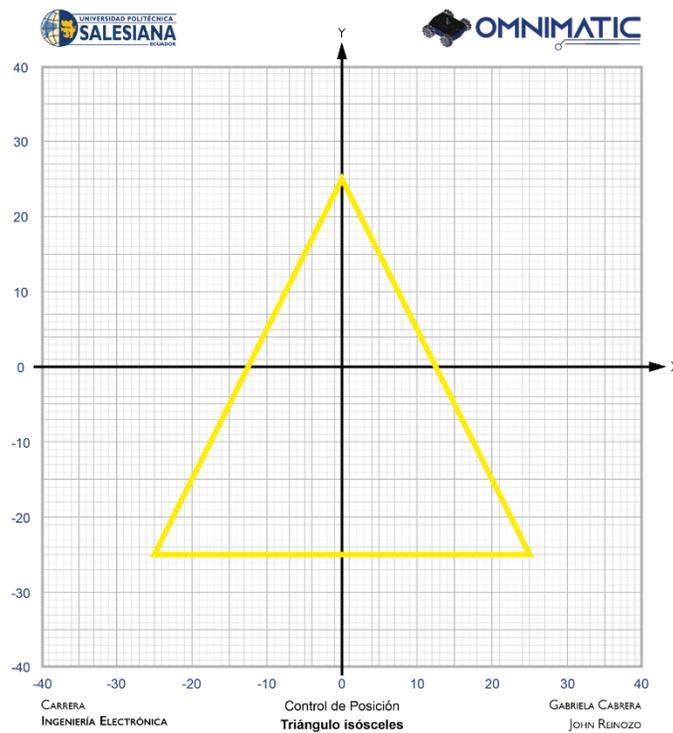


Figura 48. Lona 2 - Ejercicio 1 - Control de posición: Triángulo isósceles

## Resultados

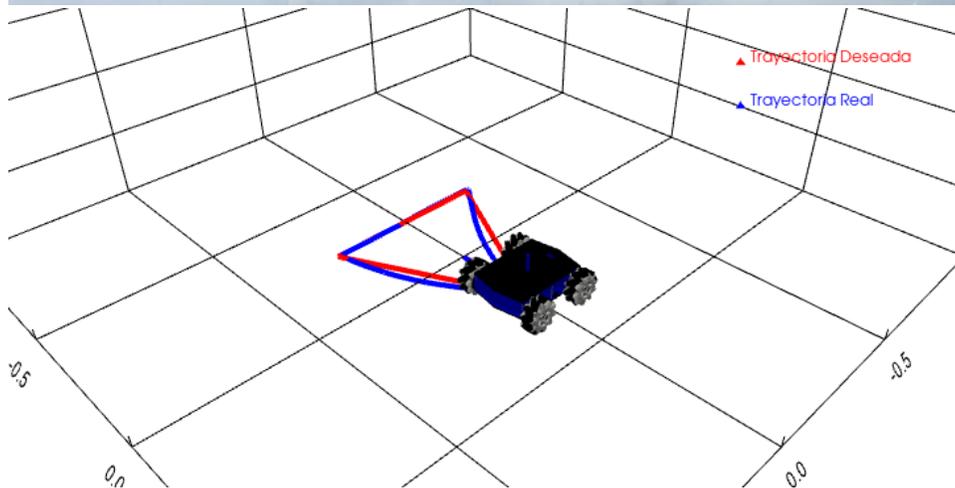
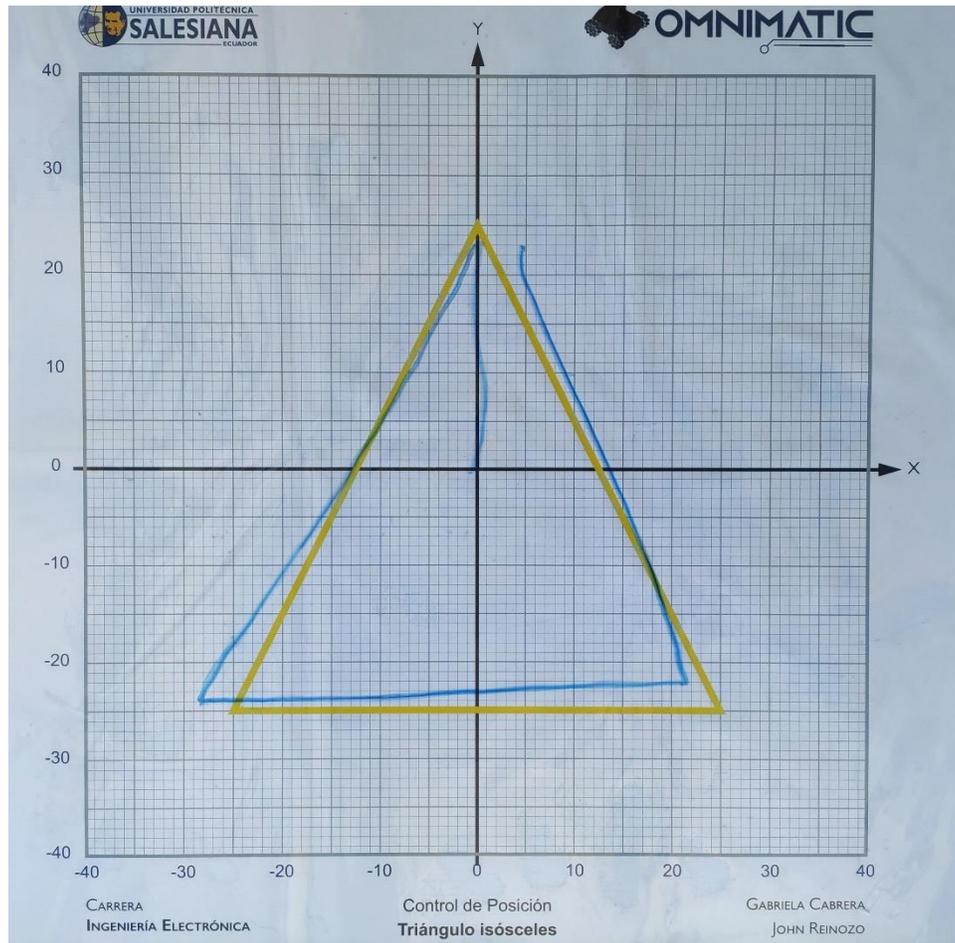


Figura 49. Comparación de resultados Ejercicio 1 Control de Posición – trayectoria en lona vs trayectoria en interfaz

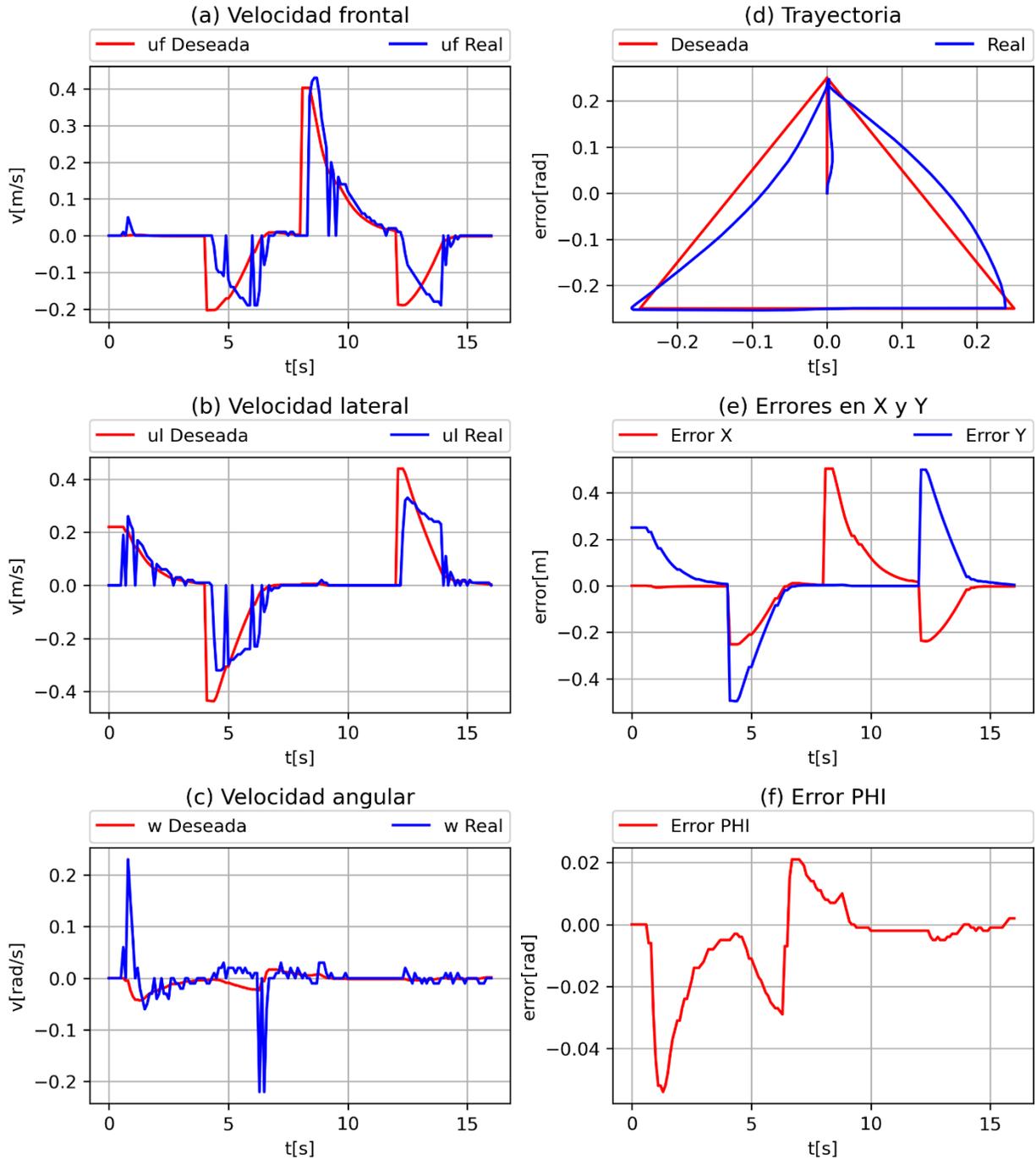


Figura 50. Resultados Ejercicio 1 - Control de Posición - Triángulo isósceles – Gráficas

### Interpretación de resultados

Cómo se puede observar en la Figura 49, imagen superior los resultados dibujados sobre la lona del movimiento del robot son buenos, sin embargo, estos difieren de la imagen inferior que

corresponden a la trayectoria del robot según la información recibida por la interfaz gráfica en cuanto a sus velocidades. Este es un comportamiento que veremos reflejado en todos los ejercicios ejecutados en adelante y se debe principalmente a que existen una serie de perturbaciones externas que no es posible cuantificarlas con los medios utilizados en este robot, en este caso, la odometría. Las perturbaciones en cuestión corresponden principalmente a la pérdida de adherencia de las ruedas con la superficie, lo cual provoca resbalones que llevan a que el robot pierda su trayectoria deseada y esto no sea detectado por el software.

En el grupo de gráficas de la Figura 50 se pueden apreciar varias ondas que describen el comportamiento del robot durante el ejercicio ejecutado, entre ellas:

- (a) Velocidad frontal: muestra la evolución de la velocidad frontal del robot, tanto la velocidad deseada, como la velocidad a la que finalmente se desplazó el robot
- (b) Velocidad lateral: al igual que la velocidad frontal, esta gráfica muestra la comparación entre la velocidad lateral deseada y la real que ejecutó el robot.
- (c) Velocidad angular: de la misma manera se muestra una comparación entre la velocidad angular deseada y la real, la cual en los ejercicios realizadas debería mantenerse en cero debido a que la orientación se especifica como cero para todos los ejercicios.
- (d) Trayectoria: comparación entre la trayectoria deseada y la real del robot sobre el plano XY
- (e) Errores en X y Y: Esta gráfica muestra cómo el error de la ubicación en cada eje converge a 0 y vuelve a crecer en cuanto se le solicita al robot se desplace hacia otro punto.
- (f) Error PHI: al igual que en la gráfica (c) esta onda describe el comportamiento de la orientación del robot, mismo que se mantiene lo más cercano a cero debido a que no se hace uso de la orientación en los ejercicios.

## Ejercicio 2 – Control de posición: Cuadrado

Parámetros

Posiciones en X: [0.25, -0.25, -0.25, 0.25, 0.25]

Posiciones en Y: [0.25, 0.25, -0.25, -0.25, 0.25]

Tiempos: [4, 4, 4, 4, 4]

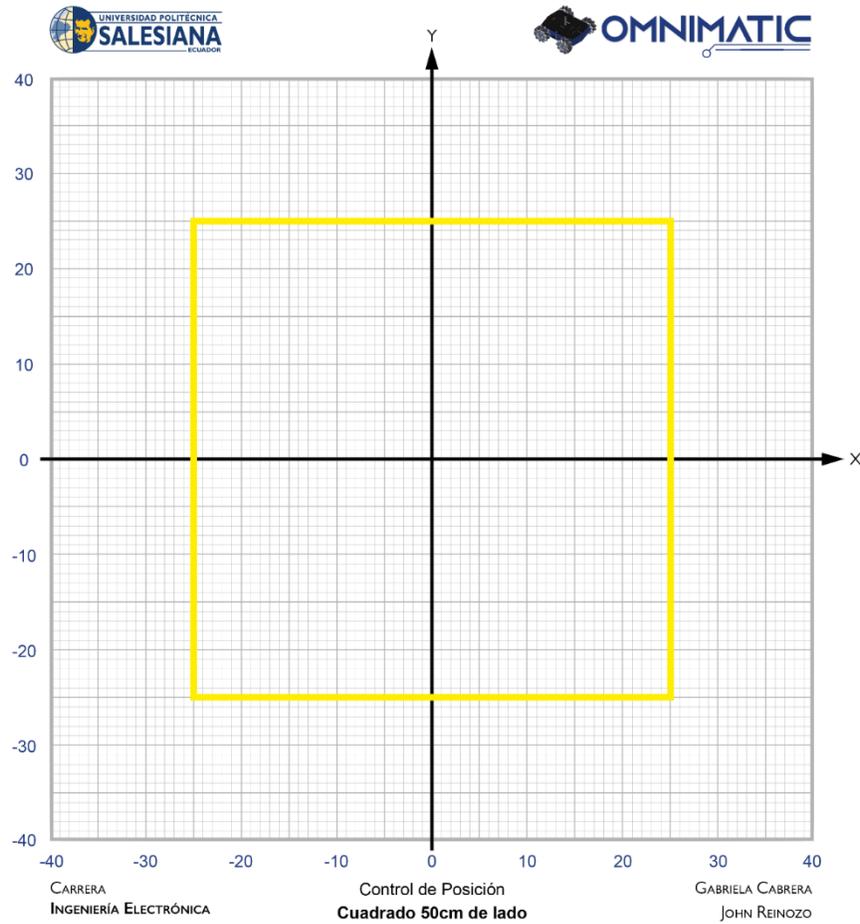


Figura 51. Lona 3 - Ejercicio 2 - Control de posición: Cuadrado

## Resultados

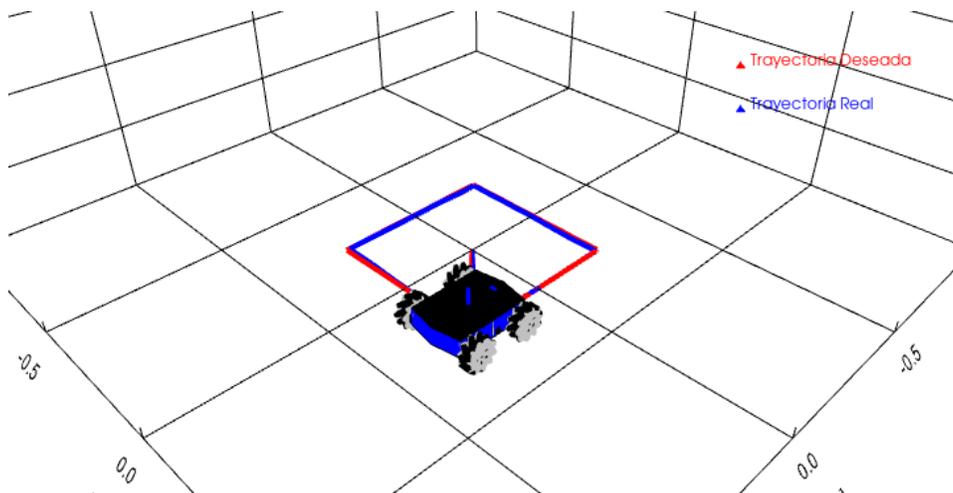
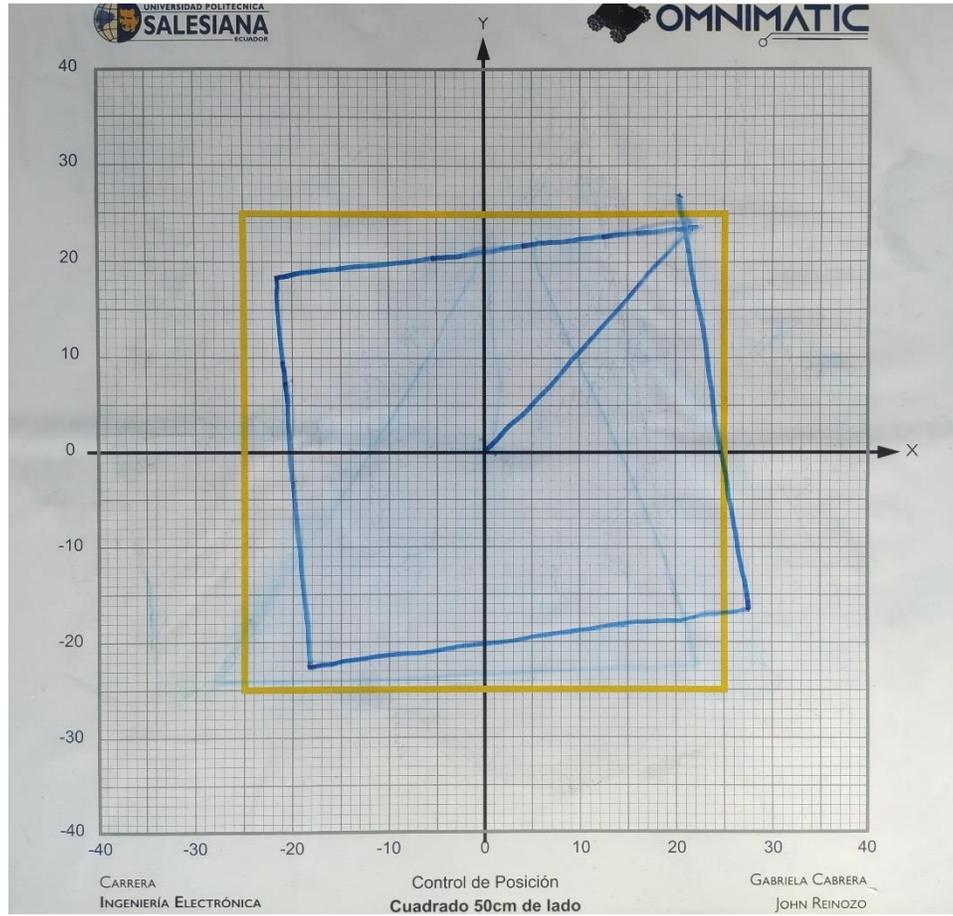


