

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA SALESIANA
SEDE CUENCA

CARRERA DE INGENIERÍA MECÁNICA

*Trabajo de titulación previo a la
obtención del título de
Ingeniero Mecánico*

PROYECTO TÉCNICO:

“MODELAMIENTO MATEMÁTICO DE UNA CAJA DE
ENGRANAJES CON DIFERENTES CARGAS PARA LA
OBTENCIÓN DE LOS PATRONES DE VIBRACIÓN”

AUTOR:

ARIEL ABEL BERREZUETA PARRA

TUTORA:

DRA. MARIELA CERRADA LOZADA

CUENCA - ECUADOR

2021

CESIÓN DE DERECHOS DE AUTOR

Yo, Ariel Abel Berrezueta Parra con documento de identificación N° 0106559701 manifestó mi voluntad, y cedo a la Universidad Politécnica Salesiana la titularidad sobre los derechos patrimoniales en virtud de ser autor del trabajo de titulación: **“MODELAMIENTO MATEMÁTICO DE UNA CAJA DE ENGRANAJES CON DIFERENTES CARGAS PARA LA OBTENCIÓN DE LOS PATRONES DE VIBRACIÓN”**, mismo que ha sido desarrollado para optar por el título de: *Ingeniero Mecánico*, en la Universidad Politécnica Salesiana, quedando la Universidad facultada para ejercer plenamente los derechos cedidos anteriormente.

En aplicación a lo determinado en la Ley de Propiedad Intelectual, en mi condición de autor, me reservo los derechos morales de la obra antes citada. En concordancia, suscribo este documento en el momento que hago la entrega del trabajo final en formato digital a la Biblioteca de la Universidad Politécnica Salesiana.

Cuenca, septiembre de 2021



Ariel Abel Berrezueta Parra

C.I. 0106559701

CERTIFICACIÓN

Yo, declaro que bajo mi tutoría fue desarrollado el trabajo de titulación: **“MODELAMIENTO MATEMÁTICO DE UNA CAJA DE ENGRANAJES CON DIFERENTES CARGAS PARA LA OBTENCIÓN DE LOS PATRONES DE VIBRACIÓN”**, realizado por Ariel Abel Berrezueta Parra, obteniendo el *Proyecto Técnico*, que cumple con todos los requisitos estipulados por la Universidad Politécnica Salesiana.

Cuenca, septiembre de 2021



Dra. Mariela Cerrada Lozana

C.I. 0151771813

DECLARATORIA DE RESPONSABILIDAD

Yo, Ariel Abel Berrezueta Parra con documento de identificación N° 0106559701, autor del trabajo de titulación: “**MODELAMIENTO MATEMÁTICO DE UNA CAJA DE ENGRANAJES CON DIFERENTES CARGAS PARA LA OBTENCIÓN DE LOS PATRONES DE VIBRACIÓN**”, certifico que el total contenido del *Proyecto Técnico* es de mi exclusiva responsabilidad y autoría.

Cuenca, septiembre de 2021



Ariel Abel Berrezueta Parra

C.I. 0106559701

AGRADECIMIENTOS

A mis padres Gilberth y Maribel que supieron infundir los valores en mi persona.

A mi hermano David que me enseñó como enfrentar los obstáculos, siempre supo corregir mis errores y ayudar a levantarme más fuerte.

A mis hermanos Gloria y Sebastian que siempre supieron levantarme el ánimo.

A mi tutor de tesis, Dra. Mariela Cerrada, quien me guío con mucha voluntad en el trayecto de este proyecto y confiar en mí para desarrollar el mismo.

A mi cotutor de tesis, Dr. Vinicio Sanchez, quien supo solventar dudas, con sus observaciones ayudó a mejorar el proyecto, además de siempre brindar su apoyo con su conocimiento de análisis de vibraciones.

A mis amigos Anderson, Cristian, Chicho Leon, Jimmy, Renan y Mayra que siempre supieron cómo levantarme el ánimo y acompañarme en este duro camino.

Ariel Abel Berrezueta Parra

DEDICATORIA

A mis padres que supieron guiarme, aunque hoy no estén conmigo siempre me mostraron su amor.

A mis hermanos por saber siempre apoyar, aun con las diferencias.

A mi familia que siempre me brindó su apoyo.

A mi abuela Ligia Guadalupe Parra que siempre supo cómo poner de mejor ánimo y aguantarme en mis ataques de ira.

Ariel Abel Berrezueta Parra

RESUMEN

Este trabajo de investigación se basa en particularizar un modelo matemático de una caja de engranajes de dientes rectos con perfil de involuta, de una etapa, con una relación de transmisión 32:48, con el objetivo de obtener los patrones de vibración reconocidos en el espectro de la Transformada Rápida de Fourier (FFT del inglés Fast Fourier Transform), espectro de la envolvente y espectro de potencia con diferentes cargas.

En el capítulo uno, se trata la introducción del trabajo de investigación donde se explica brevemente los modelos matemáticos de caja de engranajes y su importancia en la industria, además, se delimita el trabajo a realizar, se presenta el objetivo general y los objetivos específicos.

En el capítulo dos, se abarcan los fundamentos teóricos de relevancia para el desarrollo de trabajo de investigación como: nomenclatura y geometría de los engranajes, perfil de involuta, relación de contacto, rigidez del diente, enfoques para la estimación de la rigidez del diente, amortiguamiento del diente, modelos dinámicos de caja de engranaje, clasificación de modelos dinámicos de caja de engranajes. También se aborda el análisis de una serie temporal en el dominio del tiempo y la frecuencia del espectro de la FFT, espectro de la envolvente, espectro de potencia y patrón de vibración.

En el capítulo tres, se trata el desarrollo del marco metodológico. Este se divide en planteamiento del problema, simulación del modelo y procesamiento de la serie temporal. La metodología del planteamiento del problema aborda las consideraciones del modelo, el modelado de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento y el modelado de las ecuaciones de movimiento. La simulación del modelo trata de la programación de modelo, para ello se utilizó el software Matlab y para la simulación del modelo se utilizó el método numérico de dormand-prince (ode5). En el procesamiento de la serie temporal se estimaron las frecuencias características y se procesó las señales para obtener el espectro de la FFT, espectro de la envolvente y espectro de potencia.

En el capítulo cuatro, se compararon las frecuencias características de la serie temporal del modelo, correspondiente con la señal de aceleración del engranaje de entrada, con las frecuencias características calculadas en el espectro de la FFT, además, se compararon con las frecuencias características en el espectro de la FFT, espectro de la envolvente y espectro de potencia de la señal simulada y señales experimentales, donde se obtuvo que el modelo es válido para la obtención de patrones de vibración con la caja considerada.

ABSTRACT

This research work was based on the particularization of a mathematical model of a single stage gearbox with spur gear with involute profile, and a gear ratio of 32:48, with the objective of obtaining the vibration patterns recognized on the Fast Fourier Transform (FFT) spectrum, the envelope spectrum and the power spectrum under different loads.

Chapter one is about the introduction of the work where it briefly explains the mathematical models of the gearbox and its importance in the industry. Also, it is delimited the work to do.

Chapter two covers the relevant theoretical fundamentals for the development of the research work such as: nomenclature and geometry of gears, involute profile, contact ratio, approaches to estimating tooth stiffness, tooth stiffness approach, teeth damping, dynamical models for a gearbox, classification of gearbox dynamical models, analysis of a time series in time domain and frequency domain, FFT spectrum, envelope spectrum and power spectrum and vibration pattern.

Chapter three is about on the development of the methodological framework proposed in this work, this is divided into problem statement, model simulation and time series processing. The methodology of the problem statement deals with the considerations of the model, modeling of stiffness and damping coefficients, and modeling of the movement equations. The model simulation treats about the model programming by using Matlab software and the numeric method dormand-prince (ode5). The processing of time series estimated the characteristic frequencies and processed the acceleration signals of the input gear to get FFT spectrum, envelope spectrum and power spectrum.

In chapter four, it was compared the characteristic frequencies on the acceleration signal of the simulated model to the calculated characteristic frequencies in FFT spectrum. Also, it was compared the characteristic frequencies on the spectrum of FFT spectrum, envelope spectrum and power spectrum of the simulated signals and experimental signals, where it was obtained that the mathematical model is valid to obtain the vibration patterns with the gearbox considered.

ÍNDICE DE CONTENIDO

SECCIÓN	PÁGINA
CESIÓN DE DERECHOS DE AUTOR	III
CERTIFICACIÓN	IV
DECLARATORIA DE RESPONSABILIDAD	V
AGRADECIMIENTOS	VI
DEDICATORIA	VII
RESUMEN	VIII
ABSTRACT	IX
ÍNDICE DE FIGURAS	XVI
ÍNDICE DE TABLAS	XVII
LISTA DE ACRÓNIMOS	XVIII
1 Introducción	1
1.1 Planteamiento del problema	2
1.1.1 Antecedentes	2
1.1.2 Importancia y alcance	4
1.1.3 Delimitación	4
1.2 Objetivos	5
1.2.1 Objetivo General	5
1.2.2 Objetivos Específicos	5
2 Marco teórico	6
2.1 Engranajes	6
2.1.1 Geometría y nomenclatura de los engranajes de dientes rectos . .	6
2.1.1.1 Número de dientes Z	6
2.1.1.2 Módulo m	6
2.1.1.3 Paso circular p	6

2.1.1.4	Diámetro primitivo o estándar d	7
2.1.1.5	Diámetro exterior d_a	7
2.1.1.6	Diámetro de raíz d_f	8
2.1.1.7	Diámetro base d_b	8
2.1.1.8	Addendum h_a	8
2.1.1.9	Deddendum h_f	8
2.1.1.10	Profundidad total h	9
2.1.1.11	Ángulo de presión α	9
2.1.1.12	Involuta	9
2.1.1.13	Línea de acción	10
2.1.1.14	Distancia de centros a	11
2.1.2	Perfil de involuta	11
2.1.3	Relación de contacto	12
2.1.3.1	Relación de contacto radial	14
2.2	Rigidez del diente	14
2.2.1	Enfoques para el modelado del coeficiente de rigidez	15
2.2.1.1	Método FE	15
2.2.1.2	Método aproximación basado en la norma ISO 6336	16
2.2.1.3	Método analítico	17
2.2.1.3.1	Rigidez por contacto hertziano	17
2.2.1.3.2	Rigidez debido a la deflexión básica del diente de engranaje	20
2.2.1.3.3	Rigidez por deflexión en el filete de raíz	23
2.2.1.3.4	Coefficiente rigidez variante en el tiempo	26
2.3	Coefficiente de amortiguamiento del par de engranajes	27
2.4	Modelos dinámicos de cajas de engranajes	29
2.4.1	Clasificación de modelos dinámicos de caja de engranajes	29
2.4.2	Modelo de dos grados de libertad	31
2.5	Adquisición de datos	33
2.5.1	Banco de prueba de la Universidad Politécnica Salesiana	34
2.5.2	Plan experimental	34
2.6	Análisis en el dominio del tiempo y frecuencia de una serie temporal	38
2.6.1	Análisis en el dominio del tiempo de una serie temporal	38
2.6.2	Análisis en el dominio de la frecuencia de una serie temporal	39

2.6.2.1	Transformada rápida de Fourier	39
2.6.2.2	Espectro de la envolvente	42
2.6.2.3	Espectro de Potencia	44
2.6.3	Patrón de vibración	46
3	Marco metodológico	48
3.1	Planteamiento del modelo	48
3.1.1	Consideraciones del modelo	49
3.1.2	Modelado de rigidez y amortiguamiento	51
3.1.3	Modelado de las ecuaciones de movimiento	52
3.2	Simulación del modelo	54
3.2.1	Programación del modelo	54
3.2.2	Simulación del modelo	55
3.3	Procesamiento de la serie temporal de vibración	57
3.3.1	Estimación de las frecuencias características	58
3.3.2	Procesado de señales de vibración	59
4	Análisis y discusión de resultados	61
4.1	Coefficientes de rigidez y amortiguamiento variantes en el tiempo	61
4.2	Validación de frecuencias características del modelo	62
4.3	Comparación de espectros teóricos y experimentales	69
4.3.1	Comparación de espectro de la FFT	69
4.3.2	Comparación de espectro de la envolvente.	74
4.3.3	Comparación de espectro de potencia	82
	Conclusiones	93
	Recomendaciones	94
	Trabajos futuros	94
	Referencias	101
A	Anexos	102
A.1	Programación	102
A.2	Espectros de amplitud (FFT) de todos los acelerómetros	106
A.3	Espectros de la envolvente de todos los acelerómetros	109

A.4 Espectros de potencia de todos los acelerómetros	112
--	-----

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1	Paso circular	6
Figura 2	Diámetro primitivo	7
Figura 3	Diámetro exterior	7
Figura 4	Diámetro raíz	8
Figura 5	Diámetro base	8
Figura 6	Addendum, dedendum y profundidad total	9
Figura 7	Ángulo de presión	9
Figura 8	Involuta	10
Figura 9	Punto de contacto en la línea de acción en diferentes instantes	10
Figura 10	Distancia de centros	11
Figura 11	Engranajes con perfil de involuta	12
Figura 12	Pares en contacto de un engranaje en diferentes instantes de tiempo	13
Figura 13	Tiempos en ciclo de contacto	13
Figura 14	Rigidez y amortiguamiento entre dientes	15
Figura 15	Diente bajo la acción de una fuerza	17
Figura 16	Contacto hertziano	17
Figura 17	Contacto hertziano entre los dientes	19
Figura 18	Diente como viga en voladizo	20
Figura 19	Fuerza en acción y ubicación de punto de contacto	21
Figura 20	Filete de raíz	23
Figura 21	Geometría de deflexión en el filete de raíz	25
Figura 22	Rigidez variante en el tiempo	26
Figura 23	Clasificación de los modelos	31
Figura 24	Modelo de dos grados de libertad	32
Figura 25	Banco de Pruebas	34
Figura 26	Disposición de sistema electromecánico	36
Figura 27	Disposición de los sensores en el sistema electromecánico	37
Figura 28	Configuración de los sensores y módulos para la adquisición de la base de datos	37
Figura 29	Serie temporal sin fallo	38
Figura 30	Serie temporal con fallo	39
Figura 31	Transformada discreta de Fourier	40
Figura 32	Espectro de la FFT sin fallo	41

Figura 33	Espectro de la FFT con fallo	41
Figura 34	Espectro de la envolvente sin fallo	43
Figura 35	Espectro de la envolvente con fallo	43
Figura 36	Espectro de potencia sin fallo	45
Figura 37	Espectro de potencia con fallo	45
Figura 38	Patrón de vibraciones con frecuencias características	47
Figura 39	Flujograma de planteamiento del problema.	48
Figura 40	Esquema de caja de engranajes	49
Figura 41	Flujograma para modelado de la rigidez	51
Figura 42	Flujograma de la programación del modelo	54
Figura 43	Flujograma de la programación del modelo	56
Figura 44	Serie temporal con el método numérico y paso de tiempo seleccionados	57
Figura 45	Serie temporal con el método numérico y paso de tiempo seleccionados, en un intervalo de tiempo 5-5.1 segundos	57
Figura 46	Flujograma de metodología del procesamiento de serie temporal de vibración	58
Figura 47	Función del coeficiente de rigidez	61
Figura 48	Función del coeficiente de amortiguamiento	62
Figura 49	Espectro de la FFT de señal simulada con carga L1	63
Figura 50	Valores de frecuencias f_g y f_p en el espectro de la FFT de señal simulada con carga L1	63
Figura 51	Valores de frecuencias de las bandas ($f_{1,1}$, $f_{1,2}$, $f_{2,1}$, $f_{2,2}$) en el espectro de la FFT de la señal simulada con carga L1	64
Figura 52	Espectro de la FFT de señal simulada con condiciones L2	65
Figura 53	Valores de frecuencias f_g y f_p en el espectro de la FFT de señal simulada con carga L2	65
Figura 54	Valores de frecuencias de las bandas ($f_{1,1}$, $f_{1,2}$, $f_{2,1}$, $f_{2,2}$) en el espectro de la FFT de la señal simulada con carga L2.	66
Figura 55	Espectro de la FFT de señal simulada con condiciones L3	67
Figura 56	Valores de frecuencias f_g y f_p en el espectro de la FFT de señal simulada con carga L3	67
Figura 57	Valores de frecuencias de las bandas ($f_{1,1}$, $f_{1,2}$, $f_{2,2}$) en el espectro de la FFT de la señal simulada con carga L3	68

Figura 58	Espectro de la FFT de señal de acelerómetro A2 con carga L1 . . .	69
Figura 59	Frecuencia de entrada f_g y frecuencia de salida f_p en el espectro de la FFT de la señal del acelerómetro A2 con carga L1	70
Figura 60	Espectro de la FFT de señal de acelerómetro A2 con carga L2 . . .	70
Figura 61	Frecuencia de entrada f_g y frecuencia de salida f_p en el espectro de la FFT de la señal del acelerómetro A2 con carga L2	71
Figura 62	Espectro de la FFT de señal de acelerómetro A2 con carga L3 . . .	71
Figura 63	Frecuencia de entrada f_g y frecuencia de salida f_p en el espectro de la FFT de la señal del acelerómetro A2 con carga L3	72
Figura 64	Espectro de la envolvente de señal simulada con carga L1	74
Figura 65	Espectro de la envolvente de señal de acelerómetro A2 con carga L1	75
Figura 66	Frecuencia de entrada f_g y frecuencia de salida f_p del espectro de la envolvente de la señal simulada con carga L1	75
Figura 67	Frecuencia de entrada f_g y frecuencia de salida f_p del espectro de la envolvente de la señal del acelerómetro A2 con carga L1	76
Figura 68	Espectro de la envolvente de señal simulada con carga L2	76
Figura 69	Espectro de la envolvente de señal de acelerómetro A2 con carga L2	77
Figura 70	Frecuencia de entrada f_g y frecuencia de salida f_p del espectro de la envolvente de la señal simulada con carga L2	77
Figura 71	Frecuencia de entrada f_g y frecuencia de salida f_p del espectro de la envolvente de la señal del acelerómetro A2 con carga L2	78
Figura 72	Espectro de la envolvente de señal simulada con carga L3	78
Figura 73	Espectro de la envolvente de señal de acelerómetro A2 con carga L3	79
Figura 74	Frecuencia de entrada f_g y frecuencia de salida f_p del espectro de la envolvente de la señal simulada con carga L3	79
Figura 75	Frecuencia de entrada f_g y frecuencia de salida f_p del espectro de la envolvente de la señal del acelerómetro A2 con carga L3	80
Figura 76	Espectro de potencia de señal simulada con carga L1	82
Figura 77	Espectro de potencia de señal de acelerómetro A2 con carga L1 . . .	83
Figura 78	Frecuencia de entrada f_g y frecuencia de salida f_p del espectro de potencia de la señal simulada con carga L1	83
Figura 79	Frecuencia de entrada f_g y frecuencia de salida f_p del espectro de potencia de la señal del acelerómetro A2 con carga L1	84
Figura 80	Espectro de potencia de señal simulada con carga L2	84

Figura 81	Espectro de potencia de señal de acelerómetro A2 con carga L2 .	85
Figura 82	Frecuencia de entrada f_g y frecuencia de salida f_p del espectro de potencia de la señal simulada con carga L2	85
Figura 83	Frecuencia de entrada f_g y frecuencia de salida f_p del espectro de potencia de la señal del acelerómetro A2 con carga L2	86
Figura 84	Espectro de potencia de señal simulada con carga L3	86
Figura 85	Espectro de potencia de señal de acelerómetro A2 con carga L3 .	87
Figura 86	Frecuencia de entrada f_g y frecuencia de salida f_p del espectro de potencia de la señal simulada con carga L3	87
Figura 87	Frecuencia de entrada f_g y frecuencia de salida f_p del espectro de potencia de la señal del acelerómetro A2 con carga L3	88
Figura 88	Script de función kmin	102
Figura 89	Script geo	103
Figura 90	Script archivomaestro	104
Figura 91	Script de las ecuaciones de movimiento en Simulink	105
Figura 92	Espectros de amplitud en condición L1	106
Figura 93	Espectros de amplitud en condición L2	107
Figura 94	Espectros de amplitud en condición L3	108
Figura 95	Espectros de la envolvente en condición L1	109
Figura 96	Espectros de la envolvente en condición L2	110
Figura 97	Espectros de la envolvente en condición L3	111
Figura 98	Espectros de potencia en condición L1	112
Figura 99	Espectros de potencia en condición L2	113
Figura 100	Espectros de potencia en condición L3	114

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1	Valores de los parámetros A_i, B_i, C_i, D_i, E_i y F_i de la Ecuación 38 para determinación de los parámetros L^*, M^*, P^* y Q^*	24
Tabla 2	Características de modelos de torsión y modelos de traslación y torsión	30
Tabla 3	Características del motor del banco de prueba	35
Tabla 4	Especificaciones del equipo mecánico del banco de pruebas	35
Tabla 5	Características de la caja de engranajes del banco de pruebas	36
Tabla 6	Pares y velocidades en las diferentes condiciones de carga	50
Tabla 7	Parámetros geométricos y características del material	50
Tabla 8	Frecuencias características de la caja de engranajes	59
Tabla 9	Comparación de los valores entre las frecuencias características y frecuencias en el espectro de la FFT con condiciones de operación L1	64
Tabla 10	Comparación de los valores entre las frecuencia características y frecuencias en el espectro de la FFT con condiciones de operación L2	66
Tabla 11	Comparación de los valores entre las frecuencias características y frecuencias en el espectro de la FFT con condiciones de operación L3	68
Tabla 12	Comparación entre espectro de la FFT de la señal experimental y la señal simulada	73
Tabla 13	Comparación entre el espectro de la envolvente de la señal experimental y señal simulada	81
Tabla 14	Comparación entre el espectro de potencia de la señal experimental y señal simulada	89

LISTA DE ACRÓNIMOS

ANSI	American National Standards Institute
AGMA	American Gears Manufacturers Association
DFT	Discrete Fourier Transform
DOF	Degrees Of Freedom
FE	Finite Elements
FFT	Fast Fourier Transform
GIDTEC	Grupo de Investigación y Desarrollo en Tecnologías Industriales
LPM	Lumped Parameter Modeling
ISO	International Organization for Standardization
TVMS	Time Varying Mesh Stiffness

1. Introducción

Las cajas de engranajes son de gran importancia en la maquinaria industrial y aplicaciones automotrices, ya a que son usadas para la transmisión de potencia con el fin de producir cambios de velocidad, par de torsión y cambios de dirección [1]. El engranaje es el elemento principal de dichas cajas, el cual por las cargas de servicio y condiciones de operación tiende a la generación de fallos; cuando estos no se detectan de manera oportuna el engranaje continúa degradándose, lo que causa pérdidas económicas, en casos extremos catástrofes [2]. Para el diagnóstico temprano de los fallos en las cajas de engranajes existen técnicas de mantenimiento basado en la condición tales como: análisis de aceite, termografía y análisis de vibraciones [3,4].

El análisis de vibraciones es una las principales herramientas de monitorio de maquinaria rotativa [5], para el diagnóstico de fallos en engranajes por análisis de vibraciones se requiere el conocimiento previo de la señal característica de vibración, la cual puede ser estimada mediante datos experimentales o modelos dinámicos de caja de engranajes [6,7]. Los modelos dinámicos de cajas de engranajes son de gran importancia, debido a que en los sistemas mecánicos tienden a la generación de diferentes fallos, por varias razones como: condiciones inapropiadas de funcionamiento, fallas del material, errores de manufactura y falta de lubricación [4,8,9]. Además, los modelos dinámicos presentan las siguientes ventajas [10,11]:

- Generación de señales características suficientes para el entrenamiento de algoritmos.
- Permiten generar señales características con diferentes fallos y condiciones de operación.
- Facilitan la comprensión física de los fenómenos dentro de la maquinaria.
- Suelen tener mayor viabilidad económica con respecto a la experimentación.

Por lo mismo, la aplicación de modelos matemáticos de cajas de engranajes tiene como resultado la posibilidad de mejorar los algoritmos de diagnóstico, la reducción de los esfuerzos y costos relativos para realizar experimentación cada vez que utilice un modelo [6].

1.1. Planteamiento del problema

1.1.1. Antecedentes

Según Özgüven y Houser [12], los objetivos de los modelos dinámicos de las cajas de engranajes apuntan a conocer: la vida útil de la caja, los esfuerzo de flexión y contacto, las frecuencias naturales, la vibración del sistema y el ruido irradiado. En 1985, Yang y Sun [13] proponen un modelo de dos grados de libertad no lineal con los coeficientes de amortiguamiento y rigidez variantes en el tiempo, estimados mediante el método de contacto hertziano. Este modelo permite aproximación de posiciones, velocidades y aceleraciones angulares del sistema, considerando la posible pérdida de contacto entre dientes. En 1987, los mismos autores [14] proponen mejoras al modelo tales como: un coeficiente de rigidez basado en el contacto hertziano, deflexiones debido a la compresión axial y flexión e incluye los pares, debido a la fricción; este modelo permitía el cálculo de posiciones, velocidad y aceleraciones angulares.

En 1988, Lin y Liou [15] realizan un modelo de caja de engranajes de cuatro grados de libertad, donde consideran un coeficiente de la rigidez derivado de la deflexión básica del diente, un coeficiente de amortiguamiento es proporcional a la rigidez, además, consideran los coeficientes de rigidez torsional y amortiguamiento de los ejes de salida y entrada, con este modelo se realiza un análisis del espectro de la Transformada rápida de Fourier (FFT) del error dinámico de transmisión obtenido como solución del modelo.

En 1997, Kahraman y Blankeship [16] desarrollaron un modelo de dos grados de libertad, simplificado en un grado de libertad con posible pérdida de contacto por el juego entre dientes, error estático de transmisión variante en el tiempo y los coeficientes de rigidez y amortiguamiento variantes en el tiempo. Obtienen el espectro de la Transformada rápida de Fourier (FFT) de la solución del modelo y lo comparan con el espectro de la FFT de datos experimentales.

En 2012, Ma y Chen [17] proponen un modelo con cuatro grados de libertad con los coeficientes de rigidez, amortiguamiento y error estático de transmisión variantes en el tiempo, los coeficientes de rigidez y amortiguamiento de los rodamientos, con el cual estima una aceleración para procesarla con la Transformada rápida de Fourier (FFT), con el fin de comparar el espectro de la FFT de la señal del modelo con el espectro de la FFT de datos experimentales, tanto para una caja de engranajes en condición normal como en condición de fallo.

En 2017, Dadon *et al.* [6] proponen un modelo de 14 grados de libertad, en el que estima el coeficiente de rigidez a partir de la deflexión básica y la deflexión en el filete de raíz, el coeficiente de amortiguamiento se modela a partir del coeficiente de rigidez. Una vez obtenida la solución del modelo realizan la comparación con respecto a datos experimentales.

1.1.2. Importancia y alcance

En la actualidad, el modelamiento del comportamiento dinámico de las cajas de engranajes es uno de los problemas fundamentales del modelado de sistemas mecánicos [18], debido a que sus principales objetivos pretenden a estimar: la vida útil de la caja, los esfuerzos de flexión y contacto, las frecuencias naturales, la vibración del sistema y el ruido irradiado [12]. En adición según Vexel y Maatar [19] el control y predicción de las vibraciones y ruido de los engranajes se ha convertido en uno de los principales factores en el diseño de transmisiones de potencia en la maquinaria rotativa.

El diagnóstico por análisis de vibraciones requiere establecer un patrón de vibraciones en condiciones normales, con el fin de identificar situaciones fuera del estándar [3]. Para la estimación de los patrones de vibraciones existen dos opciones: estimación con datos extraídos de experimentación y estimación con datos extraídos de modelos matemáticos. Dadon *et al.* [6] afirman que utilizar un modelo confiable de caja de engranajes para predecir los patrones de vibraciones de engranajes ocasiona mejoras en los algoritmos de diagnóstico, reducción de costos y esfuerzos de asociados a la experimentación para el desarrollo de la línea base de la maquinaria.

Por lo antes expuesto, el alcance de este trabajo es desarrollar un modelo matemático de caja de engranajes, que permita reconocer los patrones de vibración en condiciones normales en el espectro de amplitud, espectro de la envolvente y espectro de potencia, a la vez que permita simular la caja de engranajes con diferentes condiciones de operación.

1.1.3. Delimitación

El modelo se particularizó con base a las características físicas de la caja de engranajes del grupo de investigaciones (GIDTEC) de la Universidad Politécnica Salesiana, sede Cuenca; se consideraron tres condiciones de operación, asociadas a condiciones sin carga y dos cargas constantes de magnitudes diferentes. El modelo planteado es netamente de vibración torsional, con coeficientes de rigidez y amortiguamiento variantes en el tiempo, una posible pérdida de contacto entre los dientes, además, solo se consideró los engranajes en condiciones de no fallo.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo General

- Desarrollar un modelo matemático de una caja de engranajes en condiciones de no fallo para la determinación de los patrones de vibración con diferentes cargas.

1.2.2. Objetivos Específicos

- Caracterizar las señales de rigidez y amortiguamiento en el dominio del tiempo.
- Desarrollar un modelo un dinámico de caja de engranajes en condiciones de no fallo.
- Obtener el espectro de la FFT, espectro de la envolvente y espectro de potencia del modelo dinámico de caja de engranajes en condiciones de no fallo con diferentes cargas.
- Comparar las frecuencias características del espectro de la FFT, espectro de la envolvente y espectro de potencia del modelo de caja de engranajes en condiciones de no fallo con las frecuencias características del espectro de la FFT, espectro de la envolvente y espectro de potencia de datos experimentales en condiciones de no fallo.

2. Marco teórico

2.1. Engranajes

Son aquellos elementos que tienen como objetivo principal transmitir potencia y movimiento entre dos ejes por medio del constante contacto de sus dientes [20]. Los engranajes son usados en varias aplicaciones siempre que sea necesario un cambio de velocidad o del par de torsión del mecanismo [1].

2.1.1. Geometría y nomenclatura de los engranajes de dientes rectos

La norma ANSI-AGMA 1012-G05 [21] establece los términos, nomenclatura y abreviaciones de la geometría de los engranajes externos e internos. Para los engranajes rectos la norma ANSI-AGMA 1012-G05 propone la siguiente nomenclatura.

2.1.1.1. Número de dientes Z

Es el número total de dientes del engranaje en toda su circunferencia [21].

2.1.1.2. Módulo m

Es la relación milimétrica entre el diámetro primitivo y el número de dientes [21].

2.1.1.3. Paso circular p

Es la longitud de arco medida en el círculo primitivo entre dos puntos homólogos de dos dientes consecutivos, como se indica en la Figura 1 [21].

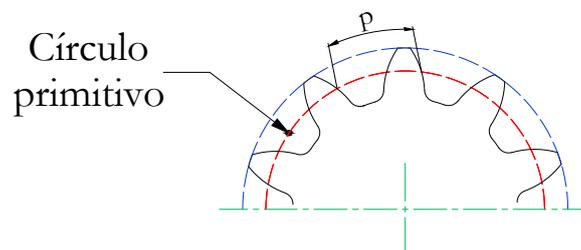


Figura 1: Paso circular. **Fuente:** Autor

2.1.1.4. Diámetro primitivo o estándar d

Es el diámetro del círculo primitivo o estándar. En engranajes cilíndricos es calculado mediante la Ecuación 1 [21]:

$$d = z \cdot m = \frac{z \cdot p}{\pi} \quad (1)$$

Donde:

d es el diámetro primitivo.

z es el número de dientes.

m es el módulo.

p es paso circular.

En la Figura 2, se representa la ubicación del círculo primitivo y se indica el diámetro primitivo (d) [21].

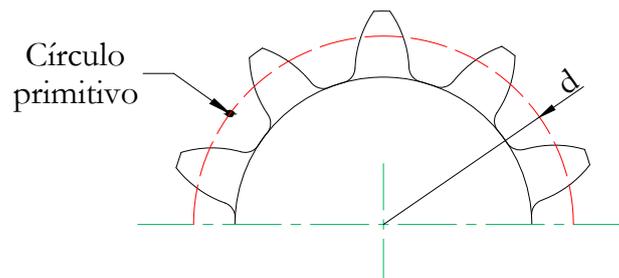


Figura 2: Diámetro primitivo. **Fuente:** Autor

2.1.1.5. Diámetro exterior d_a

Es el diámetro medido en el círculo addendum, el cual coincide con la parte superior del diente y es concéntrico al círculo primitivo [21]. En la Figura 3 se presenta la ubicación del círculo addendum y se indica el diámetro exterior (d_a).

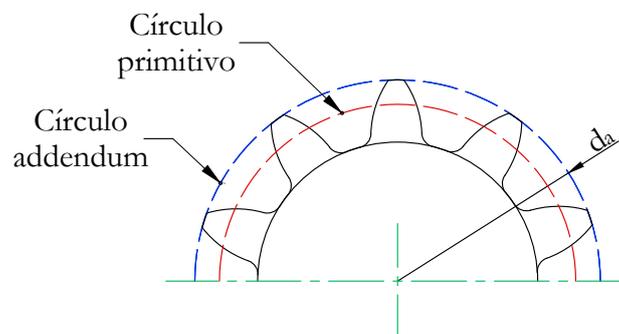


Figura 3: Diámetro exterior. **Fuente:** Autor

2.1.1.6. Diámetro de raíz d_f

Es el diámetro medido en el círculo de raíz, el cual coincide con el fondo del diente y es concéntrico al círculo primitivo [21]. En la Figura 4, se presenta la ubicación del círculo raíz y se indica el diámetro de raíz (d_f).

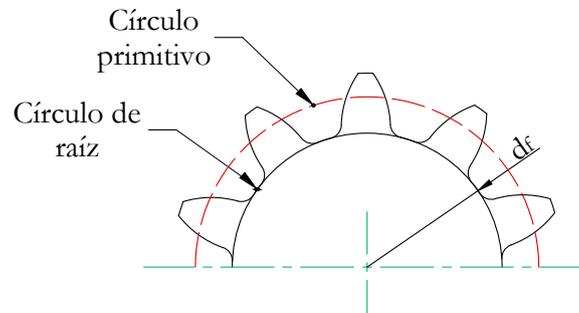


Figura 4: Diámetro raíz. **Fuente:** Autor

2.1.1.7. Diámetro base d_b

Es el diámetro del círculo base, este es el círculo desde el cual la involuta se aproxima al perfil de diente [21,22]. En la Figura 5, se presenta la ubicación del círculo base y se indica el diámetro base (d_b).

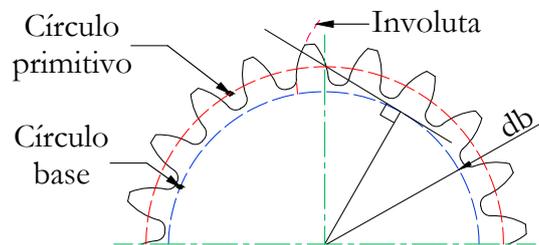


Figura 5: Diámetro base. **Fuente:** Autor

2.1.1.8. Addendum h_a

Es la diferencia que existe entre el diámetro exterior (d_a) y el diámetro primitivo (d). El addendum se indica en la Figura 6. [21].

2.1.1.9. Dedendum h_f

Es la diferencia que existe entre el diámetro primitivo (d) y el diámetro de raíz (d_f). El dedendum se indica en la Figura 6 [21].

2.1.1.10. Profundidad total h

Es la diferencia que existe entre el diámetro externo (d_a) y el diámetro de raíz (d_f). La profundidad total se indica en la Figura 6 [21].

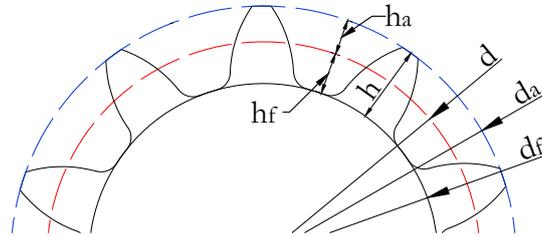


Figura 6: Addendum, dedendum y profundidad total. **Fuente:** Autor

2.1.1.11. Ángulo de presión α

Es el ángulo que se forma en el punto de contacto entre la línea de contacto y la normal a la superficie del diente como se muestra en la Figura 7 [21].

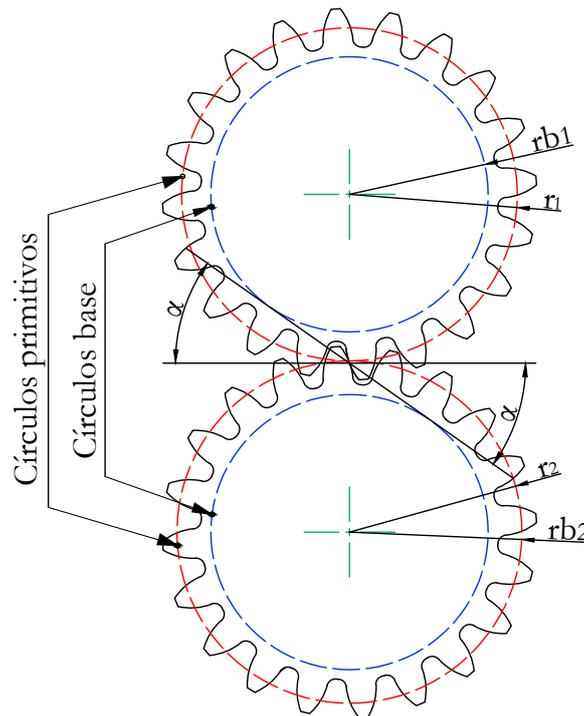


Figura 7: Ángulo de presión. **Fuente:** Autor

2.1.1.12. Involuta

Es la curva que garantiza una transmisión constante entre engranajes de dientes rectos, la cual está ubicada en el plano tangencial, parte desde el círculo base como se presenta en la Figura 8 [21].

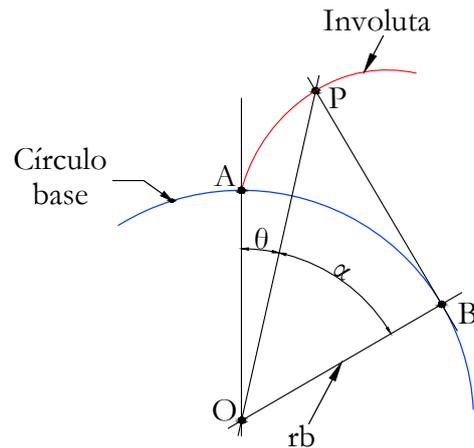
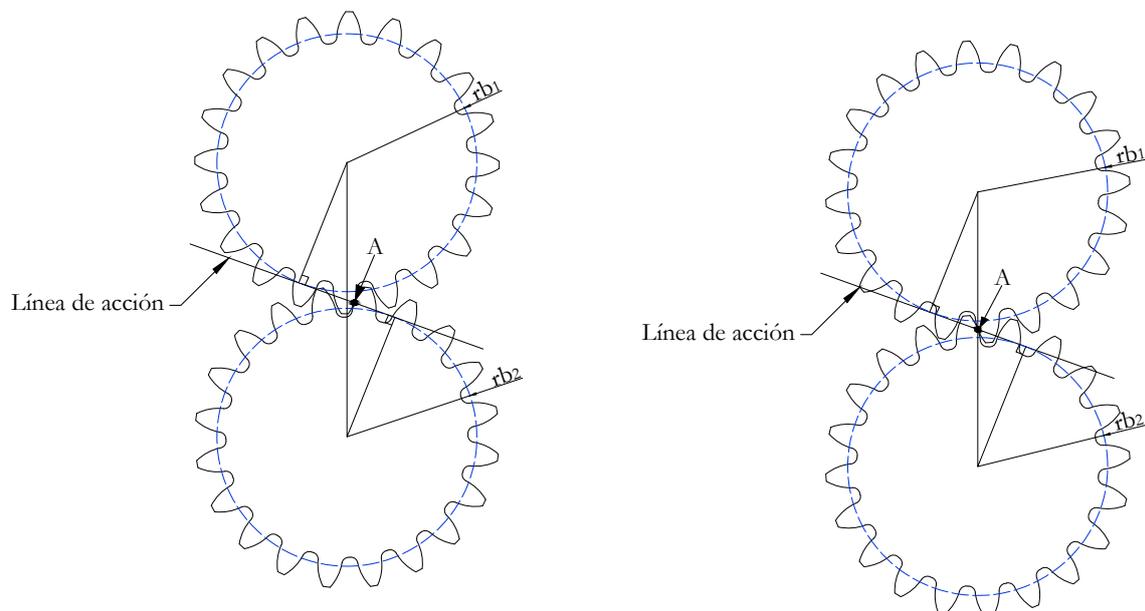


Figura 8: Involuta. **Fuente:** Autor

2.1.1.13. Línea de acción

Es la línea recta que pasa por el punto de contacto y es tangente a los círculos base del engranaje y piñón, la línea de acción es la trayectoria de contacto de los engranajes con el perfil de involuta [21]. En la Figura 9(a) se presenta la línea de acción en el instante uno, en la Figura 9(b) la línea de acción en el instante dos, como se aprecia el punto de contacto A siempre se mantiene en la línea de acción.



(a) Línea de acción instante uno.

(b) Línea de acción instante dos.

Figura 9: Punto de contacto en la línea de acción en diferentes instantes. **Fuente:** Autor

2.1.1.14. Distancia de centros a

La distancia entre los centros de un engranaje externo se define como la suma de los radios primitivos; en ejes que no se interceptan es definida como el camino más corto entre ambos ejes y se mide a lo largo de la perpendicular común llamada línea de centros. En la Figura 10, se presenta la distancia de centros (a) en un par de engranajes externos rectos [21].

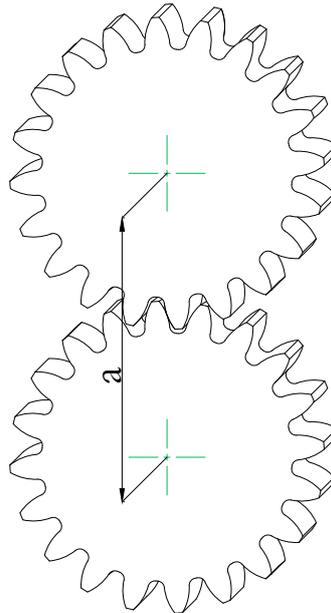


Figura 10: Distancia de centros. **Fuente:** Autor

2.1.2. Perfil de involuta

Es la geometría del perfil del diente que se aproxima a una curva involuta, cuya función es hacer contacto entre cada uno de los dientes del engranaje, denominados "par de engranajes" [23]. El perfil de involuta tiene ventajas como [24, 25]:

- La relación de velocidades angulares permanece constante en toda la malla.
- La transmisión de rotación es suave e independiente del error de distancia de centro.
- Un engranaje de perfil de involuta puede trabajar con otro con diferente número de dientes.