Figura 52. Comparación de resultados Ejercicio 2 Control de Posición – trayectoria en lona vs trayectoria en interfaz

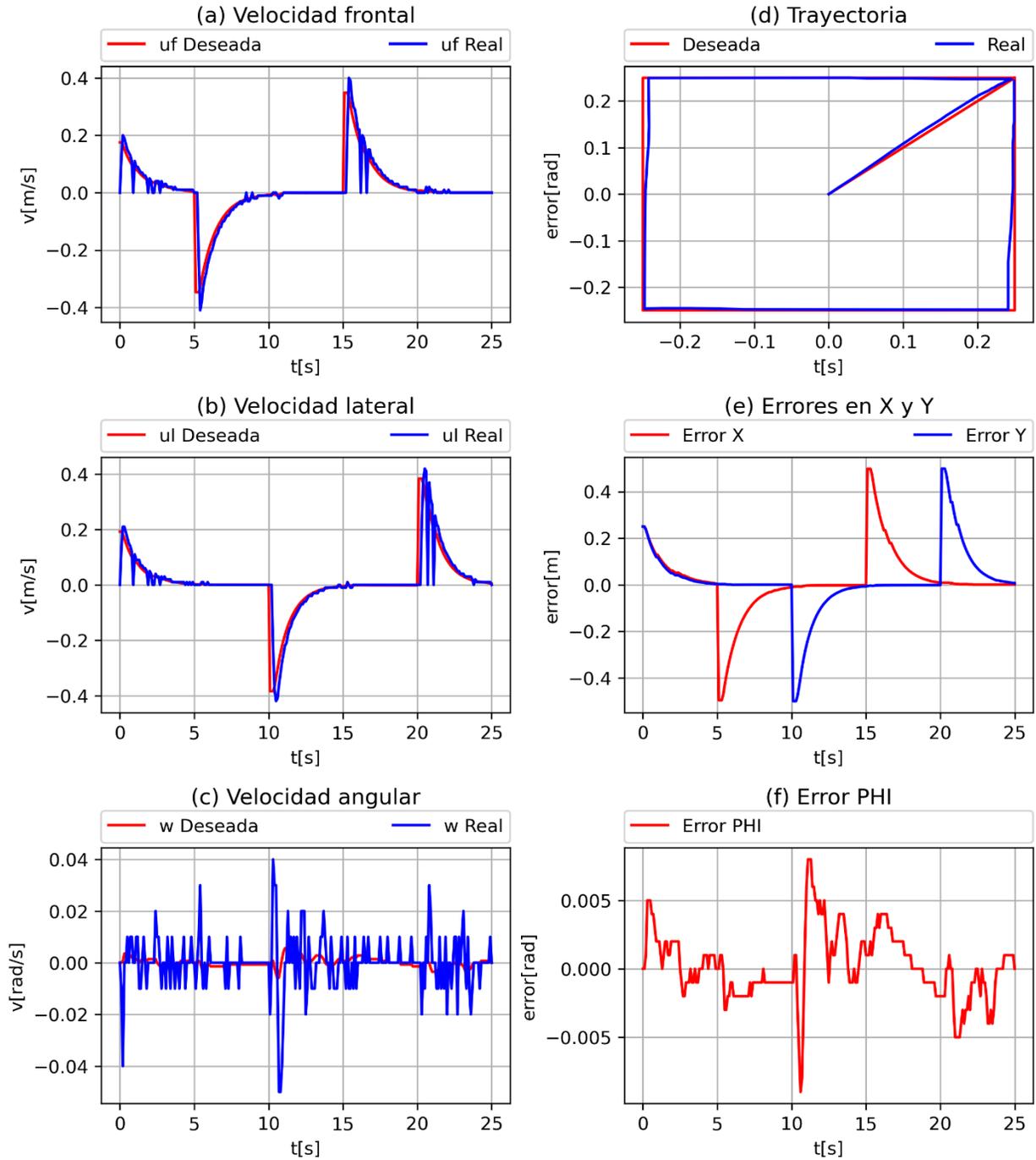


Figura 53. Resultados Ejercicio 2 - Control de Posición - Cuadrado – Gráficas

### Interpretación de resultados

De acuerdo con la Figura 52, el robot logra completar la figura propuesta, sin embargo, como estaba previsto, nuevamente se presenta el mismo comportamiento, en el que la trayectoria

graficada en la lona difiere de la información recibida por el robot debido principalmente a los resbalones de las ruedas y algunas veces a la falta de uniformidad de la superficie.

Debido a estos resbalones podemos apreciar que el robot tuvo un giro en su orientación de alrededor de unos  $6^\circ$ , mismo que no se puede apreciar en las gráficas (c) y (f) de la Figura 53 en donde el error no supera los 0.01 radianes y que provocó que el rectángulo sea dibujado inclinado.

### Ejercicio 3 – Control de posición: Hexágono

Parámetros

Posiciones en X: [0.30, 0.15, -0.15, -0.30, -0.15, 0.15, 0.30]

Posiciones en Y: [0, 0.26, 0.26, 0, -0.26, -0.26, 0]

Tiempos: [4, 4, 4, 4, 4, 4, 4]

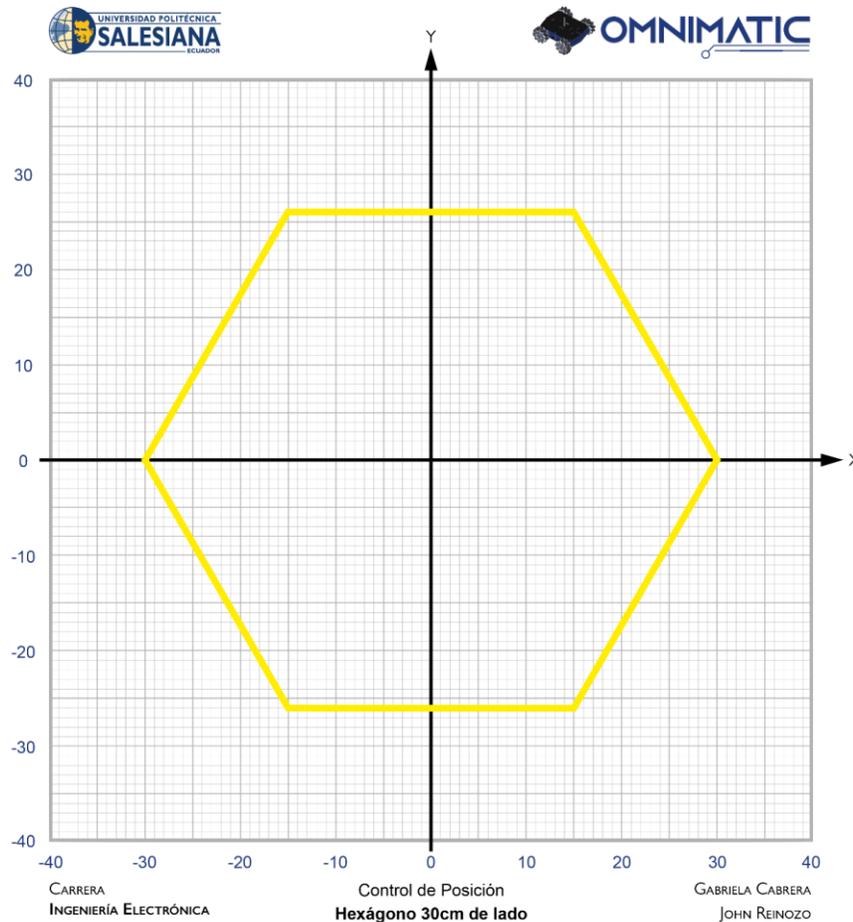


Figura 54. Lona 4 - Ejercicio 2 - Control de posición: Cuadrado

## Resultados

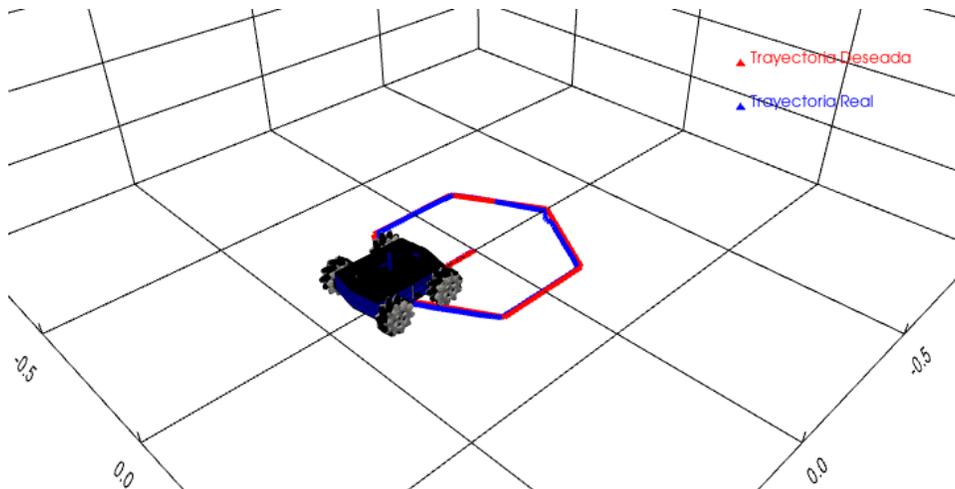
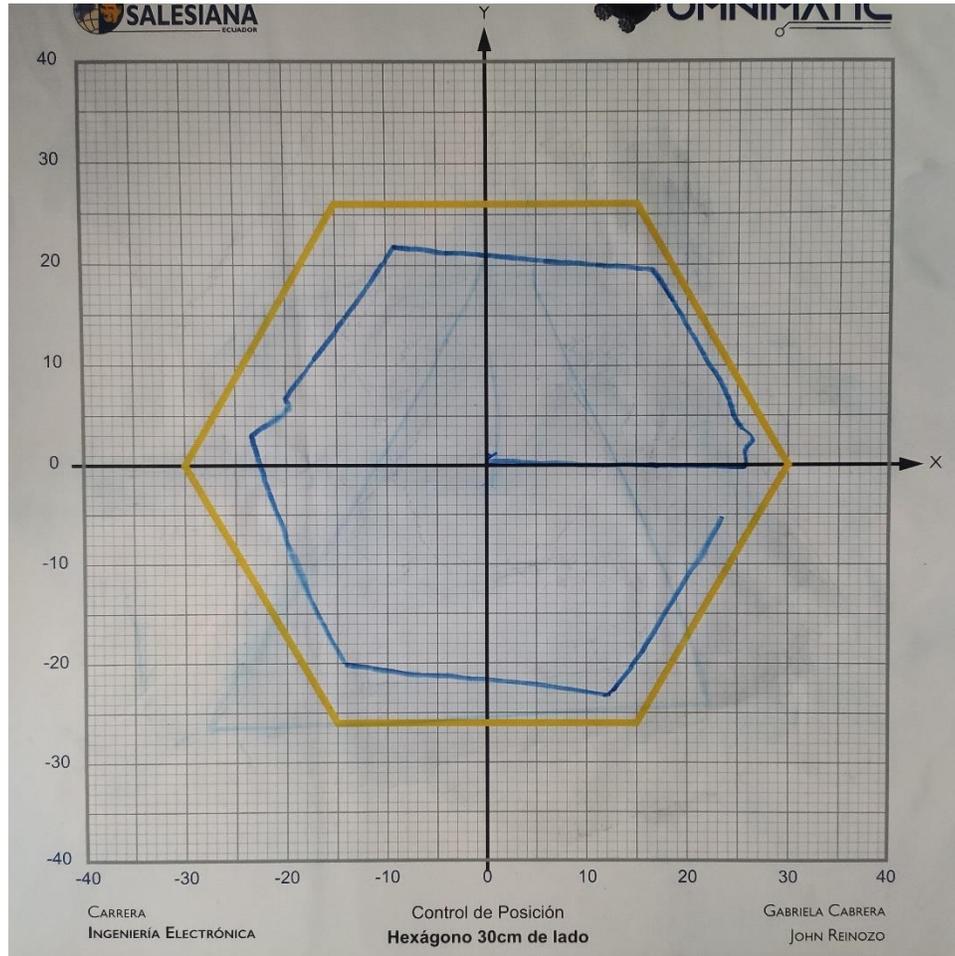


Figura 55. Comparación de resultados Ejercicio 3 Control de Posición – trayectoria en lona vs trayectoria en interfaz

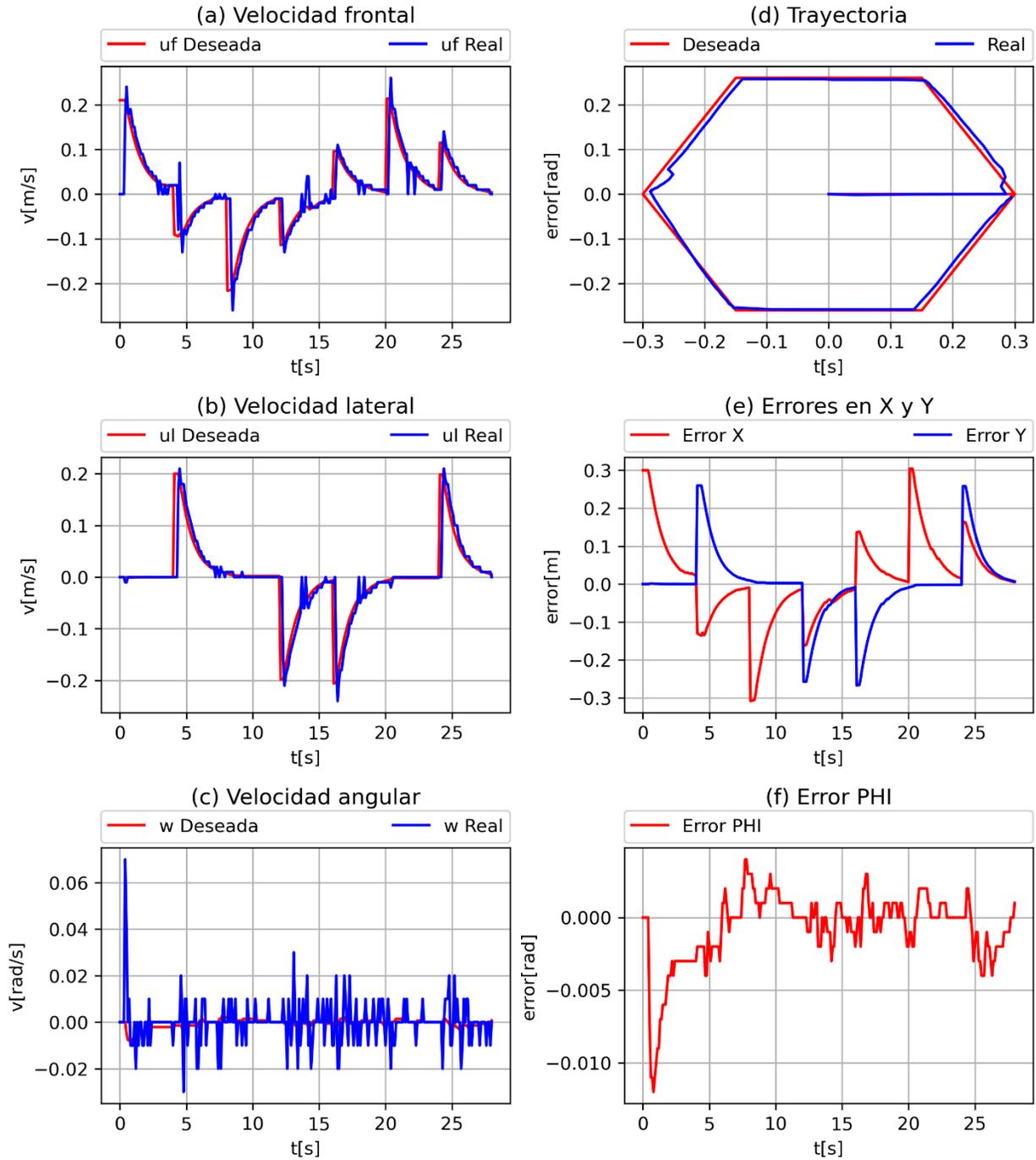


Figura 56. Resultados Ejercicio 2 - Control de Posición – Hexágono – Gráficas

### Interpretación de resultados

Este ejercicio muestra un comportamiento similar a los dos anteriores y podemos ver que el robot no grafica en la lona la figura exacta, en parte se debe a los resbalones pero también fue

necesario revisar la matriz de ganancias de las velocidades para mejorar la ejecución, debido a que las ganancias en la velocidad lateral no eran suficientes.

Se optó por mostrar esta ejecución del ejercicio debido a que en la gráfica (d) de la Figura 56 se pueden observar 2 perturbaciones que sí fueron ser percibidas por el software del robot y que también están presentes en la Figura 55 en la trayectoria sobre la lona. Estas perturbaciones se deben a picos en las velocidades del robot que se generaron por un sobre impulso en la velocidad de una o varias ruedas al encontrar resistencia en el giro.