Para ubicar un punto cualquiera en la involuta, se considera la existencia de los ejes X y Y colocados en el centro de rotación del engranaje, como se presenta en la Figura 11(a); en la Figura 11(b) se presenta el ángulo θ_b , con esta consideración cualquier punto de la

involuta se puede representa con las Ecuaciones 2 y 3 [14, 26, 27]:

$$x = rb[(\alpha_1 + \theta_b)\text{sen}(\alpha_1) + \text{cos}(\alpha_1)] \quad (2)$$

$$y = rb[(\alpha_1 + \theta_b)\text{cos}(\alpha_1) - \text{sen}(\alpha_1)] \quad (3)$$

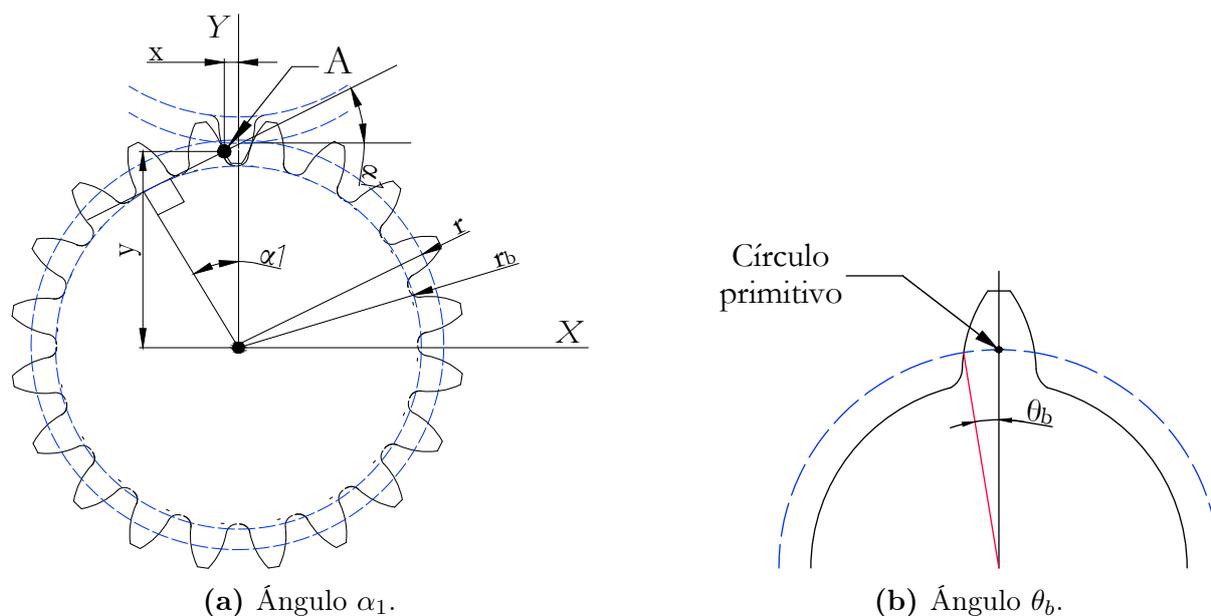


Figura 11: Engranajes con perfil de involuta. **Fuente:** Autor

2.1.3. Relación de contacto

La relación de contacto se define como el número promedio de pares de dientes de un par de engranajes en contacto durante su operación. Cuando un par de dientes deja de hacer contacto, el siguiente par ya debe haber entrado en contacto, a este fenómeno se lo conoce como superposición. En el diseño de engranajes es preferible tener la mayor superposición posible [22, 28]. Por ello es recomendable una relación de contacto de 1.2 o más, para asegurar una transmisión suave y continua. En ninguna circunstancia la relación debe ser menor que 1.1. Una relación de contacto entre 1 y 2 significa que en un intervalo de tiempo dos pares de dientes están en contacto y que en el tiempo restante un par está en contacto. Una relación entre 2 y 3 significa que 2 o 3 pares de dientes están siempre en contacto [28]. En la Figura 12(a), se presenta un par de engranajes en el instante de tiempo donde solo se encuentra un par de dientes en contacto; en la Figura 12(b) se presenta un par de engranajes en el instante de tiempo donde se encuentra dos pares de dientes en contacto.

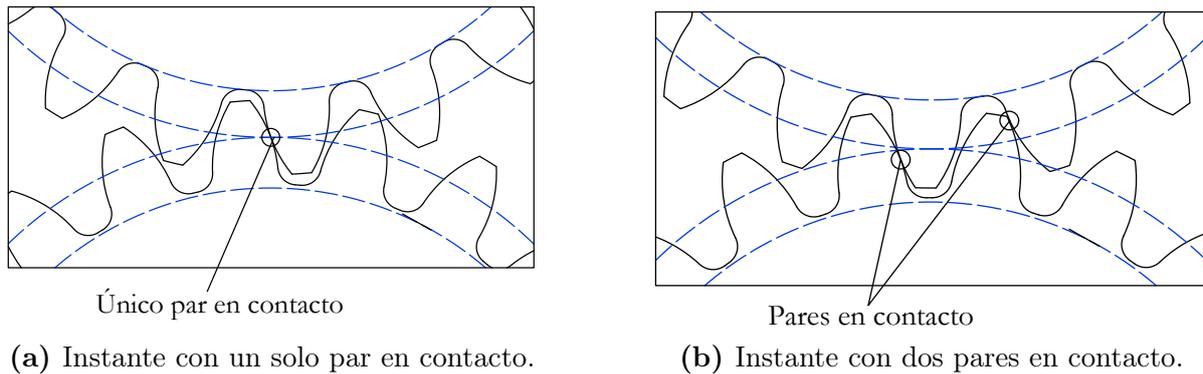


Figura 12: Pares en contacto de un engranaje de dientes rectos en diferentes instantes de tiempo. **Fuente:** Autor

Para los engranajes de dientes rectos de perfil de involuta, la relación de contacto se encuentra 1 a 2, debido a esto existen un tiempo de simple contacto y doble contacto conocidos como ts y td respectivamente, como se presenta en la Figura 13 [29].

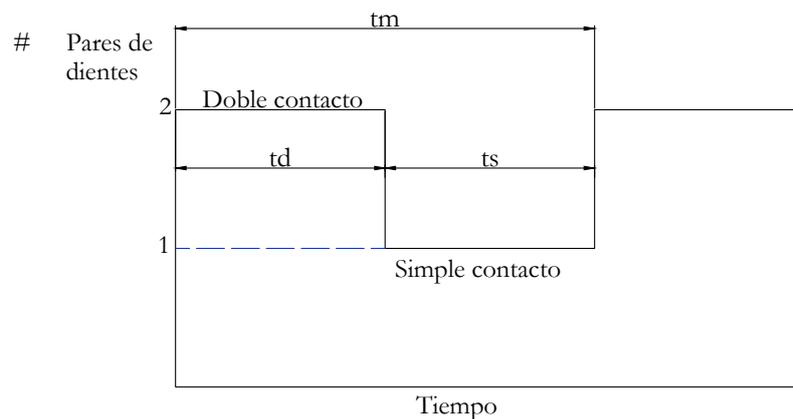


Figura 13: Tiempos en ciclo de contacto. **Fuente:** Autor

Estos tiempos pueden ser calculados con las siguientes ecuaciones: [29]:

$$t_m = \frac{60}{NZ} \quad (4)$$

$$td = (\varepsilon_\alpha - 1)t_m \quad (5)$$

$$ts = (2 - \varepsilon_\alpha)t_m \quad (6)$$

Donde:

t_m es tiempo total de contacto de un par de dientes.

td es tiempo en doble contacto.

ts es el tiempo en simple contacto.

N es la velocidad de giro del engranaje en RPM.

Z es el número de dientes del engranaje.

ε_α es la relación de contacto radial.

La relación de contacto total en el caso de los engranajes de dientes rectos es igual a la relación de contacto radial [22].

2.1.3.1. Relación de contacto radial

Es la relación de contacto que ocurre sobre plano transversal, dependerá del tipo de engranaje para el cálculo, para engranajes rectos se puede estimar como [30]:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\sqrt{\frac{d_{a1}^2}{2} - \frac{d_{b1}^2}{2} + \frac{d_{a2}^2}{2} - \frac{d_{b2}^2}{2} - a_x \sin \alpha_w}}{\pi m \cos \alpha_w} \quad (7)$$

Donde:

d_{a1} y d_{a2} son diámetros exteriores del engranaje uno y engranaje dos.

d_{b1} y d_{b2} son diámetros base del engranaje uno y engranaje dos.

a_x es la distancia de centros del par de engranajes.

m es el módulo.

α_w es el ángulo de presión.

2.2. Rigidez del diente

La rigidez es la cualidad que tienen los elementos de almacenar energía potencial [31]. En un par de engranajes, por el hecho de tener un número cambiante de par de dientes en contacto a lo largo del tiempo no se puede considerar una rigidez constante, debido a esta condición y la posición del diente existe un coeficiente de rigidez de engranajes variante en el tiempo (TVMS del inglés time varying mesh stiffness), la cual es una función periódica en el tiempo. Para el análisis analítico del coeficiente de rigidez se considera que existe entre cada par de dientes un elemento de rigidez $K(t)$ y elemento amortiguador $C(t)$ como se presenta en la Figura 14) [31, 32].

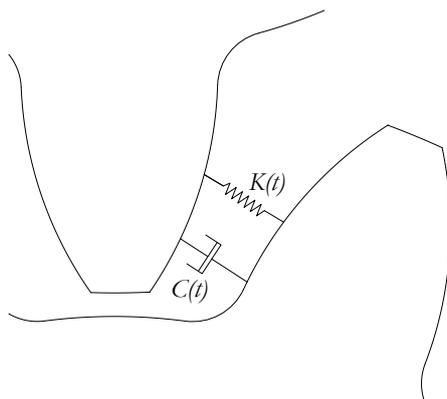


Figura 14: Rigidez y amortiguamiento entre dientes. **Fuente:** Autor

2.2.1. Enfoques para el modelado del coeficiente de rigidez

El coeficiente de rigidez en un par de engranajes no es constante, por ello se representa como una función periódica, dicha función puede ser estimada mediante [24]:

- Método FE.
- Método analítico.
- Método aproximación basado en la norma ISO 6336.

2.2.1.1. Método FE

El método FE es la principal herramienta que se utiliza para obtener TVMS, debido a su importante ventaja de representar el contacto entre dientes. Los modelos tridimensionales (3D) y modelos bidimensionales (2D) son los más comunes en las investigaciones. Un modelo 2D de engranaje grueso en deflexión simple, o engranaje delgado en esfuerzo simple produce relativamente mejores resultados en un menor número de nodos y menor tiempo de cálculo. Mientras que un modelo 3D supera las limitaciones de un modelo 2D en la simulación de engranajes rectos y helicoidales, permitiendo realizar modificaciones a lo largo de la superficie del diente y desalineaciones del engranaje [33, 34].

Aunque los modelos FE de un par de engranajes han sido desarrollados por diferentes investigadores, debe tenerse en cuenta algunas de las estrategias comunes de modelado como: los nodos en un cubo interno del engranaje conducido están completamente restringidos del movimiento, los nodos en el cubo interior del engranaje conductor solo pueden girar alrededor del centro, el par estático T_1 se aplica sobre el engranaje conductor aplicando fuerzas tangenciales en los nodos del cubo del engranaje conductor [33–35]. Si se ajusta las posiciones angulares de los engranajes, la deformación rotacional variante

en el tiempo $\theta_1(t)$ del cubo del engranaje conductor en cada ángulo de balanceo se puede determinar, una vez que se evalúa el campo de deformación del engranaje. Luego, TVMS se calcula mediante [34]:

$$K(t) = \frac{\frac{T_1}{rb_1}}{rb_1\theta_1(t)} \quad (8)$$

Donde:

T_1 es el par estático.

rb_1 radio base del engranaje uno.

$\theta_1(t)$ es la deformación rotacional variante en el tiempo.

2.2.1.2. Método aproximación basado en la norma ISO 6336

Este método propone el modelado de la TVMS como aproximación de la longitud de contacto L , fue propuesto por Vexlex [36], basado en la norma ISO 6336-1 [37]. Un aporte importante de dicha norma es la suposición de que la rigidez por unidad de longitud k_0 , a lo largo de la línea de contacto, es aproximadamente una constante, de modo que la TVMS se puede aproximar de la forma [36, 38]:

$$K(t) = k_0L(t) \quad (9)$$

Donde:

k_0 es la rigidez por longitud de contacto.

$L(t)$ es la longitud de línea de contacto variante en el tiempo.

Para un par engranajes de dientes rectos con relación de contacto ($1 < \varepsilon_\alpha < 2$) se puede estimar la longitud de línea de contacto como constante e igual al ancho del diente, mientras que k_0 se puede estimar con la norma ISO 6336-1, la TVMS se puede modelar como [34]:

$$k(t) = \begin{cases} k_0W & \text{En simple contacto.} \\ 2k_0W & \text{En doble contacto.} \end{cases} \quad (10)$$

Donde:

k_0 es la rigidez por longitud de contacto.

W es el ancho del diente.

2.2.1.3. Método analítico

El método analítico se basa en la estimación del coeficiente de rigidez a partir de la deflexión [39]. De acuerdo con Weber [40], existen tres causas de deflexión del diente en la línea de acción en un punto j sometido una fuerza F , como se muestra en la Figura 15:

1. La deflexión por contacto hertziano.
2. La deflexión básica del cuerpo de engranaje.
3. La deflexión por flexión filete de raíz.

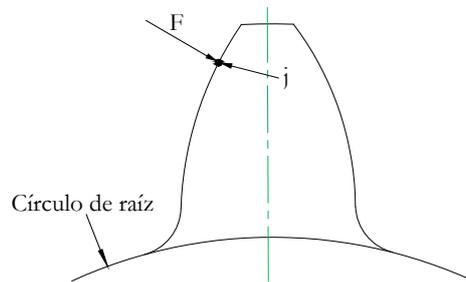


Figura 15: Diente bajo la acción de una fuerza. **Fuente:** Autor

2.2.1.3.1. Rigidez por contacto hertziano

De acuerdo con las leyes de contacto hertziano, la compresión elástica de dos cuerpos elásticos isotrópicos se puede aproximar por dos cilindros en las proximidades del contacto, tal como se presenta en la Figura 16 [13].

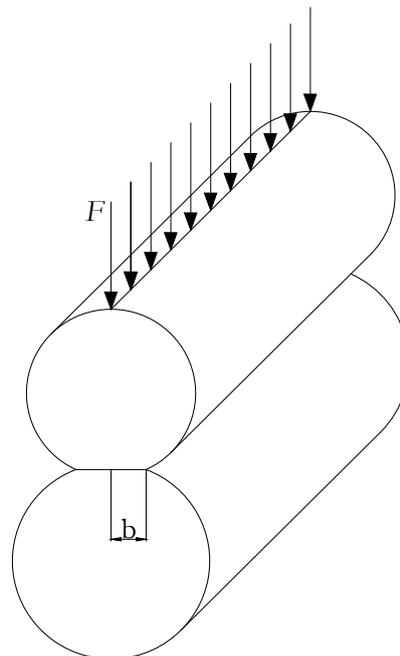


Figura 16: Contacto hertziano. **Fuente:** Autor

Entonces, la mitad del ancho de la superficie de contacto b presentado por una fuerza normal F se puede expresar como [13]:

$$b = \sqrt{\frac{4F}{L} \left(\frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} - \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2} \right) \left(\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \right)} \quad (11)$$

Donde:

F es la fuerza de compresión entre los cilindros.

L es el espesor de los dientes.

r_i es el radio del cilindro i .

E_i es el módulo de Young del cilindro i .

ν_i es el coeficiente de Poisson del cilindro i .

Se considera un par de engranajes rectos con perfil de involuta, como se presenta en la Figura 17. Basado en las propiedades cinemáticas del perfil de involuta, se conoce que el punto de contacto A siempre estará en la recta tangente común. El círculo que se aproxima al perfil del diente en cercanía del punto A , siempre se encuentra centrado en el punto C_i , el cual se encuentra en la tangente de radio base i . Lo anterior ocurre si se considera los dos círculos como cilindros en contacto sometidos a una fuerza de compresión F entre los dos dientes. La mitad de ancho del contacto podría, por tanto, expresarse como [13]:

$$b = \sqrt{\left(\frac{4(1 - \nu^2)F}{\pi EL} \right) \left(\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \right)} \quad (12)$$

Donde r_1 y r_2 representan la distancia de C_1A y C_2A .

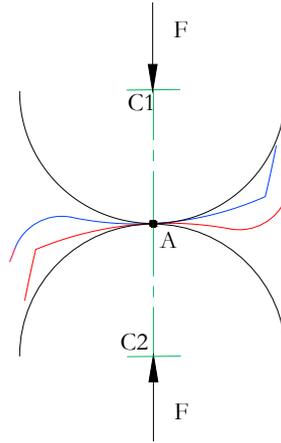


Figura 17: Contacto hertziano entre los dientes. **Fuente:** Autor

La magnitud de la interpretación (δ) la que representa penetración entre los dientes, se puede obtener mediante:

$$\delta = r_1 + r_2 - r_1 \sqrt{1 - \left(\frac{b}{r_1}\right)^2} - r_2 \sqrt{1 - \left(\frac{b}{r_2}\right)^2} \quad (13)$$

Yang y Sun [13] aproximan la raíz cuadrada de la Ecuación 13 por los dos primeros términos de su expansión binomial:

$$\sqrt{1 - \left(\frac{b}{r}\right)^2} \approx 1 - \left(\frac{b^2}{2r^2}\right) \quad (14)$$

Se sustituye la Ecuación 14 en Ecuación 13:

$$\delta = r_1 + r_2 - r_1 \left[1 - \left(\frac{b^2}{2r_1^2}\right)\right] - r_2 \left[1 - \left(\frac{b^2}{2r_2^2}\right)\right] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) b^2 \quad (15)$$

Se sustituye la Ecuación 15 en la Ecuación 12:

$$\delta = \left(\frac{4(1 - \nu^2)F}{\pi EL}\right) \quad (16)$$

Recordando la ley de Hooke una fuerza F , puede ser representada como el producto de su constante elástica (rigidez) y su deformación:

$$F = K_h \delta \quad (17)$$

Por lo antes, mencionada la Ecuación 16 puede ser escrita como:

$$F = K_h \delta = \left(\frac{4(1 - \nu^2)\delta}{\pi EL} \right) \quad (18)$$

Al final se despeja la K_h , la cual es la rigidez por el contacto hertziano, esta tiene un error porcentual 0.5, se modela de forma [13, 34, 39]:

$$K_h = \left(\frac{4(1 - \nu^2)}{\pi EL} \right) \quad (19)$$

Donde:

K_h es la rigidez debido al contacto hertziano.

ν es el coeficiente de Poisson.

E es el módulo de Young.

L es ancho del diente.

2.2.1.3.2. Rigidez debido a la deflexión básica del diente de engranaje

La deformación δ_t causada por la fuerza F se puede calcular con el método de energía potencial, considerando el diente como una viga en voladizo empotrada en la base, donde la base es perfectamente rígida, es decir, no sufrirá deflexión, en la Figura 18 se presenta el diente como viga en voladizo [14, 34, 41].

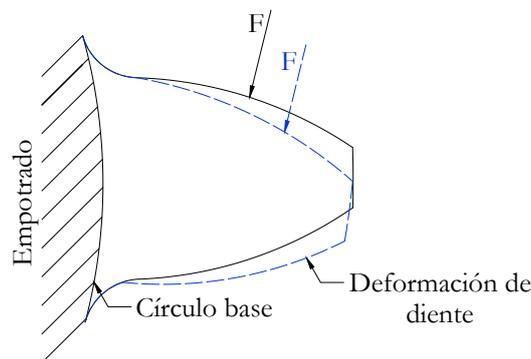


Figura 18: Diente como viga en voladizo. **Fuente:** Autor

El método de energía potencial es ampliamente usado para derivar la deflexión en una viga bajo una carga, comúnmente cuando existe viga bajo la acción de una fuerza F tiene

energía potencial U . La fuerza F se puede representar por descomposición de fuerzas como: momento flector M , fuerza de compresión axial F_a y fuerza de cortante F_b , por lo anterior U se puede expresarse como suma de los potenciales debidos a flexión U_b , a compresión axial U_a , y a la cortadura U_s [41–43].

$$U = U_a + U_b + U_s \quad (20)$$

En la Figura 19 se presenta la fuerza F , sus componentes F_a y F_b y la ubicación de punto de acción.

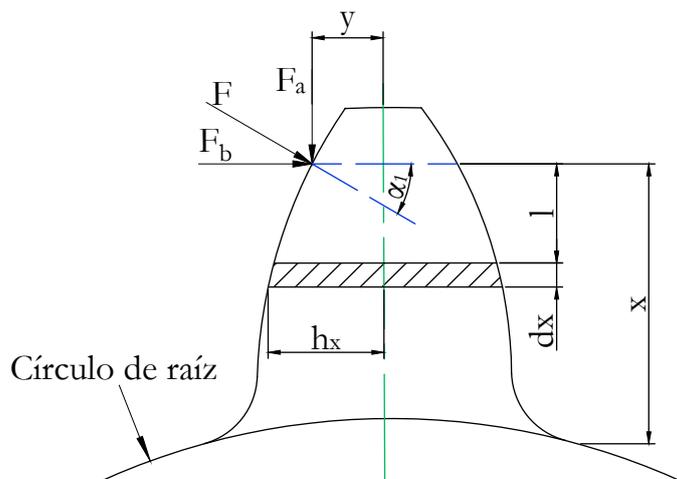


Figura 19: Fuerza en acción y ubicación de punto de contacto. **Fuente:** Autor

Cada una de las componentes de la energía potencial se pueden expresar como [41, 44]:

$$U_b = \int_0^x \frac{M^2}{2EI_x} dx = \frac{F^2}{2K_b} \quad (21)$$

$$U_a = \int_0^x \frac{F_a^2}{2EA_x} dx = \frac{F^2}{2K_a} \quad (22)$$

$$U_s = \int_0^x \frac{1,2F_b^2}{2GA_x} dx = \frac{F^2}{2K_s} \quad (23)$$

Donde: E es el módulo de Young.

G módulo elástico.

I_x es la inercia de la sección diferencial.

A_x es el área de la sección diferencial.

K_b denota la rigidez debido a la flexión.

K_a denota la rigidez debido a la compresión axial.

K_s denota la rigidez debido al cortante.

M es el momento flector provocado por la fuerza F .

F_a es la fuerza de compresión axial.

F_b es la fuerza cortante.

M , F_b y F_a se pueden ser expresadas como [41, 44]:

$$F_b = F \cos(\alpha_1) \quad (24)$$

$$F_a = F \sin(\alpha_1) \quad (25)$$

$$M = F \cos(\alpha_1)l - F \sin(\alpha_1)y \quad (26)$$

Donde:

α_1 es el ángulo de contacto de la fuerza.

l es la distancia del punto de contacto al diferencial.

y es la distancia entre el punto de contacto y la línea media del engranaje.

Se remplazan las Ecuaciones 24, 25 y 26 en las Ecuaciones 21, 22 y 23 [14, 45–47]:

$$\frac{1}{K_b} = \int_0^x \frac{(F \cos(\alpha_1)l - F \sin(\alpha_1)y)^2}{2EI_x} dx \quad (27)$$

$$\frac{1}{K_a} = \int_0^x \frac{\sin(\alpha_1)^2}{2EA_x} dx \quad (28)$$

$$\frac{1}{K_s} = \int_0^x \frac{1,2 \cos(\alpha_1)^2}{2GA_x} dx \quad (29)$$

Los parámetros I_x , A_x , l , y , x y θ_b generalmente son estimados con las siguientes ecuaciones [14, 44]:

$$I_x = \frac{1}{12}(2h_x)^3 L \quad (30)$$

$$A_x = 2h_x L \quad (31)$$

$$l = rb[(\alpha_1 + \theta_b)\sin(\alpha_1) - \cos(\alpha_1)] - r \quad (32)$$

$$y = rb[(\alpha_1 + \theta_b)\cos(\alpha_1) - \text{sen}(\alpha_1)] \quad (33)$$

$$x = rb[(\alpha_1 + \theta_b)\text{sen}(\alpha_1) - \cos(\alpha_1) - \cos(\theta_b)] \quad (34)$$

$$\text{inv}(\alpha_1) = \tan(\alpha_1) - \alpha_1 \quad (35)$$

$$\theta_b = \frac{\pi}{2Z} + \text{inv}(\alpha_1) \quad (36)$$

2.2.1.3.3. Rigidez por deflexión en el filete de raíz

El filete de raíz, también llamado filete de formación, es la sección cóncava del perfil del diente que une la curva del perfil del diente con el círculo de raíz (ver en Figura 20) [21].

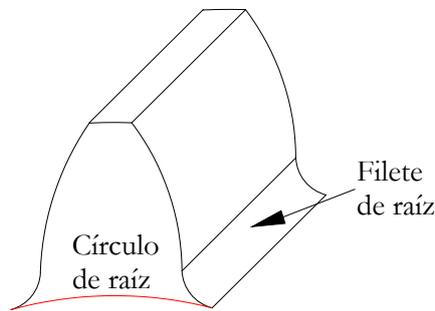


Figura 20: Filete de raíz. **Fuente:** [21]

La deflexión en el filete de raíz se expresa generalmente como [48]:

$$\delta_f = \frac{F \cos^2(\alpha_1)}{LE} \left[L^* \left(\frac{u_f}{s_f} \right)^2 + M^* \left(\frac{u_f}{s_f} \right) + P^*(1 - Q^2 \tan^2(\alpha_1)) \right] \quad (37)$$

Donde:

δ_f es la deflexión debido a la flexión del filete de raíz.

F es la fuerza aplicada al diente.

L es el ancho del diente.

E es el módulo de Young.

u_f es distancia medida entre el círculo de raíz y el punto de acción de la fuerza en la línea media.

α_1 es el ángulo de contacto de la fuerza.

s_f es la longitud de arco del diente proyectado sobre el círculo raíz.

L^* , M^* , P^* y Q^* son parámetros estimados por la Ecuación 38.

Varios autores consideran valores ligeramente diferentes para L^* , M^* , P^* y Q^* [24]. Sainsot [49] propone una ecuación polinómica para el cálculo de los coeficientes de la Ecuación 38.

$$X^*(h_{fi}, \theta_f) = \frac{A_i}{\theta_f^2} + B_i h_{fi}^2 + C_i \frac{h_{fi}}{\theta_f} + D_i \frac{1}{\theta_f} + E_i h_{fi} + F_i \quad (38)$$

Donde:

h_{fi} es la relación radio de raíz y el radio interior.

θ_f es la mitad de ángulo del diente medido en el círculo de raíz.

A_i , B_i , C_i , D_i , E_i y F_i son parámetros estimados con la Tabla 1.

Tabla 1: Valores de los parámetros A_i , B_i , C_i , D_i , E_i y F_i de la Ecuación 38 para determinación de los parámetros L^* , M^* , P^* y Q^* . **Fuente:** [49]

	A_i	B_i	C_i	D_i	E_i	F_i
L^*	-5.574×10^{-5}	-1.9983×10^{-3}	-2.3015×10^{-4}	-4.7702×10^{-3}	0.0271	6.8045
M^*	60.111×10^{-5}	28.100×10^{-3}	-83.431×10^{-4}	-9.9256×10^{-3}	0.1624	0.9086
P^*	-50.952×10^{-5}	185.50×10^{-3}	0.0538×10^{-4}	53.3×10^{-3}	0.2895	0.9236
Q^*	-6.2042×10^{-5}	9.0889×10^{-3}	-4.0964×10^{-4}	7.8297×10^{-3}	-0.1472	0.6904

Sainsot [49] deriva la deflexión en el filete de raíz considerando esfuerzo en círculo de raíz como constante y lineal de manera que el inverso de la rigidez por deflexión en el filete de raíz se expresa como:

$$\frac{1}{K_f} = \frac{\delta_f}{F} = \frac{\cos^2(\alpha_1)}{LE} \left[L^* \left(\frac{u_f}{s_f} \right)^2 + M^* \left(\frac{u_f}{s_f} \right) + P^* (1 - Q^* \tan^2(\alpha_1)) \right] \quad (39)$$

Donde:

K_f es la rigidez debido a la deflexión en filete de raíz de diente.

δ_f es la deflexión debido a la flexión del filete.

F es la fuerza aplicada al diente.

L es el ancho del diente.

E es el módulo de Young.

u_f es distancia medida entre el círculo de raíz y el punto de acción de la fuerza en la línea media.

α_1 es el ángulo de contacto de la fuerza.

s_f es la longitud de arco del diente proyectado sobre el círculo raíz.

L^* , M^* , P^* y Q^* son parámetros estimados por la Ecuación 38.

Los parámetros u_f y s_f se indican en la Figura 21.

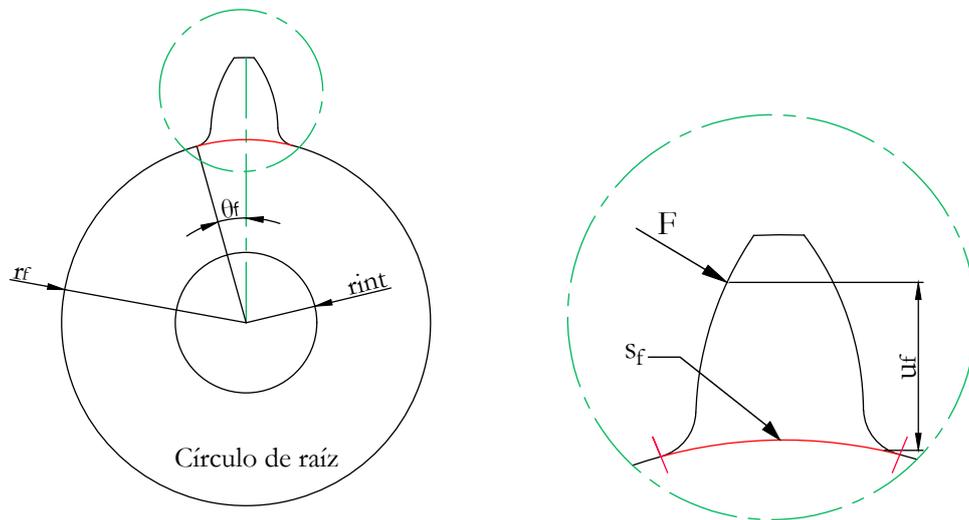


Figura 21: Geometría de deflexión en el filete de raíz. **Fuente:** Autor

Los parámetros u_f , s_f , θ_{fi} y h_{fi} se estiman con las siguientes fórmulas [23, 49]:

$$h_{fi} = \frac{r_f}{r_a} \quad (40)$$

$$s_f = 2\theta_f r_f \quad (41)$$

$$\theta_f = \frac{1}{Z} \left[\frac{\pi}{2} + 2\tan(\alpha_1)(h'_a - r'_c) + \left(\frac{2r'_c}{\cos(\alpha_1)} \right) \right] \quad (42)$$

$$r'_c = \frac{0,2}{1 - \text{sen}(\alpha_1)} \quad (43)$$

Donde:

r_f es el radio de raíz.

r_a es el radio exterior.

Z es el número de dientes

r'_c es el radio adimensional de la herramienta.

2.2.1.3.4. Coeficiente rigidez variante en el tiempo

Por su naturaleza, los engranajes tienen un número cambiante de pares de dientes en contacto (ver en sección 2.1.3), por lo antes expuesto no se puede considerar a un coeficiente rigidez constante en el tiempo, por lo cual el coeficiente de rigidez variante en el tiempo (TVMS) se considera como una función periódica con periodo t_m como se presenta en la Figura 22 [50, 51].

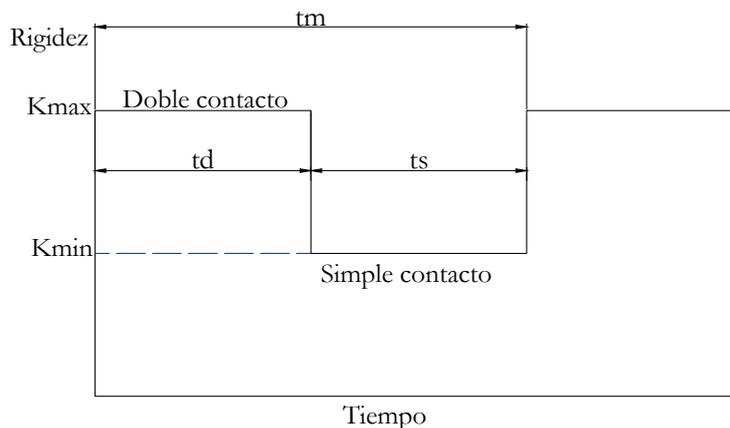


Figura 22: Rigidez variante en el tiempo. **Fuente:** Autor

Una buena aproximación a la función $K(t)$ [39, 50, 52]:

$$K(t) = \begin{cases} K_{min} & nt_m \leq t \leq (n\varepsilon_\alpha - 1)t_m \\ K_{max} & (n\varepsilon_\alpha - 1)t_m \leq t \leq nt_m \end{cases} \quad (44)$$

Donde:

$K(t)$ es el coeficiente de rigidez variante en el tiempo.

K_{min} denota la rigidez en simple contacto.

K_{max} denota la rigidez en doble contacto.

t_m es el tiempo total de contacto de un par de dientes.

ε_α es la relación de contacto radial.

n es el número de pares, que han completado su tiempo de contacto t_m .

Donde K_{min} y K_{max} se pueden estimar de la siguiente forma [9, 39, 46]:

$$K_{min} = \frac{1}{\frac{1}{K_h} + \frac{1}{K_{a1}} + \frac{1}{K_{a2}} + \frac{1}{K_{b1}} + \frac{1}{K_{b2}} + \frac{1}{K_{f1}} + \frac{1}{K_{f2}} + \frac{1}{K_{s1}} + \frac{1}{K_{s2}}} \quad (45)$$

$$K_{max} = 2K_{min} \quad (46)$$

Donde:

K_h es la rigidez por contacto hertziano.

K_{a1} , K_{a2} denotan la rigidez debido a la compresión axial de los engranajes de entrada y salida respectivamente.

K_{b1} , K_{b2} denotan la rigidez debido a la flexión de los engranajes de entrada y salida respectivamente.

K_{s1} , K_{s2} denotan la rigidez debido al esfuerzo cortante de los engranajes de entrada y salida respectivamente.

K_{f1} , K_{f2} denotan la rigidez debido a la deflexión en el filete del diente de los engranajes de entrada y salida respectivamente.

2.3. Coeficiente de amortiguamiento del par de engranajes

La capacidad de amortiguamiento de un material se define como la histéresis interna, la cual es la cualidad de los materiales que produce disipación interna de energía en un ciclo de deformación. Cuando dos cuerpos elásticos impactan entre sí, se restaura la mayor parte de la energía de deformación elástica, pero una fracción de la cual se disipará en forma de calor debido a la vibración aleatoria de las moléculas del cuerpo. Esta pérdida de energía puede considerarse como un efecto amortiguador durante el impacto. Generalmente, el coeficiente de amortiguamiento está representado por [53, 54]:

$$C_s = 2\zeta\sqrt{Km_e} \quad (47)$$

Donde:

C_s es el coeficiente de amortiguamiento.

ζ es la razón de amortiguamiento.

K es la rigidez.

m_e es la masa media.

El coeficiente de amortiguamiento de dos engranajes en contacto debido al impacto entre los dientes puede ser representado por [53, 55]:

$$C(t) = 2\zeta_g \sqrt{K(t)m_{eg}} \quad (48)$$

Donde:

$C(t)$ es el coeficiente de amortiguamiento variante en el tiempo del par de engranajes.

ζ_g es la razón de amortiguamiento de material.

$K(t)$ es el coeficiente de rigidez variante en el tiempo del par de engranajes.

m_{eg} masa media equivalente entre los dos engranajes.

m_{eg} se expresa de la siguiente manera [15, 56, 57]:

$$\frac{1}{m_{eg}} = \frac{r_{b1}^2}{J_1} + \frac{r_{b2}^2}{J_2} \quad (49)$$

$$m_{eg} = \frac{r_{b1}^2 r_{b2}^2 J_1 J_2}{r_{b1}^2 J_1 + r_{b2}^2 J_2} \quad (50)$$

Donde

J_1, J_2 son los momentos de inercias del engranaje de entrada y salida respectivamente.

r_{b1}, r_{b2} denotan radios base del engranaje de entrada y salida respectivamente.

Debido a esto se tiene la siguiente expresión para el coeficiente de amortiguamiento [15, 53, 56]:

$$C(t) = 2\zeta_g \sqrt{\frac{K(t)r_{b1}^2 r_{b2}^2 J_1 J_2}{r_{b1}^2 J_1 + r_{b2}^2 J_2}} \quad (51)$$

Donde ζ_g , según Lin y Liou [15], para engranajes de acero puede estar entre 0.03 y 0.17. Generalmente se usa el promedio siendo 0.10.

2.4. Modelos dinámicos de cajas de engranajes

El modelado dinámico utiliza leyes físicas, tales como la conservación de la energía, el equilibrio y las leyes del movimiento de Newton para simular las respuestas del sistema de caja de engranajes [1]. Según Du [58], en la mayoría de entornos de la industria existe el problema de vibración y ruido de los engranajes, por ello se han desarrollado varios modelos dinámicos para el estudio del control de vibraciones y ruido. Generalmente se utilizan diferentes modelos para analizar los siguientes problemas: esfuerzos, error de transmisión, ruido irradiado, cargas y otras partes de maquinaria especialmente rodamientos, regiones de estabilidad, frecuencias naturales, confiabilidad y vida útil por fatiga. Del mismo modo, diferentes modelos pueden tener diferentes supuestos básicos y simplificaciones con el fin de reducir la complejidad proceso a un problema matemático manejable [12, 58].

2.4.1. Clasificación de modelos dinámicos de caja de engranajes

Özgüven y Houser [12] afirman que la mayoría de modelos matemáticos de cajas de engranajes propuestos tienen variaciones considerables por las condiciones asumidas en el desarrollo del modelo no solo por los efectos incluidos, y añaden que es complicado agrupar los modelos matemáticos de dinámica de engranajes. Por ello, plantearon la siguiente clasificación: modelos de factores dinámicos simples, modelos de diente flexible, modelos dinámicos de engranajes, modelos para la dinámica del rotor y modelos para vibración torsional. Mientras que Wang y McFadden [59] reorganizan la clasificación antes propuesta considerando solo su relevancia en tres clases:

- **Modelos de diente flexible:** asumen que el diente es el único elemento que almacena energía potencial, es decir, es un elemento flexible y tiene una rigidez (K_e). Mientras que los otros elementos como los ejes y rodamientos, son totalmente rígidos. Este sistema se aproxima a un sistema masa-resorte en cuanto a grados de libertad (DOF) [58–60].
- **Modelos dinámicos de engranajes:** consideran todas las rigideces de los otros elementos, además del diente. Tienen especial énfasis en la flexibilidad de los ejes y flexibilidad lateral de los rodamientos a lo largo de una línea de acción [58–60]. Los modelos de dinámica de engranajes se dividen principalmente en dos tipos: modelos de torsión, modelos de traslación y torsión sus características se presentan en la Tabla 2.

Tabla 2: Características de modelos de torsión y modelos de traslación y torsión. **Fuente:** Autor

Tipo de modelo	Características
Modelos de torsión	<ul style="list-style-type: none"> • Considera solos movimientos rotacionales, desconsidera los movimientos de traslación. • Generalmente consideran la rotación en un solo plano.
Modelos de traslación y torsión	<ul style="list-style-type: none"> • Considera los movimientos de rotación y traslación. • Pueden considerar uno o varios ejes de traslación. • Pueden considerar uno o varios planos de rotación.

- **Modelos de caja completa:** son aquellos que incluyen los soportes de ejes y rodamientos al estudio, también conocido como carcasa. Este tipo de modelos se pueden resolver tanto analíticamente o mediante el método de elementos finitos, para los métodos analíticos se realiza un análisis dinámico de sistema, la presión del método depende de los grados de libertad impuestos, mientras el método de elementos finitos es un modelo flexible tanto para engranajes sanos como engranajes con daño, el método de elementos finitos es demasiado sensible a la densidad de malla y elemento finito seleccionado [58–60].

Du [58] al igual que Wang y McFadden [59] considera tres clases principales de modelos dinámicos de caja de engranaje y clasifica como se presenta en la Figura 23.

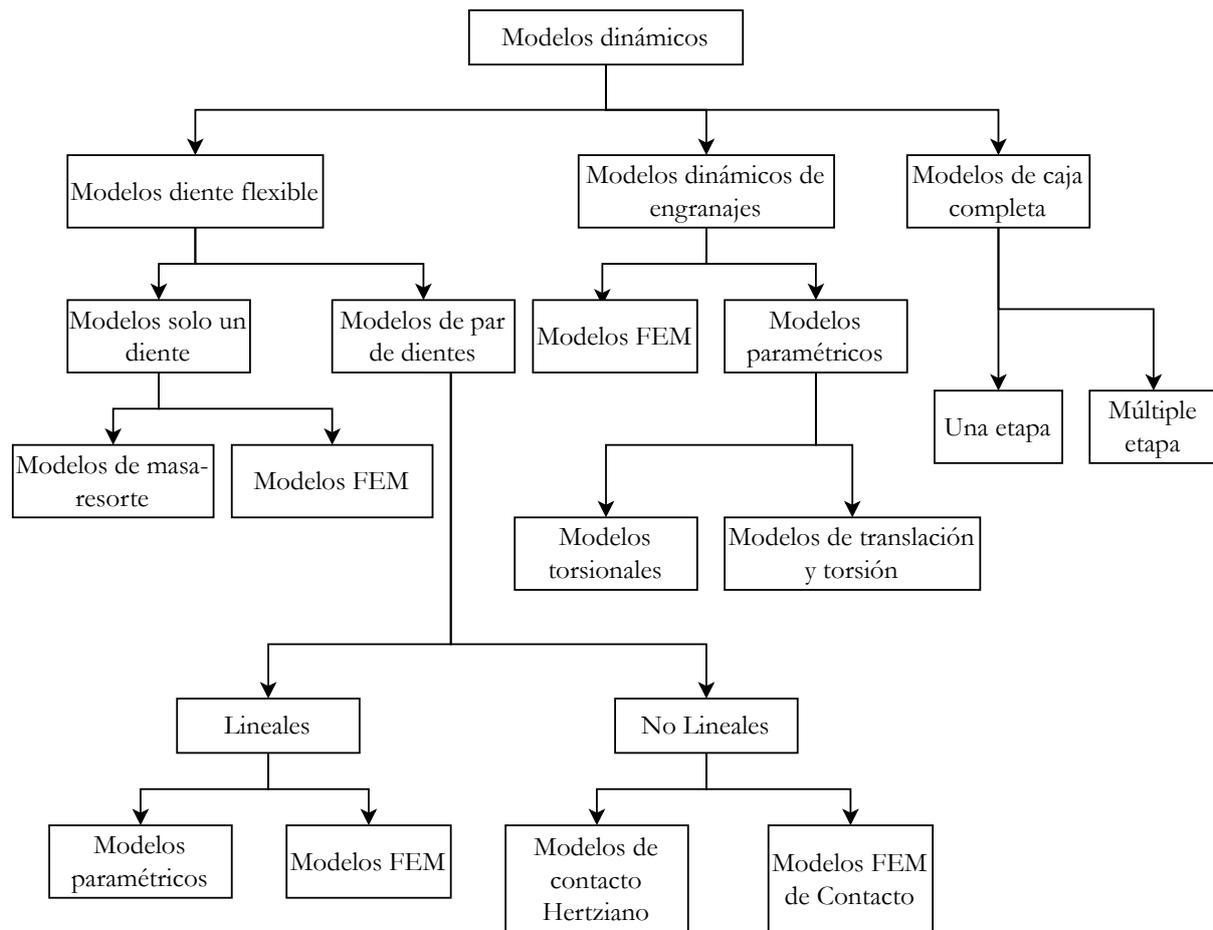
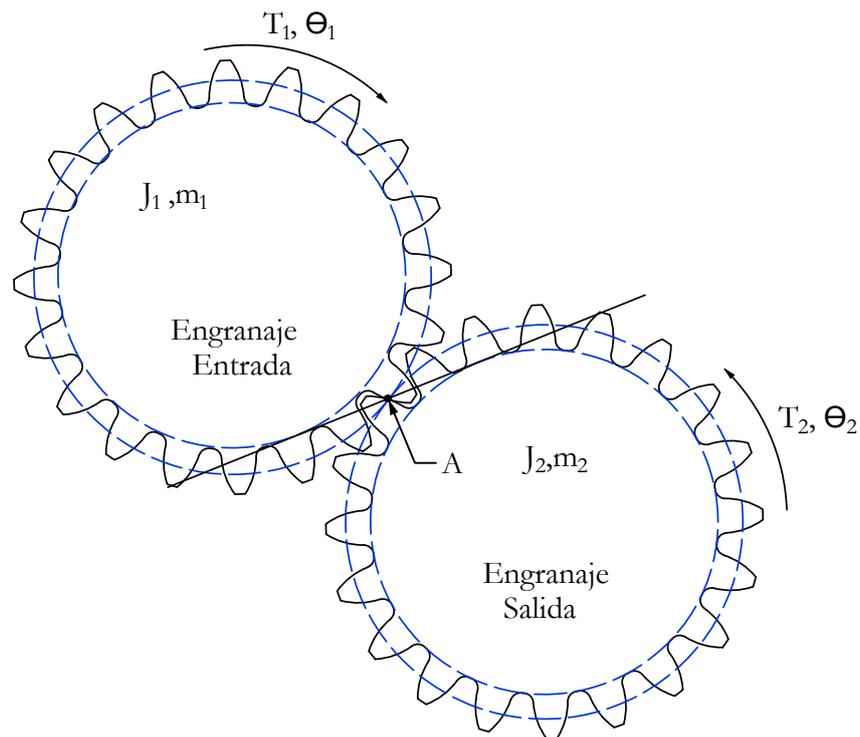


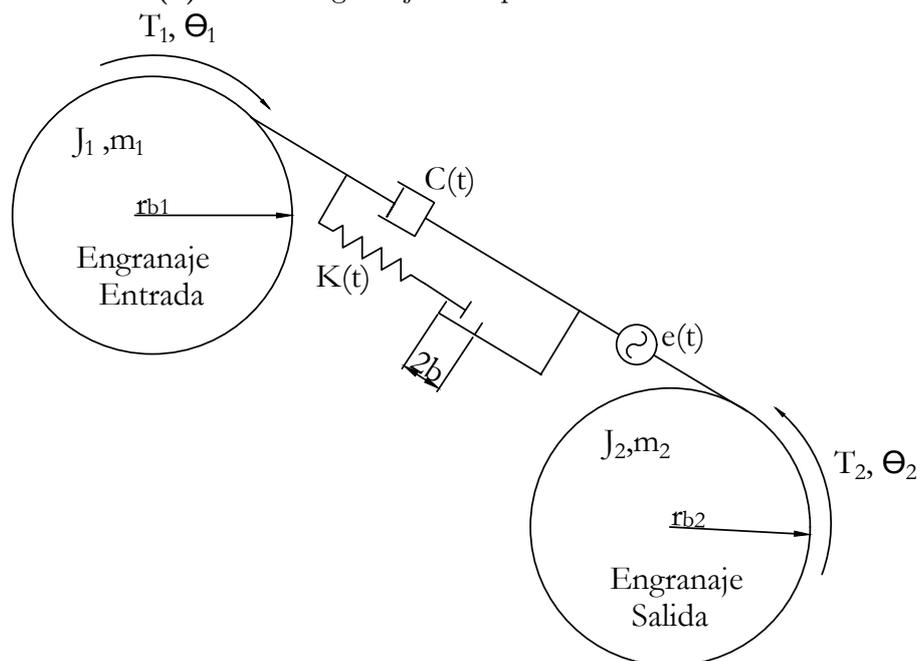
Figura 23: Clasificación de los modelos. **Fuente:** [58]

2.4.2. Modelo de dos grados de libertad

Para modelar el comportamiento dinámico de un par de engranajes de dientes rectos, se deben considerar algunas características físicas, tales como: variación de la rigidez en el tiempo, error de transmisión y la posibilidad de pérdida de contacto por el juego entre los engranajes, por otra parte, se descuida la condición de los rodamientos y ejes, así como el efecto por errores de fabricación y desalineaciones [61]. En la Figura 24a se presenta un par de engranajes en contacto en un punto A, en la Figura 24b se presenta el par de engranajes de la Figura 24a como un sistema de dos grados de libertad representado en parámetros concentrados.



(a) Par de engranajes con punto de contacto A.



(b) Modelo de dos grados de libertad.

Figura 24: Modelo de dos grados de libertad. **Fuente:** [24]

Las ecuaciones del movimiento para el sistema de la Figura 24b se modelan como [24, 62]:

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\theta}_1 + rb_1 C(t) (rb_1 \dot{\theta}_1 - rb_2 \dot{\theta}_2) + rb_1 K(t) g(x(t)) = T_1 \\ J_2 \ddot{\theta}_2 - rb_2 C(t) (rb_1 \dot{\theta}_1 - rb_2 \dot{\theta}_2) - rb_2 K(t) g(x(t)) = -T_2 \end{cases} \quad (52)$$

Donde:

T_1 es el par de entrada.

T_2 es el par de carga.

$K(t)$ es el coeficiente de rigidez.

$C(t)$ el coeficiente de amortiguamiento.

b es el juego entre engranajes.

$x(t)$ es el error dinámico de transmisión.

$e(t)$ es el error de estático de transmisión variante en el tiempo.

rb_1, rb_2 son los radios base de los engranajes de entrada y salida respectivamente.

m_1, m_2 son las masas de los engranajes de entrada y salida respectivamente.

J_1 y J_2 son los momentos de inercia de masa de los engranajes de entrada y salida respectivamente.

θ_1 y θ_2 son las posiciones angulares de los engranajes de entrada y salida.

El error dinámico de transmisión $x(t)$ es igual a $x(t) = rb_1\theta_1 - rb_2\theta_2 + e(t)$, $g(x(t))$ es la función de pérdida de contacto por juego entre los engranajes, se modela como [24,63,64]:

$$g(x(t)) \begin{cases} x(t) - b & \text{cuando } x(t) > b \\ 0 & \text{cuando } -b < x(t) < b \\ x(t) + b & \text{cuando } x(t) < -b \end{cases} \quad (53)$$

El correcto modelamiento de la pérdida de contacto tiene importancia, como demostraron Kahraman y Blankenship [16], que el inevitable cambio de número de pares de dientes en contacto y el juego deben ser incluidos en el análisis para obtener una mayor presión del comportamiento dinámico del sistema.

2.5. Adquisición de datos

Se realiza en un banco experimental bajo condiciones reales controladas, donde se pueden registrar datos de señales como: velocidad de entrada y salida, vibración, tensión, corriente y acústica. Ortega [65] propone levantar dos tipos de bases de datos que comprendan una

configuración del sistema distinta: (1) motor conectado a una carga constante y (2) motor con carga debido al acoplamiento de la caja de engranajes con fallo.

2.5.1. Banco de prueba de la Universidad Politécnica Salesiana

El banco de vibraciones de la Universidad Politécnica Salesiana, sede Cuenca, posee el equipamiento necesario para simular desperfectos en la maquinaria rotativa que ocurren en la industria, tales como: desalineación, desbalanceo y combinaciones de fallos de rodamientos y engranajes [66]. Como se presenta en la Figura 25, el banco de pruebas tiene cinco principales unidades:

- a. Unidad motriz.
- b. Unidad de mando.
- c. Unidad de adquisición de datos.
- d. Unidad de carga.
- e. Unidad de sistemas rotativos.

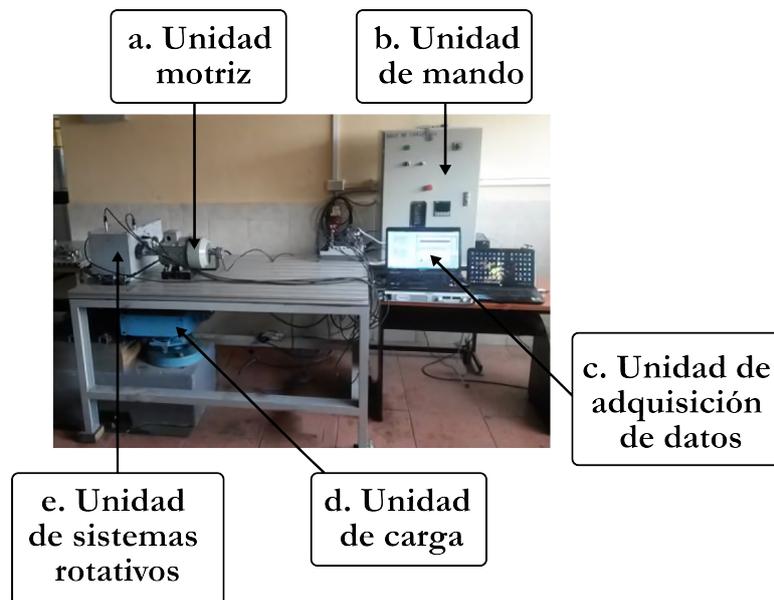


Figura 25: Banco de Pruebas. **Fuente:** [66]

2.5.2. Plan experimental

Para la adquisición de la base de datos en el banco de pruebas formado: un motor, una caja de engranajes de una fase, una polea trapezoidal y freno magnético. Como elementos de medición tacómetro, cuatro acelerómetros, dos sensores de emisión acústica, seis sensores

del voltaje, un encoder láser, dos micrófonos de condensador que se comunican a un computador por medio de un chasis de adquisición de datos. La base de datos fue levantada con el motor cuyas características se especifican en la Tabla 3, en condición de no fallo y en condiciones de operación asociadas con la aplicación de pares de carga constantes, denotadas L1, L2 y L3 [65].

Tabla 3: Características del motor del banco de prueba. **Fuente:** [65]

Características del motor	
Marca:	Siemens
Denominación:	11A7 096-6YA60
Tipo de motor:	Trifásico
Velocidad nominal:	1110 RPM
Potencia nominal:	2 Hp
Conexiones:	YY / Y

En la Tabla 4, se presenta las especificaciones del equipo mecánico del banco de pruebas.

Tabla 4: Especificaciones del equipo mecánico del banco de pruebas. **Fuente:** [65]

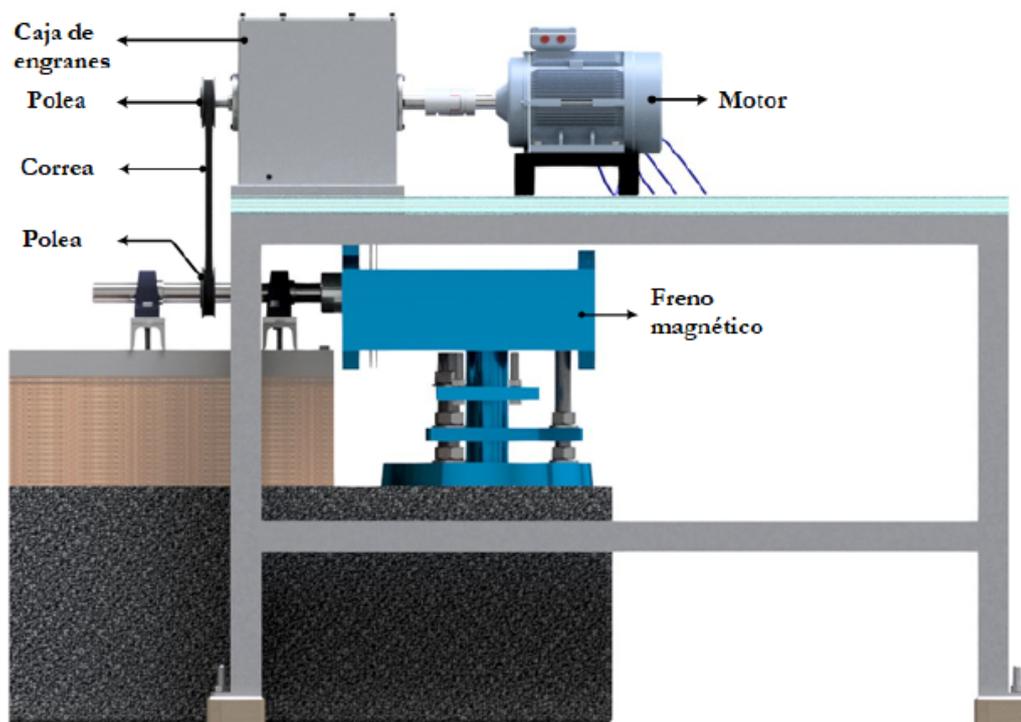
Especificación del equipo mecánico	
Caja de engranes:	Una etapa con engranajes rectos
Rodamientos:	NTN 6005 Z2C3
Tipo de correa:	Correa trapezoidal
Tipo de lubricación:	Baño de aceite
Aceite:	Gulf HARMONY AW ISO VG 68
Cantidad de aceite:	1.8 gal

En la Tabla 5, se presenta las características de la caja de engranajes del banco de pruebas.

Tabla 5: Características de la caja de engranajes del banco de pruebas. **Fuente:** [65]

Características de la caja de engranajes	
Tipo de engranajes:	Rectos
Número de etapas:	1
Modulo:	2.25 mm
Ángulo de presión:	20°
Ancho del diente:	20.7 mm
Número de dientes Z1/Z2:	32/48

La distribución del sistema electromecánico del banco de pruebas se presenta en la Figura 26 [65].

**Figura 26:** Disposición de sistema electromecánico. **Fuente:** [65]

En la Figura 27, se presenta la ubicación de los sensores en el sistema, con su respectiva codificación. Los acelerómetros en este estudio son denotados como A1, A2, A3 y A4.

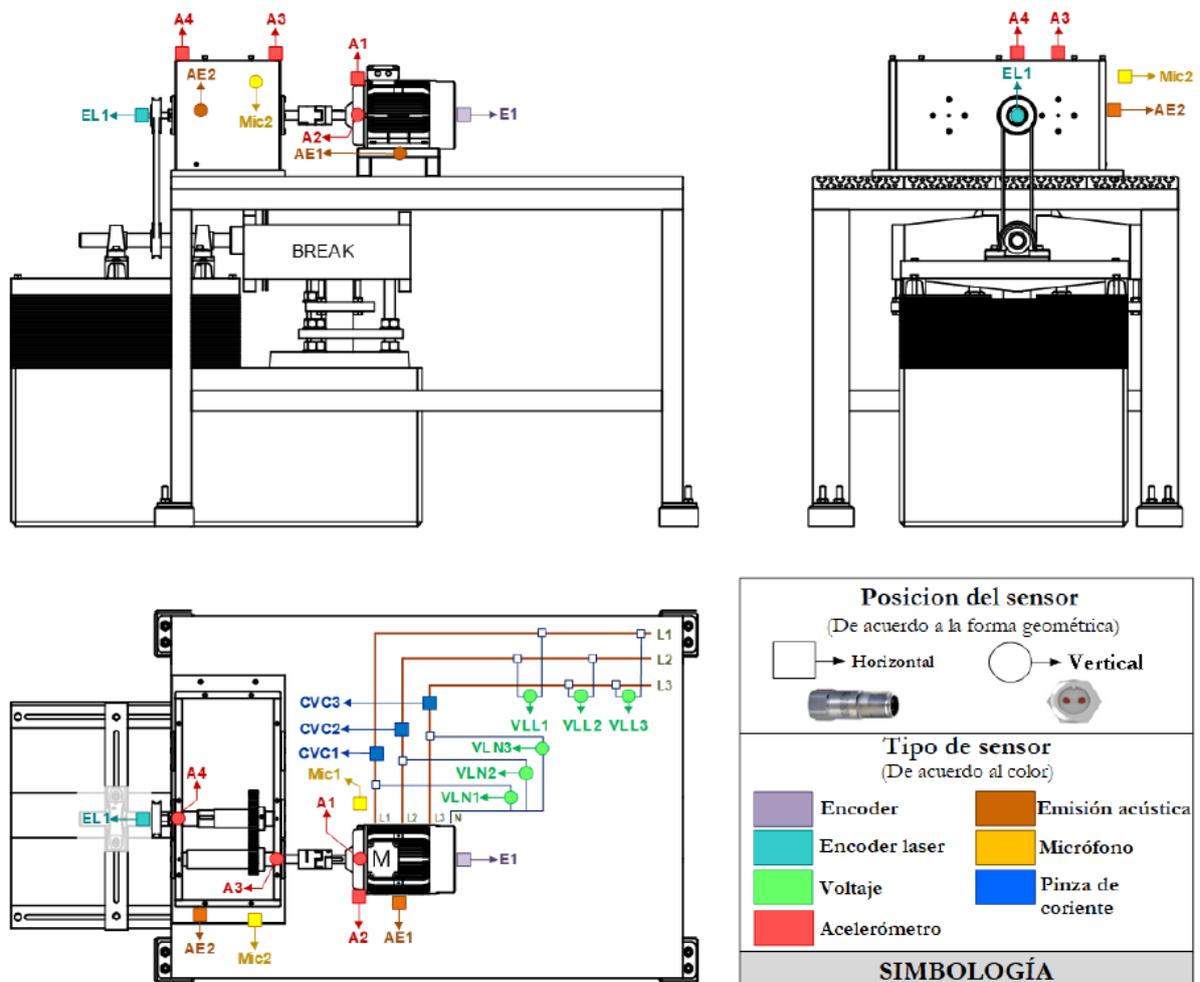


Figura 27: Disposición de los sensores en el sistema electromecánico. Fuente: [65]

En la Figura 28, se presenta la configuración de los sensores y módulos para la adquisición de la base de datos.

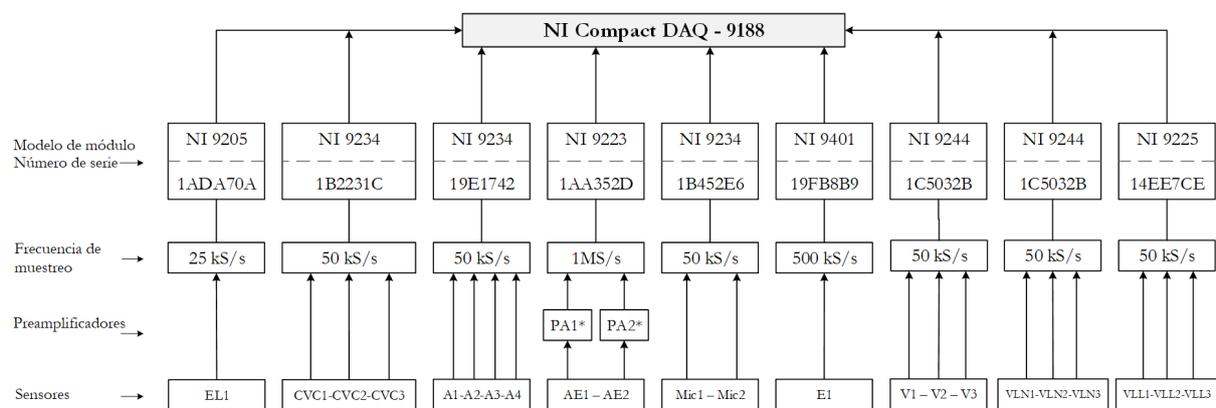


Figura 28: Configuración de los sensores y módulos para la adquisición de la base de datos. Fuente: [65]

2.6. Análisis en el dominio del tiempo y frecuencia de una serie temporal

El análisis de una serie temporal es una de las herramientas más importantes para la identificación de fallos en la maquinaria, en este estudio se realizan dos tipos: el dominio del tiempo y el dominio de la frecuencia. El análisis del dominio de la frecuencia es más atractivo debido a que proporciona información más detallada de la maquinaria, mientras que el análisis en dominio de tiempo proporciona información de tipo cualitativa sobre la condición de la maquinaria [67, 68].

2.6.1. Análisis en el dominio del tiempo de una serie temporal

El análisis en el dominio del tiempo analiza la forma de onda para la obtención de la información de la maquinaria, mediante la inspección visual de la forma de onda se puede diferenciar el origen de las distorsiones, ya sea mecánico o de otro tipo. Además, existen otros indicadores matemáticos y estadísticos como: media, varianza, desviación estándar, raíz cuadrática media, curtosis, asimetría y factor de cresta [69, 70]. En la Figura 29, se presenta una serie temporal de vibración sin fallo.

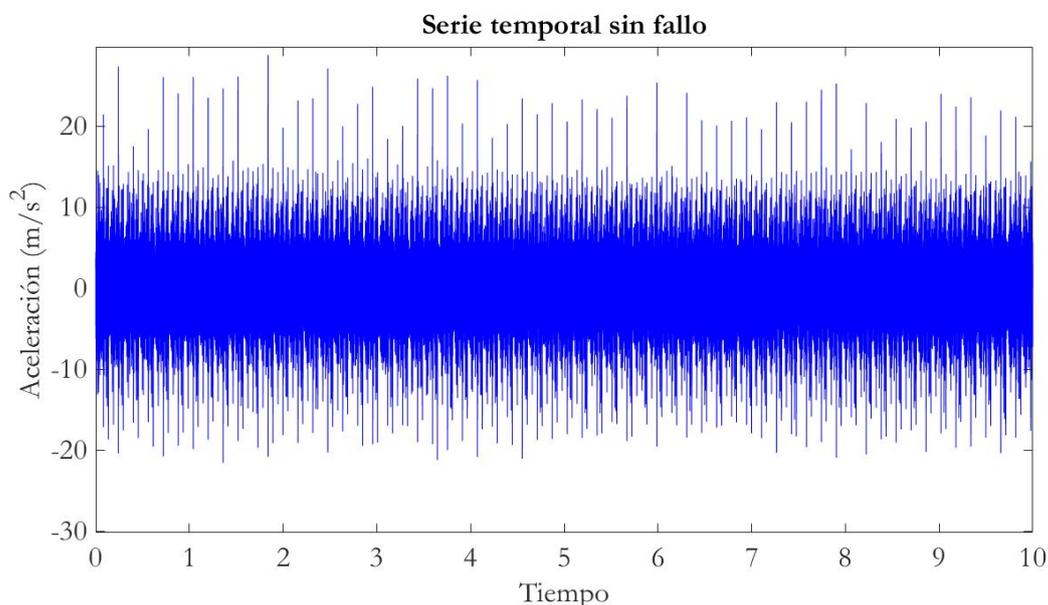


Figura 29: Serie temporal sin fallo. **Fuente:** Autor

En la Figura 30, se presenta una serie temporal de vibración con fallo.

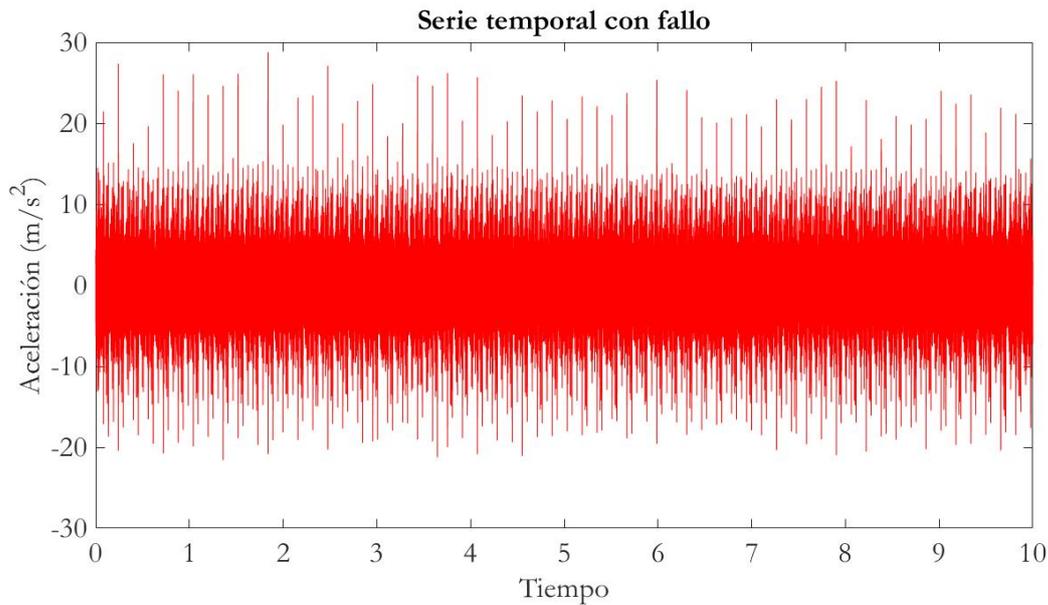


Figura 30: Serie temporal con fallo. **Fuente:** Autor

Como se observa en las Figuras 29 y 30, existe una variación de la amplitud de la aceleración de una señal sin fallo y una señal con fallo, lo que se considera un indicador de fallo en un análisis por forma de onda.

2.6.2. Análisis en el dominio de la frecuencia de una serie temporal

Radica en realizar el análisis de la serie temporal como una función de frecuencia. La serie temporal se transforma al dominio de frecuencia por medio de la aplicación de una Transformada rápida de Fourier FFT, también se pueden aplicar otras técnicas tales como espectro de potencia y espectro de la envolvente [69, 71].

2.6.2.1. Transformada rápida de Fourier

La Transformada de Fourier permite representar una serie temporal en el dominio de la frecuencia. Para señales discretas se aplica la Transformada discreta de Fourier (DFT), la cual se calcula mediante la Ecuación 54 [72, 73].

$$X(k) = \sum_{j=1}^n x(n)W_N^{(nk)} \quad (54)$$

El número de muestras de una señal discreta en el dominio del tiempo está representado por la letra N y en el dominio de frecuencia $\frac{N}{2}$. La escala de frecuencia generalmente es una fracción de la frecuencia de muestreo, como se presenta en la Figura 31 [69, 74].

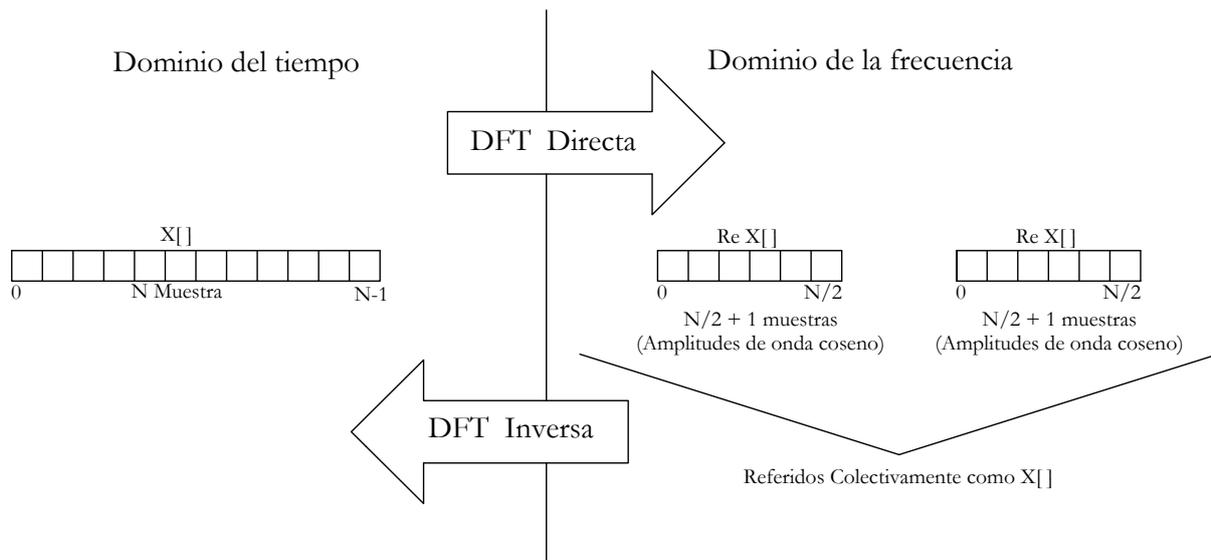


Figura 31: Transformada discreta de Fourier. **Fuente:** [74]

El cálculo de la DFT por su definición conlleva un alto coste computacional, por ello se desarrolló un algoritmo para determinarlo llamado Transformada rápida de Fourier (FFT), el cual permite diversas aplicaciones espectrales. Una de ellas el análisis de espectro de amplitud o espectro de la FFT, el cual se obtiene de la magnitud de los coeficientes de la Ecuación 55 y su respectiva frecuencia con espaciado, como se presenta en la Ecuación 56, donde N representa el número de muestras y F_s es la frecuencia de muestreo [72, 73].

$$A_k = \frac{1}{N} \|X(k)\| = \frac{1}{N} \sqrt{(\text{Real}X(k))^2 + (\text{Imag}X(k))^2}. \quad (55)$$

$$\Delta f = \frac{F_s}{N}. \quad (56)$$

En la Figura 32 se presenta un espectro de la FFT de una serie temporal sin fallo.

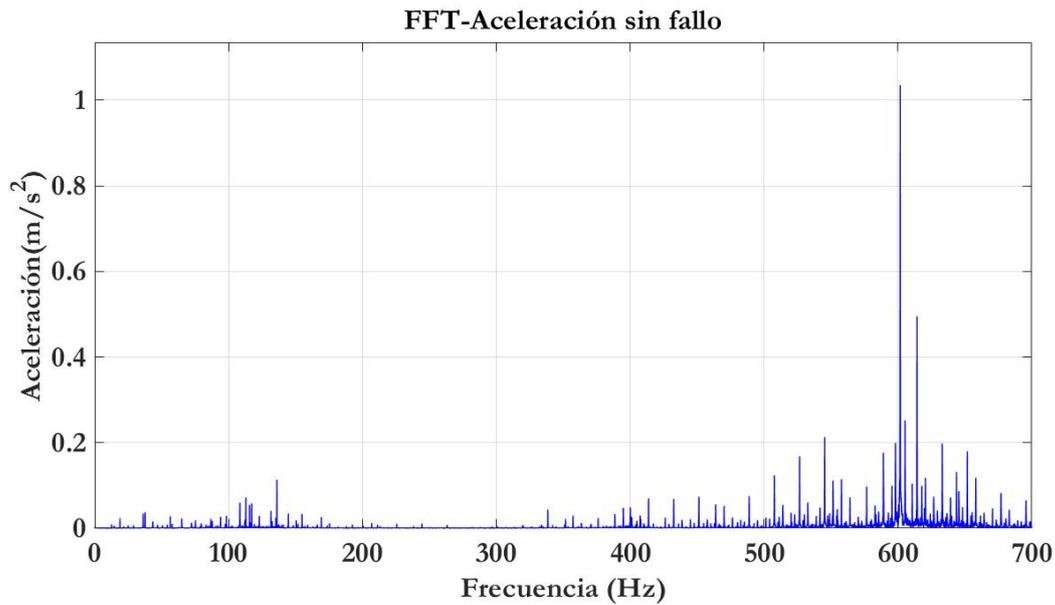


Figura 32: Espectro de la FFT sin fallo. **Fuente:** Autor

En la Figura 33 se presenta un espectro de la FFT de una serie temporal con fallo.

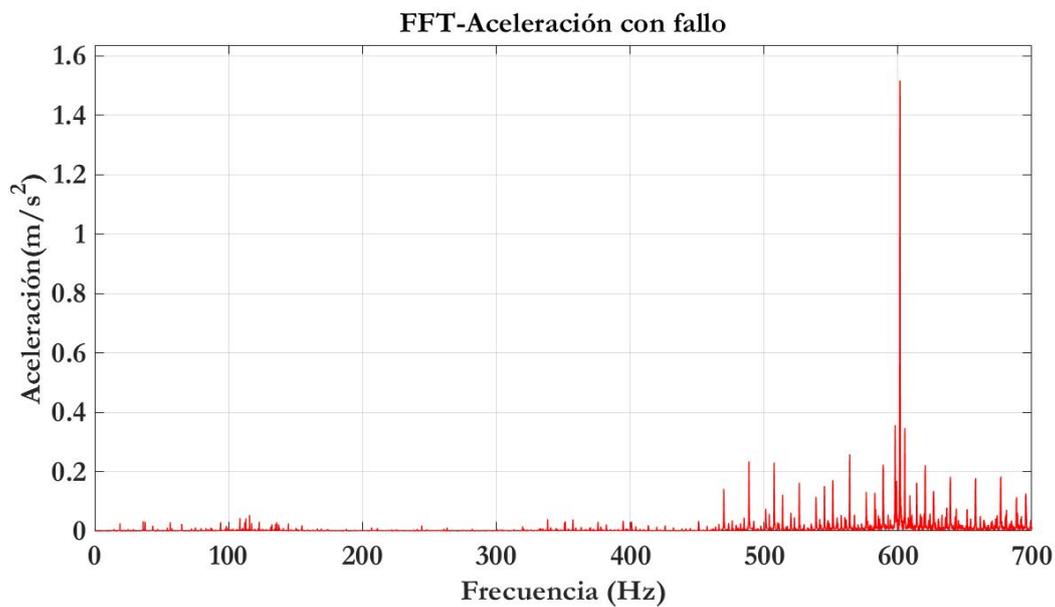


Figura 33: Espectro de la FFT con fallo. **Fuente:** Autor

En las Figuras 32 y 33 se observa un cambio de las amplitudes de aceleración entre el espectro de la FFT de la señal sin fallo y señal con fallo, dado que un engranaje con fallo genera mayor vibración, además de una variación de la frecuencia donde se encuentran ubicados los armónicos del espectro de la FFT.

2.6.2.2. Espectro de la envolvente

El análisis del espectro de la envolvente es una técnica usada para el estudio de la amplitud de una señal modulada, las señales se modulan debido a cambios periódicos de la fuerza. La envolvente de la señal modulada incorpora la información de las bajas frecuencias. La demodulación de la señal se puede realizar por diferentes técnicas tales como: transformada de Hilbert, transformada de Fourier de tiempo corto, etc. La transformada de Hilbert es un desfasador de 90° , cuya expresión matemática es [75]:

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi t} * x(t) \quad (57)$$

Donde:

$\hat{x}(t)$ es la transformada de Hilbert de la señal.

$x(t)$ es la señal original.

t es el tiempo.

La transformada de Hilbert usa una forma de señal analítica de tipo compleja. Una señal analítica es una señal de tiempo compleja, cuya parte real es la señal original $x(t)$ y su parte imaginaria es la transformada de Hilbert de la señal original $\hat{x}(t)$. La señal analítica se define como [75]:

$$a_x(t) = x(t) + j\hat{x}(t) \quad (58)$$

La amplitud de la señal analítica $A_x(t)$ es:

$$A_x(t) = \sqrt{x^2(t) + \hat{x}^2(t)} \quad (59)$$

El espectro de la envolvente se puede definir como la FFT de amplitud de la señal analítica obtenida con la transformada de Hilbert [75, 76], con su respectivo índice de frecuencia, que se presenta en la siguiente ecuación, donde N representa el número de muestras y F_s es la frecuencia de muestreo:

$$\Delta f = \frac{F_s}{N} \quad (60)$$

En la Figura 34 se presenta un espectro de la envolvente de una serie temporal sin fallo.

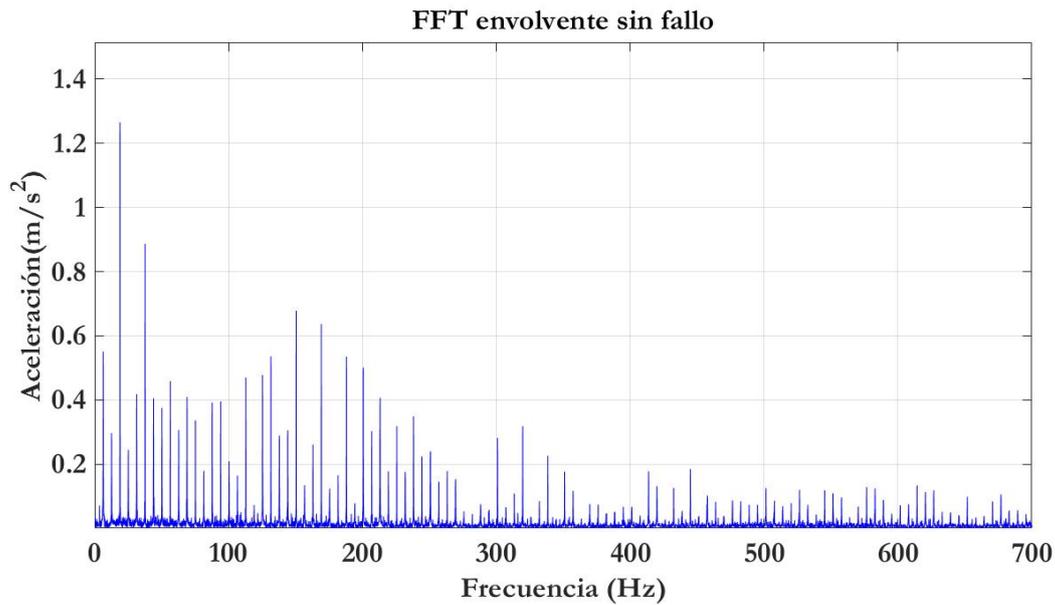


Figura 34: Espectro de la envoltente sin fallo. **Fuente:** Autor

En la Figura 35 se presenta un espectro de la envoltente de una serie temporal con fallo.

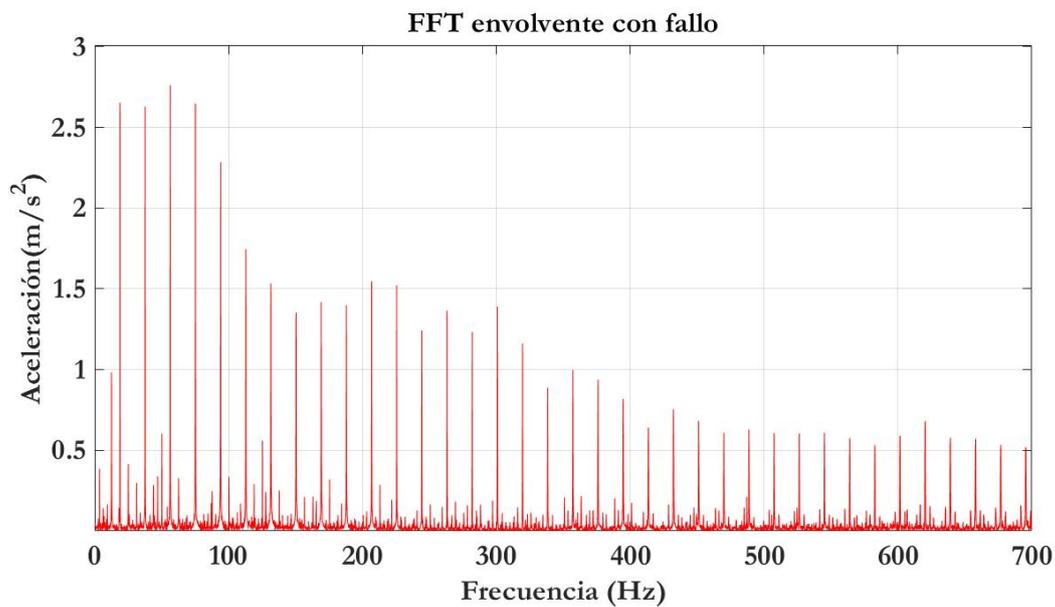


Figura 35: Espectro de la envoltente con fallo. **Fuente:** Autor

En las Figuras 34 y 35 se observa un cambio de amplitudes de aceleración entre el espectro de la envoltente de la señal sin fallo y señal con fallo, además, los armónicos se mantienen con mayor amplitud a lo largo de la frecuencia en el espectro de la envoltente de la señal con fallo.

2.6.2.3. Espectro de Potencia

El espectro de potencia se define como la Transformada de Fourier de la autocorrelación. En notación continua $PS(f)$ y discreta $PS(m)$, la ecuación del espectro de potencia es [77]:

$$PS(f) = \frac{1}{T} \int_0^T r_{xx}(t) e^{-j2\pi m f_1 t} dt \quad (61)$$

$$PS(m) = \sum_{n=1}^N r_{xx}[n] e^{\frac{-j2\pi mn}{N}} \quad (62)$$

donde $r_{xx}(t)$ y $r_{xx}[n]$ son las funciones de autocorrelación. La función de autocorrelación tiene simetría uniforme, los términos sinusoidales de la serie de Fourier son todos cero, y las dos ecuaciones 63 y 64, se pueden simplificar solo incluir a los términos de coseno [77]:

$$PS(f) = \frac{1}{T} \int_0^T r_{xx}(t) \cos(-j2\pi m f_1 t) dt \quad (63)$$

$$PS(m) = \sum_{n=1}^N r_{xx}[n] \cos\left(\frac{-j2\pi mn}{N}\right) \quad (64)$$

Otro método más popular para evaluar el espectro de potencia es el enfoque directo. El enfoque directo está motivado por el hecho de que la energía contenida en una señal analógica $x(t)$, está relacionada con la magnitud de la señal al cuadrado integrada en el tiempo [77]:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad (65)$$

Mediante una extensión de un teorema atribuido a Parseval se puede demostrar que [77]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \quad (66)$$

Por lo tanto $|X(f)|^2$ es igual a la función densidad de la energía. En enfoque directo el espectro de potencia es igual al cuadrado de la transformada de Fourier de la serie temporal de interés [77].

$$PS(f) = |X(f)|^2 \quad (67)$$

Donde:

$PS(f)$ es el espectro de potencia

$X(f)$ es la transformada de Fourier de la serie temporal.

En la Figura 36 se presenta un espectro de potencia de una serie temporal sin fallo.

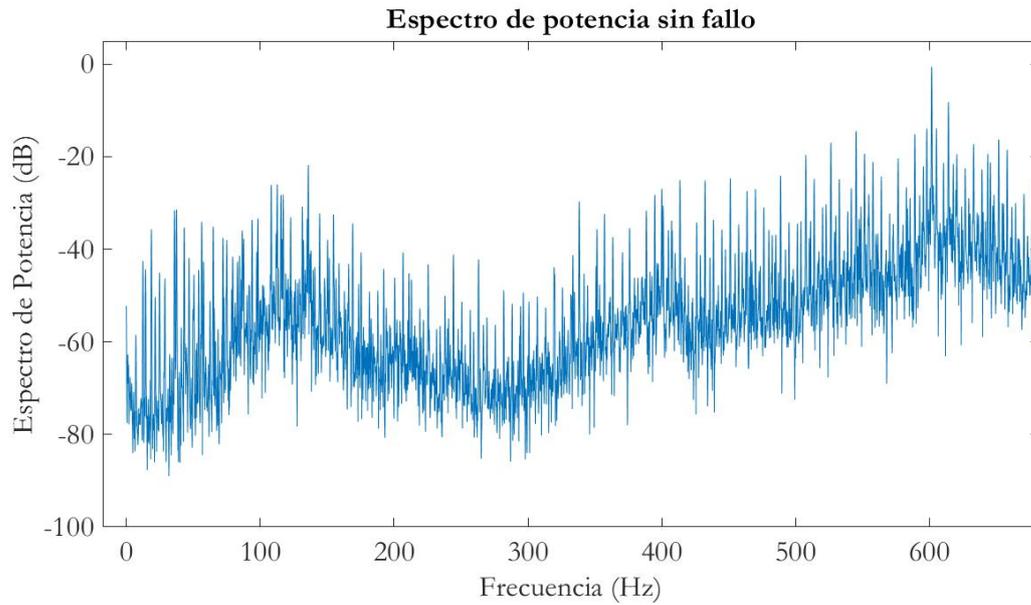


Figura 36: Espectro de potencia sin fallo. **Fuente:** Autor

En la Figura 37 se presenta un espectro de potencia de una serie temporal con fallo.