### 7.1.2. Control de trayectoria - pruebas experimentales

#### Ejercicio 1 – Control de trayectoria: Círculo 65cm de diámetro

##### Parámetros

Función en X:  $0.35 \cos(0.3t)$

Función en Y:  $0.35 \sin(0.3t)$

Tiempo: 21

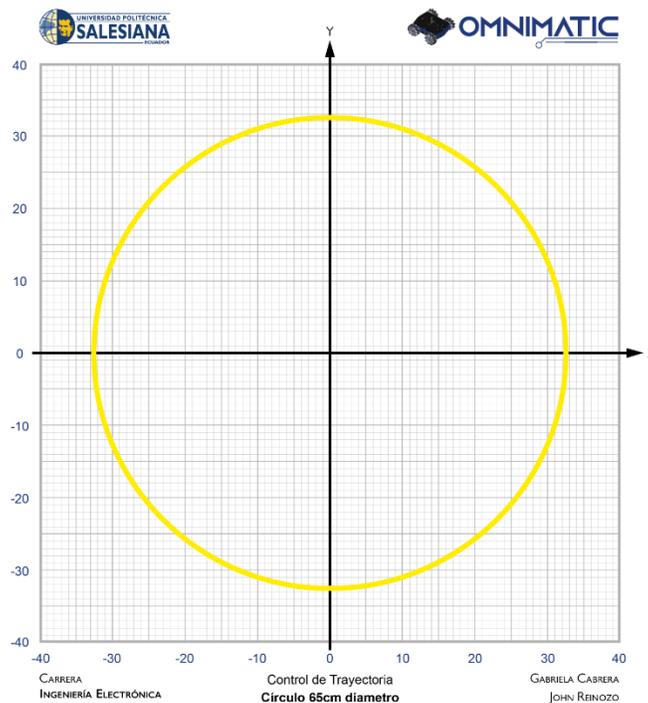


Figura 57. Lona 5 - Ejercicio 1 - Control de trayectoria: Círculo

## Resultados

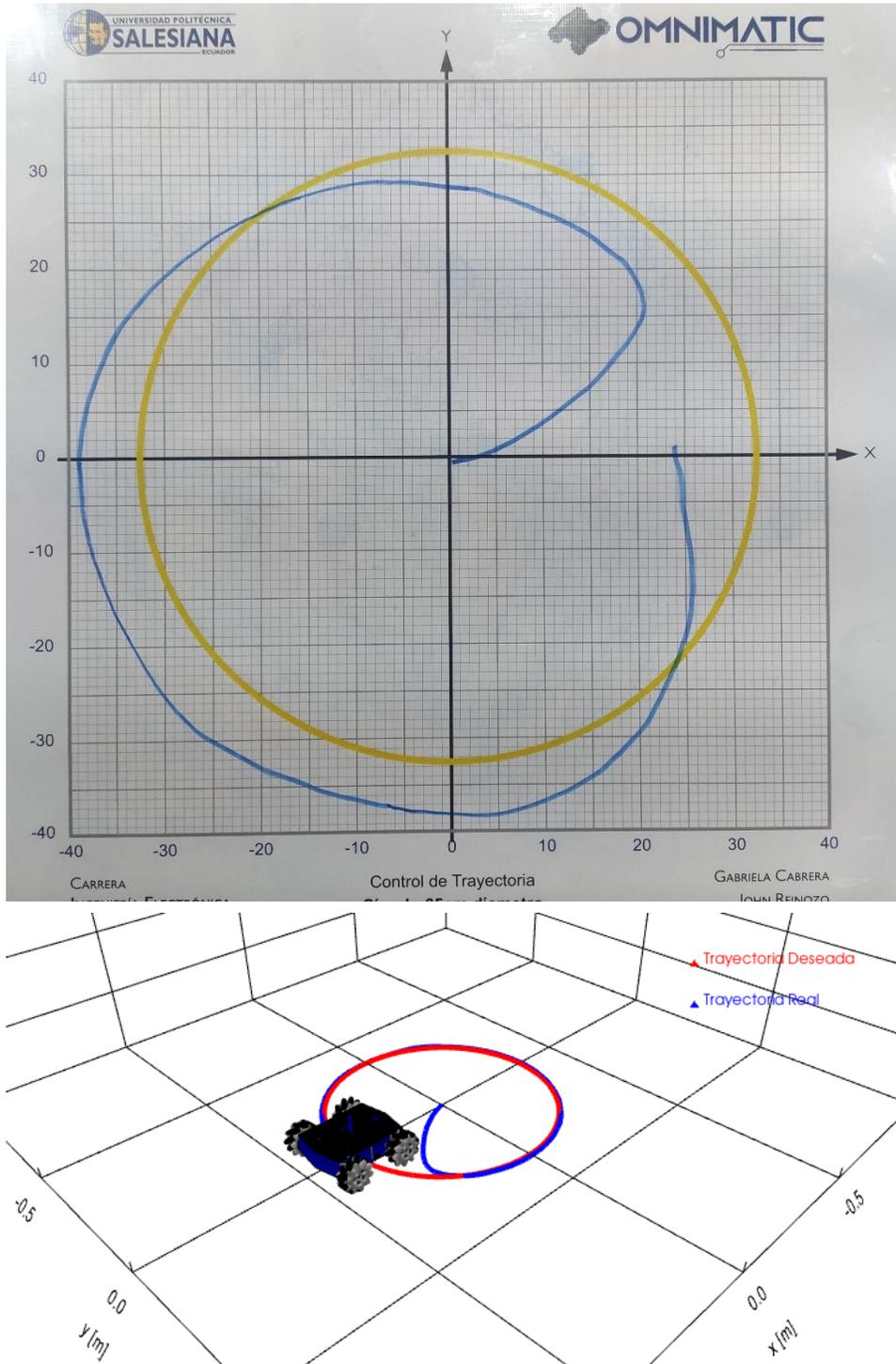


Figura 58. Comparación de resultados Ejercicio 1 Control de Trayectoria – trayectoria en lona vs trayectoria en interfaz

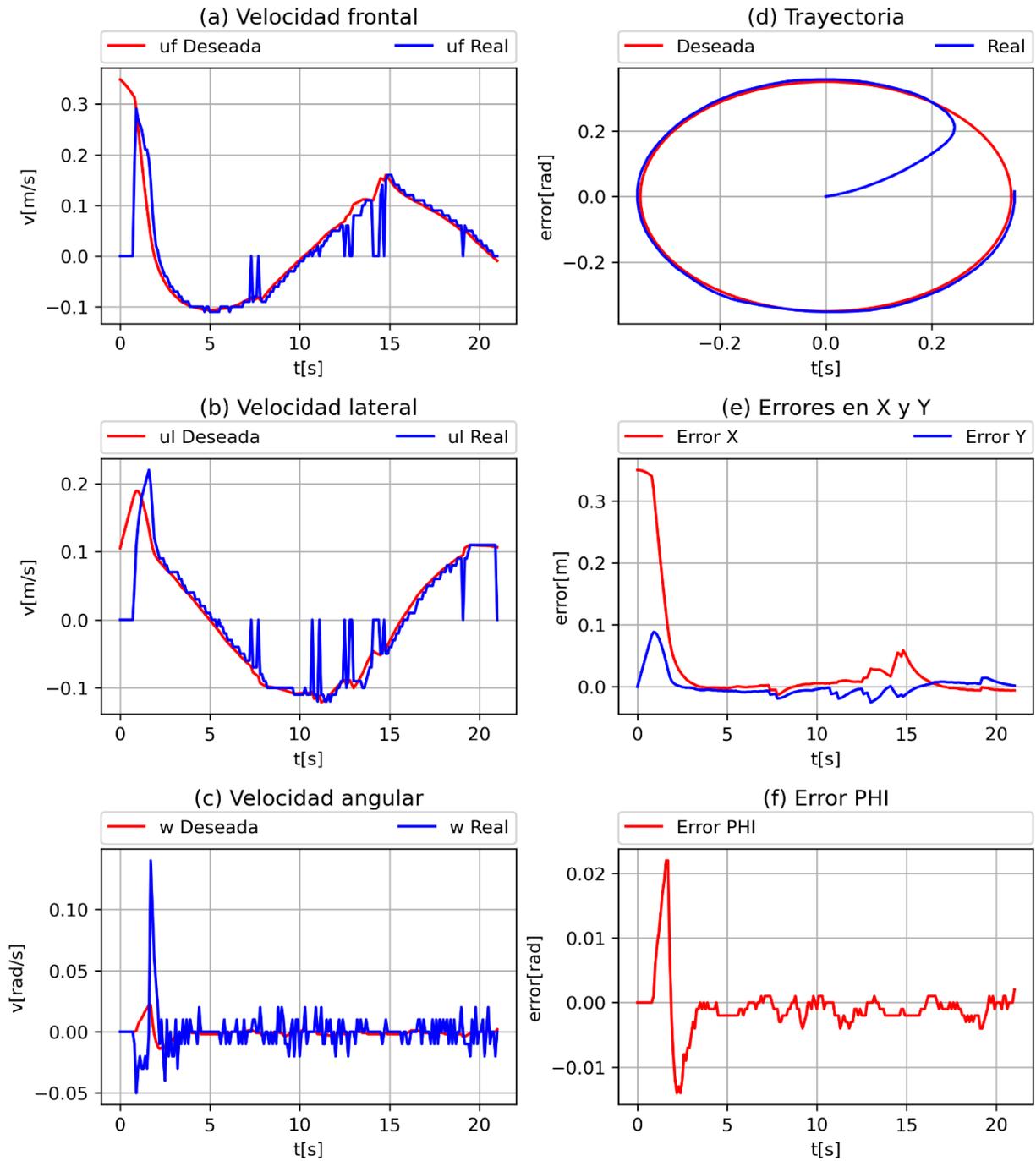


Figura 59. Resultados Ejercicio 1 - Control de Trayectoria - Círculo – Gráficas

### Interpretación de resultados

De acuerdo con la Figura 58 el robot que inicia su desplazamiento en el origen logra acoger rápidamente la trayectoria deseada y podemos constatar que los cambios en las ganancias de las

velocidades mejoró el rendimiento del robot. Sin embargo, adicional a los posibles resbalones, aún se presenta cierto error en el eje Y que correspondería a la velocidad lateral del robot, esto debido a que existe mayor resistencia al desplazamiento del robot en un movimiento lateral al ser un robot omnidireccional que utiliza rodillos con  $45^\circ$  de inclinación en sus ruedas.

En cuanto a la Figura 59, podemos resaltar las gráficas (a) y (b) en las que se pueden apreciar picos pequeños que afortunadamente no afectaron en gran medida el desempeño del robot.

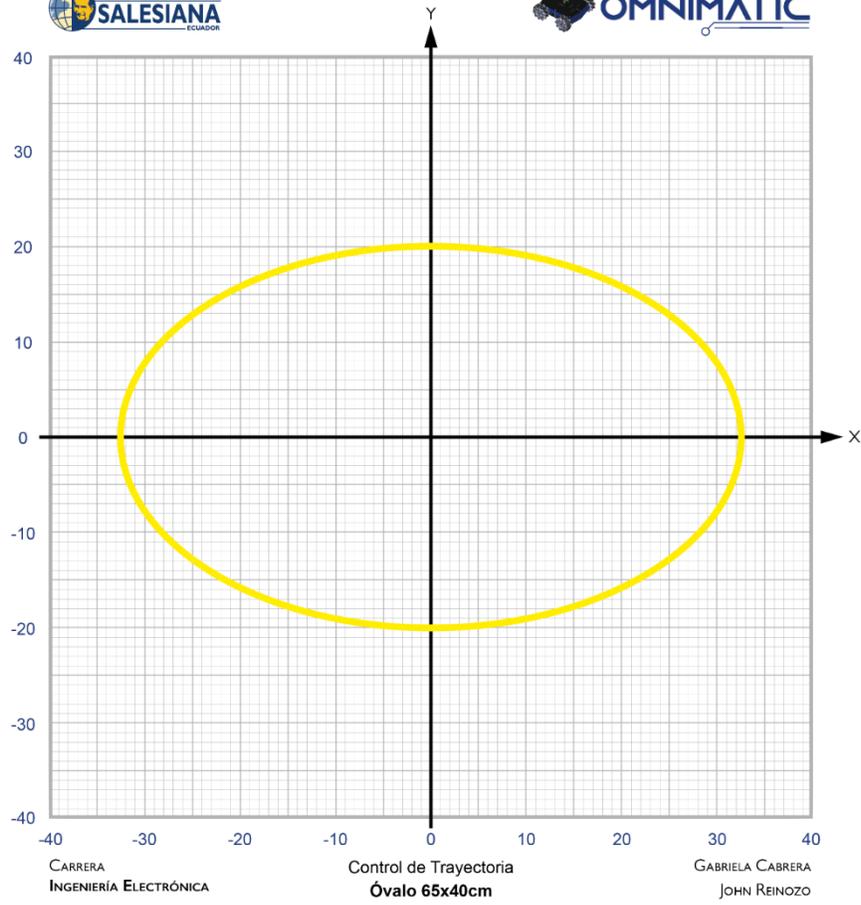
### **Ejercicio 2 – Control de trayectoria: Óvalo 65x40cm**

Parámetros

Función en X:  $0.35 \text{ Cos}(0.3t)$

Función en Y:  $0.2 \text{ Sin}(0.3t)$

Tiempo: 21



*Figura 60. Lona 6 - Ejercicio 2 - Control de trayectoria: Óvalo*

## Resultados

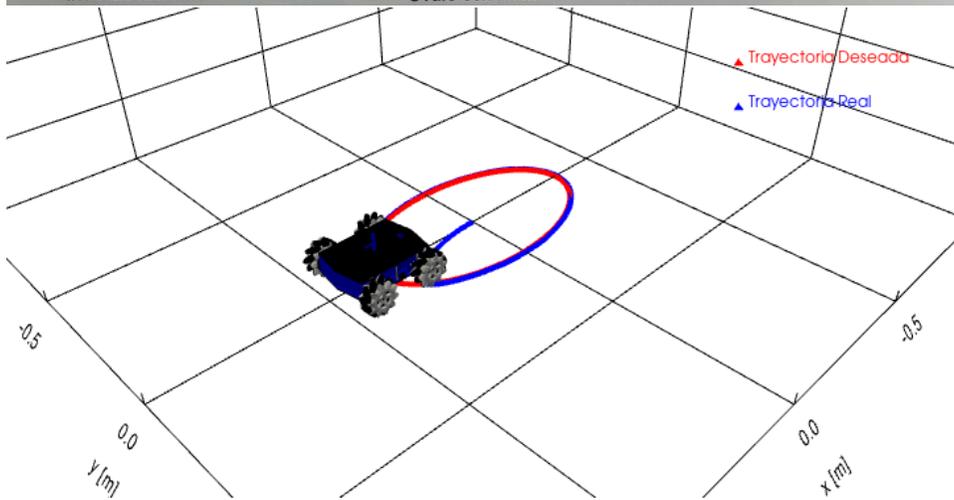
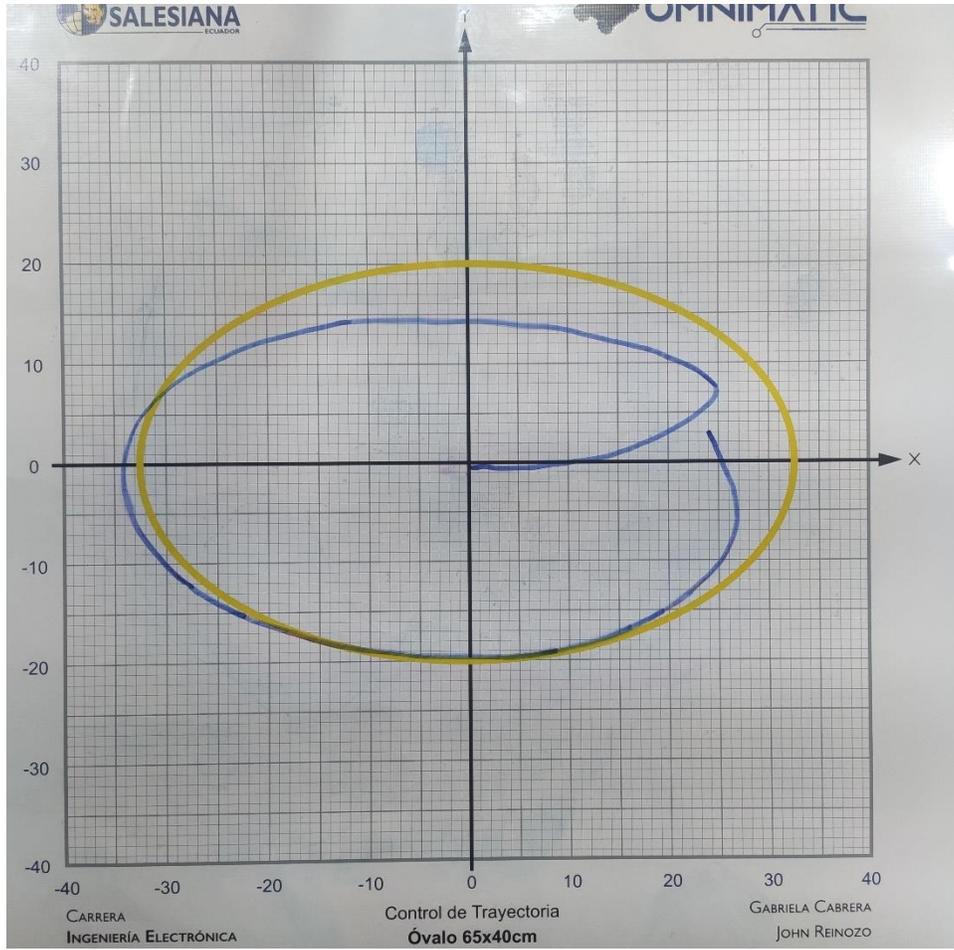


Figura 61. Comparación de resultados Ejercicio 2 Control de Trayectoria – trayectoria en lona vs trayectoria en interfaz

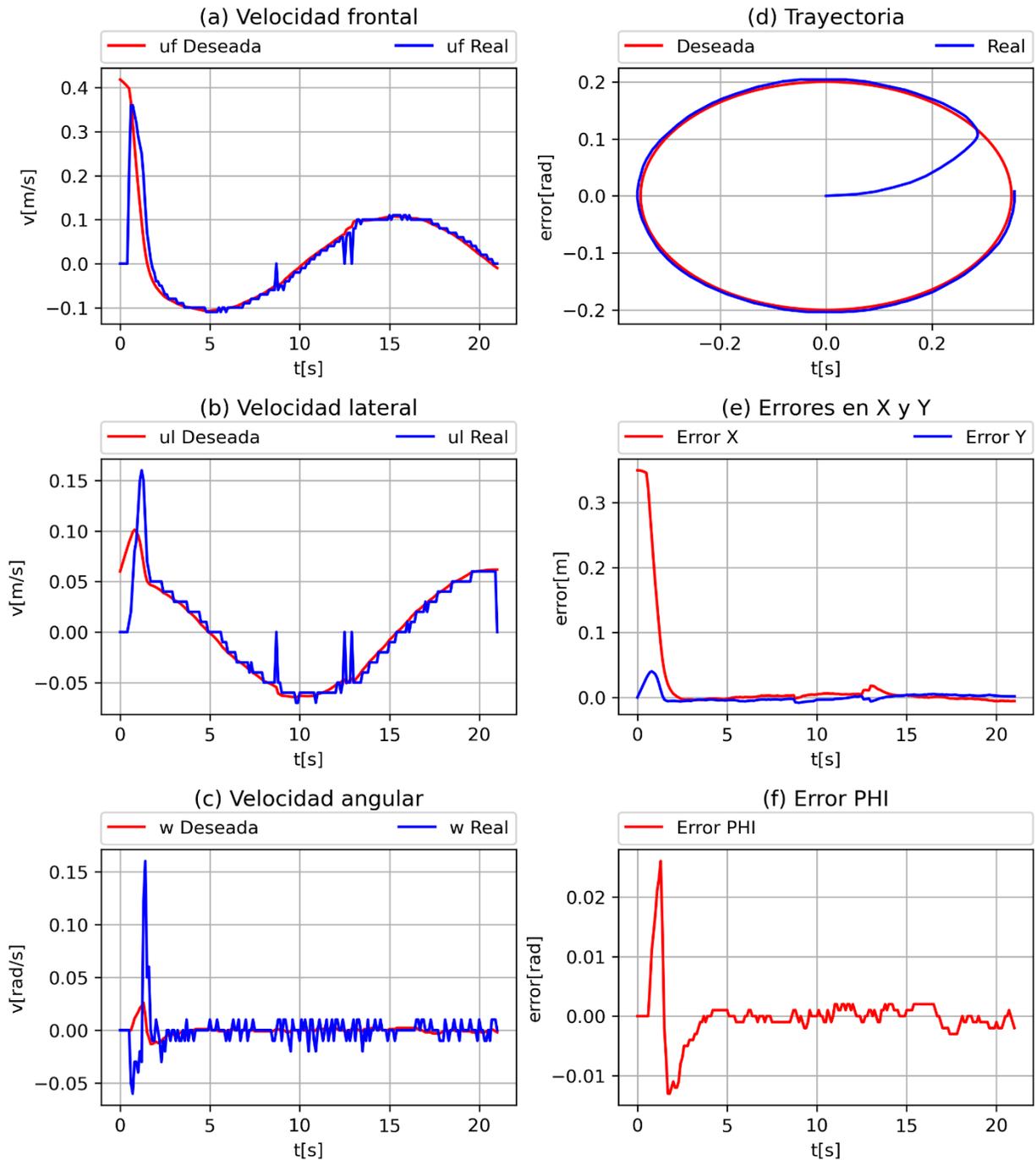


Figura 62. Resultados Ejercicio 2 - Control de Trayectoria - Óvalo – Gráficas

### Interpretación de resultados

De acuerdo con los resultados de este ejercicio podemos observar en la Figura 61 que el robot pudo replicar con un gran nivel de exactitud la trayectoria deseada, a excepción del arranque

y la finalización en los cuales el robot falla al alcanzar la trayectoria requerida en el principio y al final debido a los cambios fuertes en las velocidades requeridas que se traducen en parte a resbalones sobre la lona.

### Ejercicio 3 – Control de trayectoria: Infinito

Parámetros

Función en X:  $0.3 \cos(0.15t)$

Función en Y:  $0.3 \sin(0.3t)$

Tiempo: 42

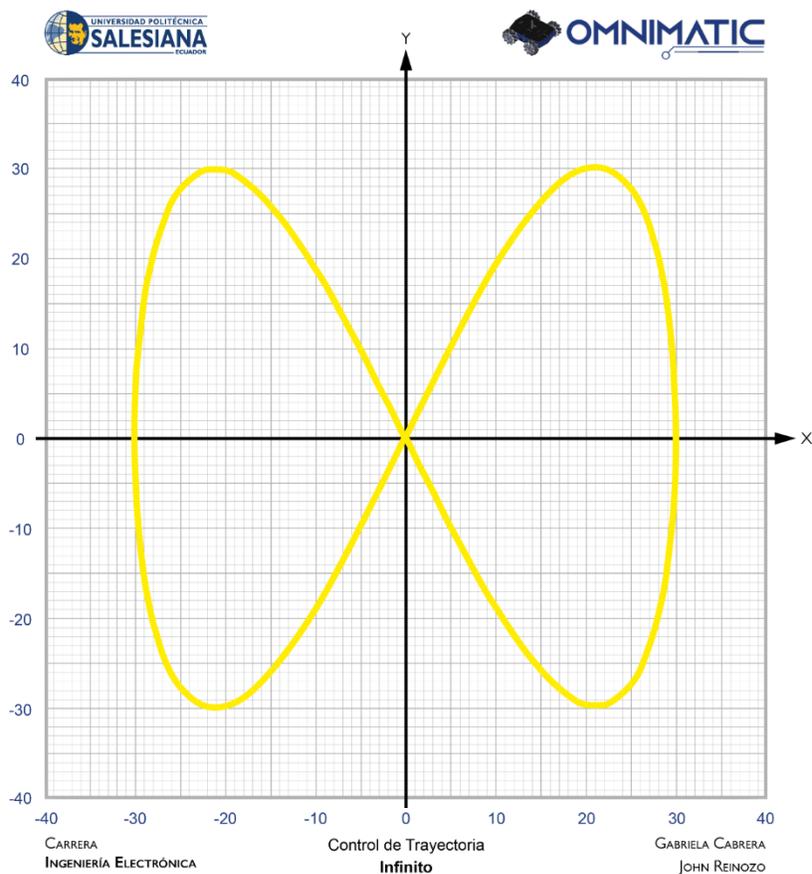


Figura 63. Lona 7 - Ejercicio 3 - Control de trayectoria: Infinito

### Resultados

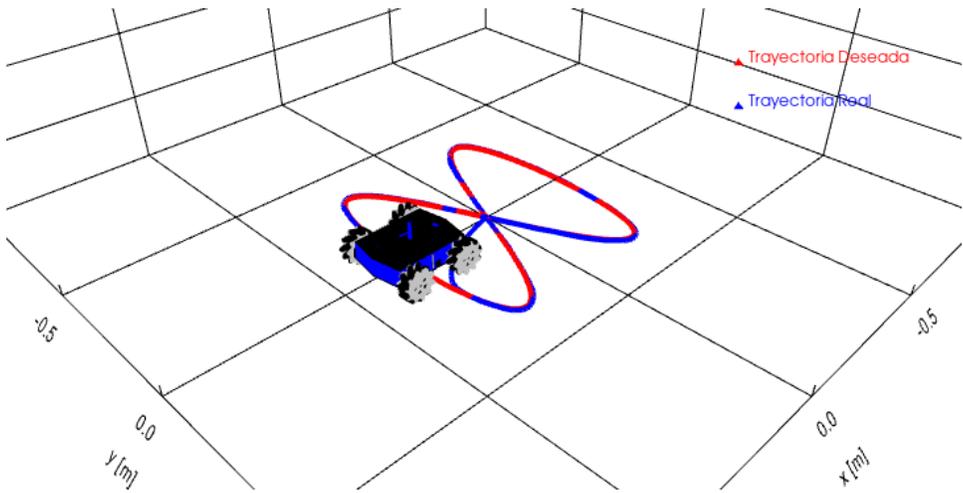
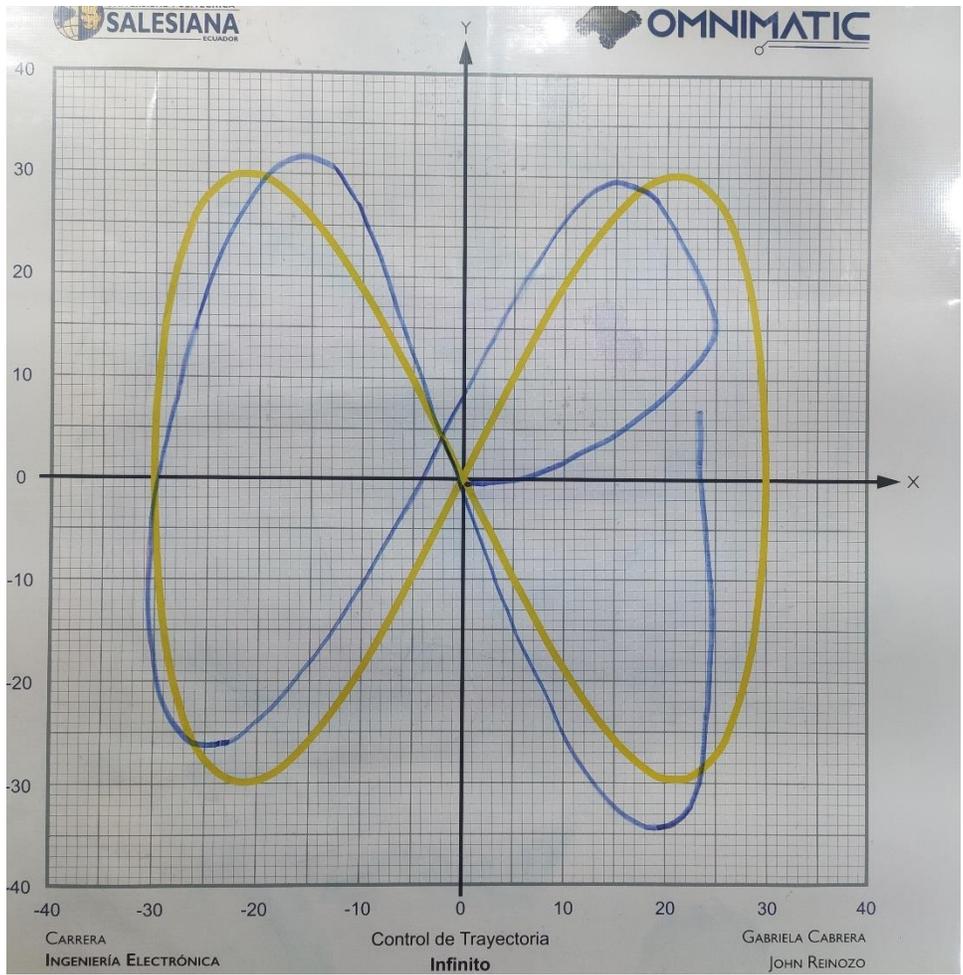


Figura 64. Comparación de resultados Ejercicio 3 Control de Trayectoria – trayectoria en lona vs trayectoria en interfaz

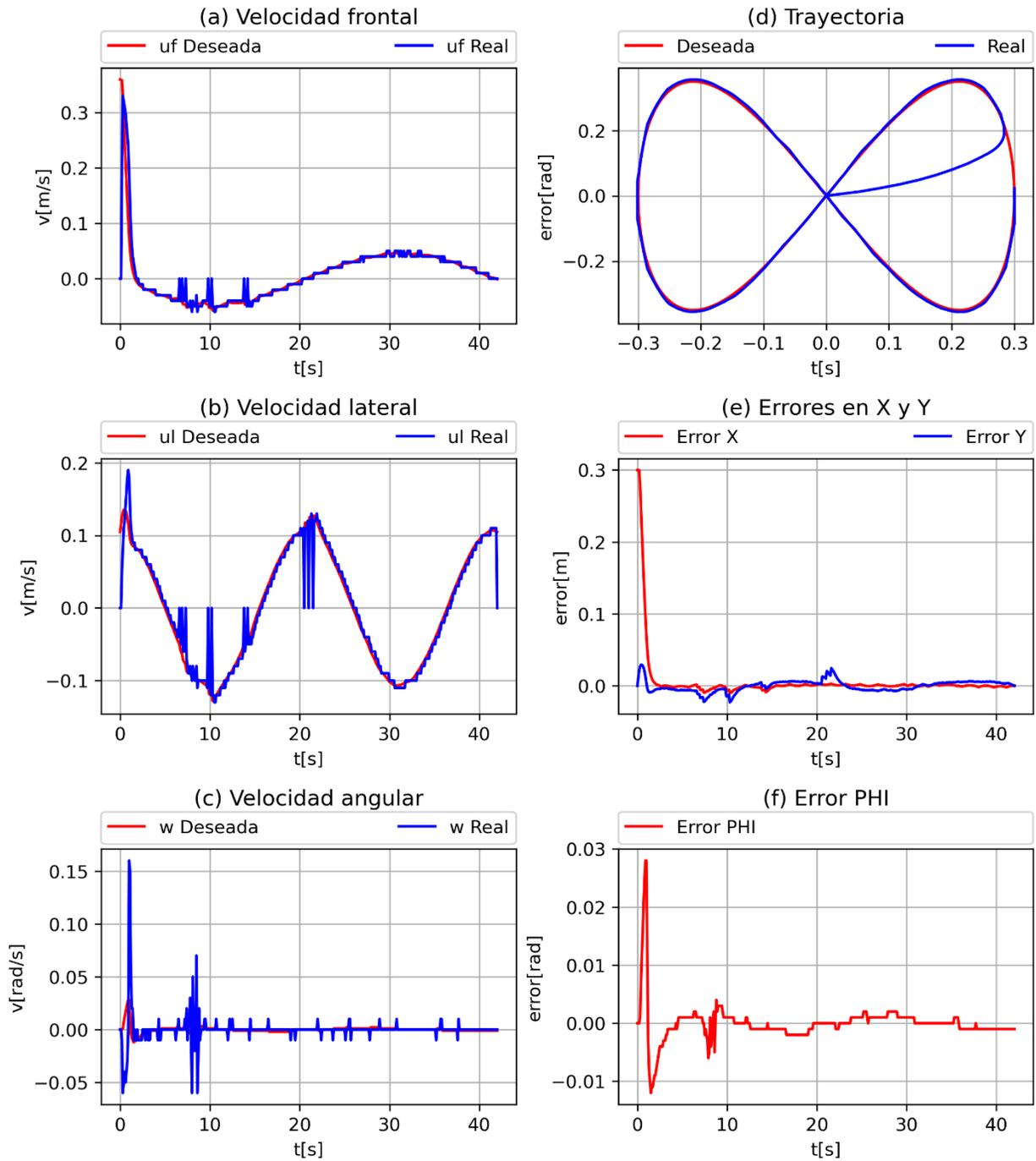


Figura 65. Resultados Ejercicio 3 - Control de Trayectoria - Infinito – Gráficas

### Interpretación de resultados

De acuerdo con el trazado en la lona de la Figura 64, el robot en principio no logra alcanzar con exactitud la trayectoria deseada y esto provoca que en un principio no vuelva a pasar por el

origen como debería, sin embargo al completar la segunda vuelta si lo hace a pesar de un leve error en la orientación que pudo ser corregido. Posterior finaliza con un error leve.

En cuanto a la Figura 65, podemos observar que el robot logra seguir las velocidades requeridas con gran exactitud, a excepción de pequeños picos que afectan en menor medida al rendimiento.

## **7.2. Pruebas con jóvenes**

Para la segunda parte de las pruebas del robot se procedió a organizar un taller de robótica de una tarde, en el cual participaron 10 jóvenes de la localidad con edades entre 9 y 21 años (Apéndice 4 – Registro de asistentes Taller OmniMatic).

El robot fue denominado OmniMatic, con la finalidad de generar afinidad hacia los participantes y que puedan llamarlo por un nombre agradable y fácil de recordar.

### **7.2.1. Manual de ensamblaje e instructivo de prácticas**

De acuerdo a lo previsto inicialmente, fue necesario el desarrollo de un manual de ensamblaje para el robot. De esta manera, con la intención de brindar un instructivo comprensible y agradable a la vista se procedió a desarrollar un documento con un estilo similar al de los manuales de los juguetes fabricados por la empresa Lego. Este manual se encuentra con mayor detalle en el Apéndice 3 – Manual de ensamblaje.