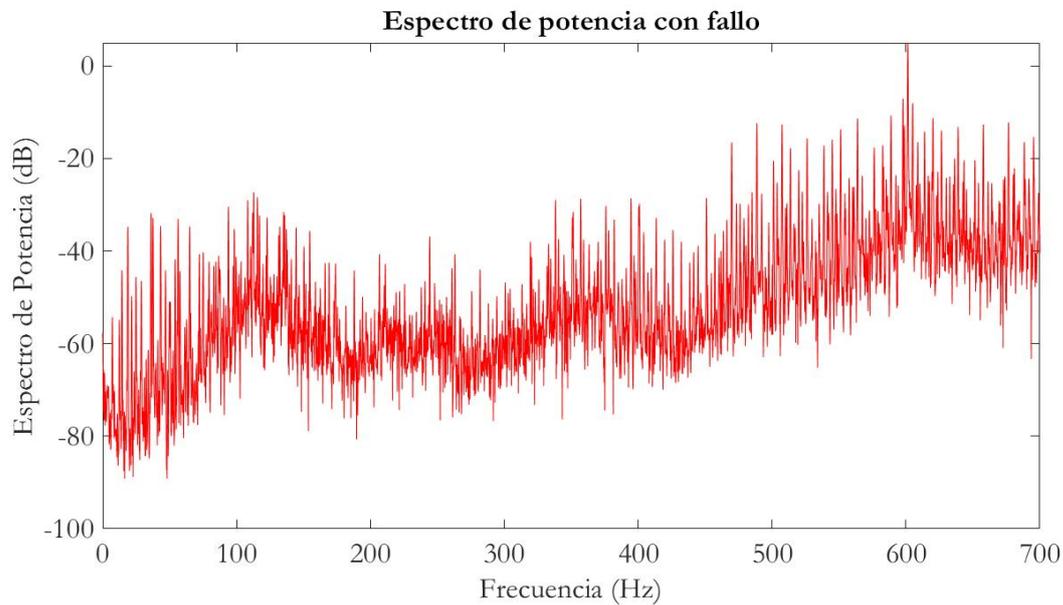


Figura 37: Espectro de potencia con fallo. **Fuente:** Autor

En las Figuras 36 y 37 se observa un cambio en las amplitudes de aceleración en el espectro de potencia de la señal sin fallo y señal con fallo, además, de una variación en el eje de las abscisas en las frecuencias características.

2.6.3. Patrón de vibración

Según Sánchez [69], toda caja de engranajes presenta patrones de vibración que caracterizan el estado o condición de dichas cajas, por lo que una pequeña modificación en el patrón podría ser síntoma de un fallo. Para un engranaje en condición de no fallo las frecuencias que caracterizan los patrones de vibración generalmente son [78]:

- **Frecuencia de engranaje (o meshing, como se conoce en inglés) f_m** : Es la frecuencia propia de cada engranaje y aparece en el espectro sin importar la condición de engranaje. Su amplitud depende de la carga, se calcula mediante la Ecuación 68.

$$f_m = f_g Z_g \quad (68)$$

- **Frecuencia de entrada f_g** : Es la frecuencia de entrada producida por el motor de entrada y se calcula mediante la Ecuación 69

$$f_g = \frac{N_g}{60} \quad (69)$$

- **Frecuencia de salida f_p** : Es la frecuencia en el engranaje de salida, se calcula mediante la Ecuación 70

$$f_p = \frac{f_g Z_g}{Z_p} \quad (70)$$

- **Frecuencia de bandas laterales $f_{1,i}$ y $f_{2,i}$** : Son las frecuencias que se encuentran equidistantes a la frecuencia de mesh, son múltiplos de frecuencia de entrada y salida, se calculan con las siguientes ecuaciones:

$$f_{1,i} = f_m \pm f_g \quad (71)$$

$$f_{2,i} = f_m \pm f_p \quad (72)$$

Donde: Z_g : es el número de dientes del engranaje de entrada.

Z_p : es el número de dientes del engranaje de salida.

N_g : es la velocidad del engranaje de entrada en RPM.

En la Figura 38 se presenta un patrón de vibración con sus frecuencias características.

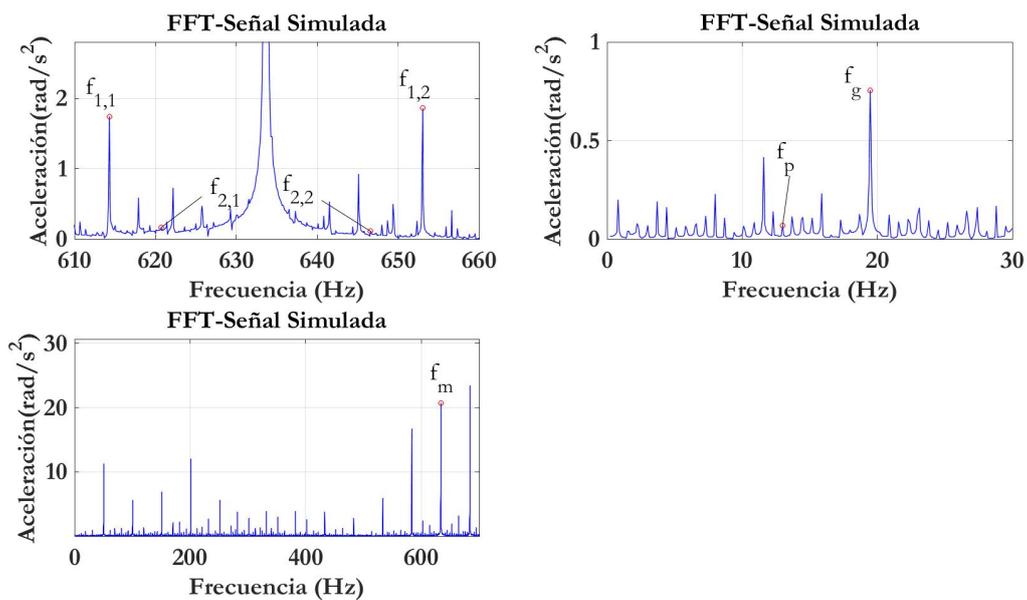


Figura 38: Patrón de vibraciones con frecuencias características. **Fuente:** Autor

3. Marco metodológico

3.1. Planteamiento del modelo

Este trabajo considera un modelo paramétrico de dos grados de libertad propuesto en [24] y caracteriza sus parámetros para ajustarlo a la caja de vibraciones disponible en el laboratorio de vibraciones, con el objetivo de estimar la vibración torsional. El modelo debe permitir la simulación con tres diferentes condiciones de operación, asociadas con la aplicación de pares de carga constantes, denotadas L1, L2 y L3. La metodología aplicada para particularizar el modelo se presenta en la Figura 39.

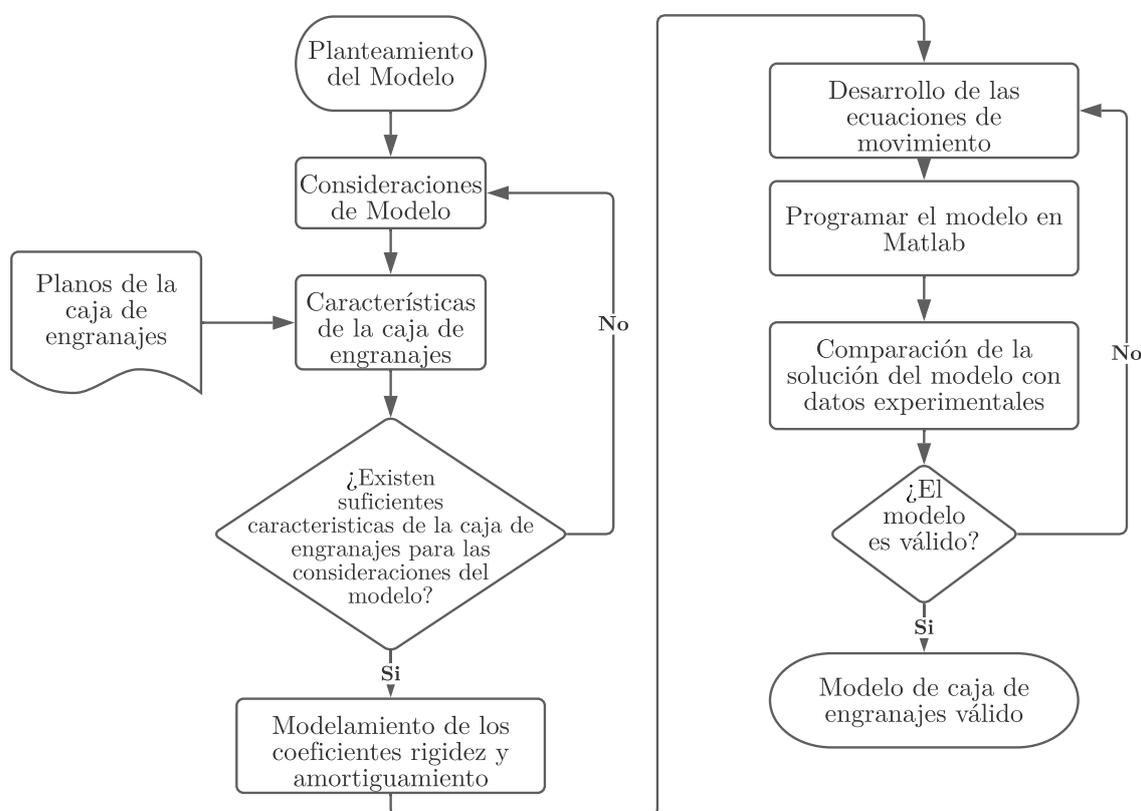


Figura 39: Flujograma de planteamiento del problema. **Fuente:** Autor

En la Figura 40 se presenta el modelo considerado con su notación, el cual será explicado en la sección 3.1.3

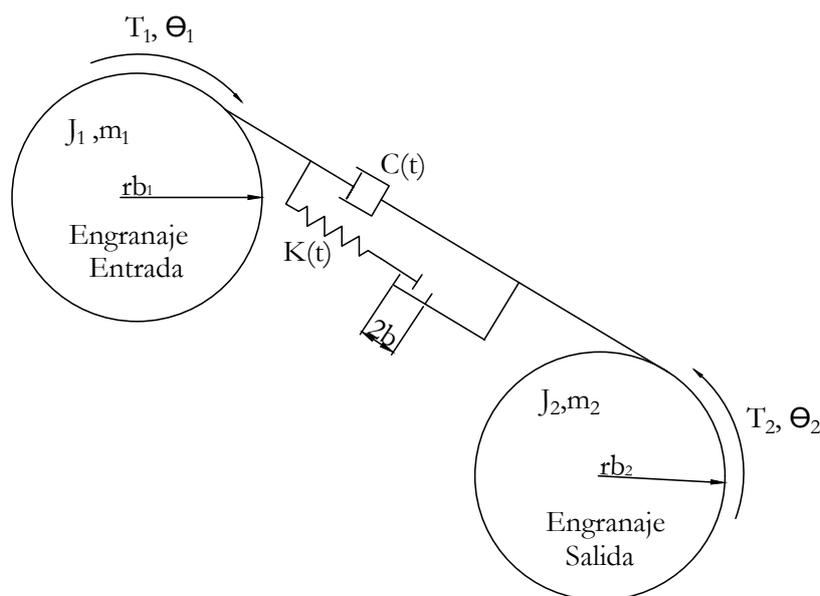


Figura 40: Esquema de caja de engranajes. **Fuente:** [24]

J_1 y J_2 son las inercias de la masa de los engranajes de entrada y salida respectivamente.

rb_1 y rb_2 son los radios base de los engranajes de entrada y salida respectivamente.

T_1 y T_2 son los pares de motor y carga.

$K(t)$ es la función del coeficiente de rigidez variante en el tiempo.

$C(t)$ es la función del coeficiente de amortiguamiento variante en el tiempo.

b es el juego entre los dientes de los engranajes.

3.1.1. Consideraciones del modelo

El planteamiento del modelo de caja de engranajes inicia con la selección de las consideraciones de desarrollo del modelo. Las consideraciones del modelo se deben realizar acorde con las características e información de la caja de engranajes, tales como: condiciones de operación (velocidad, pares de entrada y carga), propiedades del material y geometría de los engranajes. Para el desarrollo del modelo se consideran tres posibles condiciones de operaciones, asociadas con la aplicación de los pares de carga constantes, denotados L1, L2 y L3. De acuerdo a Ortega [65] para cada condición se estiman la velocidad de giro, par de motor y par de carga. En la Tabla 6 se presenta las estimaciones de velocidad giro promedio N y el par de motor T_1 , de acuerdo a la base de datos levantada con un motor con carga debido al acoplamiento de una caja de engranajes detallada en la sección 2.5, y el par de carga T_2 estimado previamente en el trabajo de Ortega [65].

Tabla 6: Pares y velocidades en las diferentes condiciones de carga. **Fuente:** Autor

	T_1 [N m]	T_2 [N m]	N [rpm]
L1	2.521	0	1188
L2	3.760	2.603	1176
L3	7.248	6.503	1158

Además, se consideran los parámetros geométricos y propiedades de materiales de caja de engranajes presentadas en la Tabla 7.

Tabla 7: Parámetros geométricos y características del material. **Fuente:** Autor

Parámetros	Engranaje 1	Engranaje 2
Número de diente	32	48
Módulo [mm]	2.25	
Radio base [mm]	67.66	101.49
Ancho de diente [mm]	20.7	
Relación de contacto	1.71	
Ángulo de presión	20°	
Modulo de Young [N/mm ²]	2,05×10 ⁵	
Coefficiente de Poisson	0.3	
Masa [Kg]	0.5903	1.4092
Momento de inercia de la masa [Kg m ²]	3.82×10 ⁻³	2.05×10 ⁻³
Holgura (en ingles backlash) [mm]	5×10 ⁻³	

Además, según Kahraman y Blankenship [16], se considera que el cambio en la rigidez y el amortiguamiento por el inevitable cambio de pares de dientes en contacto y la posible pérdida de contacto por el juego entre engranajes se deben tomar en cuenta en el desarrollo de un modelo de caja de engranajes. Así mismo, analizado la información de las Tablas 6 y 7, se realizan las consideraciones para el modelo:

- Es un modelo de dos grados de libertad, torsional paramétrico.
- El error estático de transmisión variante en el tiempo $e(t)$ es igual a cero.
- El coeficiente de rigidez es variante en el tiempo.
- El coeficiente de amortiguamiento es variante en el tiempo.

- Existe una posible pérdida de contacto por el juego entre los engranajes, modelada en la Ecuación 77

3.1.2. Modelado de rigidez y amortiguamiento

En el modelado de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento es parte fundamental considerarlos como funciones periódicas variantes en el tiempo, debido a ello se propone la metodología para el modelamiento de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento presentada en la Figura 41.

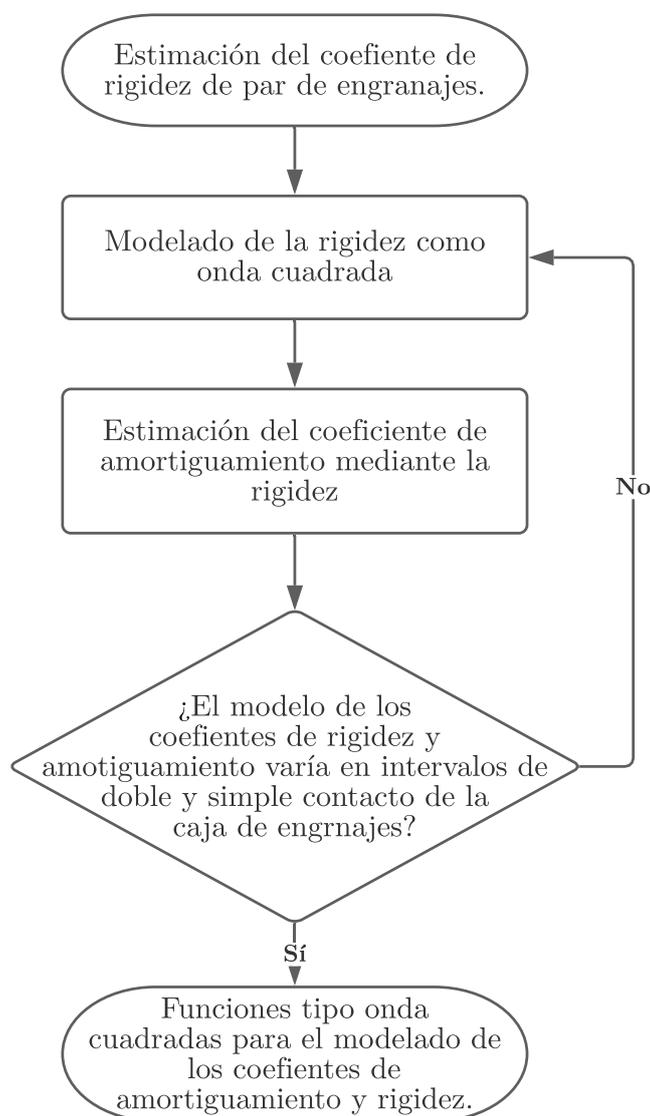


Figura 41: Flujograma para modelado de la rigidez. **Fuente:** Autor

Según Fakhfakh *et al.* [50], una buena estimación de la rigidez es una onda cuadrada con intervalos de simple y doble contacto, tal como se presenta en la siguiente ecuación.

$$K(t) = \begin{cases} K_{min} & nt_m \leq t \leq (n\varepsilon_\alpha - 1)t_m \\ K_{max} & (n\varepsilon_\alpha - 1)t_m \leq t \leq nt_m \end{cases} \quad (73)$$

Donde:

K_{min} denota la rigidez en simple contacto.

K_{max} denota la rigidez en doble contacto.

tm es el tiempo de un ciclo de contacto de un par de dientes.

ε_α es la relación de contacto radial.

n es el número de pares, que han completado su tiempo de contacto t_m .

Para la determinación de K_{min} y K_{max} , se propone la aplicación de un enfoque analítico ya explicado en la sección 2.2.1.3. Una vez estimado el coeficiente de la rigidez variante el tiempo $K(t)$, se procede a la estimación del coeficiente de amortiguamiento $C(t)$, por medio del coeficiente de la rigidez como se presenta en la siguiente Ecuación 74.

$$C(t) = 2\zeta_g \sqrt{\frac{K(t)r_{b1}^2 r_{b2}^2 J_1 J_2}{r_{b1}^2 J_1 + r_{b2}^2 J_2}} \quad (74)$$

Donde:

ζ_g es la razón de amortiguamiento.

J_1 y J_2 son las inercias de la masa de los engranajes de entrada y salida respectivamente.

rb_1 y rb_2 son los radios base de los engranajes de entrada y salida respectivamente.

La razón de amortiguamiento ζ_g se considera 0.10 para engranajes de acero, de acuerdo con Lin y Liou [15].

3.1.3. Modelado de las ecuaciones de movimiento

Para modelar las ecuaciones de movimiento se usó el modelo de [24], que representa la caja de engranajes como un modelo de parámetros concentrados (LPM) que se presentó en la Figura 40, donde se indica dos engranajes conectados entre sí con un coeficiente de rigidez variante en el tiempo $K(t)$, con un juego entre engranajes b y un coeficiente de

amortiguamiento variante en el tiempo $C(t)$, además de estar bajo la acción de los pares: T_1 el par del motor, T_2 el par de carga.

Las ecuaciones del movimiento de la caja de engranajes se desarrollan de acuerdo con la segunda ley de Newton, que expresa que la suma de pares T_i con respecto a un punto de rotación O es igual a la aceleración rotacional α por la inercia de la masa J , como se expresa en la Ecuación 75 [79]:

$$J\alpha = \sum_i T_i \quad (75)$$

Donde:

J es la inercia de la masa del sistema.

α es la aceleración rotacional del sistema.

$\sum_i T_i$ es la sumatoria de pares del sistema.

Sobre la base de la Ecuación 75 la caja de engranajes representada en la Figura 40, se modela como:

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\theta}_1 + rb_1 C(t) (rb_1 \dot{\theta}_1 - rb_2 \dot{\theta}_2) + rb_1 K(t) g(x(t)) = T_1 \\ J_2 \ddot{\theta}_2 - rb_2 C(t) (rb_1 \dot{\theta}_1 - rb_2 \dot{\theta}_2) - rb_2 K(t) g(x(t)) = -T_2 \end{cases} \quad (76)$$

Donde:

J_1 y J_2 son las inercias de la masa de los engranajes de entrada y salida respectivamente.

rb_1 y rb_2 son los radios base de los engranajes de entrada y salida respectivamente.

T_1 y T_2 son los pares de motor y carga.

$K(t)$ es la función del coeficiente de rigidez variante en el tiempo.

$C(t)$ es la función del coeficiente de amortiguamiento variante en el tiempo.

$g(x(t))$ es la función de pérdida de contacto por juego entre engranajes.

$x(t)$ es el error dinámico de transmisión.

El error dinámico de transmisión $x(t)$ es igual a $x(t) = rb_1 \theta_1 - rb_2 \theta_2$, la función de pérdida de contacto por juego entre engranajes $g(x(t))$ se modela como:

$$g(x(t)) \begin{cases} x(t) - b & \text{cuando } x(t) > b \\ 0 & \text{cuando } -b < x(t) < b \\ x(t) + b & \text{cuando } x(t) < -b \end{cases} \quad (77)$$

Donde:

b es el juego entre los engranajes.

$x(t)$ el error dinámico de transmisión.

3.2. Simulación del modelo

3.2.1. Programación del modelo

La metodología usada para la programación del modelo se presenta la Figura 42.

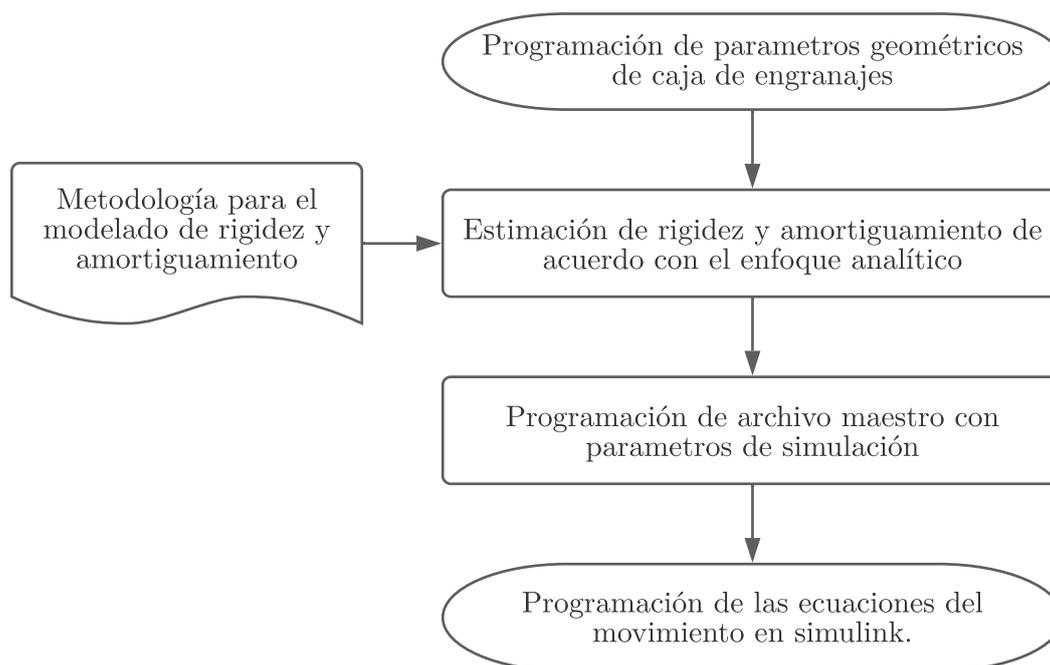


Figura 42: Flujograma de la programación del modelo. **Fuente:** Autor

Para la programación se desarrolló tres scripts de Matlab y un programa en Simulink:

- **kmin:** Función programada que ingresa los parámetros geométricos desde un script externo y devuelve los valores de la rigidez debido a la flexión K_b , compresión axial K_a , cortante K_s y flexión en el filete de formación K_f para un engranaje.

- **geo:** programa que declara los parámetros geométricos de la caja de engranajes, y estima los valores de K_{min} y K_{max} , por medio de la Ecuación 45, la Ecuación 46 y estima los valores de las rigideces mediante la función $kmin$.
- **archivomaestro:** script que alimenta al programa de bloques en Simulink con todos los valores de simulación, tales como: coeficientes de rigidez y amortiguamiento, velocidad de giro, par de carga y par de motor.
- **dosgrados:** es una programación en bloques en Simulink que por medio de bloques de integración, suma, constantes, multiplicadores y una función de pérdida de contacto, simula el sistema de ecuaciones del modelo de la caja de engranajes.

Los scripts y la programación en bloque de Simulink se presentan en los anexos en la Subsección A.1.

3.2.2. Simulación del modelo

Para el desarrollo de la simulación se ha propuesto las siguientes consideraciones:

- El método numérico para la solución de las ecuaciones diferenciales debe tener un paso de tiempo fijo.
- La respuesta de la vibración debe ser estable.
- El paso de tiempo debe permitir una frecuencia de muestreo de 50000 Hz

Con estas consideraciones se aplica la siguiente metodología para la simulación del modelo, como se presenta en la Figura 43.

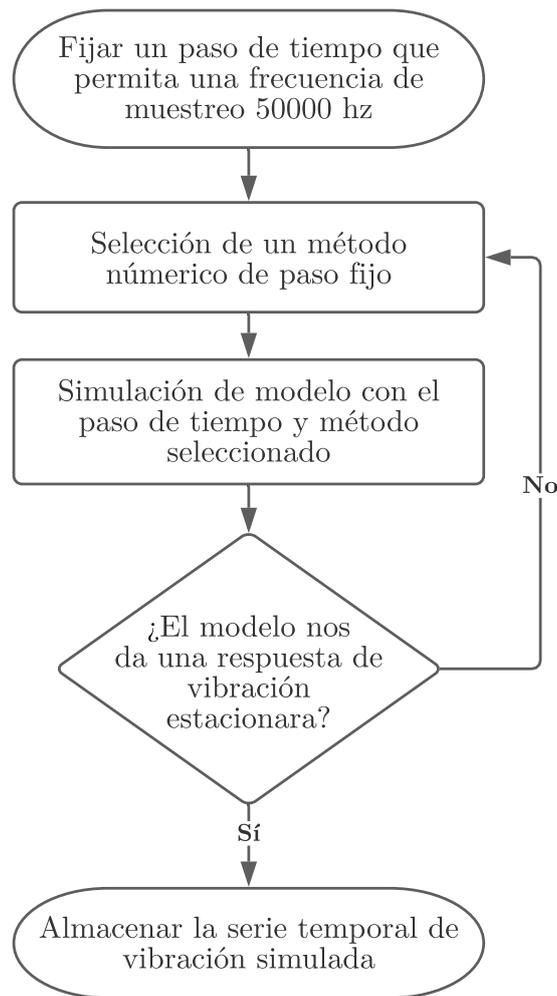


Figura 43: Flujograma de la programación del modelo. **Fuente:** Autor

Aplicada la metodología expuesta en la Figura 43, se propone el método numérico de dormand-prince (ode5) con un paso 1×10^{-5} segundos para la simulación del modelo. Con estas condiciones la frecuencia de muestreo es 100000 Hz , para obtener una frecuencia de muestreo de 50000 Hz se procedió a un submuestreo. Las series temporales obtenidas de con el método numérico cumplen las condiciones, como se presenta en la Figura 44, donde la serie temporal es estable.

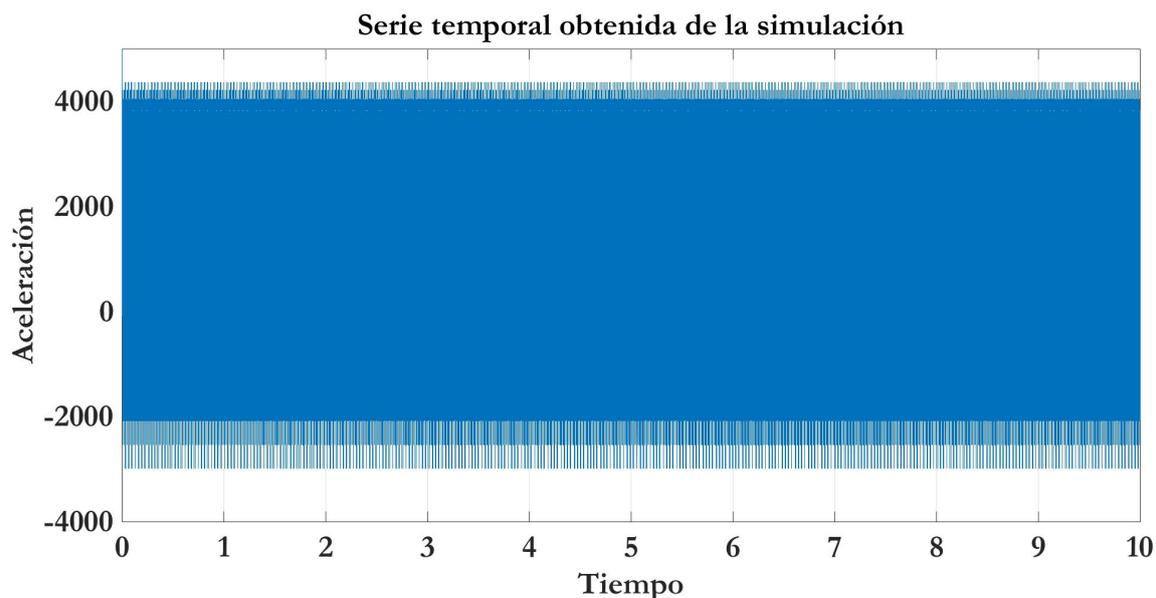


Figura 44: Serie temporal con el método numérico y paso de tiempo seleccionados.
Fuente: Autor

En la Figura 45 se presenta la serie temporal de vibración con un acercamiento sobre el eje del tiempo.

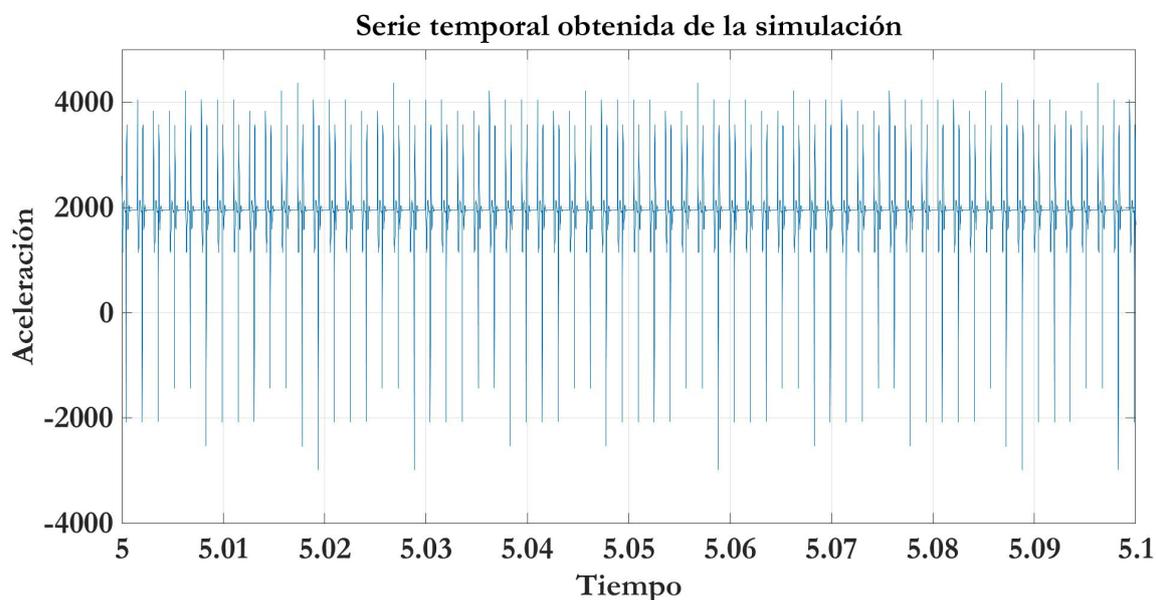


Figura 45: Serie temporal con el método numérico y paso de tiempo seleccionados, en un intervalo de tiempo 5-5.1 segundos. **Fuente:** Autor

3.3. Procesamiento de la serie temporal de vibración

Para el procesamiento se aplica la metodología que se presenta la Figura 46.

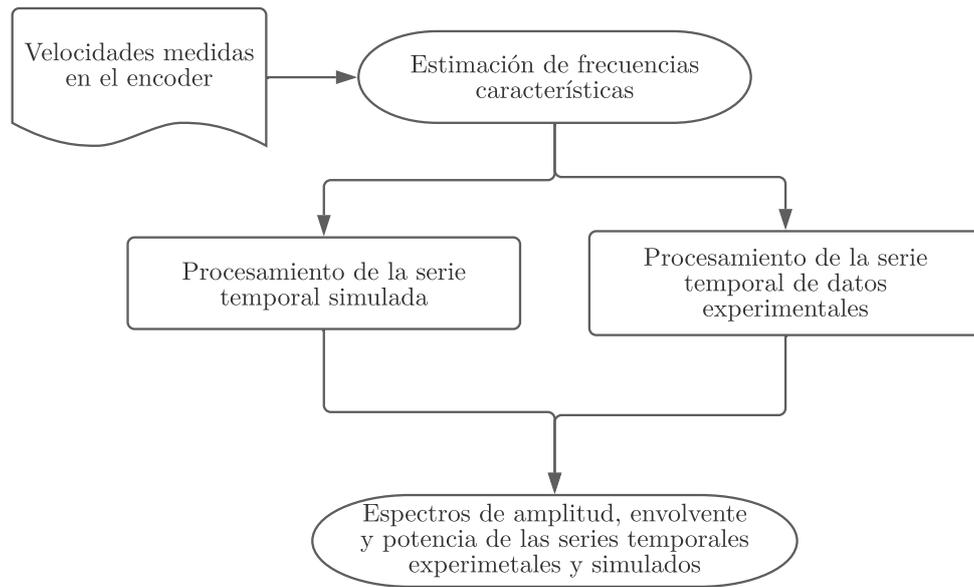


Figura 46: Flujograma de metodología del procesamiento de serie temporal de vibración.
Fuente: Autor

3.3.1. Estimación de las frecuencias características

Las frecuencias características de la caja de engranajes modelada son la frecuencia de entrada (f_g), salida (f_p), de engranaje (f_m) y las frecuencias laterales $f_{1,i}$ y $f_{2,i}$, para cada condición de operación. Las frecuencias características se determinan mediante las siguientes ecuaciones [70]:

$$f_g = \frac{N_g}{60} \quad (78)$$

$$f_p = \frac{f_g Z_g}{Z_p} \quad (79)$$

$$f_m = f_g Z_g \quad (80)$$

$$f_{1,i} = f_m \pm f_g \quad (81)$$

$$f_{2,i} = f_m \pm f_p \quad (82)$$

Donde:

N_g es la velocidad en RPM del engranaje de entrada.

Z_g es el número de dientes del engranaje de entrada.

Z_p es el número de dientes del engranaje de salida.

Las frecuencias características para cada condición de carga se presentan en la Tabla 8 con base en la información descrita en la Tabla 6.

Tabla 8: Frecuencias características de la caja de engranajes. **Fuente:** Autor

	Condición de Operación		
	L1	L2	L3
N_g [rpm]	1188	1176	1158
f_m [Hz]	633.6	627.2	617.6
f_g [Hz]	19.8	19.6	19.3
f_p [Hz]	13.2	13.1	12.9
$f_{1,1}$ [Hz]	653.4	646.8	636.9
$f_{1,2}$ [Hz]	613.8	607.6	598.3
$f_{2,1}$ [Hz]	646.8	640.3	630.5
$f_{2,2}$ [Hz]	620.4	614.1	604.7

3.3.2. Procesado de señales de vibración

El procesamiento se realizó con el objetivo de comparar las frecuencias características de los espectros de las series temporales de datos simulados y experimentales según las siguientes técnicas:

- **FFT:** Esta técnica se usó para pasar del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia, mediante la aplicación de la Transformada rápida de Fourier (FFT) obteniendo el espectro de amplitud o espectro de la FFT (ver en la Sección 2.6.2.1). Para procesar las señales simuladas y experimentales mediante FFT, se programó un script en Matlab, el cual carga las señales simuladas y experimentales y devuelve las gráficas de los espectros de FFT de las señales procesadas.
- **Espectro de la envolvente:** Esta técnica se usó para pasar del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia mediante la aplicación de la Transformada rápida de Fourier de una señal modulada, para la demodulación de las señales se aplicó la transformada de Hilbert con la función *hilbert* en Matlab. Para procesamiento de las señales mediante esta técnica, se programó un script Matlab, el cual carga las señales simuladas y experimentales y devuelve la gráfica del espectro de la envolvente de las señales procesadas.

- **Espectro de potencia:** Esta técnica se usó para pasar del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia mediante la aplicación del enfoque directo del espectro de potencia (ver en la Sección 2.6.2.3). Para procesamiento de las señales mediante esta técnica, se desarrolló un script Matlab, el cual carga las señales simuladas y experimentales y por medio de la función *pspectrum* devuelve gráfica del espectro de potencia de las señales procesadas.

4. Análisis y discusión de resultados

En este capítulo se presenta los resultados del modelamiento de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento usados en el modelo matemático de caja de engranajes. Luego se realiza la comparación de las frecuencias características del espectro de la FFT, espectro de la envolvente y espectro de potencia de la señal simulada con respecto a las frecuencias características del espectro de la FFT, espectro de la envolvente y espectro de potencia de las señales experimentales de los acelerómetros (A1, A2, A3, A4), que se encuentran ubicados como se muestra en la Figura 27 con las condiciones de operación, asociadas a las cargas L1, L2 y L3 con una frecuencia de muestreo de 50000 Hz , dado que esta es la frecuencia de muestreo nativa de los acelerómetros del banco de pruebas. Además, se realizó una comparación del espectro de la FFT de la señal simulada con respecto a las frecuencias características calculadas en las condiciones de operación asociadas a las cargas L1, L2 y L3.

4.1. Coeficientes de rigidez y amortiguamiento variantes en el tiempo

En esta sección se presenta las gráficas de las funciones de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento variantes en el tiempo. En la Figura 47 se presenta el comportamiento del coeficiente de rigidez $K(t)$ en el tiempo, en la Figura 48 se presenta el coeficiente de amortiguamiento en el tiempo, para la caja de engranajes del laboratorio de vibraciones de la Universidad Politécnica Salesiana.

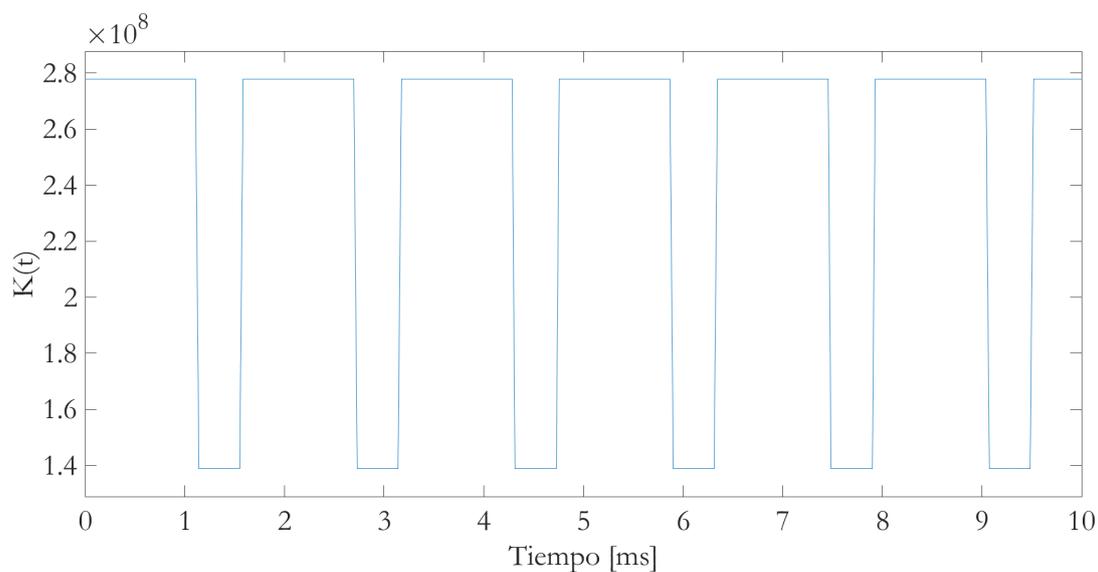


Figura 47: Función del coeficiente de rigidez. **Fuente:** Autor

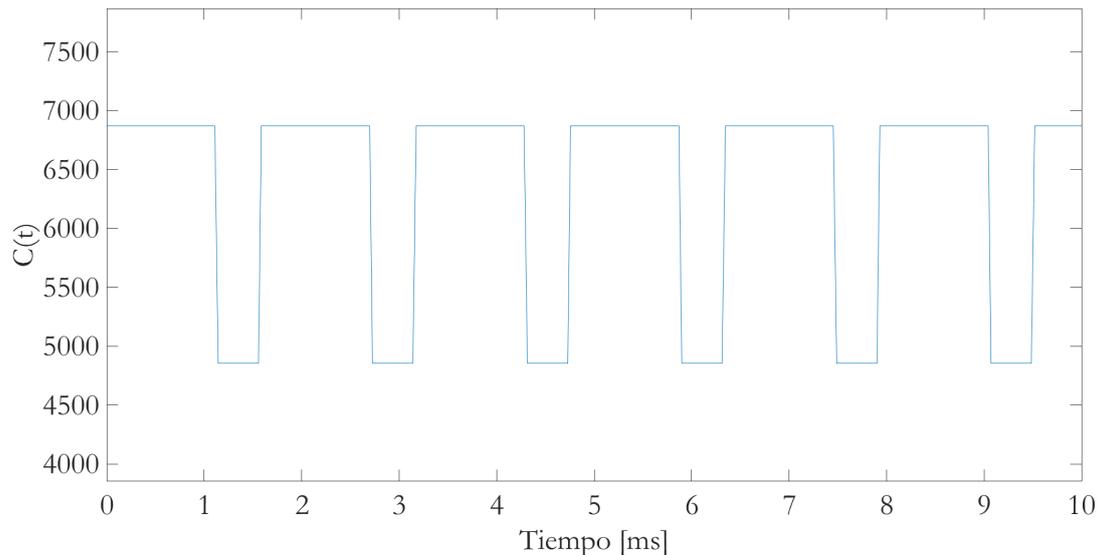


Figura 48: Función del coeficiente de amortiguamiento. **Fuente:** Autor

En las Figuras 47 y 48 se observa el comportamiento en simple contacto y doble contacto de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento a lo largo del tiempo, donde se tiene los valores de los coeficientes de rigidez en simple contacto es K_{min} con un valor de $1,389 \times 10^8 [\frac{N}{m}]$ y en doble contacto es K_{max} con un valor de $2,778 \times 10^8 [\frac{N}{m}]$. Los coeficientes de amortiguamiento en simple contacto es C_{min} con un valor de $4856,9 [\frac{Ns}{m}]$ y en doble contacto es C_{max} con un valor de $6868,6 [\frac{Ns}{m}]$. Resultados obtenidos, a partir de las Ecuaciones 45, 46 y 51.

4.2. Validación de frecuencias características del modelo

En esta sección se comparan las frecuencias características del espectro de la FFT de la señal simulada con diferentes cargas (L1, L2, L3), con respecto a las frecuencias características calculadas (ver en Tabla 8).

Para la carga L1 el espectro de la FFT de la señal simulada se presenta en la Figura 49, además, se indica la frecuencia de engranaje f_m .

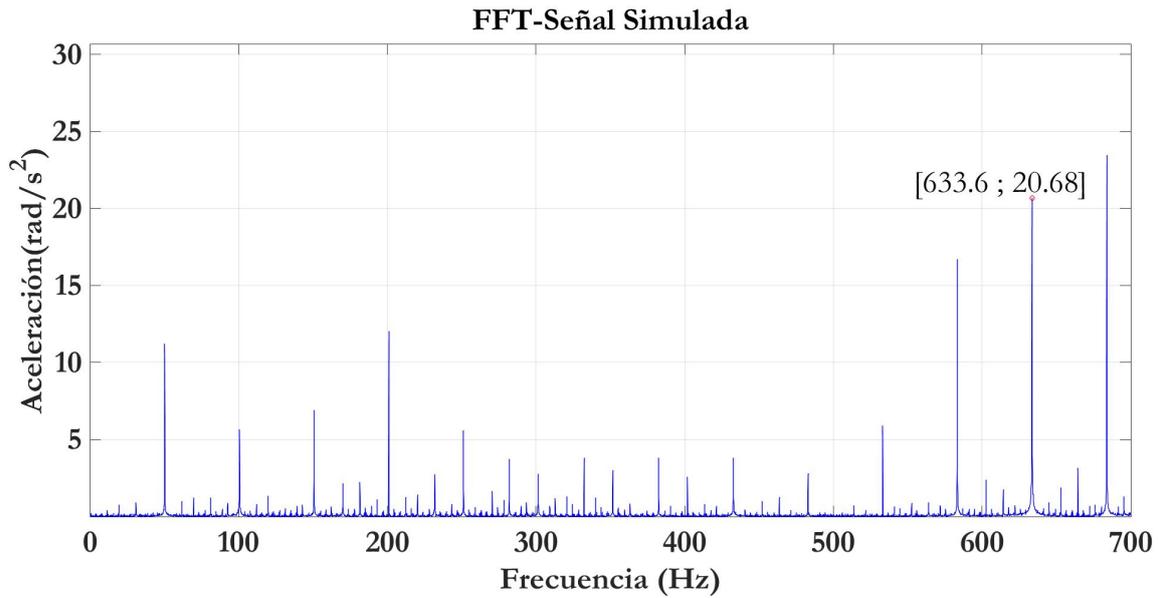


Figura 49: Espectro de la FFT de señal simulada con carga L1. **Fuente:** Autor

En la Figura 50 se indica la frecuencia de entrada f_g y frecuencia de salida f_p en el espectro de la FFT de la señal simulada con carga L1.

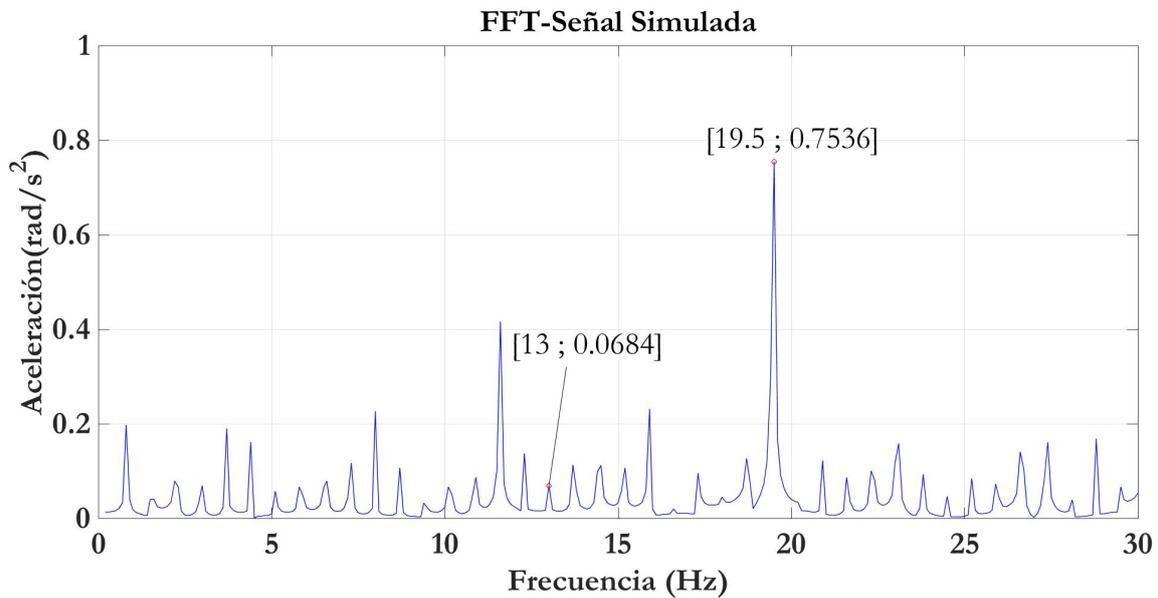


Figura 50: Valores de frecuencias f_g y f_p en el espectro de la FFT de señal simulada con carga L1. **Fuente:** Autor

En la Figura 51 se indica las frecuencias de bandas laterales ($f_{1,1}$, $f_{1,2}$, $f_{2,1}$, $f_{2,2}$) en el espectro de la FFT de la señal simulada con carga L1.

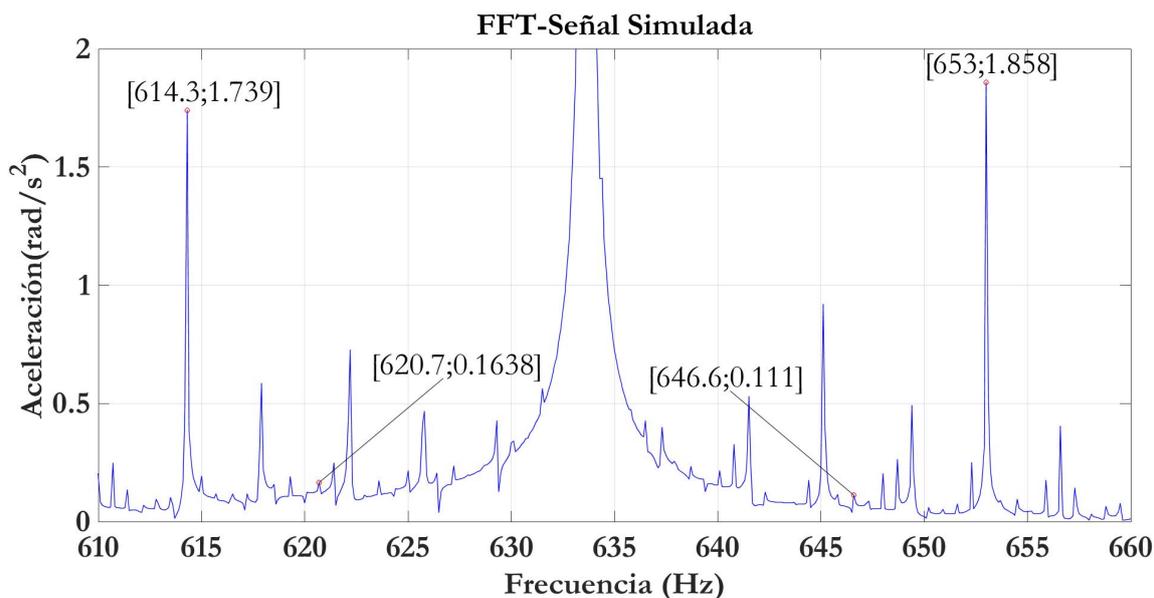


Figura 51: Valores de frecuencias de las bandas ($f_{1,1}$, $f_{1,2}$, $f_{2,1}$, $f_{2,2}$) en el espectro de la FFT de la señal simulada con carga L1. **Fuente:** Autor

En la Tabla 9, se presenta la comparación de las frecuencias características del espectro de la FFT de la señal simulada con respecto a las frecuencias características calculadas, además, se calcula el error porcentual entre ambas, en condiciones de operación asociadas a la carga L1. Los valores de las frecuencias características del espectro de la FFT se indican en las Figuras 49, 50 y 51

Tabla 9: Comparación de los valores entre las frecuencias características y frecuencias en el espectro de la FFT con condiciones de operación L1. **Fuente:** Autor.

	Calculada	FFT del modelo	Error porcentual
f_m [Hz]	633.6	633.6	0.00 %
f_g [Hz]	19.8	19.5	1.52 %
f_p [Hz]	13.2	13	1.52 %
$f_{1,1}$ [Hz]	653.4	653	0.06 %
$f_{1,2}$ [Hz]	613.8	614.3	0.08 %
$f_{2,1}$ [Hz]	646.8	646.6	0.03 %
$f_{2,2}$ [Hz]	620.4	620.7	0.05 %

Para la carga L2 el espectro de la FFT de la señal simulada se presenta en la Figura

Figura 52, además, se indica la frecuencia de engranaje f_m .

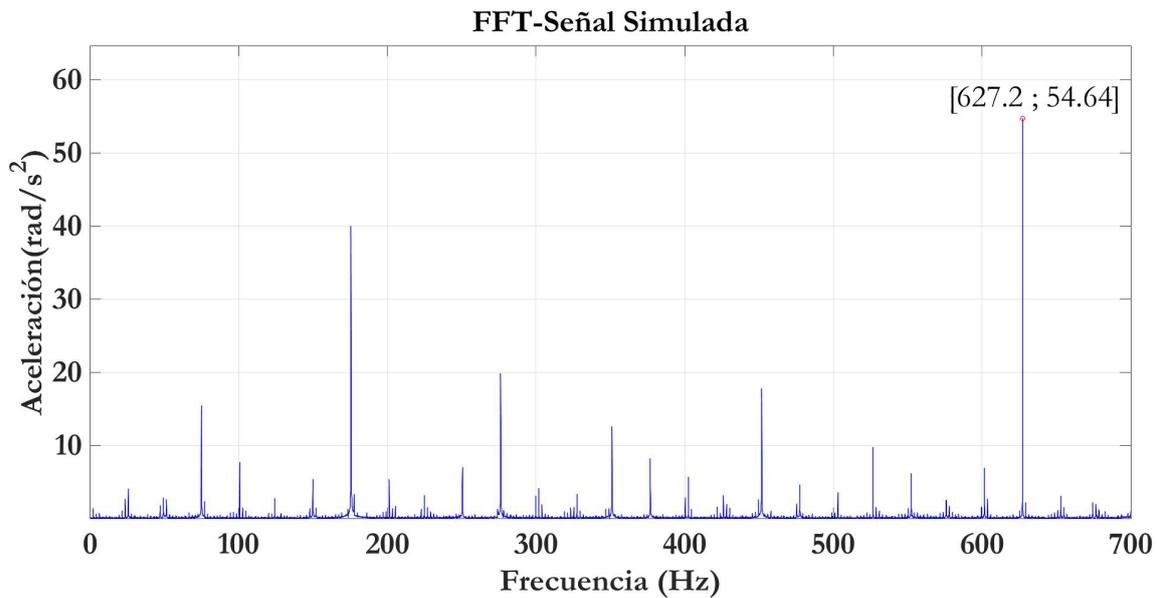


Figura 52: Espectro de la FFT de señal simulada con condiciones L2. **Fuente:** Autor

En la Figura 53 se indica la frecuencia de entrada f_g y frecuencia de salida f_p en el espectro de la FFT de la señal simulada con carga L2.

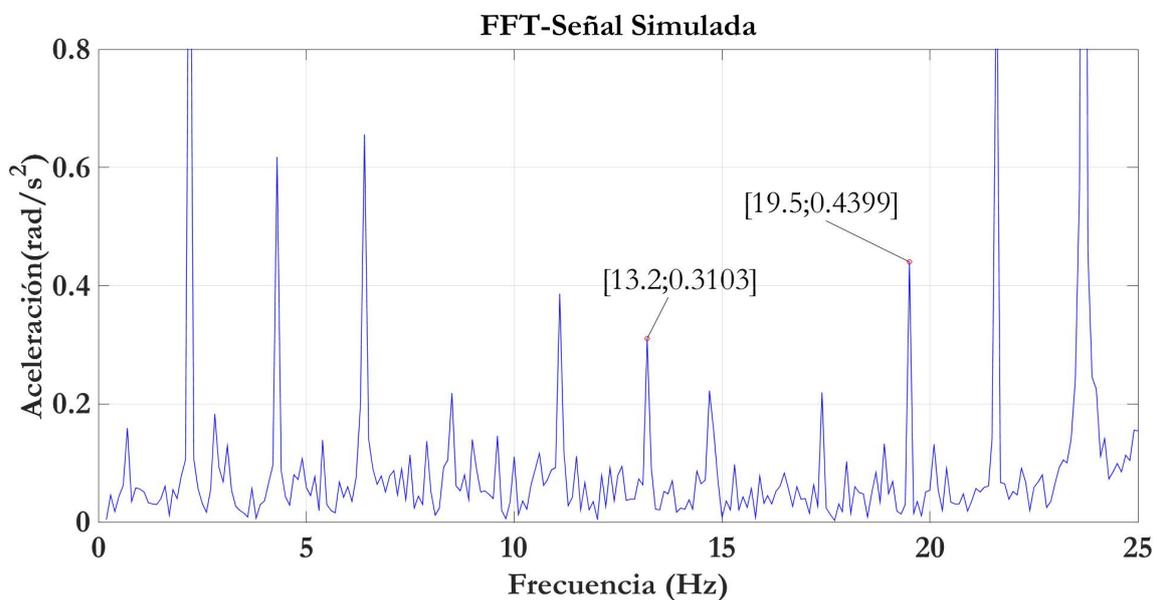


Figura 53: Valores de frecuencias f_g y f_p en el espectro de la FFT de señal simulada con carga L2. **Fuente:** Autor

En la Figura 54 se indica las frecuencias de bandas laterales ($f_{1,1}$, $f_{1,2}$, $f_{2,1}$, $f_{2,2}$) en el espectro de la FFT de la señal simulada con carga L2.

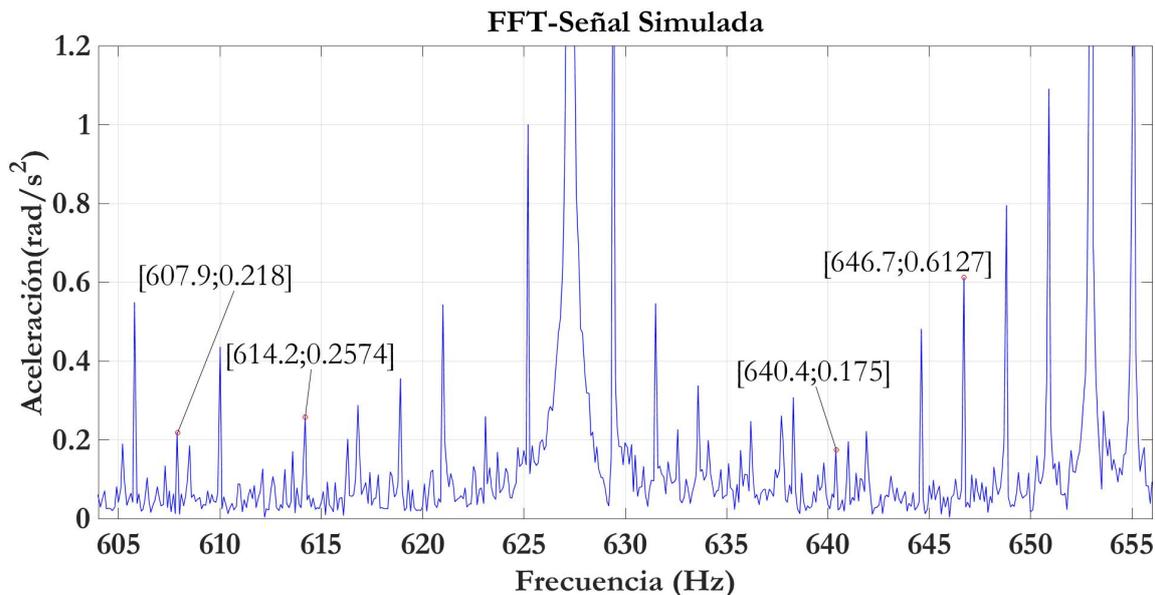


Figura 54: Valores de frecuencias de las bandas ($f_{1,1}$, $f_{1,2}$, $f_{2,1}$, $f_{2,2}$) en el espectro de la FFT de la señal con carga L2. **Fuente:** Autor

En la Tabla 10 se presenta la comparación de las frecuencias características del espectro de la FFT de la señal simulada con respecto a las frecuencias características calculadas, además, se calcula el error porcentual entre ambas, en condiciones de operación asociadas a la carga L2. Los valores de las frecuencias características del espectro de la FFT se indican en las Figuras 52, 53 y 54

Tabla 10: Comparación de los valores entre las frecuencias características y frecuencias en el espectro de la FFT con condiciones de operación L2. **Fuente:** Autor.

	Calculada	FFT del modelo	Error porcentual
f_m [Hz]	627.2	627.3	0.02 %
f_g [Hz]	19.6	19.5	0.51 %
f_p [Hz]	13.1	13.2	0.76 %
$f_{1,1}$ [Hz]	646.8	646.7	0.02 %
$f_{1,2}$ [Hz]	607.6	607.9	0.05 %
$f_{2,1}$ [Hz]	640.3	640.4	0.02 %
$f_{2,2}$ [Hz]	614.1	614.2	0.02 %

Para la carga L3 el espectro de la FFT de la señal simulada se presenta en la Figura

Figura 55, además, se indica la frecuencia de engranaje f_m .

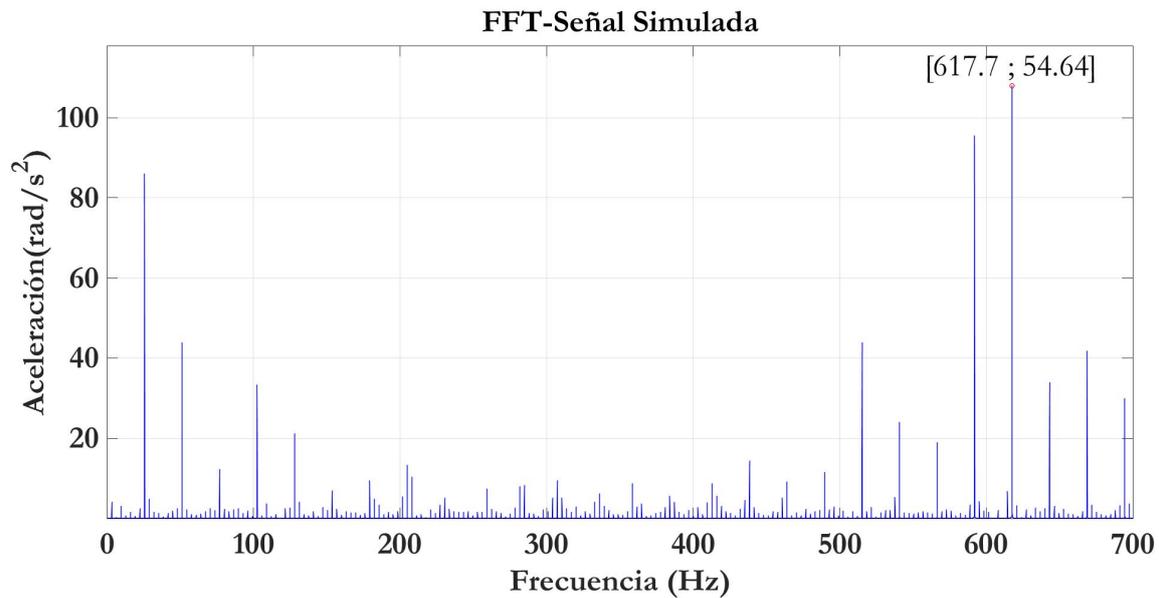


Figura 55: Espectro de la FFT de señal simulada con condiciones L3. **Fuente:** Autor

En la Figura 56 se indica la frecuencia de entrada f_g y frecuencia de salida f_p en el espectro de la FFT de la señal simulada con carga L3.

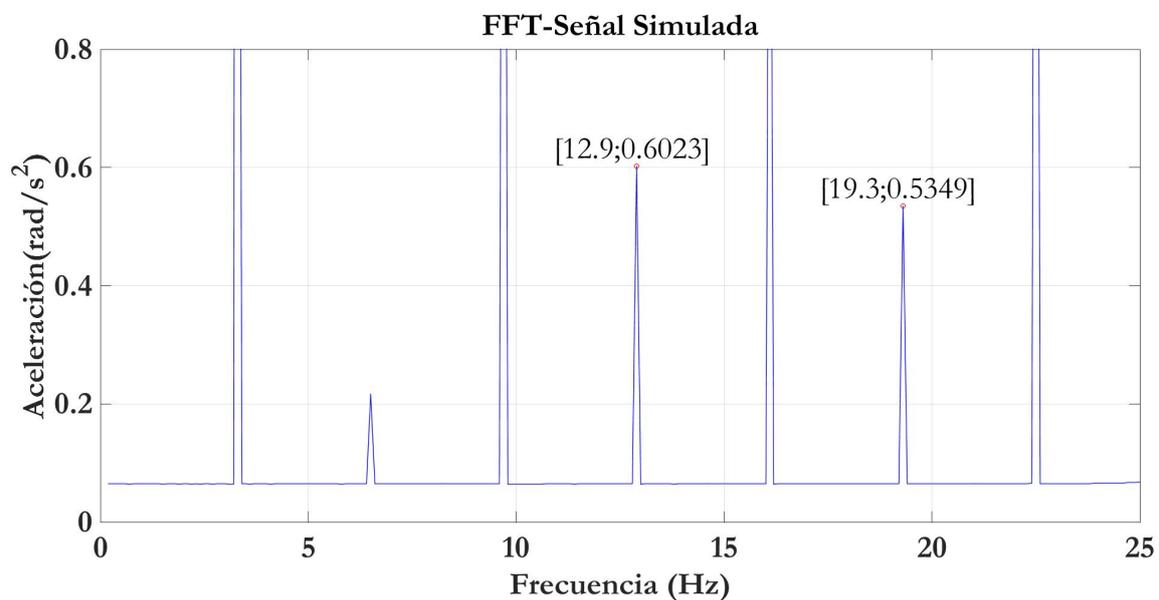


Figura 56: Valores de frecuencias f_g y f_p en el espectro de la FFT de señal simulada con carga L3. **Fuente:** Autor

En la Figura 57 se indica las frecuencias de bandas laterales ($f_{1,1}$, $f_{1,2}$, $f_{2,2}$) en el espectro de la FFT de la señal simulada con carga L3.

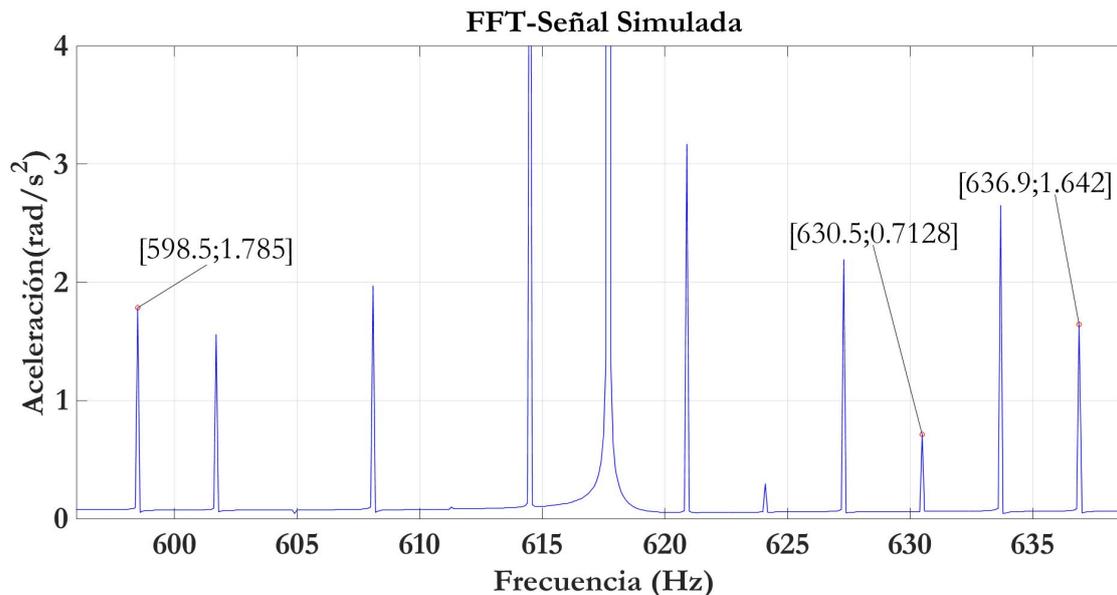


Figura 57: Valores de frecuencias de las bandas ($f_{1,1}$, $f_{1,2}$, $f_{2,2}$) en el espectro de la FFT de la señal con carga L3. **Fuente:** Autor

En la Tabla 11 se presenta la comparación de las frecuencias características del espectro de la FFT de la señal simulada con respecto a las frecuencias características calculadas, además, se calcula el error porcentual entre ambas, en condiciones de operación asociadas a la carga L3. Los valores de las frecuencias características del espectro de la FFT se indican en las Figuras 55, 56 y 57

Tabla 11: Comparación de los valores entre las frecuencias características y frecuencias en el espectro de la FFT con condiciones de operación L3. **Fuente:** Autor.

	Calculada	FFT del modelo	Error porcentual
f_m [Hz]	617.6	617.7	0.02 %
f_g [Hz]	19.3	19.3	0 %
f_p [Hz]	12.9	12.9	0 %
$f_{1,1}$ [Hz]	636.9	636.9	0 %
$f_{1,2}$ [Hz]	598.3	698.5	0.03 %
$f_{2,1}$ [Hz]	630.5	630.5	0 %
$f_{2,2}$ [Hz]	604.7	No aparece	— — —

De acuerdo con la información de las Tablas 9, 10 y 11, el error porcentual máximo de las

frecuencias característica del espectro de la FFT del modelo con respecto a las frecuencias características calculadas es de 1,52%. En el caso de la frecuencia característica $f_{2,2}$ con carga L3, no se aparecía en el espectro de la FFT de la señal simulada. Las frecuencias de salida f_p y las frecuencias laterales $f_{2,1}$ y $f_{2,2}$, en las tres condiciones de operación, tienen una menor amplitud que a las frecuencias de entrada f_g y las frecuencias laterales $f_{1,1}$ y $f_{1,2}$, esto se debe a que el espectro de la FFT de la señal simulada fue extraída de la aceleración del engranaje de entrada.

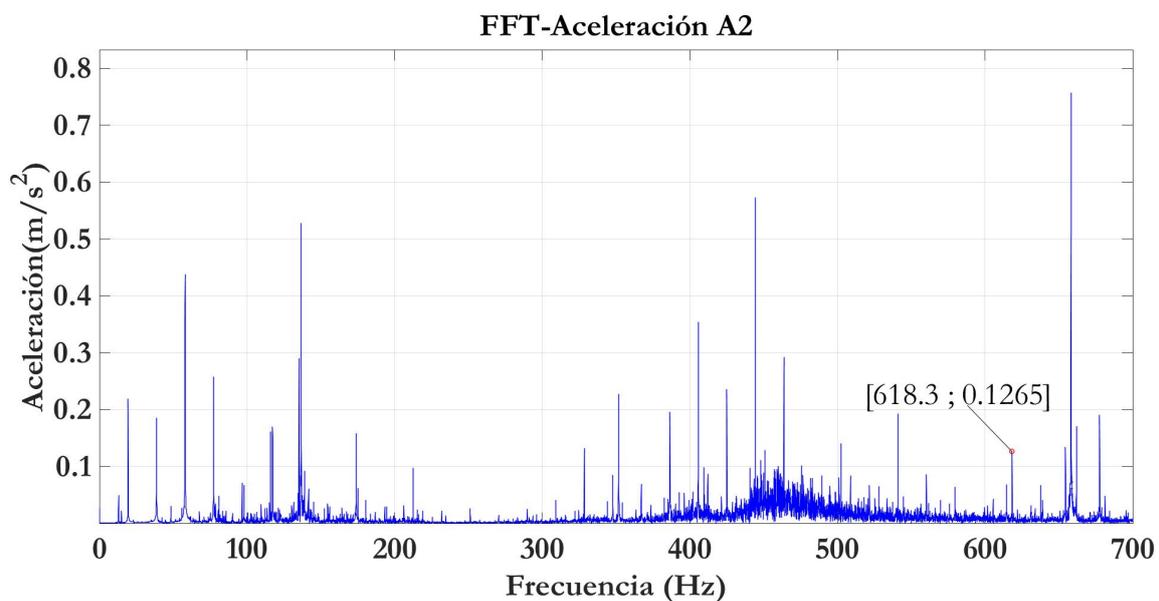
4.3. Comparación de espectros teóricos y experimentales

4.3.1. Comparación de espectro de la FFT

En esta sección se comparan las frecuencias características (f_m, f_g, f_p) del espectro de la FFT de la serie temporal simulada y las frecuencias características de los espectros de la FFT de las señales de los acelerómetros (A1, A2, A3, A4) ubicados en el banco de pruebas, como se presenta en la Figura 25, con una frecuencia de muestreo de 50000 Hz . Solo se comparó los valores de frecuencia debido a que la naturaleza de las series temporales son diferentes, pues la señal simulada es torsional y la señal experimental es traslacional y no son comparables en amplitud.

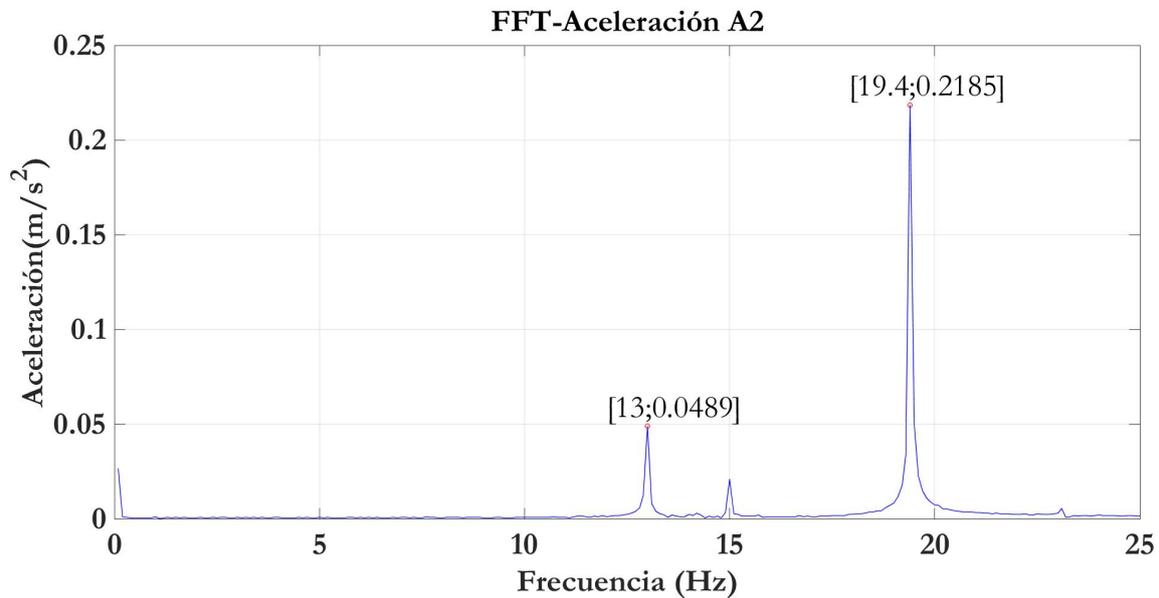
En la Figura 58 se muestra el espectro de la FFT obtenido de procesar la señal del acelerómetro A2 y se indica la frecuencia de engranaje f_m con carga L1.

Figura 58: Espectro de la FFT de señal de acelerómetro A2 con carga L1. **Fuente:** Autor



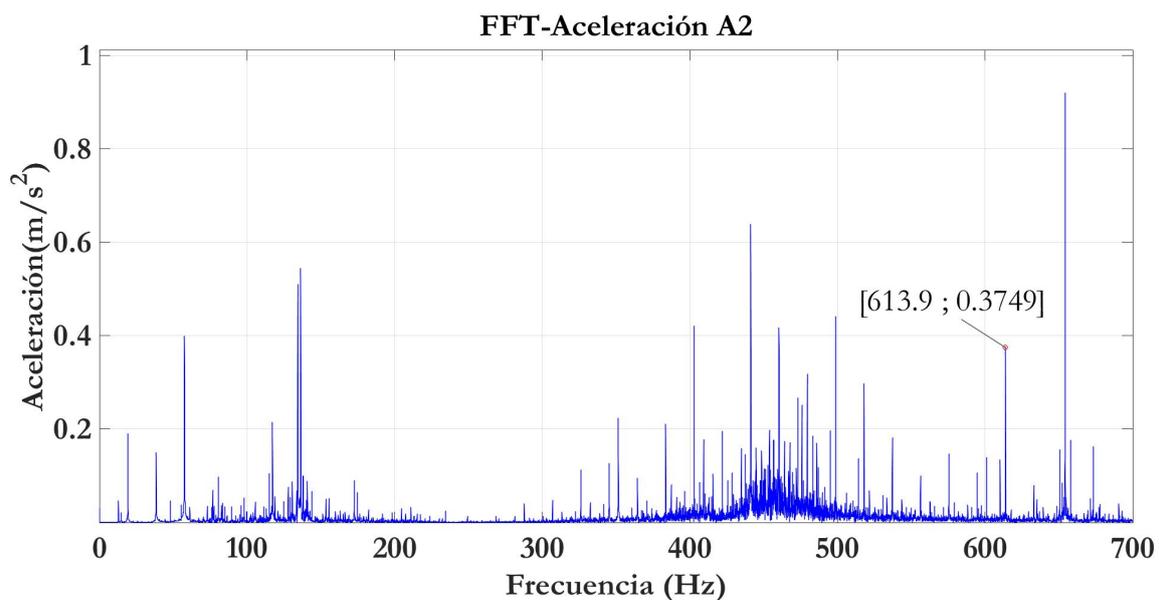
En la Figura 59 se indica la frecuencia de entrada f_g y frecuencia de salida f_p en el espectro de la FFT de la señal simulada con carga L1.

Figura 59: Frecuencia de entrada f_g y frecuencia de salida f_p en el espectro de la FFT de señal del acelerómetro A2 con carga L1. **Fuente:** Autor



En la Figura 60 se muestra el espectro de la FFT obtenido de procesar la señal del acelerómetro A2 y se indica la frecuencia de engranaje f_m con carga L2.

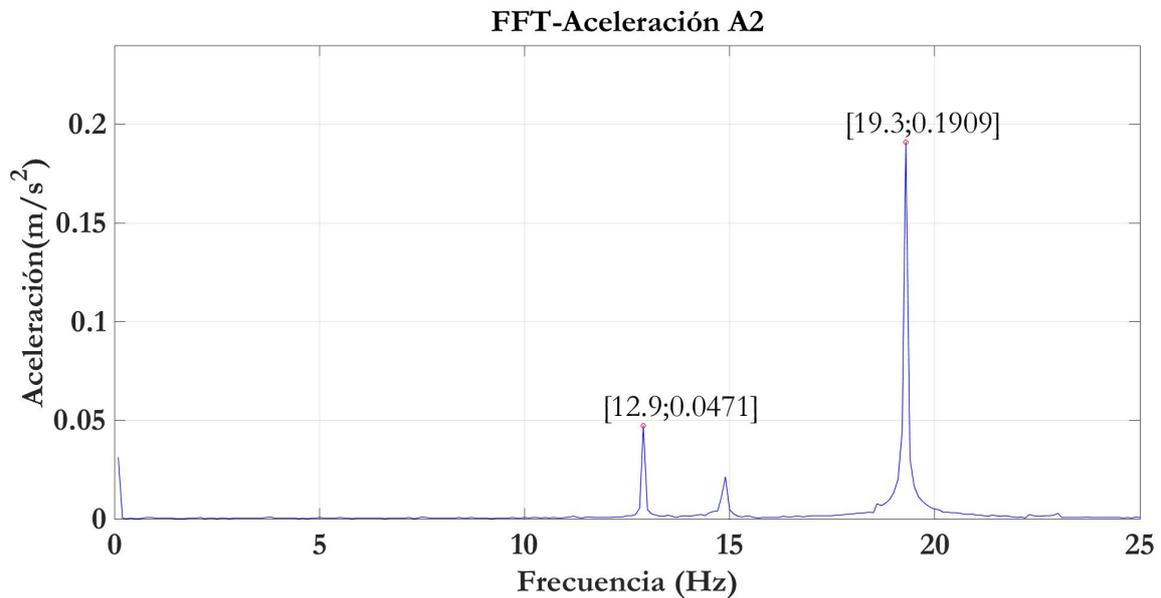
Figura 60: Espectro de la FFT de señal de acelerómetro A2 con carga L2. **Fuente:** Autor



En la Figura 61 se indica la frecuencia de entrada f_g y frecuencia de salida f_p en el

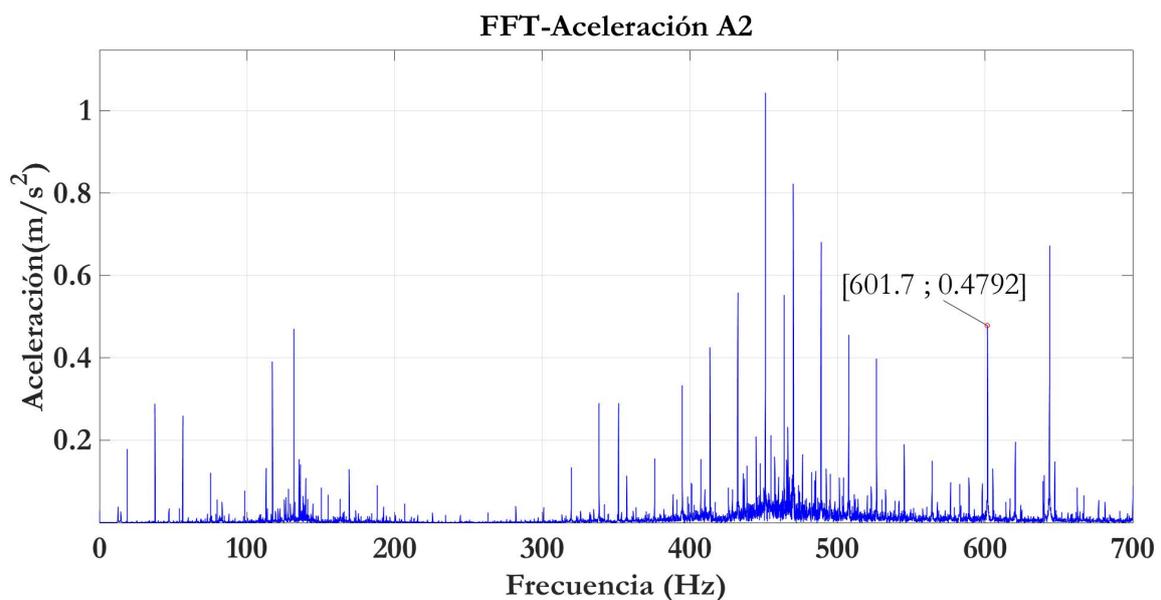
espectro de la FFT de la señal simulada con carga L2.

Figura 61: Frecuencia de entrada f_g y frecuencia de salida f_p en el espectro de la FFT de señal del acelerómetro A2 con carga L2. **Fuente:** Autor



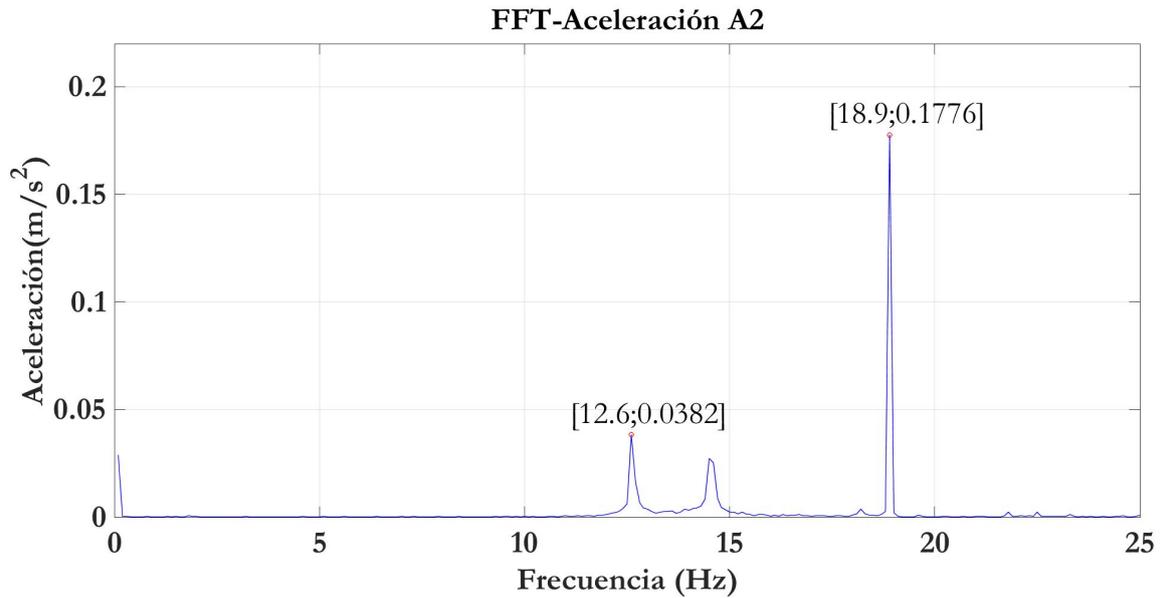
En la Figura 62 se muestra el espectro de la FFT obtenido de procesar la señal del acelerómetro A2 y se indica la frecuencia de engranaje f_m con carga L3.

Figura 62: Espectro de la FFT de señal de acelerómetro A2 con carga L3. **Fuente:** Autor



En la Figura 63 se indica la frecuencia de entrada f_g y frecuencia de salida f_p en el espectro de la FFT de la señal simulada con carga L3.

Figura 63: Frecuencia de entrada f_g y frecuencia de salida f_p en el espectro de la FFT de señal del acelerómetro A2 con carga L3. **Fuente:** Autor



En la Tabla 12 se presenta los valores de las frecuencias características (f_m , f_g , f_p) del espectro de la FFT de la señal simulada y las frecuencias características de espectros de la FFT de las señales de los acelerómetros (A1, A2, A3, A4), para las condiciones de operación asociadas a las cargas L1, L2 y L3, además, se presenta el error porcentual entre las frecuencias en los espectros de la FFT de la señal simulada con respecto a las frecuencias del espectro de la FFT de los acelerómetros (A1, A2, A3, A4), los valores de las frecuencias características de la señal experimental del acelerómetro (A2) se aprecian en las Figuras 58, 59, 60, 61, 62 y 63. Los espectros de la FFT para los acelerómetros (A1, A3, A4) se encuentran en los anexos en la Subsección A.2.

4. Análisis y discusión de resultados

Tabla 12: Comparación entre espectro de la FFT de la señal experimental y la señal simulada. **Fuente:** Autor.

	Frecuencia de Engranaje		Error	Frecuencia de entrada		Error	Frecuencia de salida		Error
	Frecuencia	Amplitud	porcentual	Frecuencia	Amplitud	porcentual	Frecuencia	Amplitud	porcentual
Carga L1									
Acelerómetro 1	618.3	0.2504	2.41 %	19.4	0.1275	0.51 %	—	—	—
Acelerómetro 2	618.3	0.1265	2.41 %	19.4	0.2185	0.51 %	13	0.0489	0.00 %
Acelerómetro 3	618.3	0.2748	2.41 %	19.4	0.0416	0.51 %	—	—	—
Acelerómetro 4	618.3	0.3512	2.41 %	19.4	0.0164	0.51 %	13	0.0094	0.00 %
Modelo	633.6	20.68		19.5	0.7536		13	0.0684	
Carga L2									
Acelerómetro 1	613.9	0.5202	2.14 %	19.3	0.1318	1.03 %	—	—	—
Acelerómetro 2	613.9	0.3749	2.14 %	19.3	0.1909	1.03 %	12.9	0.0471	2.27 %
Acelerómetro 3	613.9	0.8349	2.14 %	19.3	0.0468	1.03 %	—	—	—
Acelerómetro 4	613.9	0.9	2.14 %	19.3	0.0177	1.03 %	12.9	0.0085	2.27 %
Modelo	627.3	54.64		19.5	0.7536		13.2	0.3101	
Carga L3									
Acelerómetro 1	601.7	0.3248	2.59 %	18.9	0.1832	2.07 %	—	—	—
Acelerómetro 2	601.7	0.4792	2.59 %	18.9	0.1776	2.07 %	12.6	0.0382	2.33 %
Acelerómetro 3	601.7	1.034	2.59 %	18.9	0.059	2.07 %	—	—	—
Acelerómetro 4	601.7	1.036	2.59 %	18.9	0.0222	2.07 %	12.6	0.0089	2.33 %
Modelo	617.7	108		19.3	0.05349		12.9	0.6023	

En la comparación de las frecuencias características del espectro de la FFT de la simulación con respecto al espectro de la FFT de datos simulados se obtuvieron errores porcentuales entre 0 % y 2,59 %. Ma y Sun [17] reportan una comparación entre los valores de las frecuencias características del espectro de la FFT de la señal simulada con respecto al espectro de la FFT de la señal experimental que varían hasta 10,1 Hz en la frecuencia de engranaje f_m , 0,22 Hz en la frecuencia de entrada f_g y 0,15 Hz en la frecuencia de salida f_g .