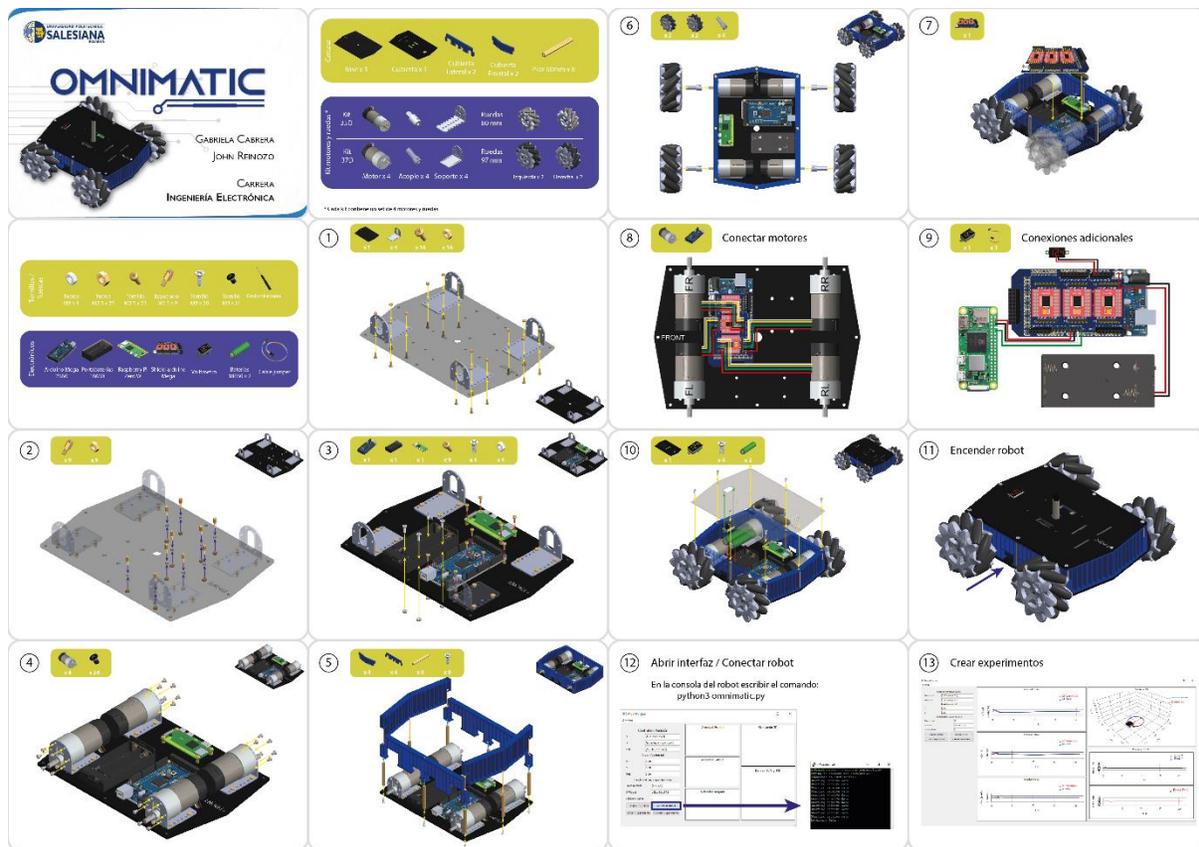


Figura 66. Manual de ensamblaje – OmniMatic (Apéndice 3 — Manual de ensamblaje)

De la misma forma fue necesario el desarrollo de una breve guía de prácticas para el taller (revisar Apéndice 5 – Guía de prácticas para el taller OmniMatic para mayor detalle). En este documento se detallaron tres actividades que involucraron también el uso de conceptos matemáticos básicos para su desarrollo:

### 1. Ensamblaje del robot

Ensamblar el robot utilizando el manual desarrollado.

### 2. Encontrar las coordenadas para mover al robot

Tomando como base las lonas 2, 3 y 4 (Figura 48, Figura 51 y Figura 54) correspondientes al control de posición en las pruebas experimentales, se utilizó como ejemplo la lona 2 (triángulo isósceles) para extraer las coordenadas en el plano cartesiano de cada uno de los vértices del

triángulo y colocarlos en la tabla provista para completar el grafo. Tarea que los participantes deben ejecutar para las lonas 2 y 3, cuadrado y hexágono respectivamente.

### 3. Controlar el robot

En base a los resultados de la actividad 2 los participantes deberán convertir las coordenadas de los vértices de las figuras en ordenes secuenciales que describan el movimiento del robot en los ejes X y Y por separado. De la misma manera, se tomó como ejemplo los resultados de la lona 2 – triángulo para ejemplificar este proceso.

The figure shows three pages of a workshop guide. The first page is the title page, 'Taller de Robótica - OMNIMATIC', with two activities. Activity 2 involves finding coordinates for a triangle on a coordinate grid. The second page shows 'Ejercicio 1' with a square path on a coordinate grid. The third page shows 'Ejercicio 2' with a hexagonal path on a coordinate grid. Each page includes a table for recording X and Y coordinates and a table for recording initial and final positions.

Figura 67. Guía de prácticas - Taller OmniMatic (Apéndice 5 – Guía de prácticas para el taller OmniMatic)

### 7.2.2. Resultados del taller

El taller tuvo una breve introducción en la que se impartieron de manera lúdica conocimientos básicos de lo que es un robot omnidireccional y su funcionamiento a través de demostraciones con el robot desarrollado. De la misma forma se explicaron sus componentes individuales con la finalidad de que comprendan su funcionamiento y rol dentro del robot.

El taller se dividió en dos etapas y al contar con dos kits del robot se dividió a los participantes en dos grupos de 5 personas cada uno.



*Figura 68 Participantes del taller - Grupos 1 y 2*

La primera etapa, el ensamblaje del robot duró alrededor de 2 horas y fue ejecutada exitosamente con el apoyo de todos los miembros de cada grupo. El resultado fueron dos robots ensamblados correctamente.

La segunda etapa del taller requirió una breve explicación del concepto de un plano cartesiano, su funcionamiento y utilidad, esto debido a que los participantes menores no tenían conocimiento pleno del mismo, sin embargo, esto no representó un problema y fueron capaces de finalizar la actividad 2.

La actividad 3 fue también ejecutada sin problemas y los participantes lograron controlar el robot haciendo uso de su interfaz gráfica y visualizar su movimiento a la vez que observaban los resultados físicos y los resultados a través de las gráficas en la interfaz.



*Figura 69. Participante controlando el robot desde la interfaz gráfica.*

## Conclusiones

- Las ruedas mecanum están diseñadas para ser utilizadas en espacios lisos y uniformes que permitan adherencia con los rodillos de cada rueda, al perder esta adherencia se generan resbalones que pueden afectar en gran medida la trayectoria del robot.
- El análisis de estabilidad de Lyapunov es una herramienta muy eficiente para lograr el control de una planta. En esta tesis nos ha permitido diseñar un controlador capaz de mantener la estabilidad ante los cambios requeridos en las velocidades del robot siempre que se respeten los límites y restricciones establecidos y pudimos observar en los resultados que el error era mínimo en cuanto a las ondas de velocidades y el error real correspondía principalmente a perturbaciones externas que no podían ser percibidas por los componentes actuales de la planta.
- ROS es una herramienta muy potente, escalable y fácil de usar que brinda un entorno de comunicación acorde a la medida y eficiente entre varios dispositivos. En esta tesis fue utilizado de manera superficial para comunicar de manera efectiva la interfaz gráfica con el Raspberry y brindó buenos resultados a la vez que permitía depurar los problemas existentes en el robot.
- La odometría es una técnica válida para lograr la estimación de la ubicación del robot en el tiempo, pero es insuficiente cuando se requiere exactitud, tal como se pudo ver en los resultados de las pruebas experimentales, esto se debe principalmente a que existen

demasiados tipos de perturbaciones externas por los cuales la odometría puede verse afectada en gran medida sin tener la capacidad de detectarlos y hace evidente la necesidad de la implementación de métodos y sensores adicionales que garanticen una detección y corrección de este tipo de errores.

- Al desarrollar una herramienta que está enfocada para niños y jóvenes es indispensable tener muy en cuenta que deberá tener un diseño amigable e intuitivo, facilitando la comprensión de su funcionamiento y el cómo utilizarlo. Diseños o interfaces poco amigables o difíciles de comprender dificultan la interacción y disminuyen el interés de los usuarios objetivos.
- Al desarrollar un robot que tiene por objetivo brindar soporte en la enseñanza de matemáticas, se debe estar consciente también la diferencia en el nivel de conocimientos que puede existir entre jóvenes de una misma edad. Esto debido a múltiples factores posibles, es por esto que las actividades planteadas y las ideas que se desean transmitir deberán ser simples y claras con la finalidad de garantizar una comprensión de un mayor número de participantes.
- Las pruebas realizadas con jóvenes durante el taller de robótica demostraron ser muy efectivas en cuanto al objetivo de generar interés en los estudiantes. Durante su desarrollo pudimos percibir con agrado la interacción positiva que se dio entre jóvenes de edades distintas y su ánimo por aprender y trabajar con el robot con la ilusión de verlo cumplir con el objetivo que planteen.

## **Recomendaciones**

- Al trabajar con ruedas mecanum es indispensable contar con una superficie altamente adherente y antideslizante con la finalidad de garantizar la correcta rotación de los rodillos de cada rueda.
- Siempre es necesario validar el diseño tanto del robot como de la interfaz de control y manuales de ensamblaje con los usuarios objetivos, esto con la intención de garantizar de que se adapte a sus necesidades y cumpla con lo requerido.
- Las baterías recargables de iones de litio 18650 de 3.7V son fuentes de energía estable y en el caso de esta tesis, nos ha permitido utilizar el robot de forma efectiva durante periodos

de tiempo superiores a 50 minutos por lo que recomendamos su uso tomando en cuenta su bajo costo.

- El uso de un micro computador cómo el Raspberry Pi Zero W dentro de un robot brinda una gama de posibilidades enorme, dando facilidades de comunicación e interacción con otros dispositivos además de incrementar de manera exponencial la capacidad de procesamiento en el robot.

## Trabajo futuro

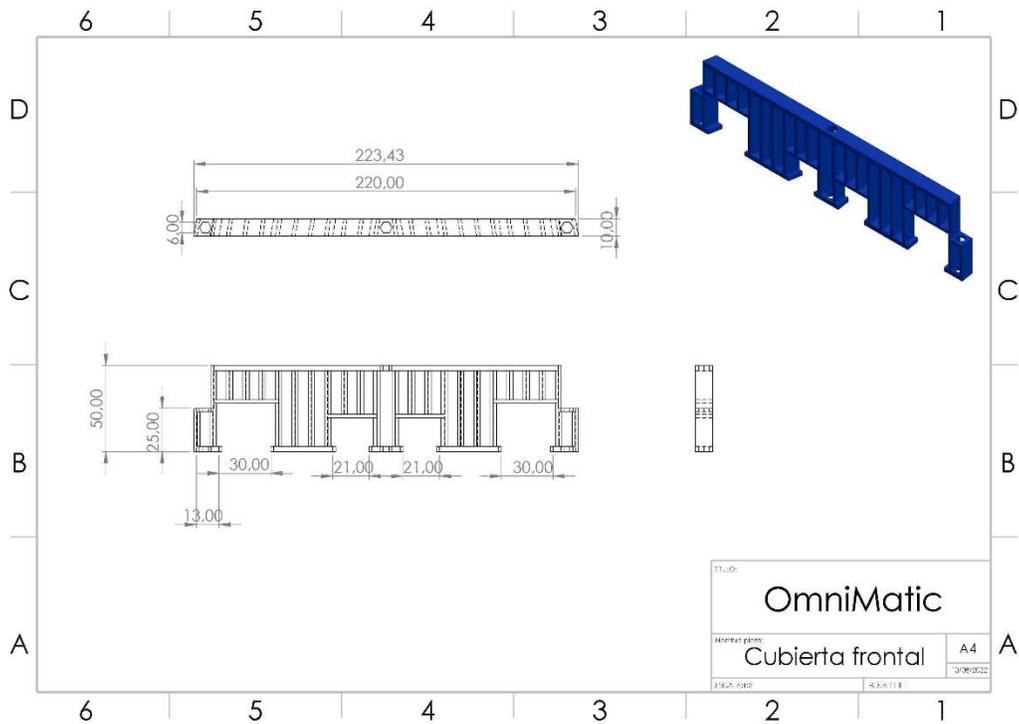
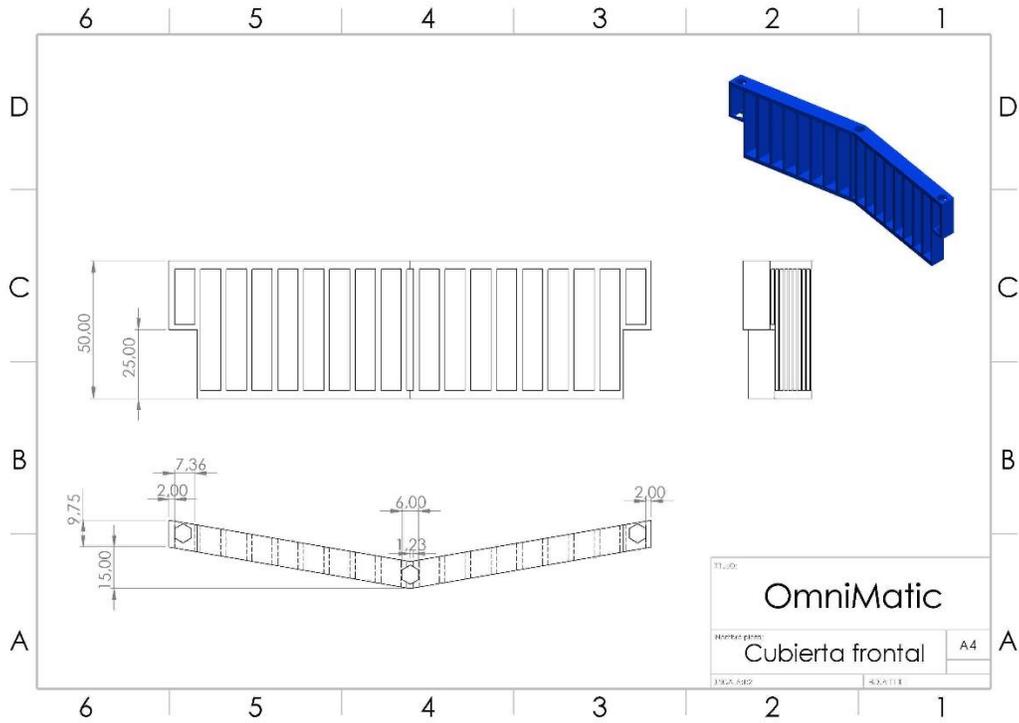
- El robot desarrollado en esta tesis puede ser aprovechado de múltiples maneras al ser un prototipo terminado y funcional. Por lo que uno de los primeros pasos a darse sería la creación de una Guía de prácticas especializada para brindar soporte en la enseñanza de determinados conceptos matemáticos, por lo que sería necesario, realizar un estudio detallado de los conceptos matemáticos que se pueden transmitir con esta herramienta y el público objetivo específico al que estaría destinado.
- Uno de los puntos importantes a mejorar es el grado de exactitud del robot en su desplazamiento, para lograr esto, es necesaria la implementación y coordinación de nuevos sensores que puedan apoyar en la estimación de la posición y orientación. En principio se puede considerar la inclusión de un acelerómetro y un giroscopio, también es válida la implementación de un GPS o técnicas de localización y mapeo aún más avanzadas como SLAM.
- Durante el taller de robótica pudimos percatarnos de que es necesario trabajar en un nuevo manual de ensamblaje con un nivel adicional de detalle y explicación en cuanto a los distintos pasos del ensamblaje, por lo que este sería uno de los puntos a mejorar en una nueva versión.
- El presente proyecto puede servir como punto de partida para muchos otros proyectos que requieran una plataforma móvil omnidireccional. Es así que puede considerarse por ejemplo la colocación de un LiDAR en la parte superior para el mapeo de espacios físicos o un brazo robot con un objetivo de manipulación específico entre otras tantas tareas que pueden ser solventadas al contar con un prototipo funcional de robot omnidireccional.

## ANEXOS

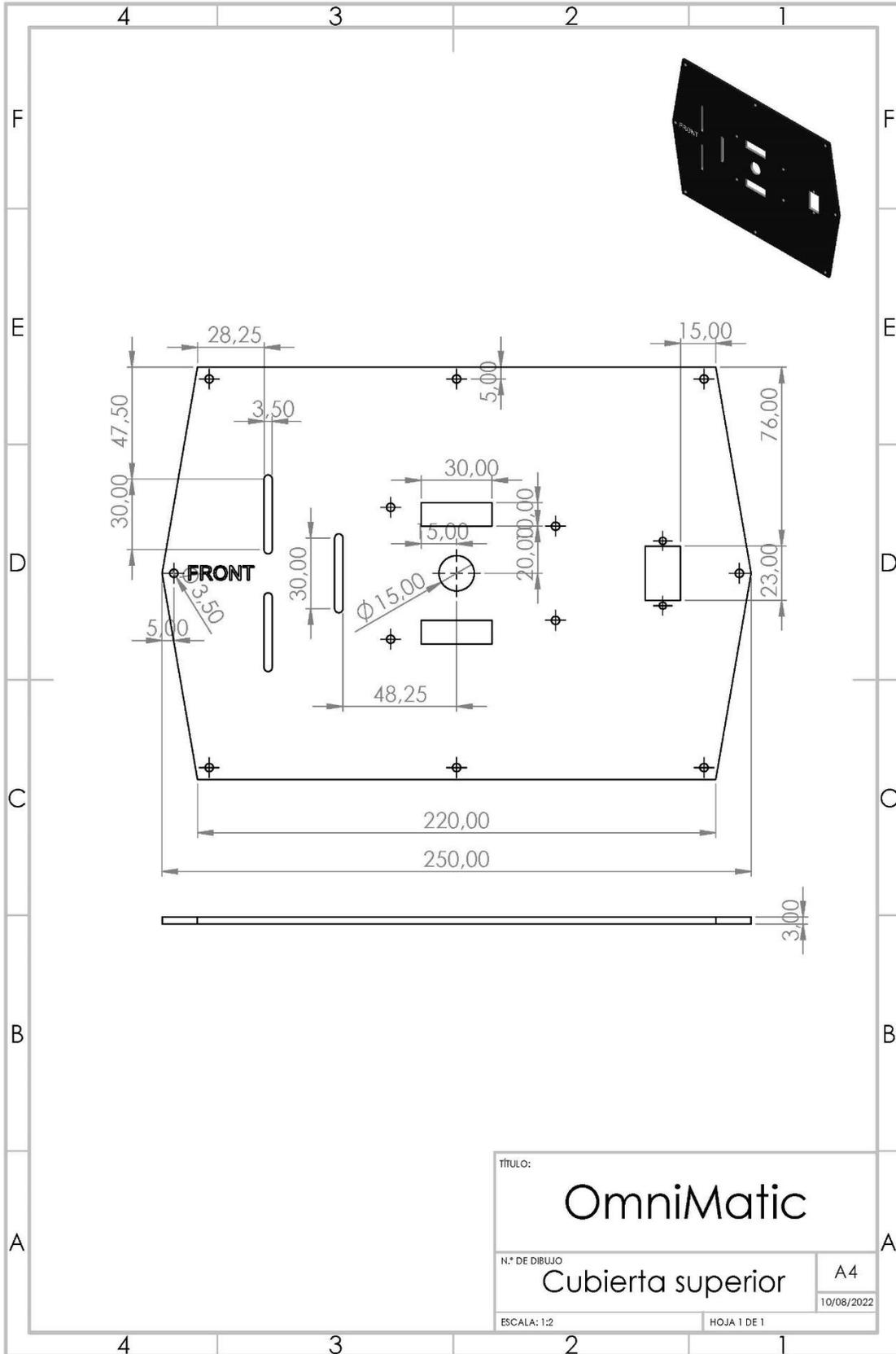
### Apéndice 1 – Listado de materiales y costos