Esto se debe a las consideraciones realizadas del modelo tales como: error estático de transmisión variante en el tiempo igual a cero, par torsional generado por la fricción de la caja nulo y los ejes y rodamientos como elementos rígidos, pero con estas limitaciones se muestra que el modelo de caja de engranajes permite obtener el patrón de vibraciones con un error porcentual aceptable.

Además, en la Tabla 12 se observa que la amplitud del pico en la frecuencia de engranaje f_m es proporcional a la carga, es decir, cuando la carga aumentaba en las condiciones de operación se apreció un aumento en la amplitud del pico. Además, se notó que las frecuencias de entrada y salida tienen menor amplitud en el espectro de la FFT de los datos simulados con respecto a las frecuencias de engranaje f_m . En los espectros de la FFT de las tres condiciones obtenidos con datos experimentales, se aprecian armónicos ubicados en frecuencias no características, que podrían ser interpretados como ruido.

4.3.2. Comparación de espectro de la envolvente.

En esta sección se comparan las frecuencias características (f_m, f_p, f_g) de los espectros la envolvente de la serie temporal simulada y de las series temporales de los acelerómetros (A1, A2, A3, A4) con una frecuencia de muestreo de 50000 Hz , en las condiciones de operación asociadas a las cargas L1, L2 y L3. Únicamente se comparó los valores de frecuencia debido a que la naturaleza de las series temporales son diferentes, pues la serie temporal simulada es torsional y la serie temporal experimental es traslacional, y no son comparables en amplitud.

En la Figura 64 se presenta el espectro de la envolvente de la señal simulada con carga L1 y se indica su frecuencia de engranaje f_m .

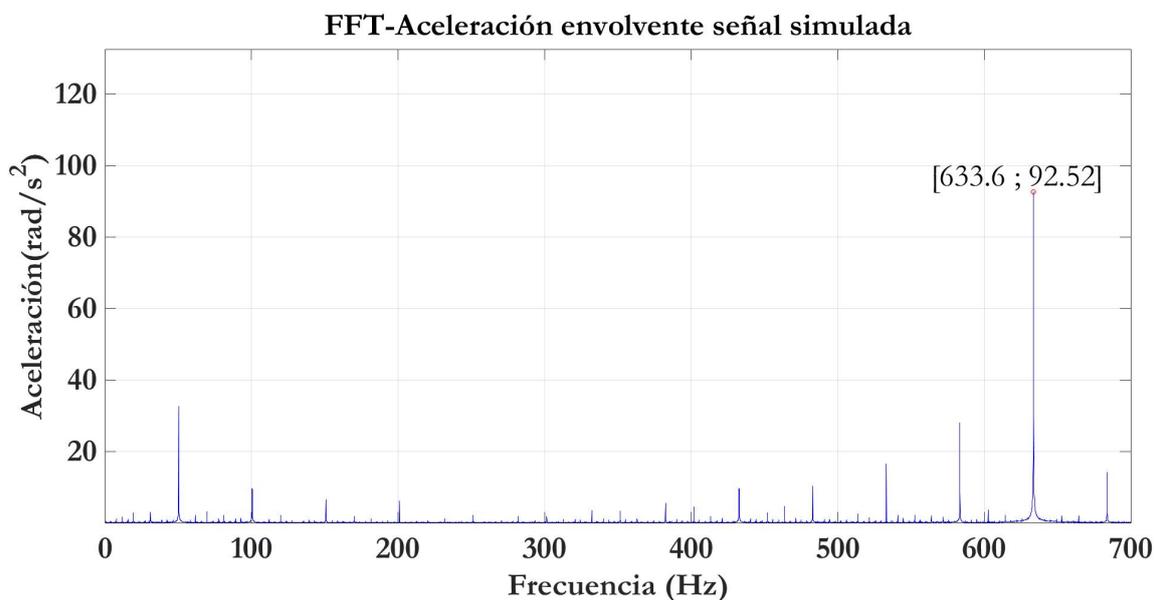


Figura 64: Espectro de la envolvente de señal simulada con carga L1. **Fuente:** Autor

En la Figura 65 se presenta el espectro de la envolvente de la señal del acelerómetro A2 con carga L1, y se indica su frecuencia de engranaje f_m .

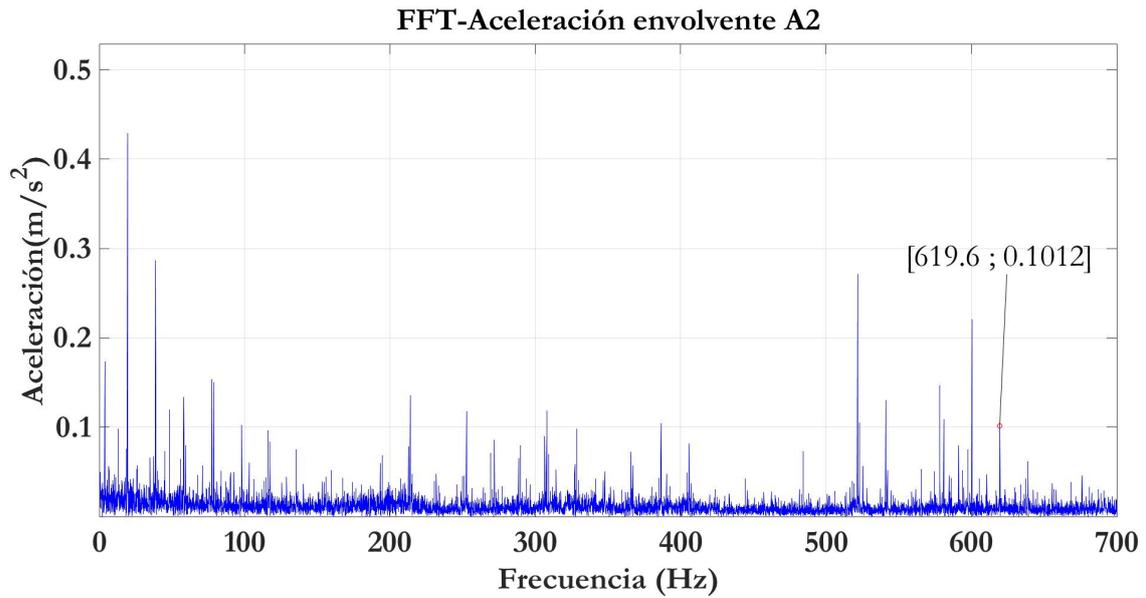


Figura 65: Espectro de la envolvente de señal de acelerómetro A2 con carga L1. **Fuente:** Autor

En la Figura 66 se presenta la frecuencia de entrada f_g y frecuencia de salida f_p del espectro de la envolvente de la señal simulada con carga L1.

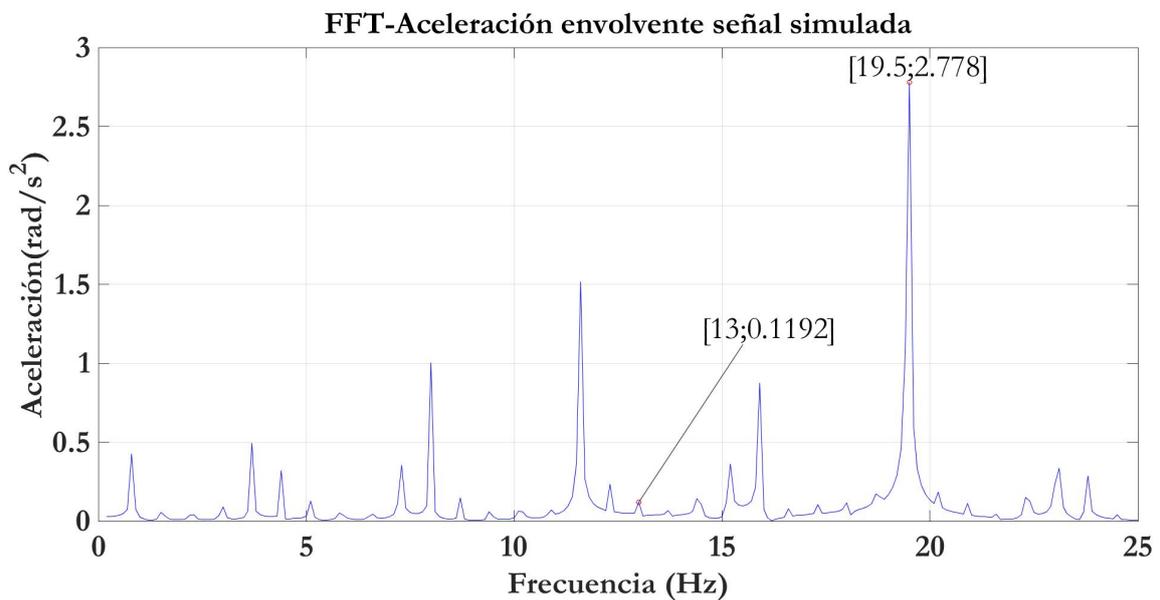


Figura 66: Frecuencia de entrada f_g y frecuencia de salida f_p del espectro de la envolvente de la señal simulada con carga L1. **Fuente:** Autor

En la Figura 67 se presenta la frecuencia de entrada f_g y frecuencia de salida f_p del espectro de la envolvente de la señal del acelerómetro A2 con carga L1.

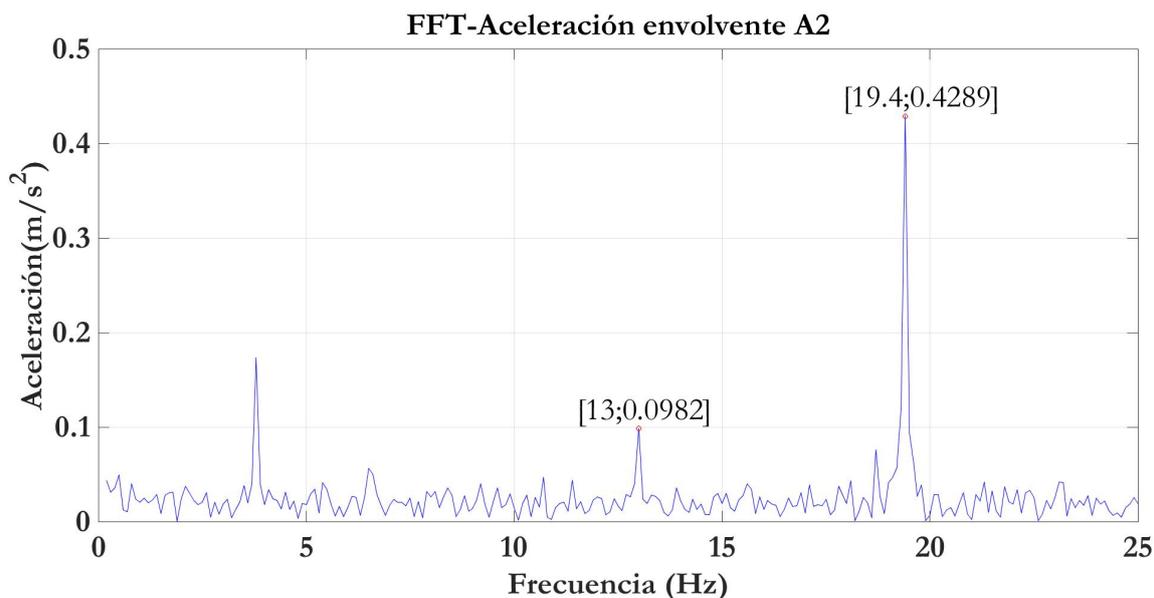


Figura 67: Frecuencia de entrada f_g y frecuencia de salida f_p del espectro de la envolvente de la señal del acelerómetro A2 con carga L1. **Fuente:** Autor

En la Figura 68 se presenta el espectro de la envolvente de la señal simulada y se indica su frecuencia de engranaje f_m con carga L2.

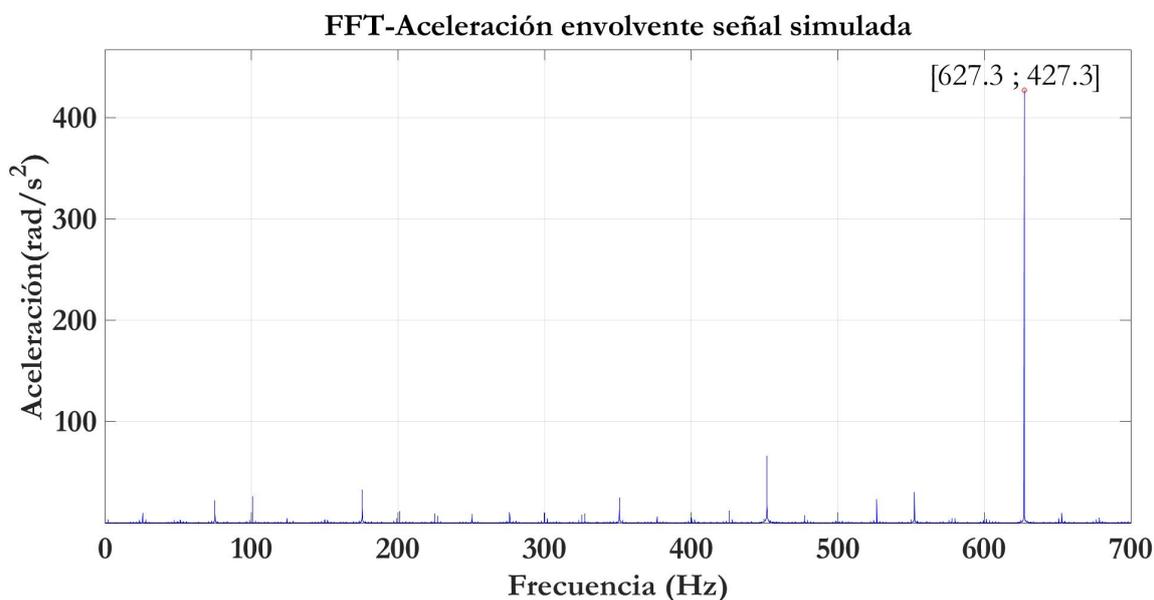


Figura 68: Espectro de la envolvente de señal simulada con carga L2. **Fuente:** Autor

En la Figura 69 se presenta el espectro de la envolvente de la señal del acelerómetro A2 con carga L2, y se indica su frecuencia de engranaje f_m .

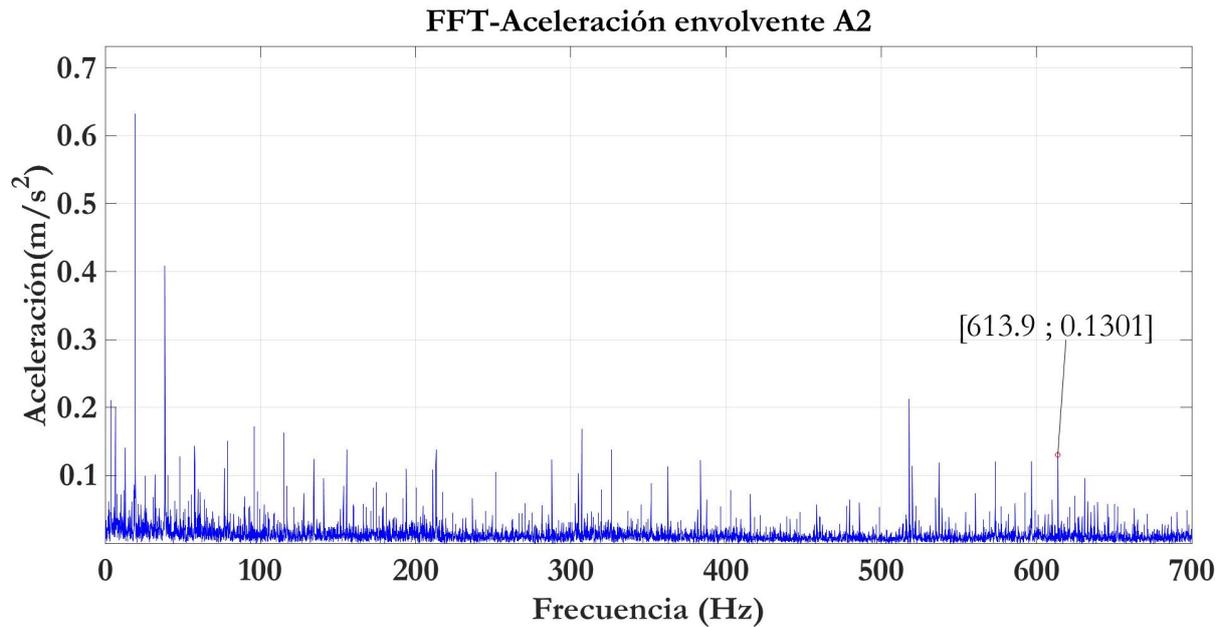


Figura 69: Espectro de la envolvente de señal de acelerómetro A2 con carga L2. **Fuente:** Autor

En la Figura 70 se presenta la frecuencia de entrada f_g y frecuencia de salida f_p del espectro de la envolvente de la señal simulada con carga L2.

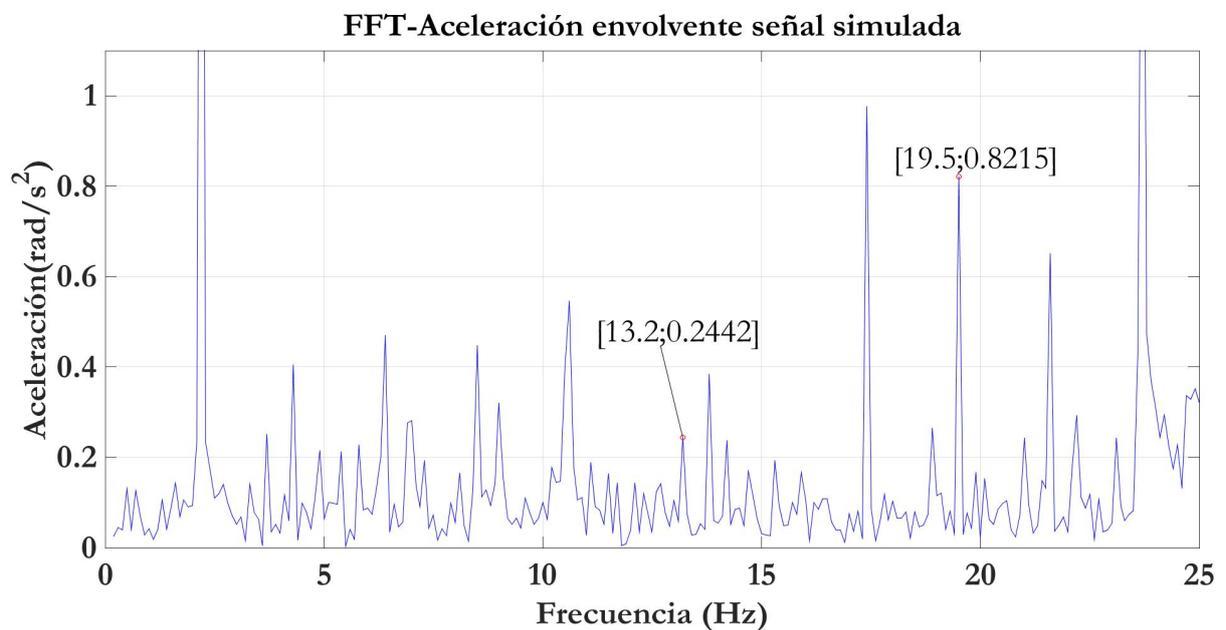


Figura 70: Frecuencia de entrada f_g y frecuencia de salida f_p del espectro de la envolvente de la señal simulada con carga L2. **Fuente:** Autor

En la Figura 71 se presenta la frecuencia de entrada f_g y frecuencia de salida f_p del espectro de la envolvente de la señal del acelerómetro A2 con carga L2.

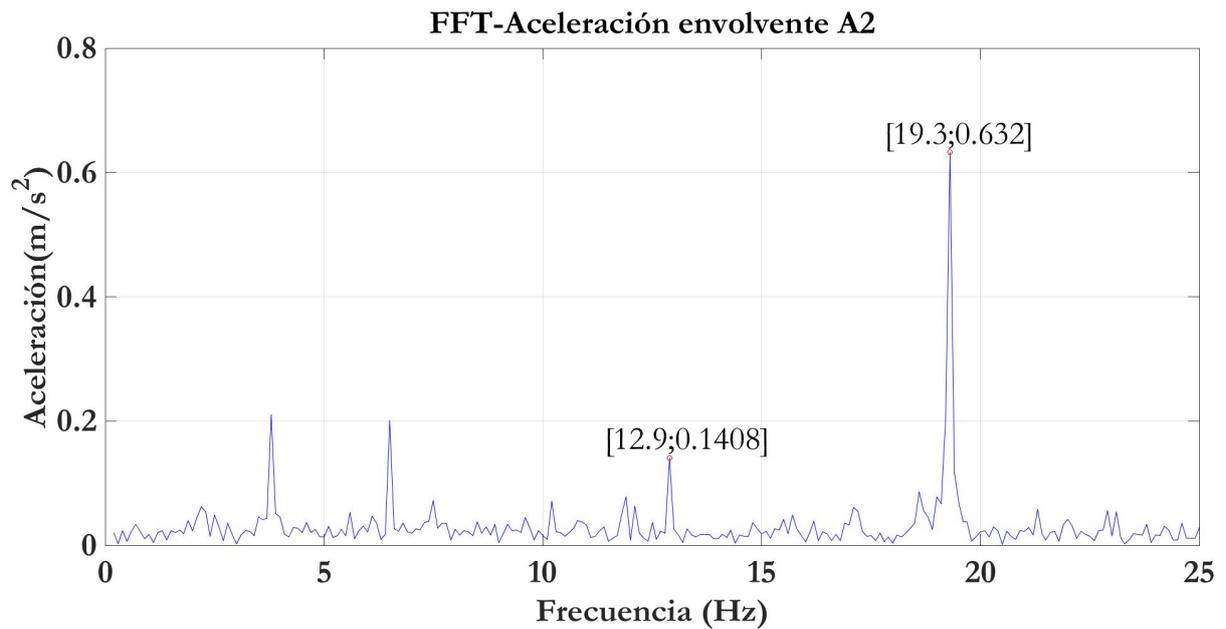


Figura 71: Frecuencia de entrada f_g y frecuencia de salida f_p del espectro de la envolvente de la señal del acelerómetro A2 con carga L2. **Fuente:** Autor

En la Figura 72 se presenta el espectro de la envolvente de la señal simulada y se indica su frecuencia de engranaje f_m con carga L3.

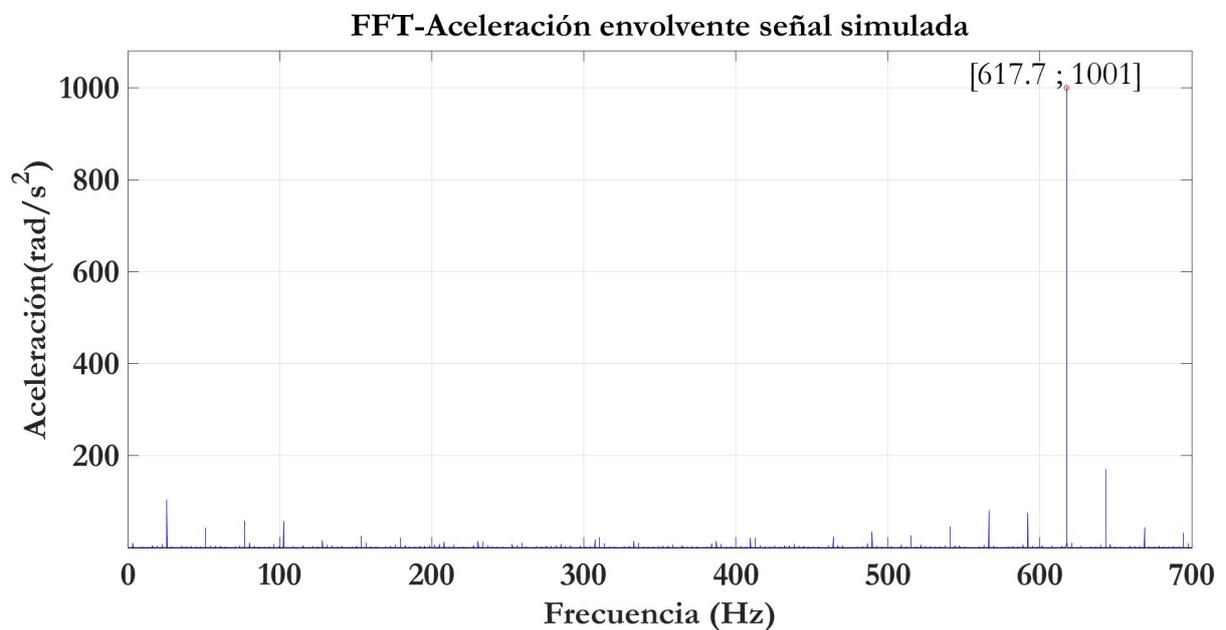


Figura 72: Espectro de la envolvente de señal simulada con carga L3. **Fuente:** Autor

En la Figura 73 se presenta el espectro de la envolvente de la señal del acelerómetro A2 con carga L3, y se indica su frecuencia de engranaje f_m .

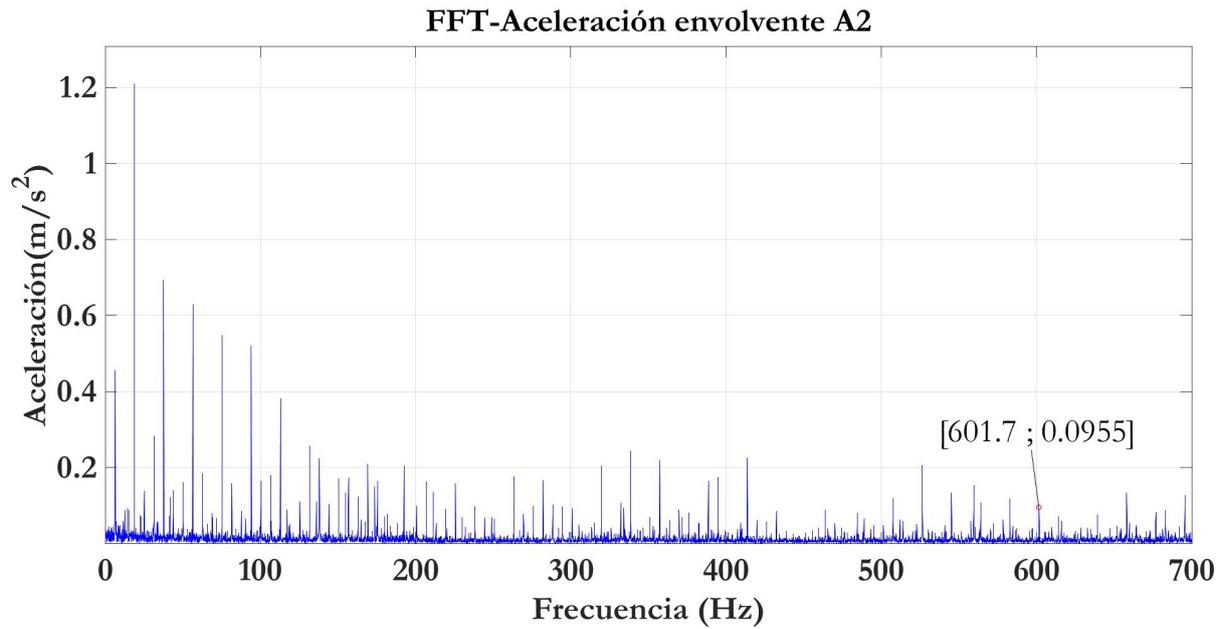


Figura 73: Espectro de la envolvente de señal de acelerómetro A2 con carga L3. **Fuente:** Autor

En la Figura 74 se presenta la frecuencia de entrada f_g y frecuencia de salida f_p del espectro de la envolvente de la señal simulada con carga L3.

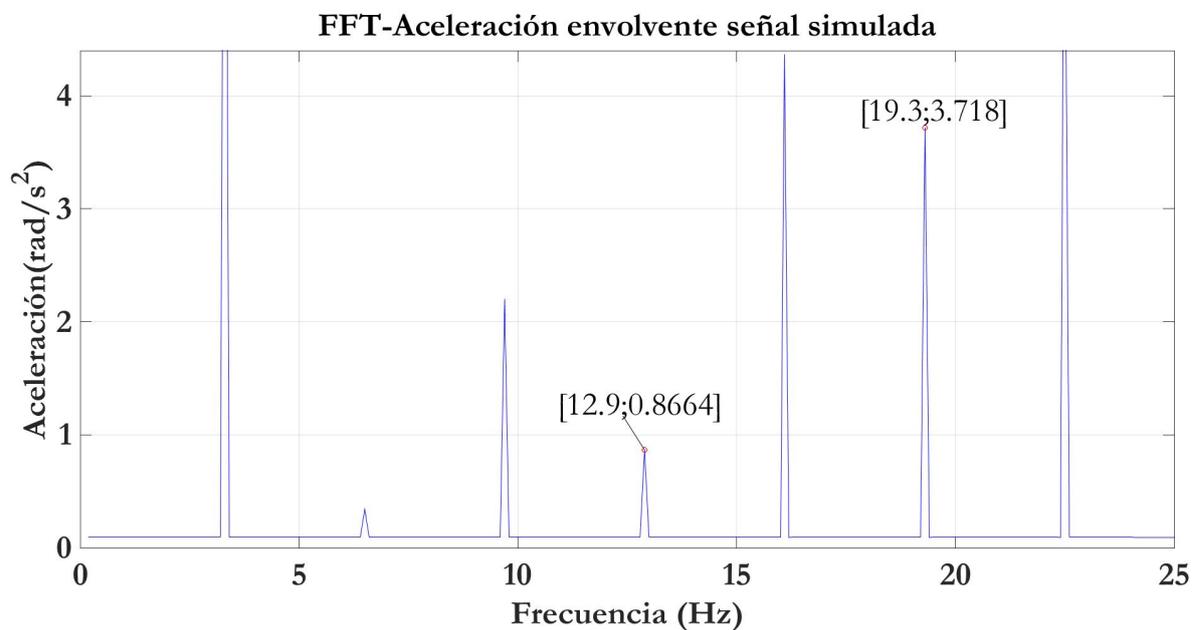


Figura 74: Frecuencia de entrada f_g y frecuencia de salida f_p del espectro de la envolvente de la señal simulada con carga L3. **Fuente:** Autor

En la Figura 75 se presenta la frecuencia de entrada f_g y frecuencia de salida f_p del espectro de la envolvente de la señal del acelerómetro A2 con carga L3.

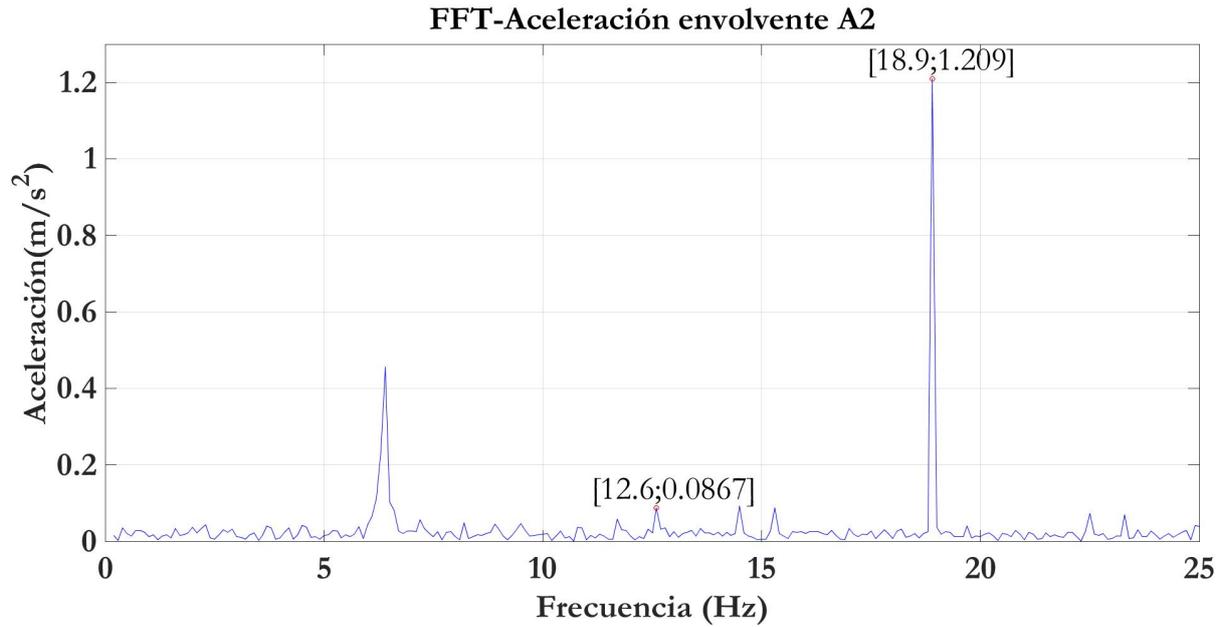


Figura 75: Frecuencia de entrada f_g y frecuencia de salida f_p del espectro de la envolvente de la señal del acelerómetro A2 con carga L3. **Fuente:** Autor

En la Tabla 13 se presenta los valores de las frecuencias (f_m , f_g , f_p) de los espectros de la envolvente de la señal simulada y de las señales de los acelerómetros (A1, A2, A3, A4), los valores de las frecuencias características del espectro de la envolvente de la señal simulada y la señal experimental del acelerómetro (A2), se aprecian en las Figuras 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74 y 75. Los espectros de la envolvente de los acelerómetros (A1, A3, A4) se encuentran los anexos en la Subsección A.3.

4. Análisis y discusión de resultados

Tabla 13: Comparación entre el espectro de la envolvente de la señal experimental y señal simulada. **Fuente:** Autor.

	Frecuencia de Engranaje			Frecuencia de entrada			Frecuencia de salida		
	Frecuencia	Amplitud	Error porcentual	Frecuencia	Amplitud	Error porcentual	Frecuencia	Amplitud	Error porcentual
Carga L1									
Acelerómetro 1	618.3	0.0509	2.41 %	19.4	0.05767	0.51 %	13	0.1078	0.00 %
Acelerómetro 2	619.6	0.1012	2.21 %	19.4	0.4289	0.51 %	13	0.0982	0.00 %
Acelerómetro 3	618.3	0.0189	2.41 %	19.4	0.3823	0.51 %	13	0.1074	0.00 %
Acelerómetro 4	618.3	0.0184	2.41 %	19.4	0.5317	0.51 %	13	0.1401	0.00 %
Modelo	633.6	92.52		19.5	2.778		13	0.1192	
Carga L2									
Acelerómetro 1	613.9	0.1543	2.14 %	19.3	0.05311	1.03 %	12.9	0.102	2.27 %
Acelerómetro 2	613.9	0.1301	2.14 %	19.3	0.632	1.03 %	12.9	0.1408	2.27 %
Acelerómetro 3	613.9	0.2609	2.14 %	19.3	0.4722	1.03 %	12.9	0.3397	2.27 %
Acelerómetro 4	613.9	0.06998	2.14 %	19.3	0.7445	1.03 %	12.9	0.5211	2.27 %
Modelo	627.3	427.3		19.5	0.8215		13.2	0.2442	
Carga L3									
Acelerómetro 1	601.7	0.2157	2.59 %	18.9	0.6087	2.07 %	12.6	0.1953	2.33 %
Acelerómetro 2	601.7	0.0955	2.59 %	18.9	1.209	2.07 %	12.6	0.0867	2.33 %
Acelerómetro 3	601.7	0.0907	2.59 %	18.9	0.7631	2.07 %	12.6	0.3834	2.33 %
Acelerómetro 4	601.7	0.0715	2.59 %	18.9	1.265	2.07 %	12.6	0.2964	2.33 %
Modelo	617.7	1001		19.3	3.718		12.9	0.8664	

En la Tabla 13 se muestra que los errores porcentuales de las frecuencias características de los espectros de la envolvente de la señal simulada con respecto a las frecuencias características los espectros de la envolvente de las señales experimentales varían entre 0 % hasta 2,59 %, de igual manera se observó que las amplitudes de los picos ubicados en las frecuencias de engranaje, aumentan directamente con respecto a la carga. Así mismo, las amplitudes entre datos experimentales y datos simulados no pueden ser comparadas, dado que la naturaleza de las señales de vibración son diferentes, pues en datos experimentales es traslacional y en datos simulados es torsional. Además, se logró identificar el patrón de vibraciones de caja de engranajes en las tres condiciones de operación.

De igual manera en los espectros de la envolvente, se considera que la variación entre las frecuencias características obtenidas de datos experimentales con respecto a las frecuencias de datos simulados, se dio debido a las consideraciones: error estático de

transmisión variante en el tiempo igual a cero, par torsional generado por la fricción de la caja nulo y los ejes y rodamientos son elementos totalmente rígidos. Inclusive con estas consideraciones se logró un modelo que permite obtener un patrón de vibraciones aceptable con respecto a datos experimentales. Además, se observó que el espectro de la envolvente de datos simulados muestra una amplificación de pico de la frecuencia de engranaje f_m , con respecto al espectro de la FFT, mientras que el espectro de la envolvente de datos experimentales, se aprecia una amplificación en los picos de la frecuencia de entrada f_g y frecuencia de salida f_p , con respecto al espectro de la FFT.

4.3.3. Comparación de espectro de potencia

En esta sección se comparan las frecuencias características de los espectros de potencia de la señal simulada y de las señales obtenidas de los acelerómetros (A1, A2, A3, A4), en las condiciones de operación asociadas a las cargas L1, L2 y L3. Solamente se comparó los valores de frecuencia debido a que la naturaleza de las series temporales son diferentes, pues la señal simulada es torsional y la señal experimental es traslacional y no son comparables en amplitud.

En la Figura 76 se presenta el espectro de potencia de la señal simulada y se indica la frecuencia de engranaje f_m del espectro con carga L1.

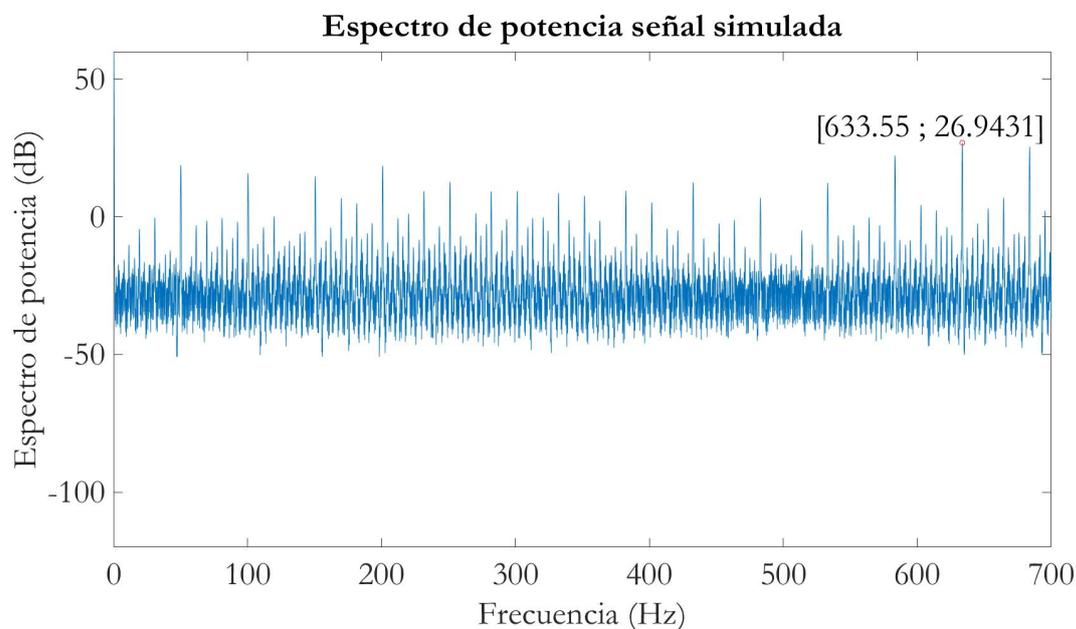


Figura 76: Espectro de potencia de señal simulada con carga L1. **Fuente:** Autor

En la Figura 77 se presenta el espectro de potencia de la señal del acelerómetro A2 y se indica la frecuencia de engranaje f_m del espectro con carga L1.

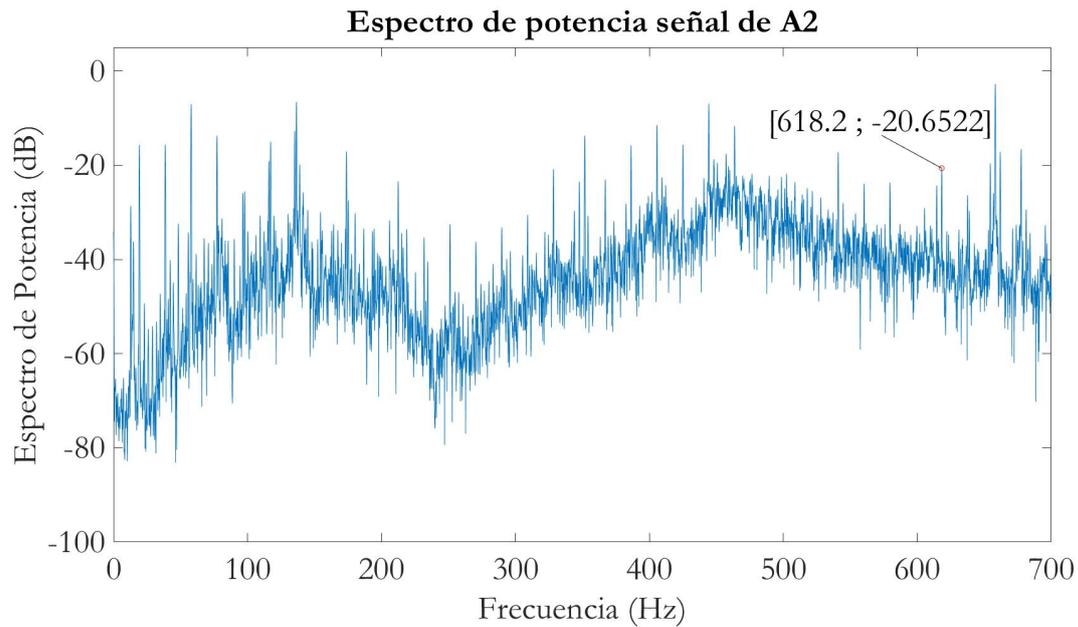


Figura 77: Espectro de potencia de señal de acelerómetro A2 con carga L1. **Fuente:** Autor

En la Figura 78 se indica la frecuencia de entrada f_g y la frecuencia de salida f_p de espectro de potencia de la señal simulada con carga L1.