#	Descripción	Costo unidad	Cantidad	Subtotal
1	Base – corte en acrílico	\$ 5.00	1	\$ 5.00
2	Cubierta – corte en acrílico	\$ 5.00	1	\$ 5.00
3	Impresión 3D set de 2 soportes laterales y 2 frontales - carcasa	\$ 32.00	1	\$ 32.00
4	Pilares 50 mm	\$ 0.60	8	\$ 4.80
5	Motor reductor con encoders y acople incluido	\$ 50.00	4	\$ 200.00
6	Set de 2 soportes para motor	\$ 10.00	2	\$ 20.00
7	Set de 4 ruedas mecanum (2 derechas y 2 izquierdas)	\$ 40.00	1	\$ 40.00
8	Set de tuercas tornillos M2.5 y M3	\$ 20.00	1	\$ 20.00
9	Pilares 6mm	\$ 0.40	9	\$ 3.60
10	Arduino Mega 2560	\$ 25.00	1	\$ 25.00
11	Porta baterías 18650	\$ 3.00	1	\$ 3.00
12	Raspberry Pi Zero W	\$ 50.00	1	\$ 50.00
13	Ruteo de shield para Arduino Mega 2560	\$ 50.00	1	\$ 50.00
14	Voltímetro	\$ 4.00	1	\$ 4.00
15	Batería 18650 3.7V amperaje > 8000 mAh	\$ 4.00	2	\$ 8.00
16	Cable dupont 4 pines	\$ 0.50	1	\$ 0.50
<b>TOTAL</b>				<b>\$ 470.90</b>

## Apéndice 2 – Planos del robot



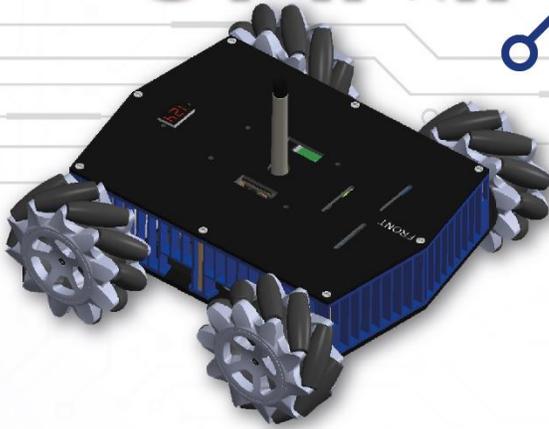




## Apéndice 3 – Manual de ensamblaje



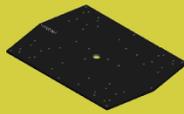
# OMNIMATIC



GABRIELA CABRERA  
JOHN REINOZO

CARRERA  
INGENIERÍA ELECTRÓNICA

Carcasa



Base x 1



Cubierta x 1



Cubierta Lateral x 2



Cubierta Frontal x 2



Pilar 60mm x 8

Kit motores y ruedas \*

Kit 25D



Ruedas 80 mm



Kit 37D



Ruedas 97 mm



Motor x 4

Acople x 4

Soporte x 4

Izquierda x 2

Derecha x 2

\* Cada kit contiene un set de 4 motores y ruedas

Tornillos /  
Tuercas



Tuerca  
M3 x 4



Tuerca  
M2.5 x 25



Tornillo  
M2.5 x 25



Espaciador  
M2.5 x 9



Tornillo  
M3 x 20



Tornillo  
M3 x 24

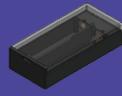


Destornilladores

Electrónicos



Arduino Mega  
2560



Portabaterías  
18650



Raspberry Pi  
Zero W



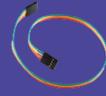
Shield arduino  
Mega



Voltímetro



Baterías  
18650 x 2



Cable jumper

1



x 1



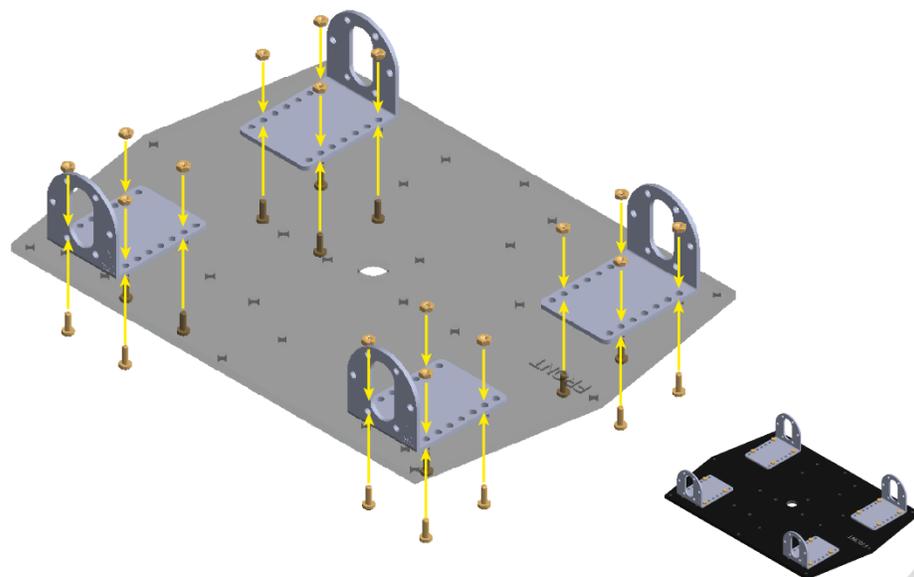
x 4

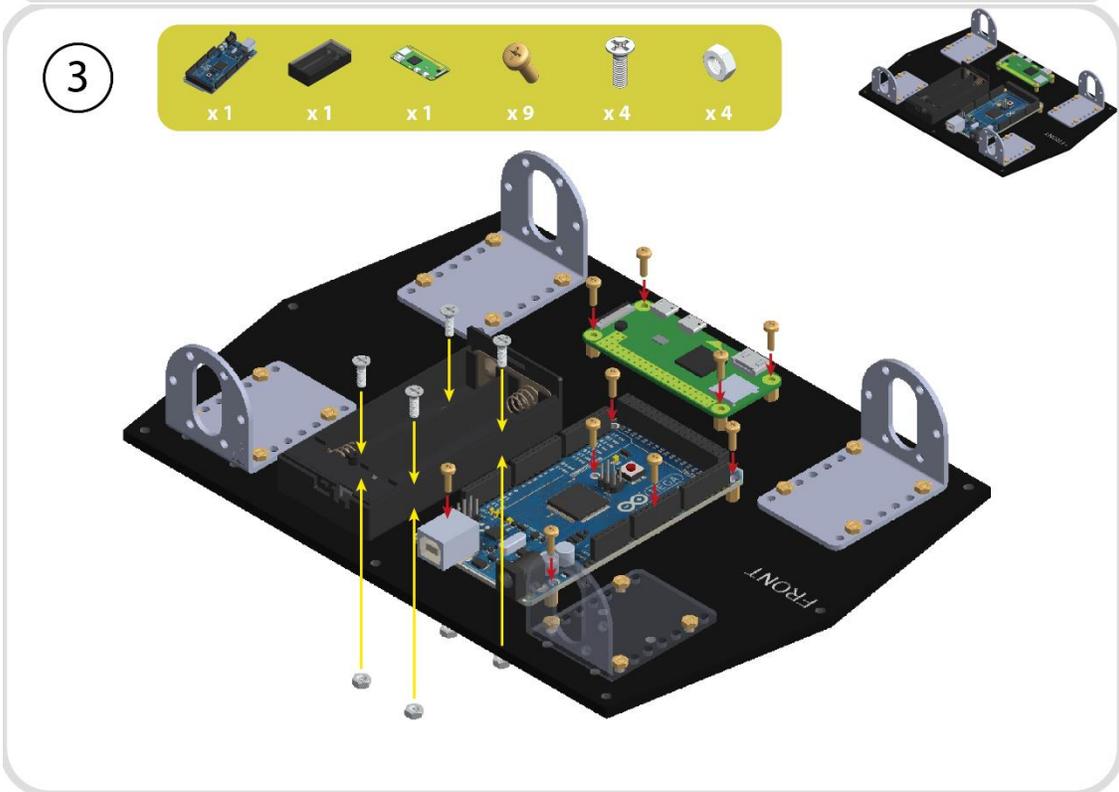
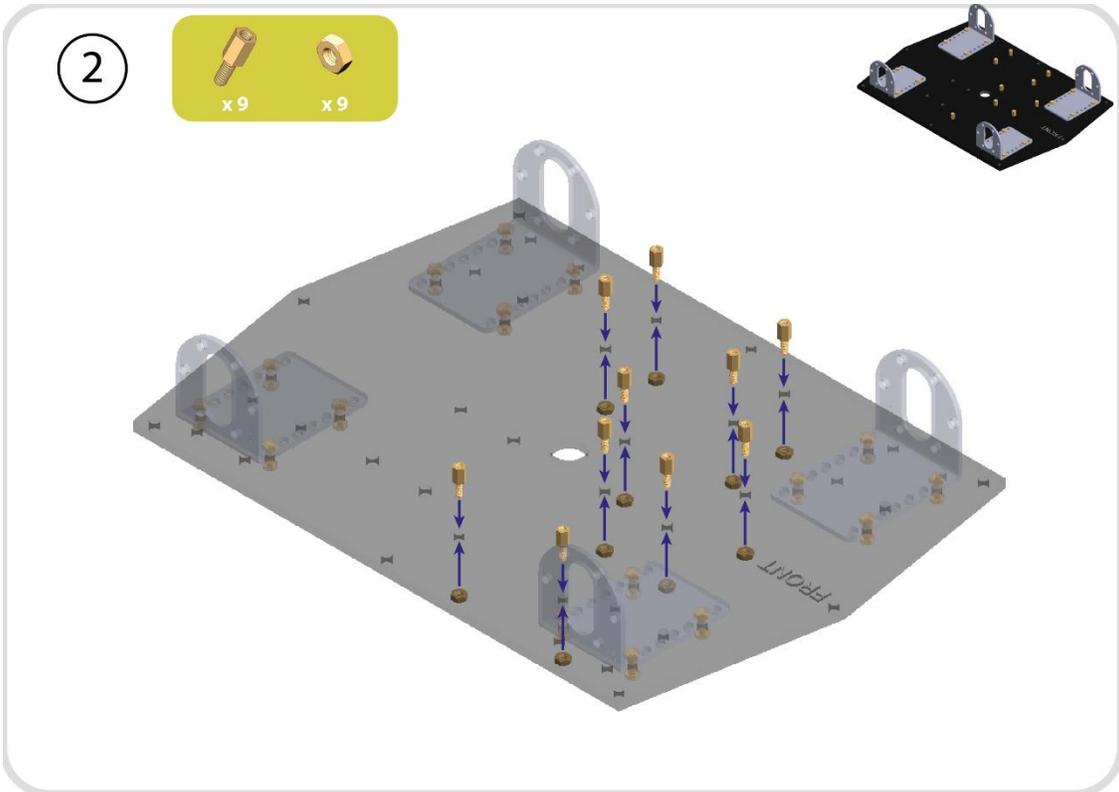


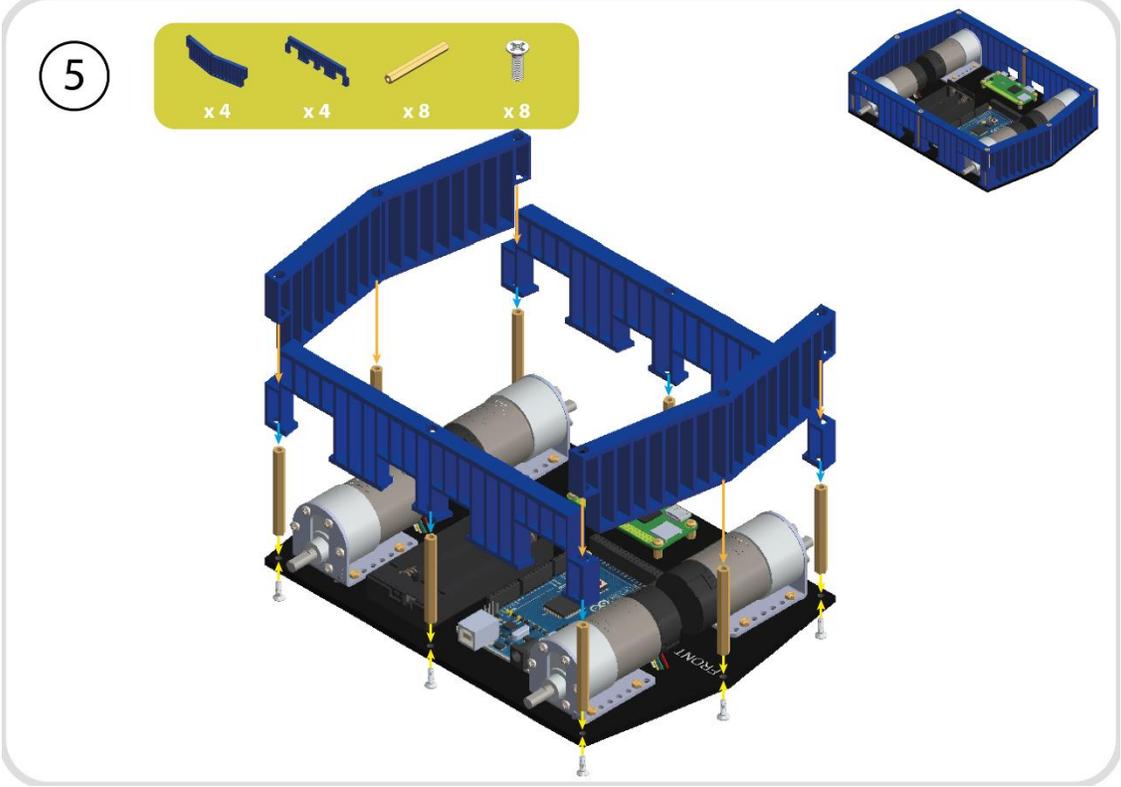
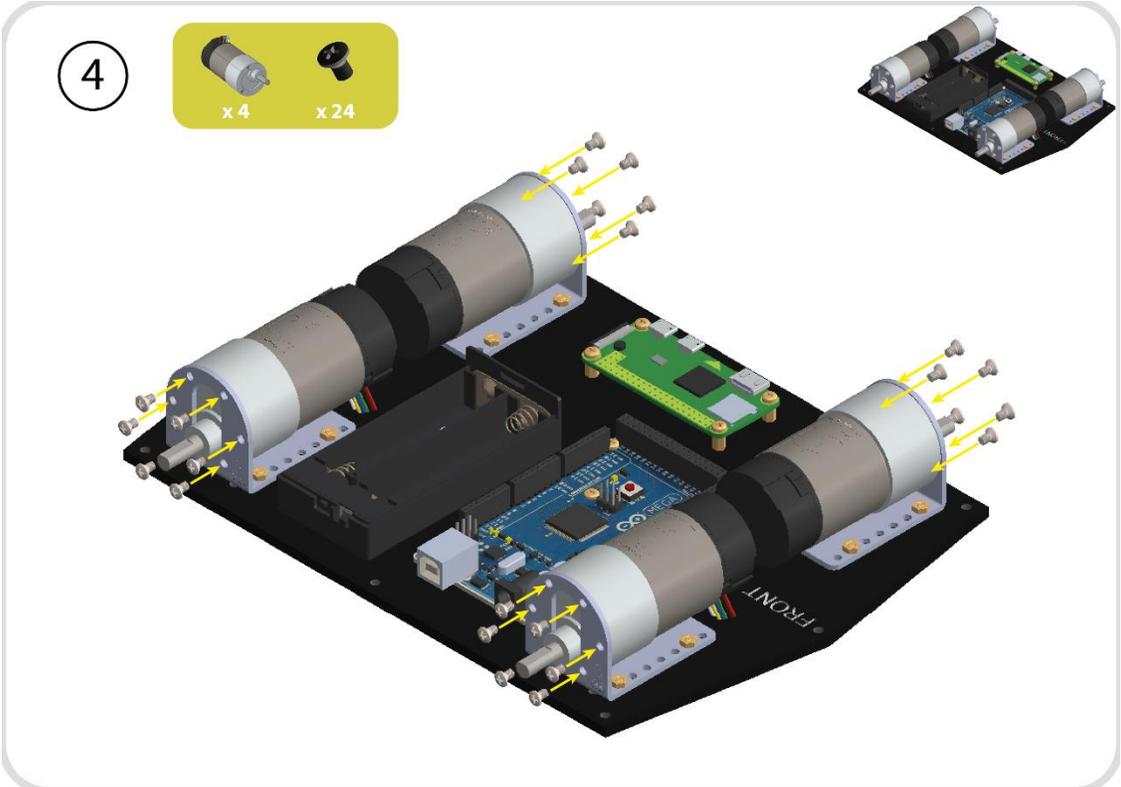
x 16