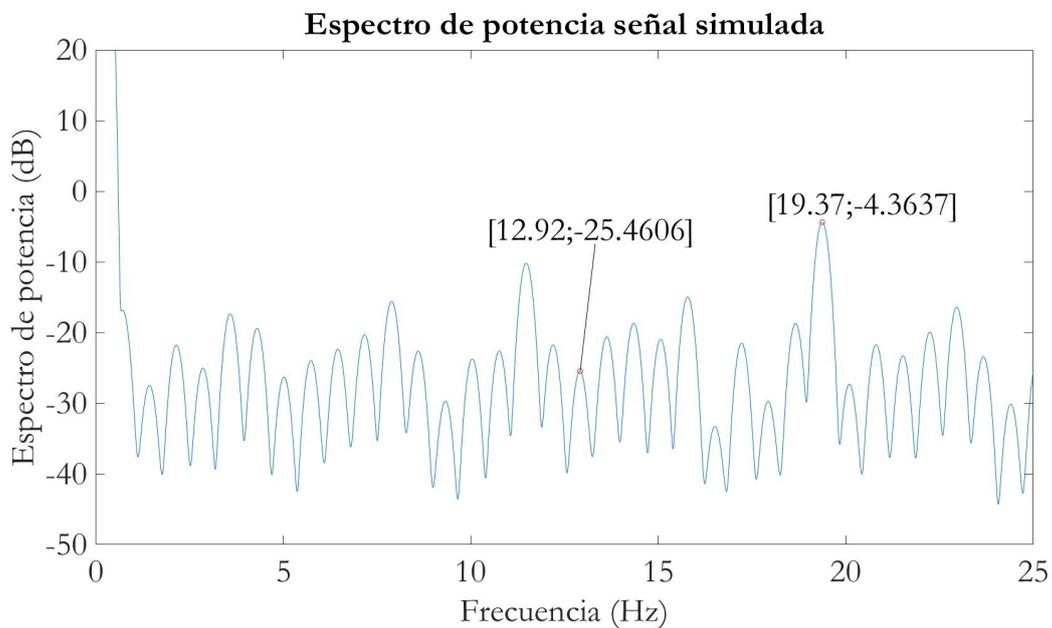


Figura 78: Frecuencia de entrada f_g y frecuencia de salida f_p del espectro de potencia de la señal simulada con carga L1. **Fuente:** Autor

En la Figura 79 se indica la frecuencia de entrada f_g y la frecuencia de salida f_p de espectro de potencia de la señal del acelerómetro A2 con carga L1.

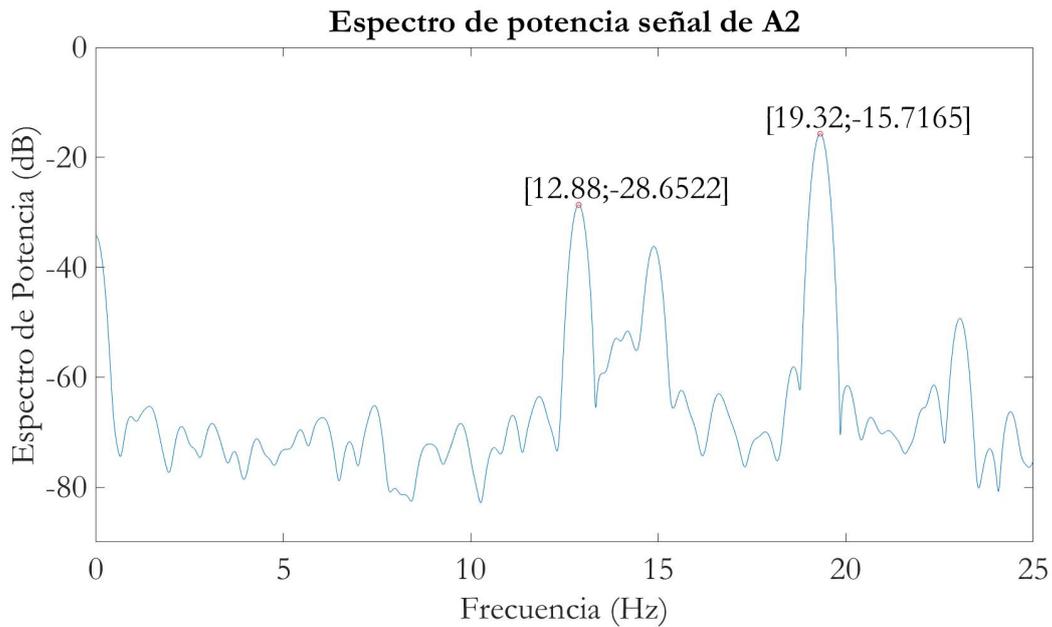


Figura 79: Frecuencia de entrada f_g y frecuencia de salida f_p del espectro de potencia de la señal del acelerómetro A2 con carga L1. **Fuente:** Autor

En la Figura 80 se presenta el espectro de potencia de la señal simulada y se indica la frecuencia de engranaje f_m del espectro con carga L2.

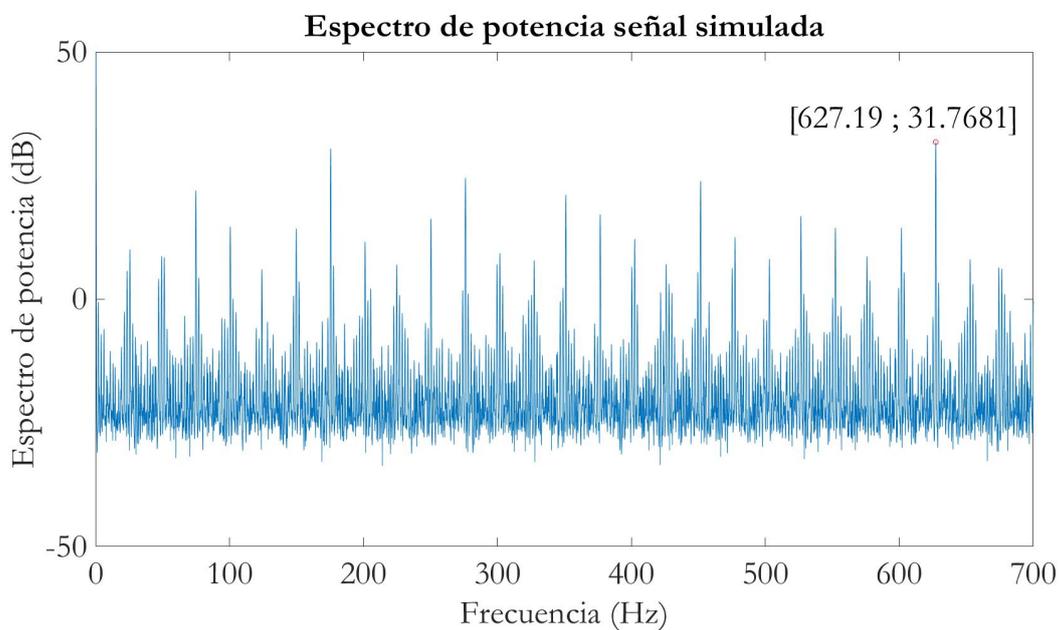


Figura 80: Espectro de potencia de señal simulada con carga L2. **Fuente:** Autor

En la Figura 81 se presenta el espectro de potencia de la señal del acelerómetro A2 y se indica la frecuencia de engranaje f_m del espectro con carga L2.

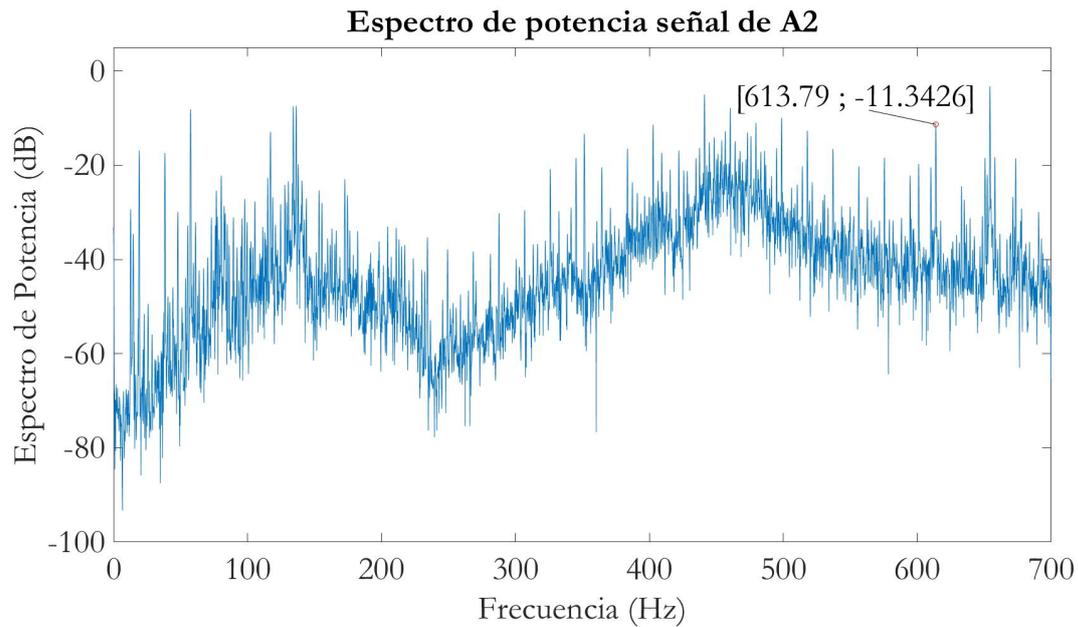


Figura 81: Espectro de potencia de señal de acelerómetro A2 con carga L2. **Fuente:** Autor

En la Figura 82 se indica la frecuencia de entrada f_g y la frecuencia de salida f_p de espectro de potencia de la señal simulada con carga L2.

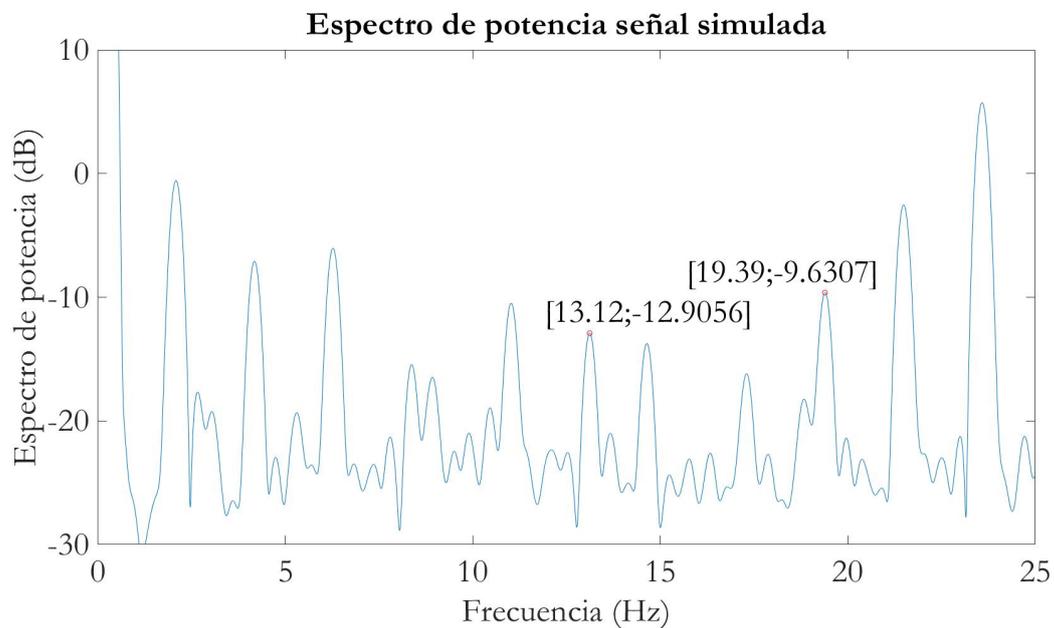


Figura 82: Frecuencia de entrada f_g y frecuencia de salida f_p del espectro de potencia de la señal simulada con carga L2. **Fuente:** Autor

En la Figura 83 se indica la frecuencia de entrada f_g y la frecuencia de salida f_p de espectro de potencia de la señal del acelerómetro A2 con carga L2.

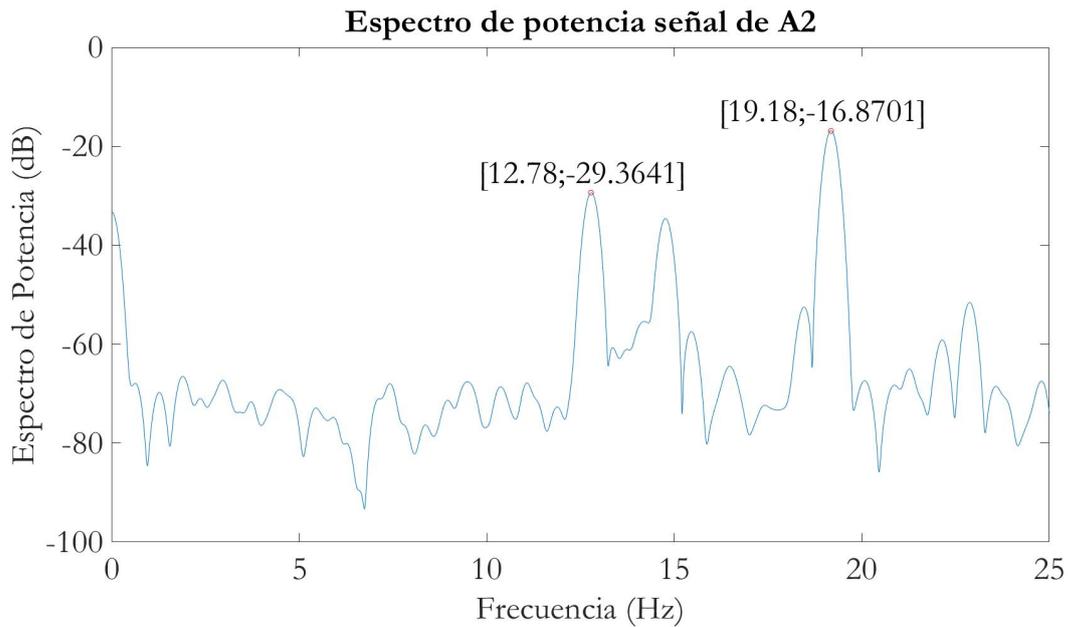


Figura 83: Frecuencia de entrada f_g y frecuencia de salida f_p del espectro de potencia de la señal del acelerómetro A2 con carga L2. **Fuente:** Autor

En la Figura 84 se presenta el espectro de potencia de la señal simulada y se indica la frecuencia de engranaje f_m del espectro con carga L3.

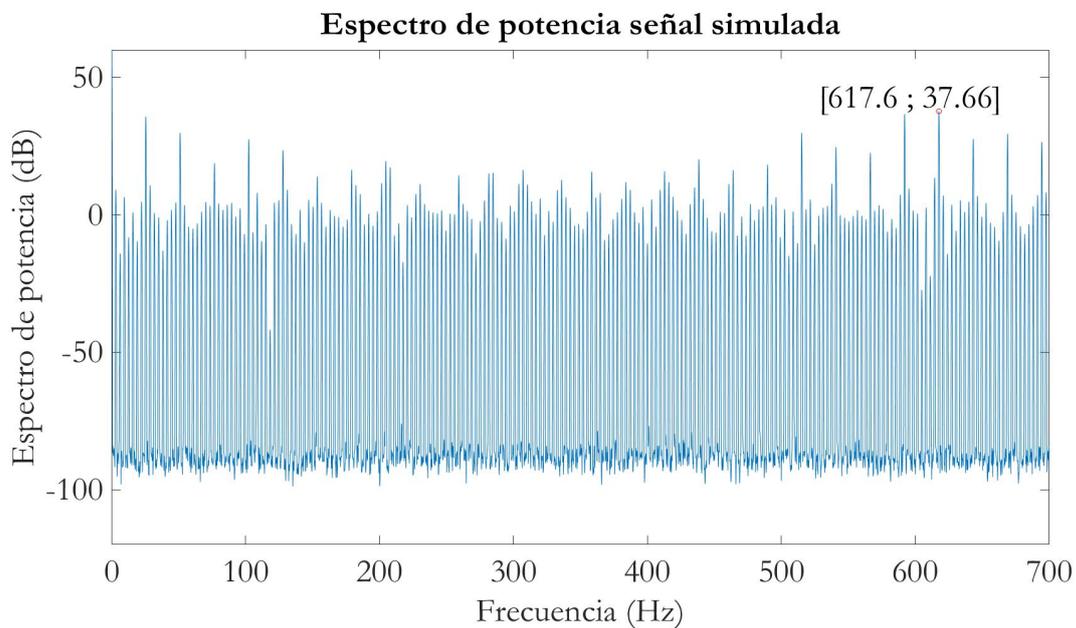


Figura 84: Espectro de potencia de señal simulada con carga L3. **Fuente:** Autor

En la Figura 85 se presenta el espectro de potencia de la señal del acelerómetro A2 y se indica la frecuencia de engranaje f_m del espectro con carga L3.

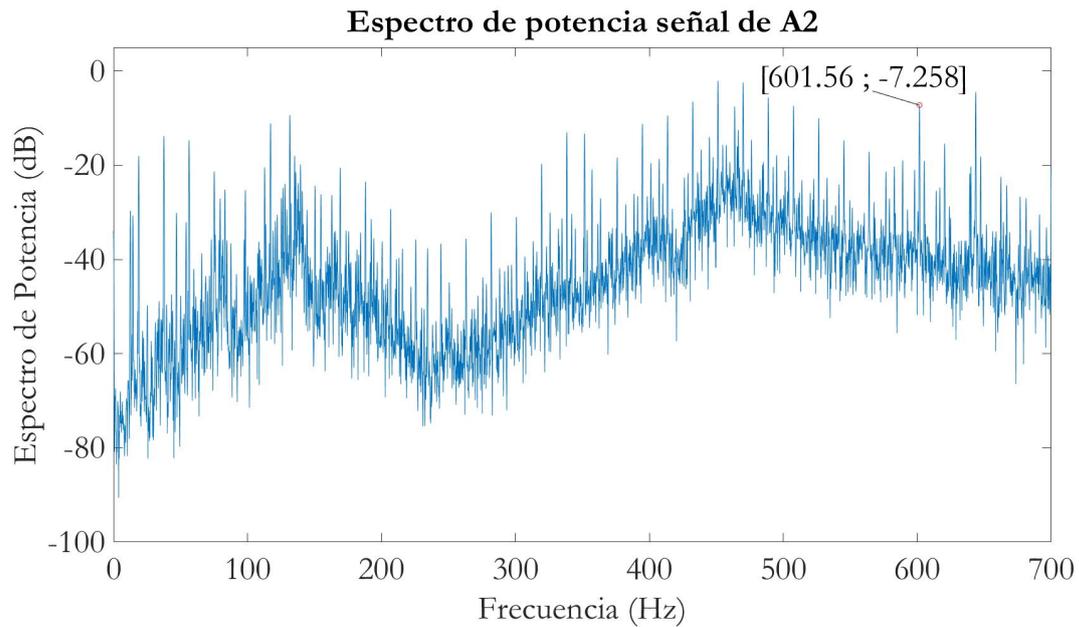


Figura 85: Espectro de potencia de señal de acelerómetro A2 con carga L3. **Fuente:** Autor

En la Figura 86 se indica la frecuencia de entrada f_g y la frecuencia de salida f_p de espectro de potencia de la señal simulada con carga L3.

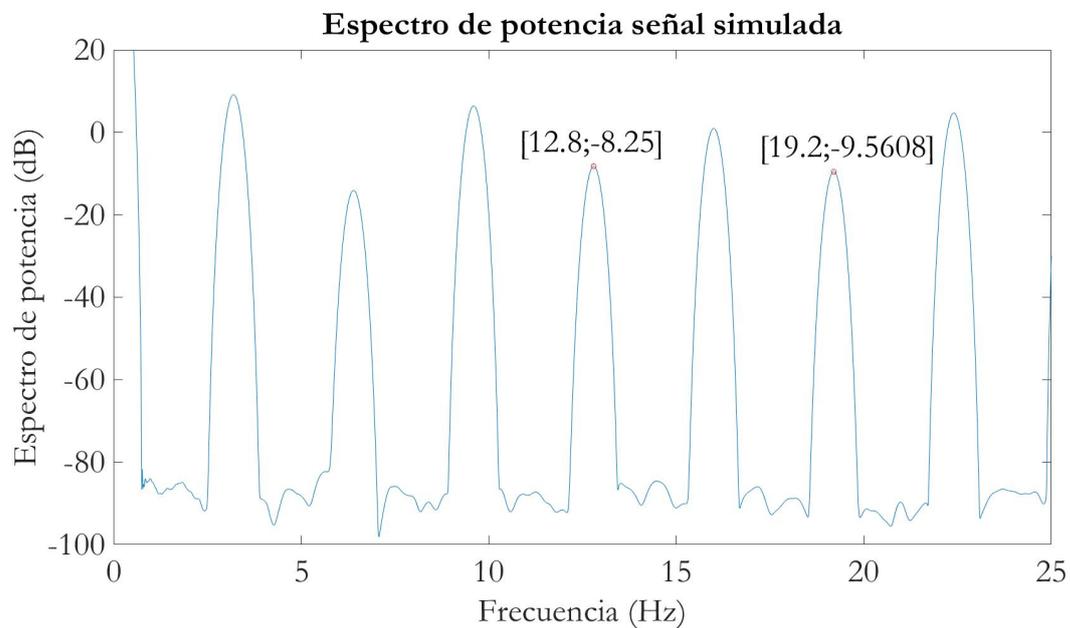


Figura 86: Frecuencia de entrada f_g y frecuencia de salida f_p del espectro de potencia de la señal simulada con carga L3. **Fuente:** Autor

En la Figura 87 se indica la frecuencia de entrada f_g y la frecuencia de salida f_p de espectro de potencia de la señal del acelerómetro A2 con carga L3.

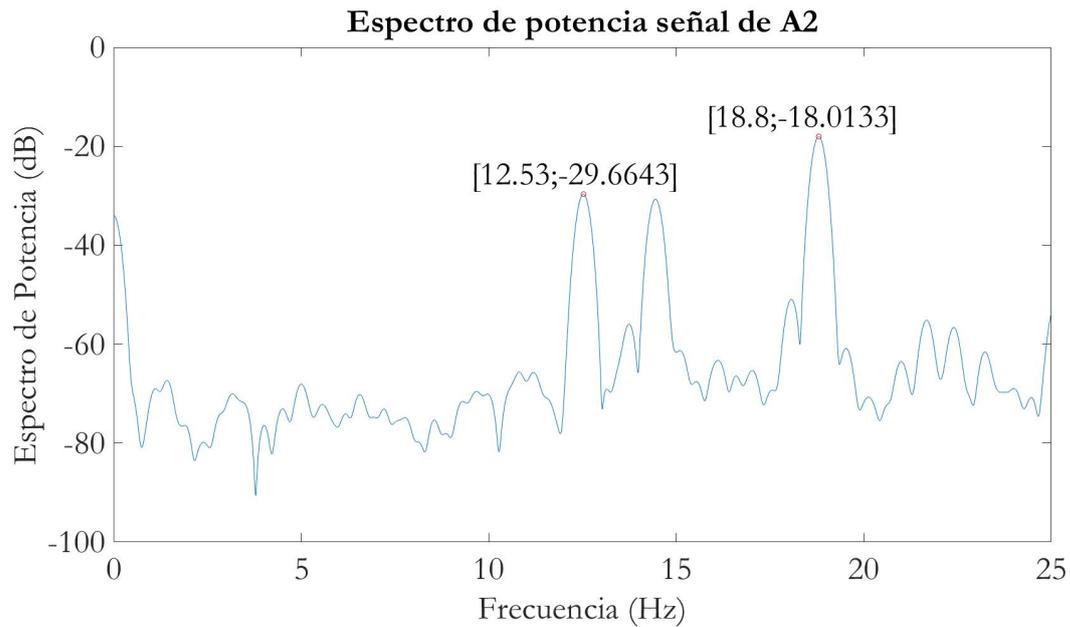


Figura 87: Frecuencia de entrada f_g y frecuencia de salida f_p del espectro de potencia de la señal del acelerómetro A2 con carga L3. **Fuente:** Autor

En la Tabla 14 se presenta los valores de las frecuencias características (f_m , f_g , f_p) de los espectros de potencia de la señal simulada y de las señales de los acelerómetros (A1, A2, A3, A4) en las condiciones de operación, asociadas a las cargas L1, L2 y L3, los valores las frecuencias características de la señal simulada y de la señal experimental del acelerómetro (A2), se aprecia en las Figuras 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86 y 87. Los espectros de potencia de los acelerómetros (A1, A3, A4) se encuentran en los anexos en la Subsección A.4.

4. Análisis y discusión de resultados

Tabla 14: Comparación entre el espectro de potencia de la señal experimental y señal simulada. **Fuente:** Autor.

	Frecuencia de Engranaje			Frecuencia de entrada			Frecuencia de salida		
	Frecuencia	Amplitud	Error porcentual	Frecuencia	Amplitud	Error porcentual	Frecuencia	Amplitud	Error porcentual
Carga L1									
Acelerómetro 1	618.2	-14.7543	2.42 %	19.32	-20.4214	0.26 %	12.89	-58.7579	0.23 %
Acelerómetro 2	618.2	-20.4214	2.42 %	19.32	-15.7165	0.26 %	12.88	-28.6522	0.31 %
Acelerómetro 3	618.2	-123.6213	2.42 %	19.32	-30.0561	0.26 %	12.86	-64.8648	0.46 %
Acelerómetro 4	618.2	-11.4899	2.42 %	19.31	-38.2694	0.31 %	12.89	-42.8055	0.23 %
Modelo	633.55	26.9431		19.37	-4.3637		12.92	-25.4606	
Carga L2									
Acelerómetro 1	613.79	-8.3986	2.14 %	19.18	-20.0734	1.03 %	12.79	-60.41	2.52 %
Acelerómetro 2	613.79	-11.3426	2.14 %	19.18	-29.3641	1.03 %	12.78	-29.3641	2.59 %
Acelerómetro 3	613.79	-4.6025	2.14 %	19.18	-29.0104	1.03 %	12.78	-62.8611	2.59 %
Acelerómetro 4	613.79	-3.82	2.14 %	19.18	-37.4161	1.03 %	12.77	-42.8175	2.67 %
Modelo	627.19	31.7681		19.38	-9.6307		13.12	-12.9056	
Carga L3									
Acelerómetro 1	601.57	-10.5107	2.60 %	18.79	-17.7556	2.08 %	12.52	-58.9276	2.19 %
Acelerómetro 2	601.56	-7.258	2.60 %	18.8	-18.0133	2.03 %	12.52	-29.6643	2.19 %
Acelerómetro 3	601.57	-5452	2.60 %	18.79	-27.607	2.08 %	12.5	-62.0476	2.34 %
Acelerómetro 4	601.57	-0.5884	2.60 %	18.79	-35.6516	2.08 %	12.51	-42.5648	2.27 %
Modelo	617.6	37.6561		19.19	-9.587		12.8	-8.25	

En la Tabla 14 se muestra que en las frecuencias características de los espectros de potencia de las señales simuladas, los errores porcentuales con respecto a las frecuencias características de los espectros de potencia de las señales experimentales varían entre 0,23 % hasta 2,60 %, de igual manera se observó que las amplitudes de los picos ubicados en las frecuencias de engranaje f_m , aumentan directamente con respecto a la carga. Así mismo, las amplitudes entre datos experimentales y datos simulados no pueden ser comparadas debido a la naturaleza de las señales de vibración son diferentes, pues en datos experimentales es traslacional y en datos simulados es torsional. Además de lograr identificar el patrón de vibraciones de caja de engranajes en las tres condiciones de operación.

De igual manera en los espectros de potencia, se considera que la variación entre las frecuencias características obtenidas de datos experimentales con respecto a las

frecuencias de datos simulados, se dio debido a las consideraciones: error estático de transmisión variante en el tiempo igual a cero, par torsional generado por la fricción de la caja nulo y los ejes y rodamientos son elementos totalmente rígidos. Inclusive con estas consideraciones se logró un modelo que permite obtener un patrón de vibraciones aceptables con respecto a datos experimentales. Los espectros de potencia de los datos simulados son más uniformes con respecto a los espectros de potencia de datos experimentales.

CONCLUSIONES

Con este proyecto se particularizó un modelo matemático de caja de engranajes en condición de no fallo para la determinación de los patrones de vibración en el espectro de la FFT, espectro de la envolvente y espectro de potencia, del cual se puede concluir:

- Se logró caracterizar los coeficientes de rigidez y amortiguamiento en el dominio del tiempo como una función periódica, con un tiempo de simple y doble contacto, el coeficiente de rigidez se presentó en la Ecuación 73 y el coeficiente de amortiguamiento en la Ecuación 74. El modelar el coeficiente de amortiguamiento como proporcional al coeficiente de la rigidez brindó ventajas al modelo de caja de engranajes como tener un modelo lineal y facilidad de programación.
- Para el trabajo se presentó un sistema de dos grados de libertad netamente torsional, que se modela en la Ecuación 76, con posible pérdida de contacto entre dientes modelada en la Ecuación 77, el modelo de caja de engranajes se programó y simuló en Simulink con el método numérico de dormand-prince (ode5) y un paso de tiempo de $1 \times 10^{-5}s$, que con un posterior sub muestreo, permitió tener una frecuencia de muestreo de $50000 Hz$, la señal de vibración obtenida fue estable con los parámetros antes mencionados.
- En el modelo propuesto se logró identificar los patrones de vibraciones de engranajes en condición de no fallo en el espectro de la FFT, espectro de la envolvente y espectro de potencia en las condiciones de operaciones asociadas a las cargas L1, L2 y L3, se identificaron las frecuencias características como: frecuencia de engranaje f_m , frecuencia de entrada f_g y frecuencia de salida f_p en los diferentes espectros. Además, al comparar las frecuencias de bandas laterales ($f_{1,1}, f_{1,2}, f_{2,1}, f_{2,2}$) de los espectros de la FFT de las señales simulada con las frecuencias calculadas, se obtuvieron errores porcentuales entre 0% a 1,52%.
- En la comparación de las frecuencias características de los espectros de la FFT, envolvente y potencia de la señal simulada y las señales de los acelerómetros (A1, A2, A3, A4), se evidenció que las amplitudes no son comparables por el tipo de vibración estudiada, para los acelerómetros es traslacional y para la señal simulada es torsional. Pero las frecuencias características si son comprables con respecto, se obtuvieron errores porcentuales para las frecuencias de engranaje f_m entre 2,14% a

2,60 %, para las frecuencias de entrada entre 0,26 % a 2,08 % y para las frecuencias de salida entre 0 % a 2,67 % en las condiciones de operación, asociadas a las cargas L1, L2 y L3. Con valores expuestos se puede observar que el modelo es válido para la determinación de patrones de vibración de la caja de engranaje en condición de no fallo, bajo las condiciones propuestas.

Recomendaciones

Para el desarrollo de trabajos con temas similares se realiza las siguientes recomendaciones:

- Considerar los coeficientes de rigidez y amortiguamiento como funciones periódicas variantes en el tiempo dependiendo del número de pares de dientes en contacto.
- Considerar el coeficiente de amortiguamiento como una función proporcional a la rigidez.
- Considerar una función de posible pérdida de contacto.
- Considerar un paso de tiempo en la simulación suficiente para que señal se encuentre en estado estable.

Trabajos futuros

El trabajo realizado tiene consideraciones como: error estático de transmisión variante en el tiempo igual a cero, par torsional generado por la fricción de la caja nulo y los ejes y rodamientos son elementos totalmente rígidos, por lo que se propone los siguientes temas para trabajos futuros:

- Modelado de una caja de engranajes considerando los ejes y rodamientos como elementos flexibles.
- Modelado de error estático de transmisión variante en el tiempo.
- Modelado de una caja de engranajes en condición de fallo para la determinación de los patrones de vibración.
- Modelado de una caja de engranajes helicoidales.
- Modelado de una caja de engranajes considerando los pares provocados por la fricción.

Glosario

Amortiguamiento Es la cualidad de los materiales que produce disipación interna de energía en un ciclo de deformación [53].

Caja de engranajes Son elementos usados en la transmisión de potencia, con el objetivo de cambios de velocidades, par y/o dirección de giro [1].

Energía Es la capacidad de hacer trabajo, pueden existir como: energía potencial, cinética, térmica, química, nuclear, eléctrica entre otras [80].

Engranajes Son aquellos elementos que tienen como objetivo principal transmitir potencia y movimiento entre dos ejes por medio del constante contacto de sus dientes [20].

Modelo matemático Es la representación de un sistema de la vida real en lenguaje matemático [81].

Par de carga Es el par que actúa como resistencia impuesta al rotor [82].

Particularizar Radica en pasar de una consideración de un conjunto de elementos establecido a la consideración de un conjunto más pequeño o incluso de un solo elemento, contenido en el conjunto establecido [83].

Rigidez es la cualidad que tienen los elementos de almacenar energía potencial [31].

Simulación Es una imitación de la dinámica de un proceso o sistema del mundo real a lo largo del tiempo [84].

REFERENCIAS

- [1] X. Liang, M. J. Zuo, and Z. Feng, “Dynamic modeling of gearbox faults: A review,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 98, pp. 852–876, 2018. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327017302820>
- [2] M. Byrtus and V. Zeman, “On modeling and vibration of gear drives influenced by nonlinear couplings,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 46, no. 3, pp. 375–397, 2011. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0094114X10001898>
- [3] L. A. Mora, *Mantenimiento-planeación, ejecución y control*. Alfaomega Grupo Editor, 2009.
- [4] C. M. Tan and N. Raghavan, “Imperfect predictive maintenance model for multi-state systems with multiple failure modes and element failure dependency,” in *2010 Prognostics and System Health Management Conference*, 2010, pp. 1–12.
- [5] C. Peeters, Q. Leclère, J. Antoni, P. Lindahl, J. Donnal, S. Leeb, and J. Helsen, “Review and comparison of tachless instantaneous speed estimation methods on experimental vibration data,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 129, pp. 407–436, 2019. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327019301153>
- [6] I. Dadon, N. Koren, R. Klein, and J. Bortman, “A realistic dynamic model for gear fault diagnosis,” *Engineering Failure Analysis*, vol. 84, pp. 77–100, 2018. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1350630717308580>
- [7] V. Sharma and A. Parey, “Frequency domain averaging based experimental evaluation of gear fault without tachometer for fluctuating speed conditions,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 85, pp. 278–295, 2017. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327016302977>
- [8] W. Mark, C. Reagor, and D. McPherson, “Assessing the role of plastic deformation in gear-health monitoring by precision measurement of failed gears,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 21, no. 1, pp. 177–192, 2007. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327006000410>
- [9] F. Chaari, T. Fakhfakh, and M. Haddar, “Analytical modelling of spur gear tooth crack and influence on gearmesh stiffness,” *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 28, no. 3, pp. 461–468, 2009. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0997753808000867>
- [10] R. Randall, “The application of fault simulation to machine diagnostics and prognostics,” *International Journal of Acoustics and Vibrations*, vol. 14, pp. 81–89, 06 2009.

- [11] Randall, “The use of simulation models to generate data corresponding to faults in machines,” *Proceedings of 2009 8th International Conference on Reliability, Maintainability and Safety, ICRMS 2009*, pp. 934 – 939, 08 2009.
- [12] H. Nevzat Özgüven and D. Houser, “Mathematical models used in gear dynamics—a review,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 121, no. 3, pp. 383–411, 1988. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X88803651>
- [13] D. C. H. Yang and Z. S. Sun, “A Rotary Model for Spur Gear Dynamics,” *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, vol. 107, no. 4, pp. 529–535, Dec. 1985. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1115/1.3260759>
- [14] D. C. H. Yang and J. Y. Lin, “Hertzian Damping, Tooth Friction and Bending Elasticity in Gear Impact Dynamics,” *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, vol. 109, no. 2, pp. 189–196, Jun. 1987. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1115/1.3267437>
- [15] H. H. Lin and C.-H. Liou, “A parametric study of spur gear dynamics,” University of Memphis Tennessee, Tech. Rep., 1998.
- [16] A. Kahraman and G. W. Blankenship, “Experiments on Nonlinear Dynamic Behavior of an Oscillator With Clearance and Periodically Time-Varying Parameters,” *Journal of Applied Mechanics*, vol. 64, no. 1, pp. 217–226, Mar. 1997. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1115/1.2787276>
- [17] R. Ma and Y. Chen, “Research on the dynamic mechanism of the gear system with local crack and spalling failure,” *Engineering Failure Analysis*, vol. 26, pp. 12–20, 2012. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1350630712001069>
- [18] W. Bartelmus, “Mathematical modelling and computer simulations as an aid to gearbox diagnostics,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 15, no. 5, pp. 855–871, 2001. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327001914116>
- [19] P. Velez and M. Maatar, “A mathematical model for analyzing the influence of shape deviations and mounting errors on gear dynamic behaviour,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 191, no. 5, pp. 629–660, 1996. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X96901480>
- [20] R. Norton and G. García, *Diseño de máquinas*. Pearson educación, Prentice Hall, 2016. [Online]. Available: <https://books.google.com.ec/books?id=BA5kPQAACAAJ>
- [21] A. N. S. Institute, “Gear nomenclature, definition of terms with symbols,” 2005.
- [22] S. P. Radzevich, *Dudley’s handbook of practical gear design and manufacture*. CRC press, 2016.
- [23] M. Mattolini, *Cálculo y diseño de engranajes y reductores de velocidad*. LÍbryco, 2015. [Online]. Available: <https://books.google.com.ec/books?id=69ihnQAACAAJ>

- [24] W. Yu, “Dynamic modelling of gear transmission systems with and without localized tooth defects,” Ph.D. dissertation, Queen’s University, 07 2017.
- [25] M. Åkerblom, “Gear noise and vibration: a literature survey,” Ph.D. dissertation, Royal institute of Technology, 2001.
- [26] P. N. M. Henao and N. A. de la Peña, “Estado del arte sobre perfiles de dientes para engranajes,” *Prospectiva*, vol. 12, no. 2, pp. 29–40, 2014.
- [27] J. He and W. Zhang, “Optimum design and research on the involute gear tooth profile,” in *Proceedings of 2011 International Conference on Electronic Mechanical Engineering and Information Technology*, vol. 2, 2011, pp. 837–840.
- [28] J. A. Botero, “Modelo matemático y Validación experimental de fallas en ruedas dentadas,” Tesis de Master, Universidad tecnológica de Pereira, Pereira, 2013.
- [29] W. Sun, T. Chen, and X. Zhang, “A new method to calculate bending deformation of involute helical gear,” *UPB Scientific Bulletin, Series D: Mechanical Engineering*, vol. 73, pp. 17–30, 01 2011.
- [30] P. A. Duque Ramírez, “Guía técnica para el diseño y cálculo de engranajes para reductores de velocidad,” B.S. thesis, Universidad Técnica Federico Santa María, 2017.
- [31] B. Balachandran and E. B. Magrab, *Vibrations*. Cambridge University Press, 2018.
- [32] X. Liang, M. J. Zuo, and Y. Guo, “Evaluating the Time-Varying Mesh Stiffness of a Planetary Gear Set Using the Potential Energy Method,” *Journal of Mechanical Engineering Science*, pp. 365–374, 2015.
- [33] T. Kiekbusch, D. Sappok, B. Sauer, and I. Howard, “Calculation of the combined torsional mesh stiffness of spur gears with two- and three-dimensional parametrical fe models,” *Strojnicki Vestnik*, vol. 57, pp. 810–818, 11 2011.
- [34] W. Yu, C. K. Mechefske, and M. Timusk, “A comparison of several methods for the calculation of gear mesh stiffness,” in *2017 International Conference on Sensing, Diagnostics, Prognostics, and Control (SDPC)*, 2017, pp. 287–292.
- [35] H. Ma, J. Yang, R. Song, S. Zhang, and B. Wen, “Effects of tip relief on vibration responses of a geared rotor system,” *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 228, pp. 1132–1154, 05 2014.
- [36] V. Philippe, “On the modelling of spur and helical gear dynamic behavior,” *Mechanical Engineering. InTech, Croatia*, 2012.
- [37] “ISO 6336-1:1996 Calculation of load capacity of spur and helical gears — Part 1: Basic principles, introduction and general influence factors.” [Online]. Available: <https://www.iso.org/cms/render/live/en/sites/isoorg/contents/data/standard/01/26/12632.html>

- [38] W. Yu, C. K. Mechefske, and M. Timusk, “The dynamic coupling behaviour of a cylindrical geared rotor system subjected to gear eccentricities,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 107, pp. 105–122, 2017. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0094114X16302555>
- [39] O. D. Mohammed, M. Rantatalo, J.-O. Aidanpää, and U. Kumar, “Vibration signal analysis for gear fault diagnosis with various crack progression scenarios,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 41, no. 1, pp. 176–195, 2013. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327013003671>
- [40] C. Weber, *The Deformation of loaded gears and the effect on their load carrying capacity P. 1. / C. Weber P. 1. / C. Weber*. Department of scientific and Industrial research, 1951.
- [41] M. B. S. Sánchez, “Modelo de cálculo resistente de engranajes cilíndricos de alto grado de recubrimiento,” PhD Thesis, UNED. Universidad Nacional de Educación a Distancia (España), 2013.
- [42] Y. Xiong, K. Huang, F. Xu, Y. yi, M. Sang, and H. Zhai, “Research on the influence of backlash on mesh stiffness and the nonlinear dynamics of spur gears,” *Applied Sciences*, vol. 9, p. 1029, 03 2019.
- [43] X. Zhou, X. He, Z. Xue, Y. Hou, and Q. Liu, “Analytical method for time varying mesh stiffness calculation of spur gears with gear eccentricity error,” Jul. 2018.
- [44] Z. Chen and Y. Shao, “Dynamic simulation of spur gear with tooth root crack propagating along tooth width and crack depth,” *Engineering Failure Analysis*, vol. 18, no. 8, pp. 2149–2164, 2011. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1350630711001816>
- [45] W. Yu, Y. Shao, and C. K. Mechefske, “The effects of spur gear tooth spatial crack propagation on gear mesh stiffness,” *Engineering Failure Analysis*, vol. 54, pp. 103–119, 2015. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1350630715001351>
- [46] O. D. Mohammed, M. Rantatalo, and J.-O. Aidanpää, “Dynamic modelling of a one-stage spur gear system and vibration-based tooth crack detection analysis,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 54-55, pp. 293–305, 2015. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327014003434>
- [47] L. Cui, T. Liu, H. Jinfeng, and H. Wang, “Improvement on meshing stiffness algorithms of gear with peeling,” *Symmetry*, vol. 11, p. 609, 05 2019.
- [48] R. W. Cornell, “Compliance and Stress Sensitivity of Spur Gear Teeth,” *Journal of Mechanical Design*, vol. 103, no. 2, pp. 447–459, 04 1981. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1115/1.3254939>
- [49] P. Sainsot and, P. Velez, and O. Duverger, “Contribution of Gear Body to Tooth Deflections—A New Bidimensional Analytical Formula,” *Journal of*

- Mechanical Design*, vol. 126, no. 4, pp. 748–752, Aug. 2004. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1115/1.1758252>
- [50] T. Fakhfakh, F. Chaari, and M. Haddar, “Numerical and experimental analysis of a gear system with teeth defects,” *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, vol. 25, no. 5, pp. 542–550, 2005, publisher: Springer.
- [51] F. Chaari, W. Baccar, M. S. Abbes, and M. Haddar, “Effect of spalling or tooth breakage on gearmesh stiffness and dynamic response of a one-stage spur gear transmission,” *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 27, no. 4, pp. 691–705, 2008. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0997753807001180>
- [52] F. Chaari, T. Fakhfakh, and M. Haddar, “Simulation numérique du comportement dynamique d’une transmission par engrenages en présence de défauts de dentures,” *Mécanique & Industries*, vol. 6, no. 6, pp. 625–633, Nov. 2005, number: 6 Publisher: EDP Sciences. [Online]. Available: <https://www.mechanics-industry.org/articles/meca/abs/2005/06/mi03006/mi03006.html>
- [53] F. Q. Yahya, D. Mohammad, and D. Ali, “Estimation of model parameters, for torsional vibration analysis of a turbo-generator unit with reference to mosul gas-turbine station,” *AL-Rafdain Engineering Journal (AREJ)*, vol. 23, pp. 91–116, 04 2015.
- [54] K. H. Hunt and F. R. E. Crossley, “Coefficient of Restitution Interpreted as Damping in Vibroimpact,” *Journal of Applied Mechanics*, vol. 42, no. 2, pp. 440–445, Jun. 1975. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1115/1.3423596>
- [55] H. Özgüven and D. Houser, “Dynamic analysis of high speed gears by using loaded static transmission error,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 125, no. 1, pp. 71–83, Aug. 1988. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022460X88904166>
- [56] H.-H. Lin and R. L. Huston, “Dynamic loading on parallel shaft gears,” *NASA contractor report 179473*, 1986.
- [57] R. Kasuba and J. W. Evans, “An Extended Model for Determining Dynamic Loads in Spur Gearing,” *Journal of Mechanical Design*, vol. 103, no. 2, pp. 398–409, Apr. 1981. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1115/1.3254920>
- [58] S. Du, “Dynamic modelling and simulation of gear transmission error for gearbox vibration analysis.” Ph.D. dissertation, The University of New South Wales, 1997.
- [59] W. Wang and P. McFadden, “Early detection of gear failure by vibration analysis—ii. interpretation of the time-frequency distribution using image processing techniques,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 7, no. 3, pp. 205–215, 1993. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327083710095>

- [60] P. K. Jena, “Static and dynamic analysis of hcr spur gear drive using finite element analysis,” Master’s thesis, Department of Mechanical Engineering National Institute of Technology, 2009.
- [61] M. Faggioni, F. S. Samani, G. Bertacchi, and F. Pellicano, “Dynamic optimization of spur gears,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 46, no. 4, pp. 544–557, 2011. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0094114X10002028>
- [62] Y. Temis, E. Kozharinov, and D. Kalinin, “Simulation of gear systems with dynamic analysis,” 10 2015.
- [63] V. K. Tamminana, A. Kahraman, and S. Vijayakar, “A Study of the Relationship Between the Dynamic Factors and the Dynamic Transmission Error of Spur Gear Pairs,” *Journal of Mechanical Design*, vol. 129, no. 1, pp. 75–84, Feb. 2006. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1115/1.2359470>
- [64] J. Liu, S. Wang, S. Zhou, and B. Wen, “Nonlinear behavior of a spur gear pair transmission system with backlash,” *Journal of Vibroengineering*, vol. 16, no. 8, pp. 3922–3938, 2014, number: 8 Publisher: JVE International Ltd. [Online]. Available: <https://www.jvejournals.com/article/15582>
- [65] L. R. Ortega Lucero, “Estimación del par de carga en motores de inducción basado en su modelo matemático y orientado a la detección de fallos en cajas de engranajes,” B.S. thesis, Universidad Politécnica Salesiana, 2021.
- [66] D. E. Chingal Imaicela, “Adquisición de señales de corriente del motor de inducción combinando fallos en la maquinaria rotativa y elaboración de una guía de práctica sobre detección de fallos por medio del afcm,” B.S. thesis, Universidad Politécnica Salesiana, 2018.
- [67] S. A. S. Al Kazzaz and G. Singh, “Experimental investigations on induction machine condition monitoring and fault diagnosis using digital signal processing techniques,” *Electric Power Systems Research*, vol. 65, no. 3, pp. 197–221, 2003. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378779602002274>
- [68] C. da Costa, M. H. Mathias, P. Ramos, and P. S. Girão, “A new approach for real time fault diagnosis in induction motors based on vibration measurement,” in *2010 IEEE Instrumentation Measurement Technology Conference Proceedings*, 2010, pp. 1164–1168.
- [69] R. V. Sánchez Loja, “Diagnóstico de fallos en cajas de engranajes mediante la aplicación de diferentes técnicas de inteligencia artificial,” Ph.D. dissertation, Universidad Nacional de Educación a Distancia (España), 2017.
- [70] G. White, *Introducción al análisis de vibraciones*. Ázima, 2010.
- [71] H. Yang, J. Mathew, and L. Ma, “Vibration feature extraction techniques for fault diagnosis of rotating machinery: A literature survey,” *Asia-Pacific Vibration Conference*, 01 2003.