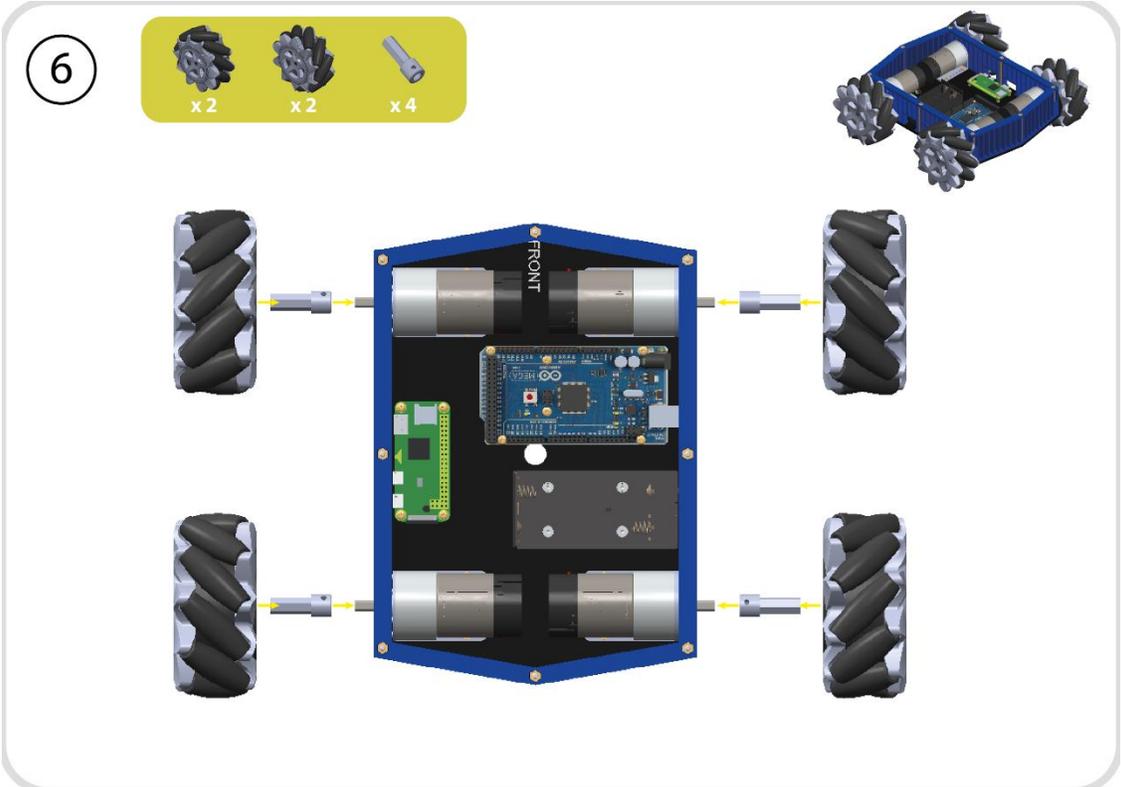


x 16





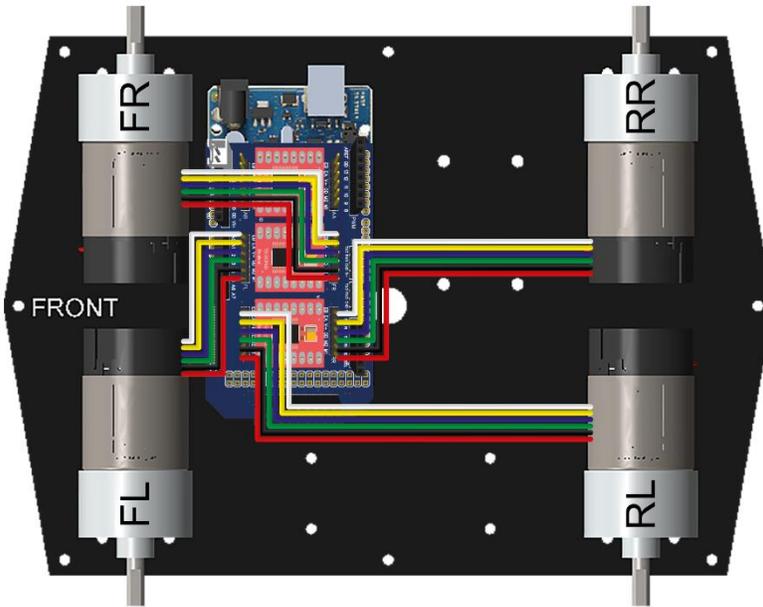




8



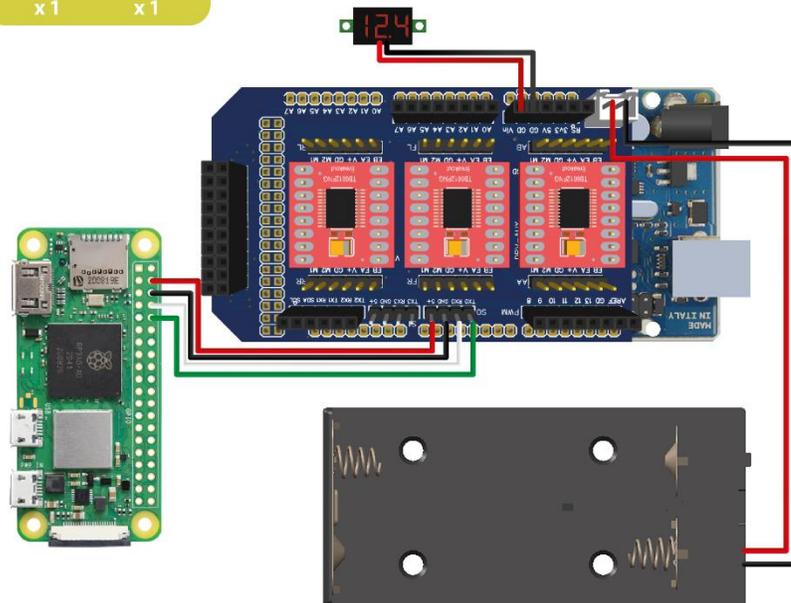
### Conectar motores

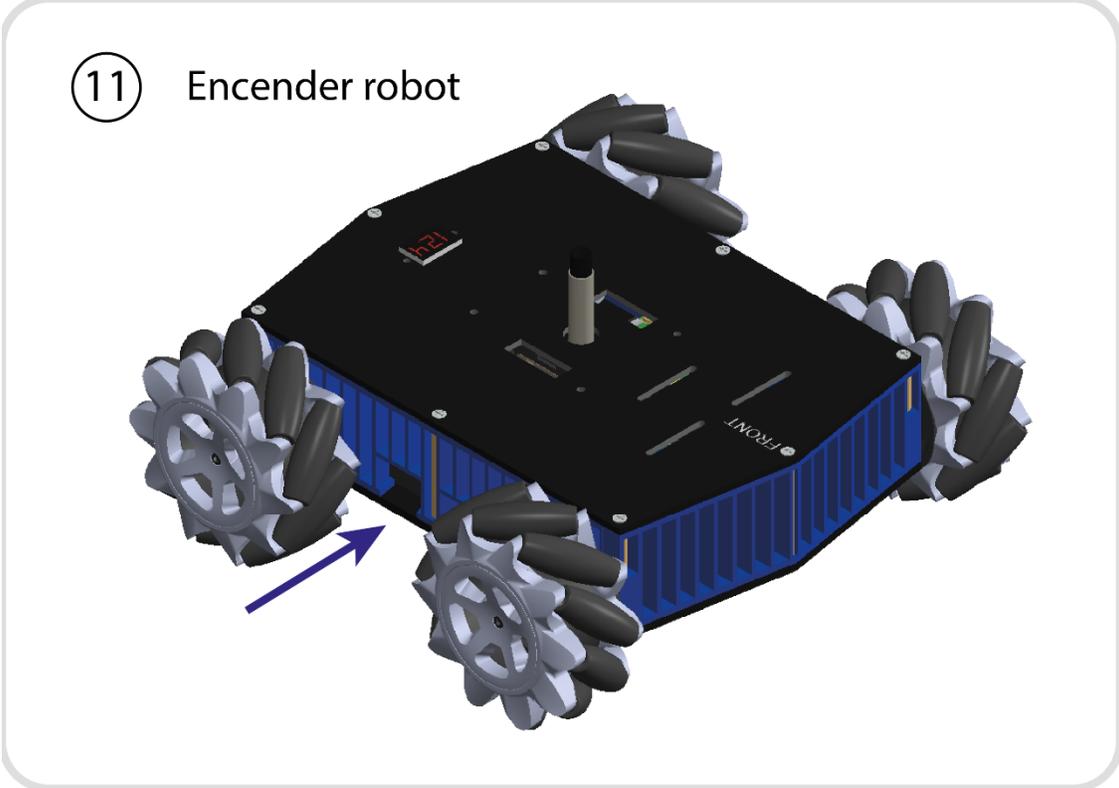
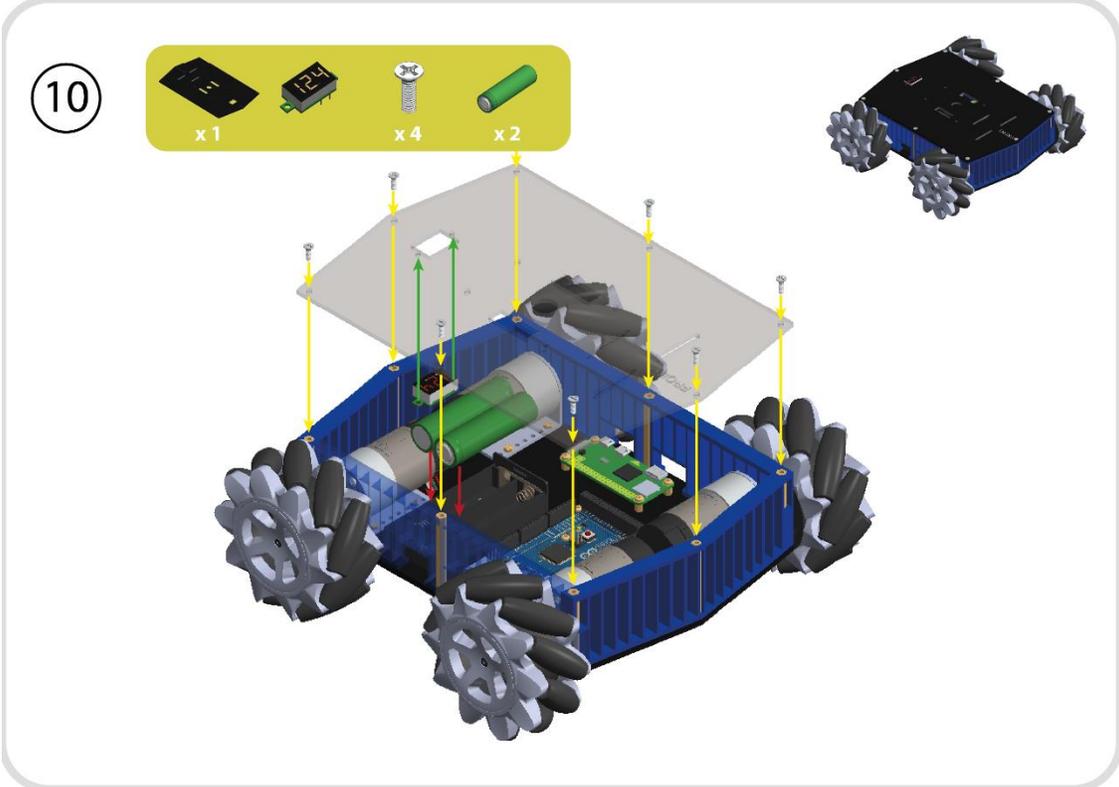


9



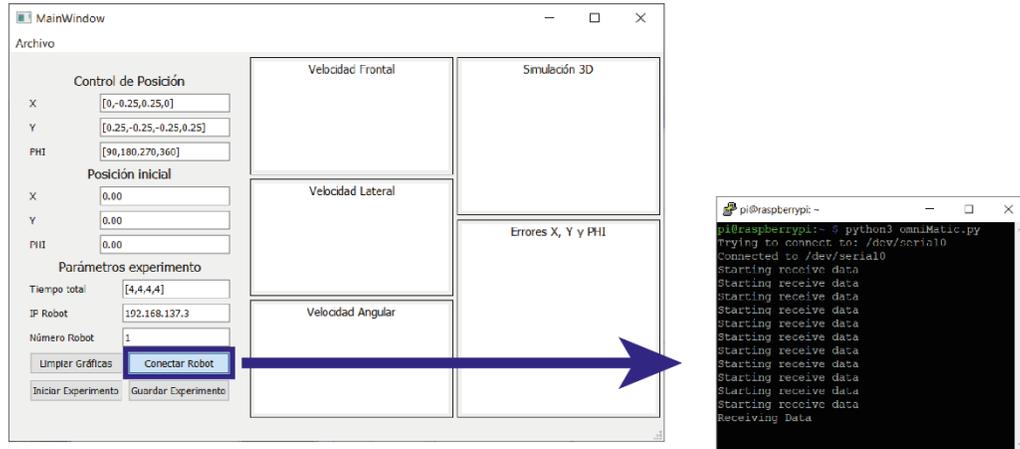
### Conexiones adicionales





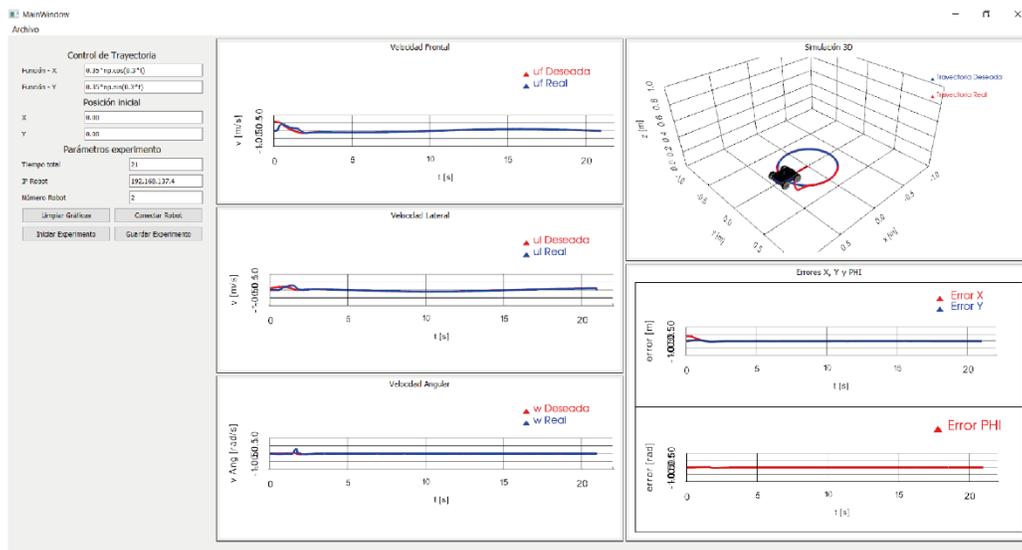
## 12 Abrir interfaz / Conectar robot

En la consola del robot escribir el comando:  
`python3 omnimatic.py`



The screenshot shows the 'MainWindow' application interface. On the left, there are control panels for 'Control de Posición', 'Posición Inicial', and 'Parámetros experimento'. The 'Conectar Robot' button is highlighted with a blue box and a blue arrow pointing to the right. To the right of the interface is a terminal window showing the execution of the command `python3 omnimatic.py` on a Raspberry Pi. The terminal output shows the program connecting to the serial port and starting to receive data.

## 13 Crear experimentos



## Apéndice 4 – Registro de asistentes Taller OmniMatic



### Taller de Robótica – OMNIMATIC

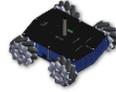
Registro de asistentes

APELLIDOS	NOMBRES	EDAD	GÉNERO	INSTITUCIÓN
García	Andrés	10	Masculino	Victor Manuel
Angel Salvatierra	Andrés	9	Masculino	Benjamin Cerón
Pauta	Valentina	4	Femenino	San Agustín
Gutiérrez	Carol	18	Femenino	Técnica Salesiana
Gutiérrez	Emily	11	Femenino	Panama
Yumbra	Renata	13	Femenino	Sagrado Corazón
Pantocin	Kevin	21	Masculino	Tecnológico del Azuay
Pantocin	Camila	10	Femenino	Francisco Davila
Rodríguez	Pedro	11	Masculino	Asubel High school
Rodríguez	José	28	M	

Carrera  
Ingeniería Electrónica

Gabriela Cabrera

# Apéndice 5 – Guía de prácticas para el taller OmniMatic



# OMNIMATIC

Nombres: \_\_\_\_\_ Edad: \_\_\_\_\_

Institución: \_\_\_\_\_

## Taller de Robótica – OMNIMATIC

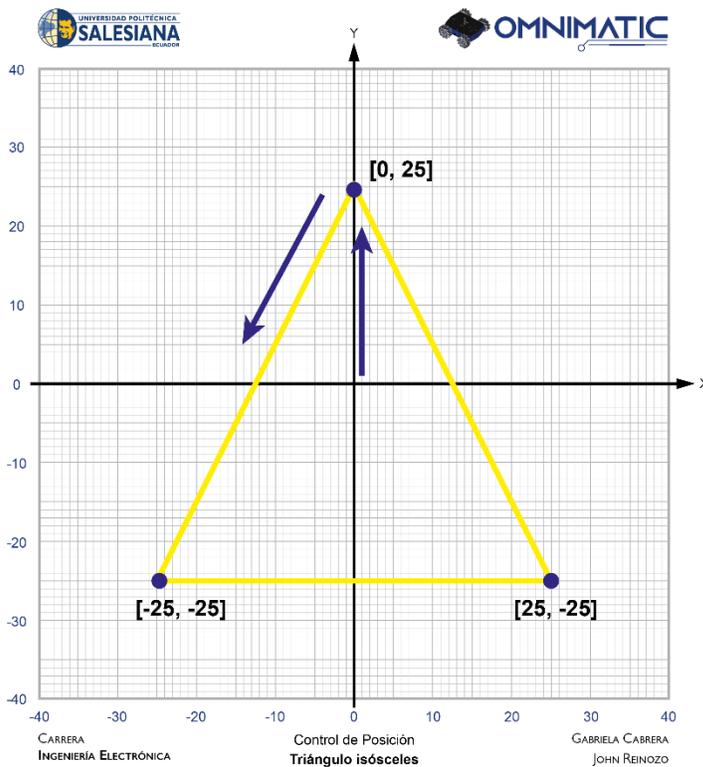
### Actividad 1: Ensamblar el robot

Haciendo uso del manual de ensamblaje, construir el robot.

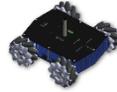
### Actividad 2: Encontrar las coordenadas para mover al robot

De acuerdo con el siguiente ejemplo, encontrar las coordenadas de cada uno de los puntos que debe seguir el robot para completar su camino y colocarlos en la tabla correspondiente.

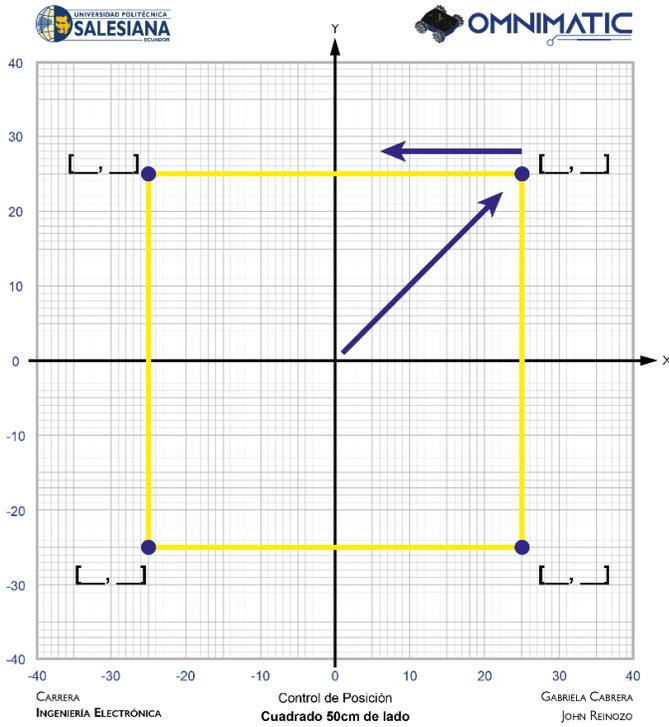
Ejemplo:



X	Y
0	0
0	25
-25	-25
25	-25

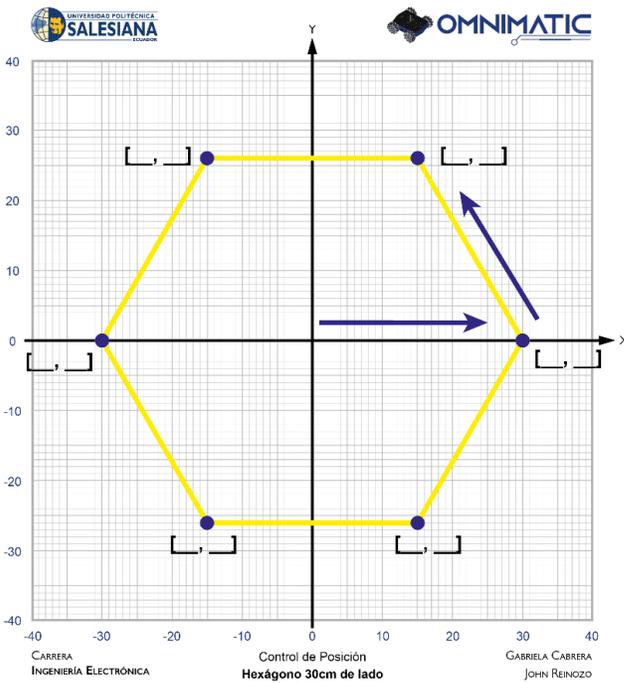


Ejercicio 1:

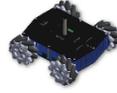


X	Y
0	0

Ejercicio 2:



X	Y
0	0



### Actividad 3: Controlar el robot

Utilizando las coordenadas obtenidas en los ejercicios 1 y 2 de la actividad anterior, convertirlas en órdenes para controlar el robot desde la gráfica del robot de acuerdo con el siguiente ejemplo:

Ejemplo:

X	Y
0	0
0	25
-25	-25
25	-25

X Inicial: 0  
 Y Inicial: 0  
 Posiciones en X: [0, -25, 25]  
 Posiciones en Y: [25, -25, -25]

Ejercicio 1:

X	Y
0	0

X Inicial: \_\_\_\_\_  
 Y Inicial: \_\_\_\_\_  
 Posiciones en X: \_\_\_\_\_  
 Posiciones en Y: \_\_\_\_\_

Ejercicio 2:

X	Y
0	0

X Inicial: \_\_\_\_\_  
 Y Inicial: \_\_\_\_\_  
 Posiciones en X: \_\_\_\_\_  
 Posiciones en Y: \_\_\_\_\_

## Apéndice 6 – Fotografías taller OmniMatic



*Figura 70. Kit 1 - Robot OmniMatic.*



*Figura 71. Kit 2 - Robot OmniMatic.*



*Figura 72. Grupo 1 ensamblando el robot.*



*Figura 73. Grupo 2 ensamblando el robot.*



*Figura 74. Robot ensamblado por los participantes.*



*Figura 75. Participantes del taller OmniMatic luego de armar los robots.*

## Referencias

- [1] M. S. Biembengut, «Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática,» *Educación Matemática Grupo Santillana México*, vol. 16, n° 1665-5826, p. 125, 2004.
- [2] J. P. Deninse Frias, «Motivation in the Teaching of Mathematics and Administration,» *Núcleo Universitario del Litoral*, vol. 3, n° 0718-5006, 2010.
- [3] E. Gracia, «Guía Didáctica para el Responsable del programa Robótica Educativa,» 2010.
- [4] P. Mendoza, «El espacio de los contenidos digitales de la UNED,» 2010.
- [5] S. Monsalves, «Estudio sobre la utilidad de la robótica educativa desde la perspectiva del docente,» *Revista de Pedagogía*, 2011.
- [6] M. S. Santana, «LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS Y LAS NTIC. UNA ESTRATEGIA DE FORMACIÓN PERMANENTE,» UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI, Tarragona, 2007.
- [7] I. M. Suárez Higuera, M. M. Acevedo Caicedo y C. Huertas Campos, «Etnomatemática, educación matemática e invidencia,» *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, vol. 2, n° 1, pp. 1-35, 2009.
- [8] M. A. Palmer, «Las matemáticas en la vida cotidiana,» Colección Miradas Matemáticas , 2018.
- [9] P. G. Cruz, «La Robótica en educación infantil,» Universidad Complutense , Madrid, 2016.
- [10] M. E. R. B., «El pensamiento lógico matemático desde la perspectiva de Piaget,» Universidad de Carabobo.
- [11] J. M. Erick Messia, «Inteligencias múltiples/lógico matemático,» Universidad Pedagógica Experimental Libertador , Caracas, 2018.
- [12] M. d. E. d. Ecuador, «La Importancia de enseñar y aprender matemática».
- [13] K. H. T. H. Tessei kobayashi, «Auditory-visual intermodal matching of small numerosities in 6-month-old infants,» *Developmental science*, vol. 8, pp. 19-409, 2005.
- [14] F. R. Deninse Farias, «Estrategias lúdicas para la enseñanza de la matemática en estudiantes que inician estudios superiores,» *Centro de Investigaciones Educativas Paradigma (CIEP)*, vol. 31, 2010.
- [15] J. A. Walker, «The Four Stages of Learning Math,,» 2017.

- [16] J. G. M. F. B D'Amore, «Competencias Y Matemática,» 2014.
- [17] G. L. Quijano, «La enseñanza de las matemáticas, un reto para los maestros del siglo XXI,» *Praxis Pedagógica Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia*, vol. 15, pp. 58-76, 2014.
- [18] H. R. Martín, «Aprender a Aprender,» *Banco Interamericano de Desarrollo*, p. 14, 2020.
- [19] M. P. Rojas, «¿cómo estimular el aprendizaje de las matemáticas?,» *NeuroClass*, pp. 1-5, 2020.
- [20] R. Mogollón, «Estrategias de Aprendizaje,» 2019.
- [21] J. J. A. Gallastegua, «LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y LA EDUCACIÓN MATEMATICA: HACIA UNA MAYOR INTERRELACIÓN ENTRE INVESTIGACIÓN Y DESARROLLO CURRICULAR,» *Departamento de Ciencias de la Educación. Universidad de Oviedo.*, pp. 63-71, 1989.
- [22] Schoenfeld, «Resolución de Problemas; El Trabajo de Alan Schoenfeld: Una propuesta a Considerar en el Aprendizaje de las Matemáticas,» *Educación Matemática*, vol. 4, n° 2, pp. 16-24, 1992.
- [23] I. A. B. A. G. S. Juan Álvarez Esteven, «Enseñanza-aprendizaje del razonamiento inductivo-deductivo en la resolución de problemas matemáticos de demostración,» *Scielo Cienfuegos, Universidad de Oriente Santiago de Cuba*, vol. 15, n° 68, 2019.
- [24] I. A. Berenguer, «La resolución de problemas matemáticos. Una alternativa didáctica centrada en la representación,» Universidad de Oriente, Cuba, 2001.
- [25] Á. M. R. Juan D Godino, «SIGNIFICADOS INSTITUCIONALES DE LA DEMOSTRACIÓN. IMPLICACIONES PARA LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA,» Departamento de Didáctica de la Matemática. Facultad de Educación, Campus de Cartuja 18071 Granada, Granada, 2001.
- [26] I. A. A. G. Mailyn Yordana Álvarez, «Dinámica del razonamiento inductivo en la resolución de problemas matemáticos. Una propuesta didáctica,» *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC*, vol. 25, pp. 625-634, 2012.
- [27] M. Orlando, «Razonamiento, solución de problemas matemáticos y rendimiento académico,» Universidad de San Andrés. Escuela de Educación, 2014.
- [28] Daniel G Campos, «The Imagination and Hypothesis-Making in Mathematics: A Peircean Account,» *City University of New York - Brooklyn College*, pp. 123 - 145, 2010.

- [29] V. H. M. María Nubia Soler Álvarez, «El proceso de descubrimiento en la clase de matemáticas: los razonamientos abductivo, inductivo y deductivo,» *Universidad Pedagógica Nacional, Ensciencias*, vol. 32, n° 2, pp. 191-219, 2014.
- [30] L. S. P. E. A. M. S. G Harel, «Student's proof schemes: results from exploratory studies,» *Research in collegiate mathematics education III*, pp. 234-283, 1998.
- [31] M. T. J. F. R Minervino, «El desarrollo de la capacidad de transferir conocimiento a través del pensamiento analógico e inductivo,» *Desarrollo y Educación, Buenos Aires*.
- [32] B. I. S. Luján, «Aprender y enseñar matemáticas: desafío de la educación,» *IE REvIsta dE InvEstIgación EducatIva dE la REdIEcH*, vol. 15, n° 8, pp. 7-10, 2018.
- [33] J. P. A. Daniel Garcia Gálvez, «RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS A TRAVÉS DE LA ROBÓTICA EDUCATIVA,» *Universidad Jaume*, pp. 1-26, 2019.
- [34] S. R. B. C. B. S. Q. T. C. T. M. E. V. M. Lang Chen, «La actitud positiva hacia las matemáticas apoya el éxito académico temprano: evidencia de comportamiento y mecanismos neurocognitivos,» *Cienc. psicológica*, vol. 29, n° 3, pp. 390-402, 2018.
- [35] T. Radford, «Las matemáticas desarrollan los músculos cerebrales,» *The Guardian*, 2001.
- [36] R. R. Vicente, «Plataforma de Experimentación de Controladores para Robots Industriales,» 2001.
- [37] M. Bangert, «Robótica hoy. Los Robots continúan mejorando las plantas de fabricación actuales,» *Qual. Mag*, 2020.
- [38] M. E. C. Mora, «Robótica móvil: usando plataformas Robóticas para la enseñanza de robótica en adolescentes,» *ROBOBENCHMARK*, 2018.
- [39] L. M. J. R. S. J. Q. K. P. P. J. Q. Iveth Moreno, «LA ROBÓTICA EDUCATIVA, UNA HERRAMIENTA PARA LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LAS CIENCIAS Y LAS TECNOLOGÍAS,» *Teoría de la Educación. Educación y Cultura en la Sociedad de la Información*, 2012.
- [40] Formatalent Bunisse School, «Qué beneficios aporta la robótica a la educación y desarrollo de los niños,» 2020.
- [41] I. Moreno, L. Muñoz, J. R. Serracín, J. Quintero, K. Pittí Patiño y J. Quiel, «La Robótica educativa, una herramienta para la enseñanza - aprendizaje de las ciencias y las tecnologías,» *Universidad de Salamanca*, Salamanca, 2012.
- [42] A. F. Flor Bravo, «La robótica como un recurso para facilitar el aprendizaje y desarrollo de competencias generales,» *Vsal Revistas*, Salamanca, 2012.

- [43] LEGO, «LEGO,» Powered by LEGO creativity and advanced technology, 2022. [En línea]. Available: <https://www.lego.com>.
- [44] A. L. Acuña, «ROBÓTICA Y APRENDIZAJE POR DISEÑO,» *Fundación Omar Dengo-Costa Rica*, 2005.
- [45] N. B. L. W. J. P. H. María Luisa Pinto Salamanca, «USO DE LA ROBÓTICA EDUCATIVA COMO HERRAMIENTA EN LOS PROCESOS DE ENSEÑANZA,» *Grupo de Investigación en Robótica y Automatización Industrial, GIRA*, vol. 10, n° 1523, 2010.
- [46] Ministerio de Educación de Chile , «JUNAEB, Junta Nacional de Auxilio escolar y Becas,» 2018. [En línea]. Available: <https://www.junaeb.cl/archivos/31390>.
- [47] «Karel el Robot,» Olimpiada Mexicana de Informática, 2020. [En línea]. Available: [https://www.olimpiadadeinformatica.org.mx/omi/omi/material/karel\\_el\\_robot.aspx](https://www.olimpiadadeinformatica.org.mx/omi/omi/material/karel_el_robot.aspx).
- [48] G. Broennimann, «Karel the Robot, Example,» 2011.
- [49] KUKA, «Robots Industriales de KUKA,» 2022. [En línea]. Available: <https://www.kuka.com/es-es/productos-servicios/sistemas-de-robot/robot-industrial>.
- [50] J. N. C. O. Carlos Romero, «Revisión del estado del arte de las plataformas robóticas orientadas a la educación,» *Engineering and Technology*, vol. 3, n° 2256-3903, 2014.
- [51] D. M. A. F. H. Martínez, «Plataforma Robótica como Herramienta para el Desarrollo y Aprendizaje de Aplicaciones en Control Inteligente,» Universidad Distrital “Francisco José de Caldas”; Universidad Pedagógica Nacional Bogotá D.C; Grupos de Investigación ARMOS y DEDALO, Colombia.
- [52] H. M. H. V. Fredy Martínez, «Using Embedded Robotic Platform and Problem-Based Learning for Engineering Education,» 2016.
- [53] E. Durán y D. Granja, «Diseño y construcción de un kit didáctico de experimentación científica - tecnológica para motivar a niños y niñas entre 10 y 11 años por la ciencia y la tecnología.,» Universidad Politécnica Salesiana, Cuenca, 2010.
- [54] Arcus Global, «Robots en la construcción,» ARCUS, 13 02 2018. [En línea]. Available: <https://www.arcus-global.com/wp/robots-en-la-construccion/>.
- [55] R. C. O. W. C. P. ARDUINO, «Ingeniería, informática y diseño,» 18 septiembre 2018. [En línea]. Available: <https://www.luisllamas.es/robot-con-omni-wheel-controlado-por-arduino/>.
- [56] Rotacaster, «Rotacaster Wheel Pty Ltd,» 2011. [En línea]. Available: [www.rotacaster.com.au](http://www.rotacaster.com.au).

- [57] H. Navabi, S. Sadeghnejad, S. Ramezani y J. Baltés, «Position Control of the Single Spherical Wheel Mobile Robot by Using the Fuzzy Sliding Mode Controller,» Katsuhiro Honda, 2017.
- [58] S. G. Tzafestas, Introduction to mobile robot control, Atenas, Grecia: Elsevier, 2013.
- [59] Osoyoo, «Metal Mecanum Wheel Robotic Lesson1: Montaje del coche robot (SKU ZZ012318MC),» 2017. [En línea]. Available: Osoyoo.com.
- [60] E. Bugarin, A. Aguilar-Bustos y O. Borrego-Ramir, Validación Experimental del Modelo Cinemático de un Robot Móvil Omnidireccional de 4 Ruedas, Ciudad de México, 2013.
- [61] R. Velasco, «redes zone,» 14 08 2015. [En línea]. Available: <https://www.redeszone.net/2015/08/14/chocolatey>.
- [62] ROS, «ROS.org,» 23 11 2021. [En línea]. Available: <http://wiki.ros.org/Installation/Windows>.
- [63] ROS, «ROS.org,» 23 11 2021. [En línea]. Available: <http://wiki.ros.org/noetic/Installation/Source>.
- [64] I. E. Sásig, «Robótica con Arduino,» Riobamba.
- [65] V. M. Alfaro, «Identificación de modelos de orden reducido a partir de la curva de reacción del proceso,» Departamento de Automática, Escuela de Ingeniería Eléctrica Universidad de Costa Rica, Costa Rica, 2006.
- [66] E. Sásig, «Modelo dinámico de un motor: Respuesta en lazo abierto,» Roboticos.
- [67] Q. J. Duarte César, «Algoritmo PSO para identificación de parámetros en un motor DC,» Revista Facultad de Ingeniería Universidad de Antioquia, Medellín, 2010.
- [68] B. B. T. Olsen, «Lambda Tuning as a Promising Controller,» Spring National Meeting, New Orleans, 2002.
- [69] C. A. R. Ardila, «Sintonización del lazo de control de un modelo de simulación de un horno empleando el método lambda,» Universidad Pontificia Bolivariana, Bucaramanga, 2013.
- [70] F. A. S. Ramírez, M. G. Agudelo, A. R. Cabrera, J. D. R. Múnera y D. A. G. Franco, «Pruebas en planta y sintonía para un controlador utilizado para medir la velocidad del viento dentro de un túnel,» POLITÉCNICA No. 4, Medellín, 2007.
- [71] K. a. H. T. Astrom, «PID controllers: theory, design and tuning,» (Instrument Society of America, 1995.