- [72] A. Palamides and A. Veloni, *Signals and systems laboratory with MATLAB*. CRC press, 2010.
- [73] L. Tan and J. Jiang, *Digital signal processing: fundamentals and applications*. Academic Press, 2018.
- [74] S. W. Smith *et al.*, *The scientist and engineer's guide to digital signal processing*. California Technical Pub. San Diego, 1997, vol. 14.
- [75] V. Patel, N. Tandon, and R. Pandey, "Defect detection in deep groove ball bearing in presence of external vibration using envelope analysis and duffing oscillator," *Measurement*, vol. 45, no. 5, pp. 960–970, 2012. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263224112000620>
- [76] C. Joelle and G. Mark, "Envelope analysis—the key to rolling-element bearing diagnosis," *Bruel & Kjaer*, 1987.
- [77] J. Semmlow, "Chapter 4 - the fourier transform and power spectrum: Implications and applications," in *Signals and Systems for Bioengineers (Second Edition)*, second edition ed., ser. Biomedical Engineering, J. Semmlow, Ed. Boston: Academic Press, 2012, pp. 131–165. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780123849823000043>
- [78] C. R. Galleguillos Reyes, R. Valenzuela, and N. Andrés, "Estudio y análisis dinámico de señales provenientes de cajas de engranajes," B.S. thesis, Universidad del Bío-Bío, 2014.
- [79] K. Ogata, *System dynamics*. Pearson/Prentice Hall Upper Saddle River, NJ, 2004, vol. 13.
- [80] J. G. Velasco, *Energías renovables*. Reverte, 2009.
- [81] J. Stewart, *Calculo: Trascendentes Tempranas*, ser. Math learning. International Thomson Editores, S. A. de C. V., 2002.
- [82] S. Umans, A. Fitzgerald, and C. Kingsley, *Electric Machinery: Seventh Edition*. McGraw-Hill Higher Education, 2013. [Online]. Available: <https://books.google.com.ec/books?id=dZkfAAAAQBAJ>
- [83] G. Polya, J. Zugazagoitia *et al.*, "Cómo plantear y resolver problemas," Trillas México, Tech. Rep., 1965.
- [84] J. Banks, J. Carson, B. Nelson, and D. Nicol, "Discrete-event system simulation"prentice hall," *Inc. EnglewoodCliffs, NewJersey*, vol. 198, no. 4, 1996.

A. Anexos

A.1. Programación

En la siguiente figura se presenta el script de la función kmin programada en Matlab.

```
function [ka kb ks kf]= kmin(m,rint,Z,L,alfa,h_a,c_a,E,v)
r = m*Z/2; %cálculo del radio primitivo
ra = r + h_a*m; % cálculo radio exterior
rf = r - (h_a+c_a)*m; % cálculo radio de raíz
rb = r*cos(alfa); %cálculo radio base
rd=r-(c_a+h_a)*m; % cálculo de radio para uf
G = E/(2*(1+v)); % módulo cortante
invalfa = tan(alfa)-alfa; %función invalfa
tetab = (pi/(2*Z))+ invalfa; % mitad de angulo del diente
y = rb *((tetab+alfa)*cos(alfa)-sin(alfa)); % ubicacion de la fuerza y
x = rb *((tetab+alfa)*sin(alfa)+cos(alfa)-cos(tetab)); % cálculo parametro x
l = rb *((tetab+alfa)*sin(alfa)+cos(alfa))- r; %cálculo l
Ix = (1/12)*(2*y)^3; %cálculo de inercia en sección x
Ax = 2*y*L; %cálculo de area de sección x
invks = x*[(1.2*(cos(alfa)^2))/(G*Ax)]; %inverso de ks
invka = x*[(sin(alfa)^2)/(E*Ax)]; %inverso de ka
invkb = x*[(1-x)*cos(alfa)-y*sin(alfa)]^2/(E*Ix); %inverso de kv
L_d=rb*tetab; %Cálculo de ld para kf
rc = 0.2/(1-sin(alfa)); % variar rc = 0.2*m/(1-sin(alfa))
tetaf=[1/Z]*[(pi/2)+(2*tan(alfa)*(h_a-(rc)))+(2*rc/cos(alfa))]; %mitad del angulo de arco sf
S_f=2*tetaf*rd; % arco sf
u_f=x+r-rd-y*tan(alfa); %cálculo parametro u
h_f=rf/rint; %relación rf/rinta
C_pcf = [-5.574e-5 -1.9986e-3 -2.3015e-4 4.7702e-3 0.0271 6.8045;
        60.111e-5 28.100e-3 -83.431e-4 -9.9256e-3 0.1624 0.9086;
        -50.952e-5 185.50e-3 0.0538e-4 53.300e-3 0.2895 0.9236;
        -6.2042e-5 9.0889e-3 -4.0964e-4 7.8297e-3 -0.1472 0.6904];
%Matriz para parámetros de kf
Ai=C_pcf(:,1); Bi=C_pcf(:,2); Ci=C_pcf(:,3); % Valores A,B,C
Di=C_pcf(:,4); Ei=C_pcf(:,5); Fi=C_pcf(:,6); % Valores D,E,F
for i=1:4
    Xi(i)=Ai(i)/tetaf^2 + Bi(i)*h_f^2 + Ci(i)*h_f/tetaf + Di(i)/tetaf + Ei(i)*h_f + Fi(i);
    %Ecuación para la estimación de parametros L*, M*, P* y Q*
end
L_star=Xi(1); M_star=Xi(2); P_star=Xi(3); Q_star=Xi(4); %parametros L*, M*, P* y Q*
invkf=(cos(alfa)^2/(E*L))*(L_star*(u_f/S_f)^2 + M_star*(u_f/S_f) + P_star*(1+Q_star*(tan(alfa))^2));
%Inverso de kf
ka = 1/invka; % Cálculo ka
kb = 1/invkb; % Cálculo kb
ks = 1/invks; % Cálculo ks
kf = 1/invkf; % Cálculo kf
```

Figura 88: Script de función kmin. **Fuente:** Autor

En la siguiente figura se presenta el script llamado geo programado en Matlab.

```

m = 2.25e-3; %modulo
Z1 = 32; %número de dientes de engranaje 1
Z2 = 48; %número de dientes de engranaje 2
alfa = 20; %ángulo de presion en grados
alfa = alfa*pi/180; %ángulo de presion en radianes
h_a = 1; %altura de inicio
c_a = 0.25; %luz inicial
E = 205e9; % Modulo de Young
v = 0.3; %Modulo de Poisson
L = 20.7e-3; % ancho del diente
m1 = 0.5902; %masa engranaje 1
m2 = 1.4092; %masa engranaje 2
rint1=10e-3;%radio interno engranaje 1
rint2=15e-3; %radio interno engranaje 2
n1 = 1200; % Velocidad engranaje 1
n2 = (Z2/Z1)*n1; % Velocidad engranaje 2
%% Calculo de radios de el engranaje
%Parametros de engranaje 1
r1 = m*Z1/2; %Radio de paso
r_a1 = r1+h_a*m; % radio addendum
r_b1 = r1*cos(alfa); %radio base
%Parametros de engranaje 2
r2 = m*Z2/2; %Radio de paso
r_a2 = r2+h_a*m; % radio addendum
r_b2 = r2*cos(alfa); %radio base
%% Calculo de rigidez
kh = (pi*E*L)/(4*(1-v^2)); %Esfuerzo hertziano
[ka1 kb1 ks1 kf1] = kmin(m,rint1,Z1,L,alfa,h_a,c_a,E,v); % calculo para el primer engranaje
[ka2 kb2 ks2 kf2] = kmin(m,rint2,Z2,L,alfa,h_a,c_a,E,v); % calculo para el primer engranaje
K_A=1./(1./ka1+1./ka2); %cálculo rigidez debido a la compresión axial
K_B=1./(1./kb1+1./kb2); %cálculo rigidez debido a la flexión
K_S=1./(1./ks1+1./ks2); %cálculo rigidez debido al cortante
K_F=1./(1./kf1+1./kf2); %cálculo rigidez debido a la deflexión en el filete
K_h= kh; %cálculo rigidez contacto hertziano
kminimo = 1./(1./K_h + 1./K_A + 1./K_B + 1./K_S + 1./K_F); %kmin
kmax = 2 * kminimo; %kmax
e = (sqrt(r_a2^2-r_b2^2)+sqrt(r_a1^2-r_b1^2)-(r1+r2)*sin(alfa))/(pi*m*cos(alfa)); % radio de
contacto
%% Amortiguamiento
J1 = (r1*r1)*m1/2; % inercia de la masa de engranaje 1
J2 = (r2*r2)*m2/2; % inercia de la masa de engranaje 2
me = ((r_b1*r_b1/J1)+(r_b2*r_b2/J2)); % masa efectiva
exilon = 0.1; %razon de amortiguamiento
cmin = 2*exilon*sqrt(kmin*me); %cmin
cmin = 2*exilon*sqrt(kmax*me); %cmin

```

Figura 89: Script geo. **Fuente:** Autor

En la siguiente figura se presenta el script llamado archivomaestro programado en Matlab.

```

m = 2.25e-3; %modulo
Z1 = 32; %numero de dientes de engranaje 1
Z2 = 48; %numero de dientes de engranaje 2
alfa = 20; %angulo de presion en grados
alfa = alfa*pi/180; %angulo de presion en radianes
h_a = 1; %altura de inicio
c_a = 0.25; %luz inicial
%% Calculo de radios base de el engranaje
%Parametros de engranaje 1
r1 = m*Z1/2; %Radio de paso
r_a1 = r1+h_a*m; % radio addendum
r_f1 = r1-(h_a+c_a)*m; %radio de raiz
r_b1 = r1*cos(alfa); %radio base
%Parametros de engranaje 2
r2 = m*Z2/2; %Radio de paso
r_a2 = r2+h_a*m; % radio addendum
r_f2 = r2-(h_a+c_a)*m; %radio raiz
r_b2 = r2*cos(alfa); %radio base
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% parametros del sistema
Rb1=r_b1; %%% Radio base engrane 1 en m
Rb2=r_b2; %%% Radio base engrane 2 en m
J1=3.8245e-4; %%% Inercia del engrane 1 en m4
J2=2.05e-3; %%% Inercia del engrane 2 en m4
Kmax=277810000; %%% coeficiente de elasticidad
Kminimo=138910000; %%% coeficiente de elasticidad
Cmax=6.8686*10^(3); %%% coeficiente de friccion N/ms
Cmin=4.8569*10^(3); %%% coeficiente de friccion N/ms
b=5*10^(-5); %%% N/ms
%Condiciones L1
T1=2.521; % Torque entrada en Nm
T2=0; % Torque carga en Nm L1
n1 = 1188; % Velocidad L1
% Condiciones L2
% T1=3.76; % Torque entrada en Nm
% T2=2.603; % Torque carga en Nm L2
% n1 = 1176; % Velocidad L2
%Condiciones L3
% T1=7.248; % Torque entrada en Nm
% T2 = 6.503; % Torque carga L3
% n1 = 1158; % Velocidad L3
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Tiempos para onda cuadrada
Cd = Cmax-Cmin; %diferencia de amortiguamiento
e = (sqrt(r_a2^2-r_b2^2)+sqrt(r_a1^2-r_b1^2)-(r1+r2)*sin(alfa))/(pi*m*cos(alfa)); %coeficiente de
amortiguamiento
T = 60/(n1*Z1); % periodo de contacto de un diente
td = (e-1)*T; %tiempo en doble contacto
ts = (2-e)*T; %tiempo en simple contacto
Tpor = td*100/T %tiempo porcentual en doble contacto

```

Figura 90: Script archivomaestro. **Fuente:** Autor

En la siguiente figura se presenta el programa de bloques de las ecuaciones de movimiento en Simulink.

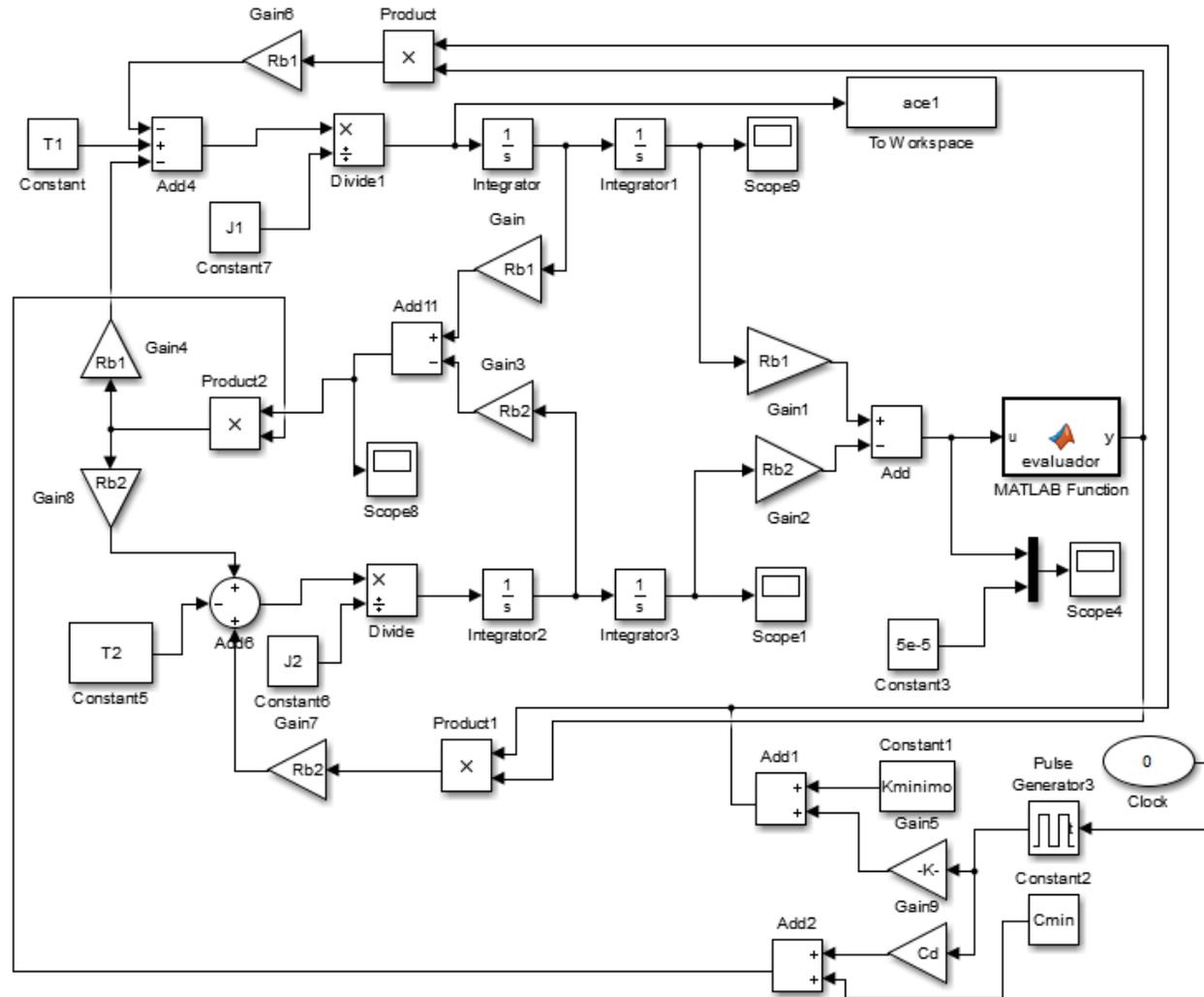


Figura 91: Script de las ecuaciones de movimiento en Simulink. Fuente: Autor

A.2. Espectros de amplitud (FFT) de todos los acelerómetros

En la siguiente figura se presenta los espectros de amplitud en condición L1.

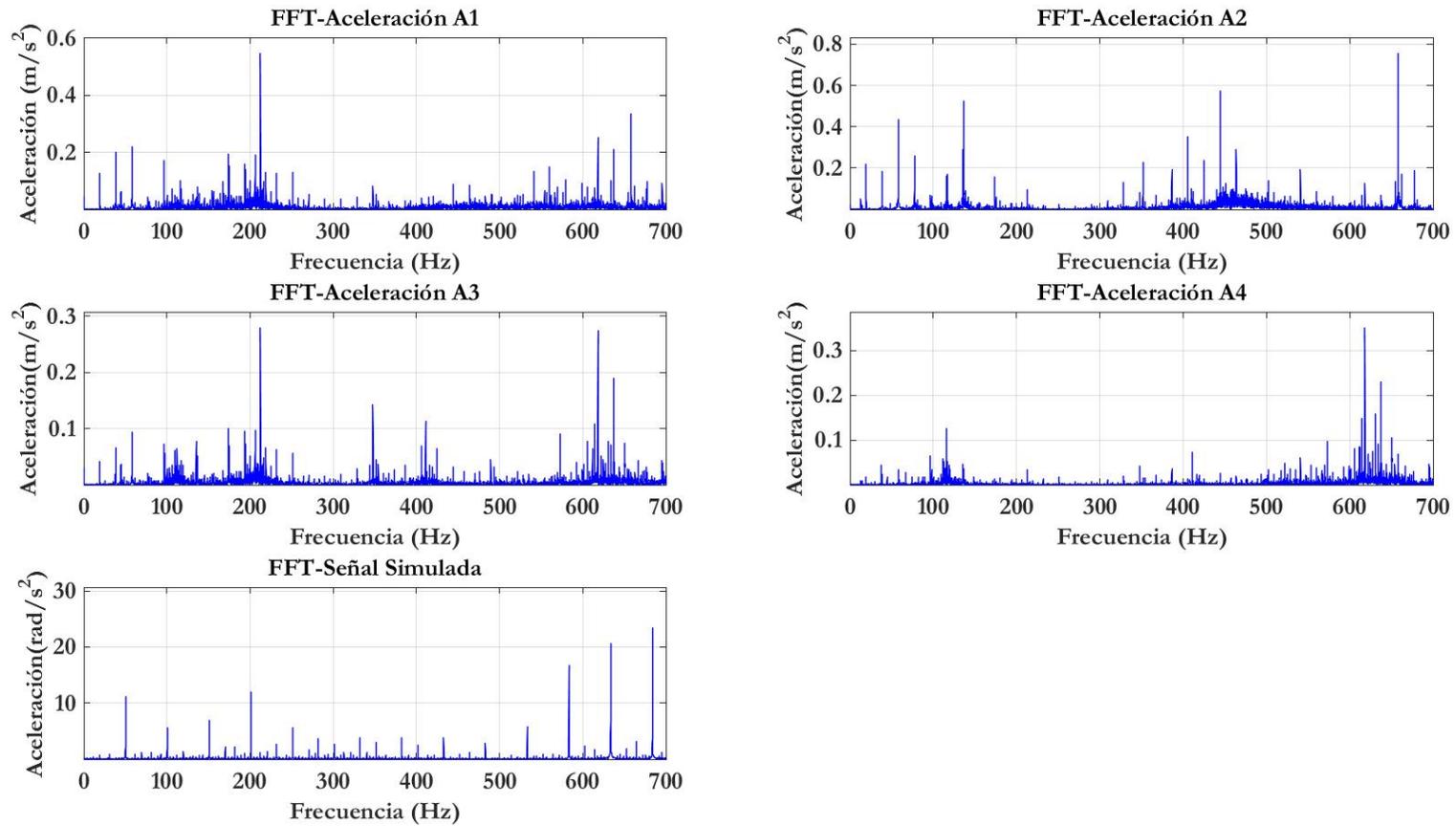


Figura 92: Espectros de amplitud condición en L1. Fuente: Autor

En la siguiente figura se presenta los espectros de amplitud en condición L2.

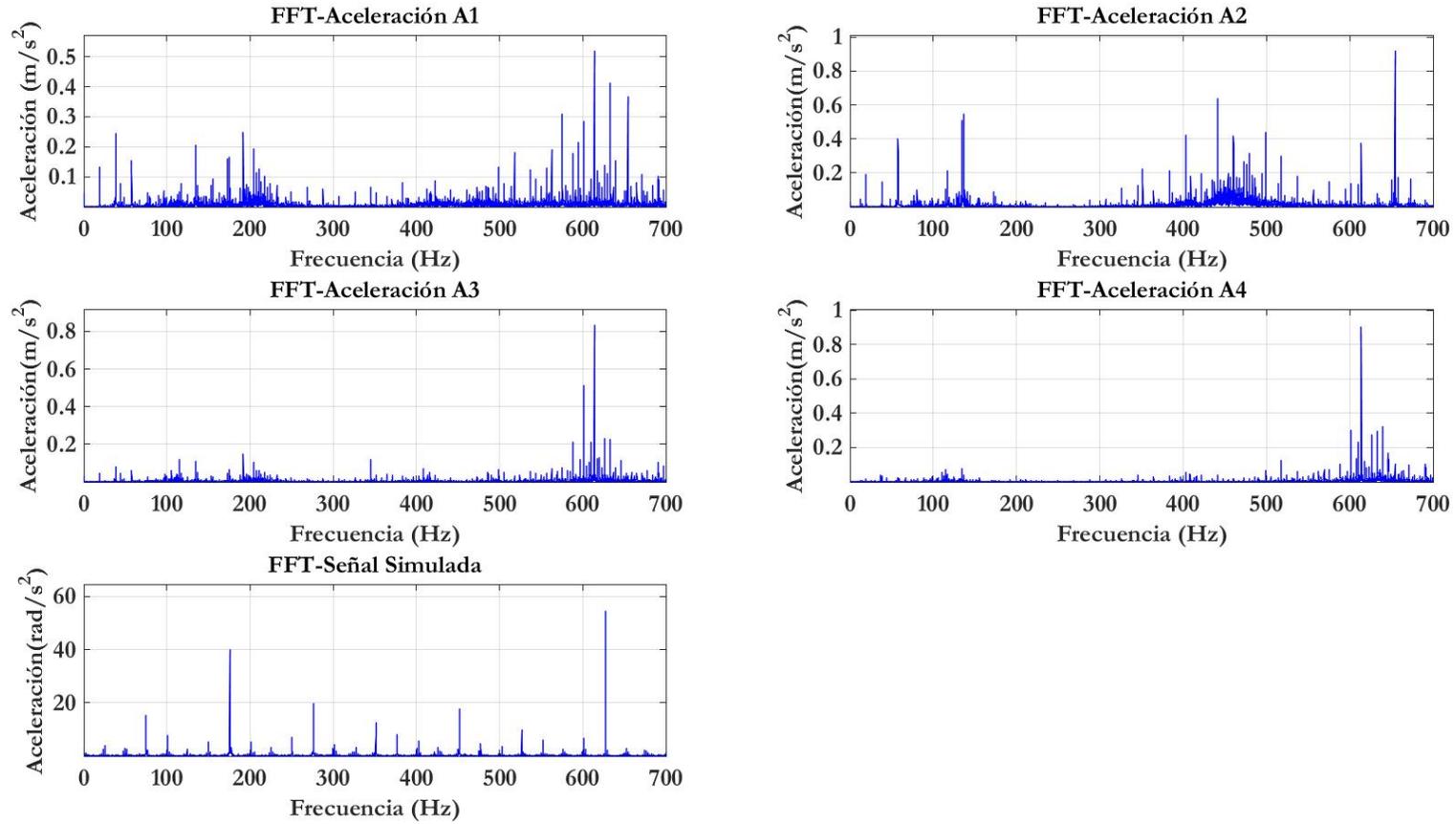


Figura 93: Espectros de amplitud en condición L2. **Fuente:** Autor

En la siguiente figura se presenta los espectros de amplitud en condición L3.

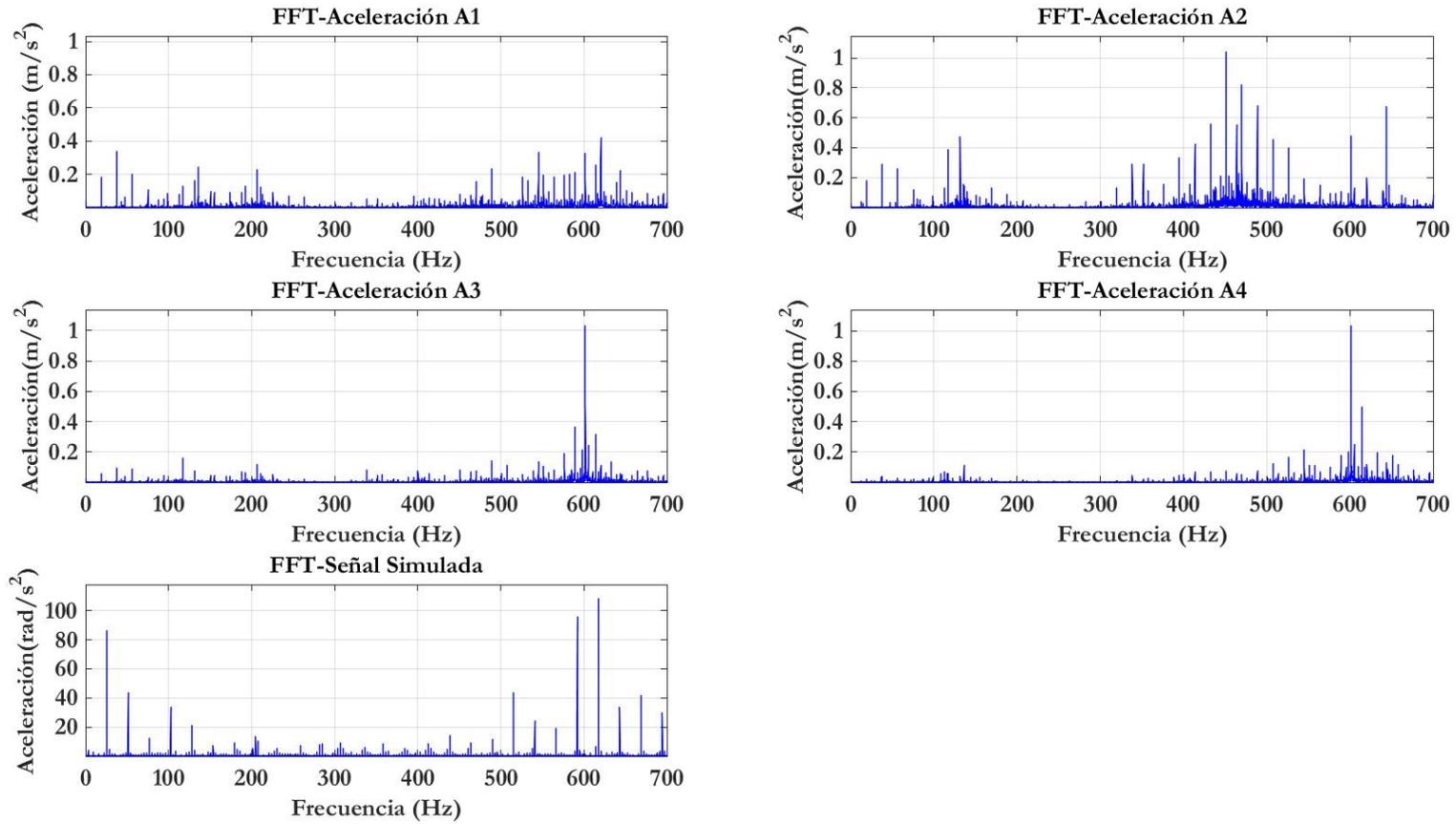


Figura 94: Espectros de amplitud en condición L3. **Fuente:** Autor

A.3. Espectros de la envolvente de todos los acelerómetros

En la siguiente figura se presenta los espectros de la envolvente en condición L1.

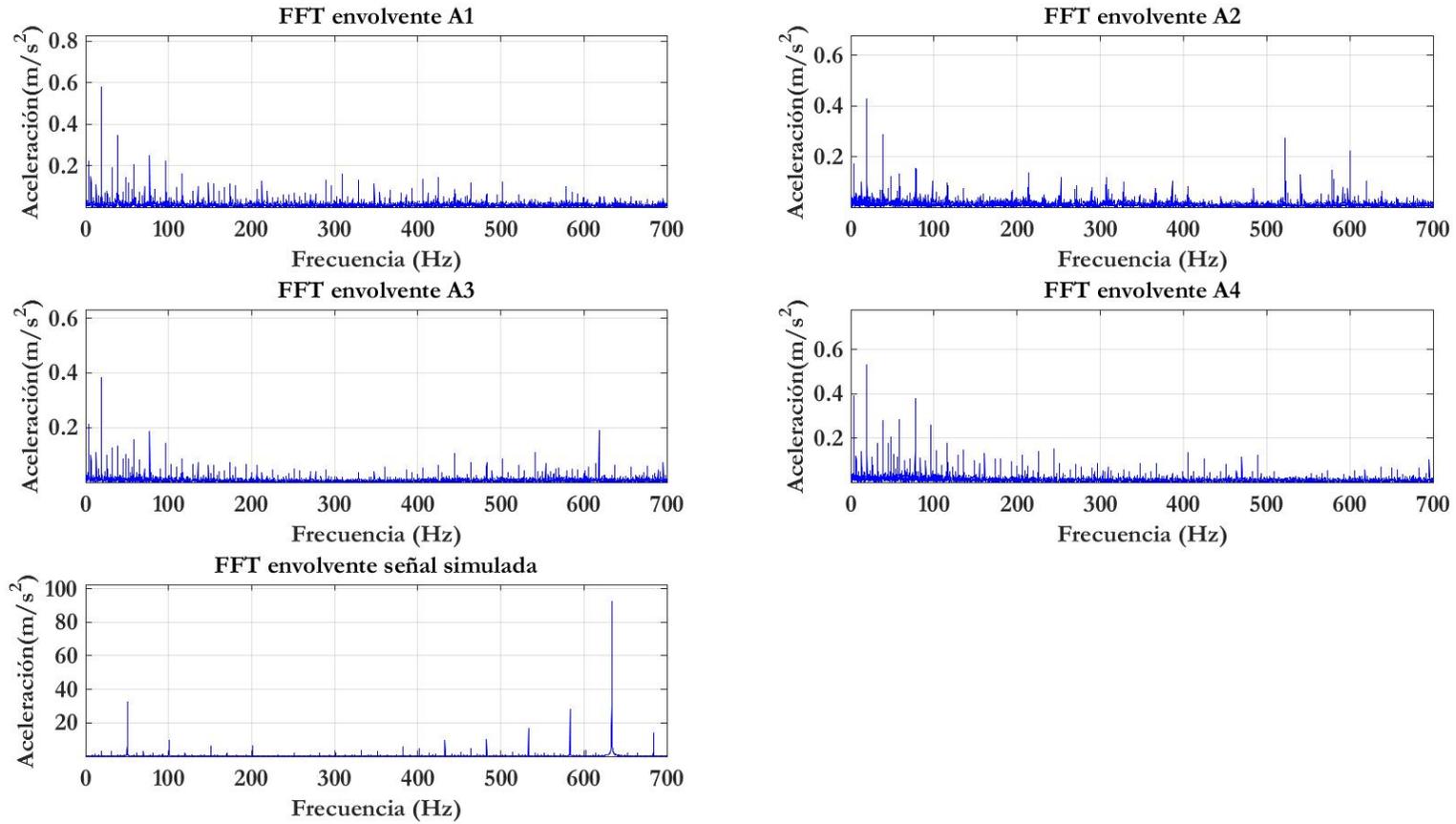


Figura 95: Espectros de la envolvente en condición L1. **Fuente:** Autor

En la siguiente figura se presenta los espectros de la envolvente en condición L2.

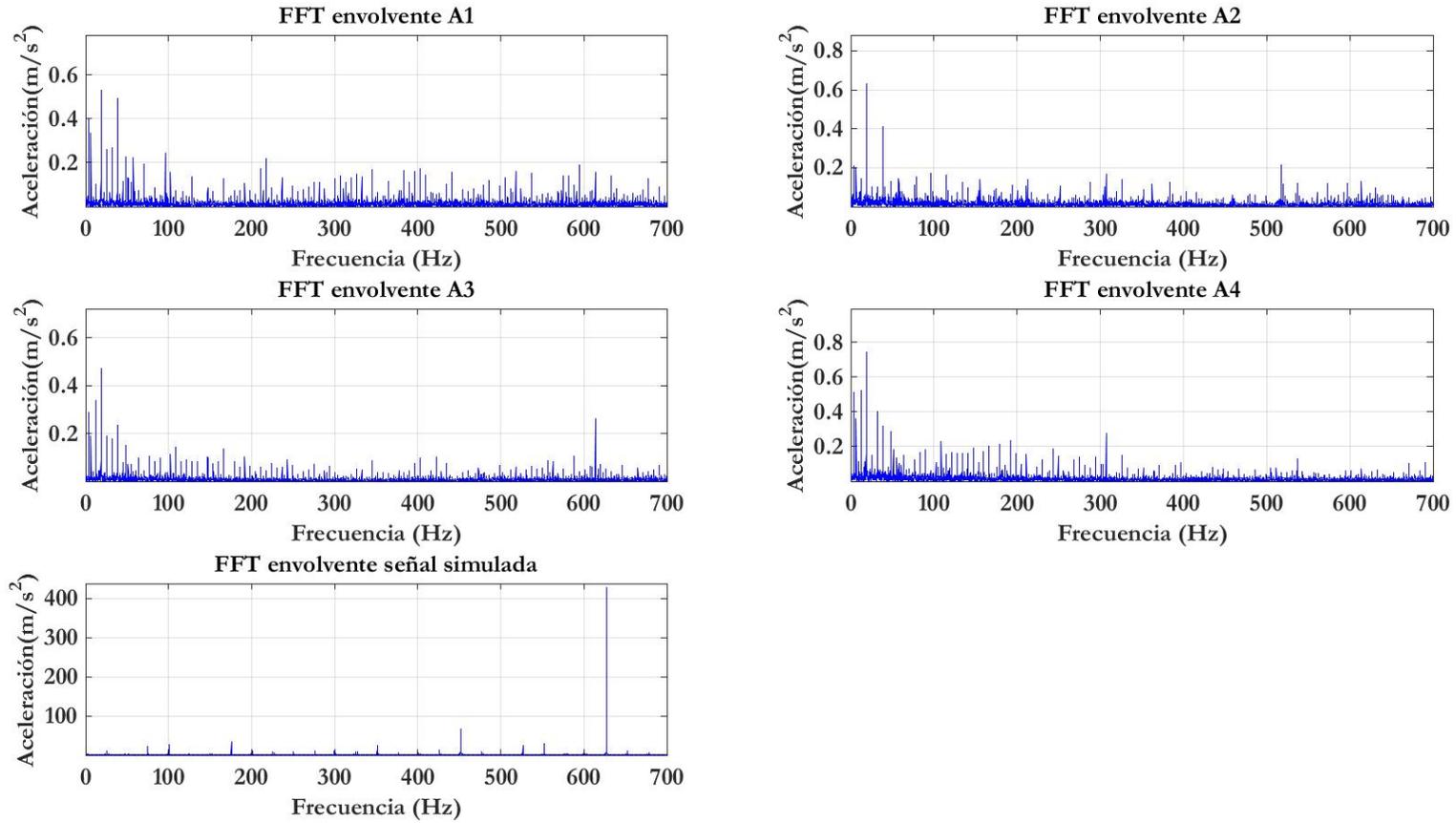


Figura 96: Espectros de la envolvente en condición L2. **Fuente:** Autor

En la siguiente figura se presenta los espectros de la envolvente en condición L3.

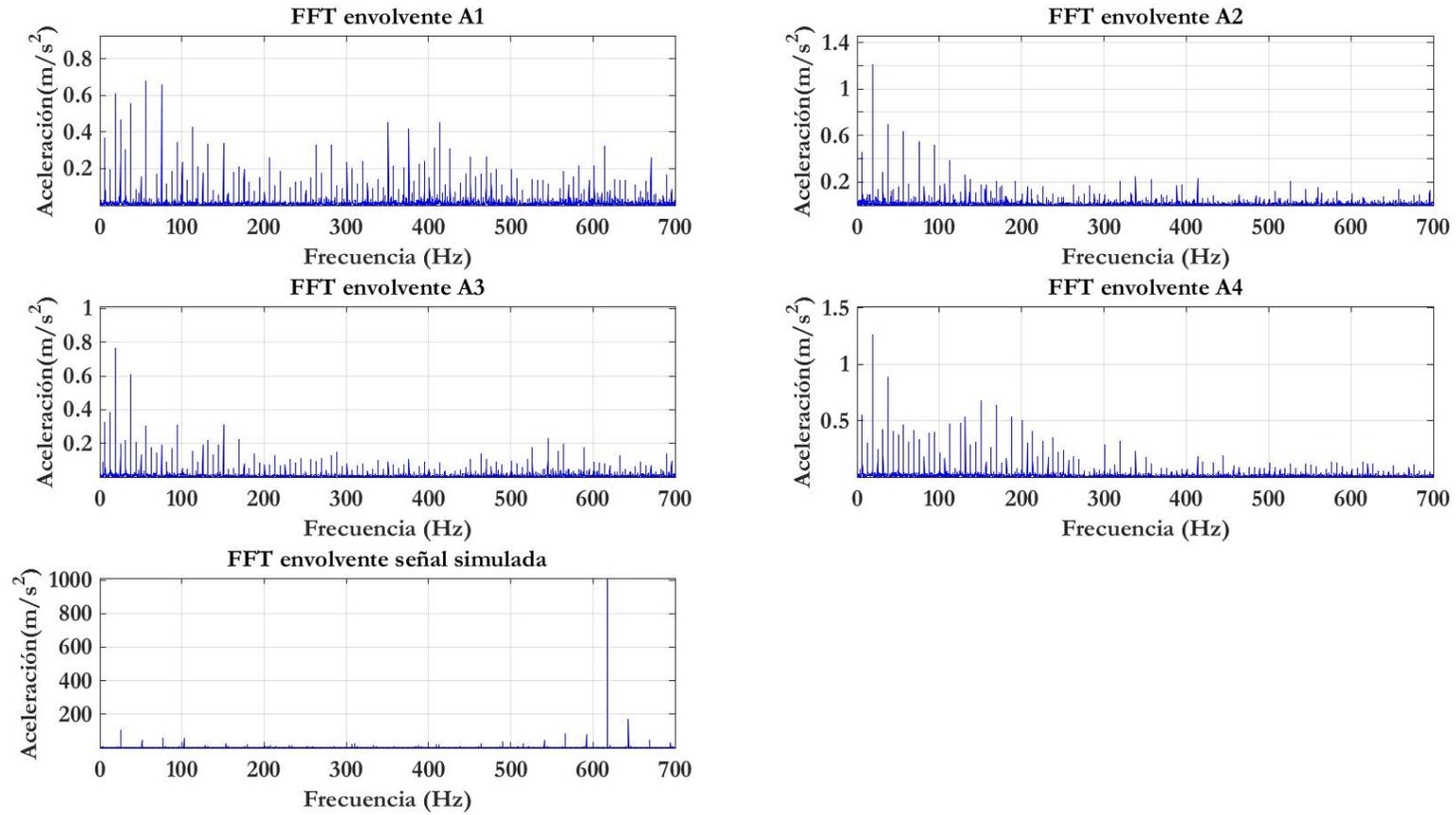


Figura 97: Espectros de la envolvente en condición L3. **Fuente:** Autor

A.4. Espectros de potencia de todos los acelerómetros

En la siguiente figura se presenta los espectros de potencia en condición L1.

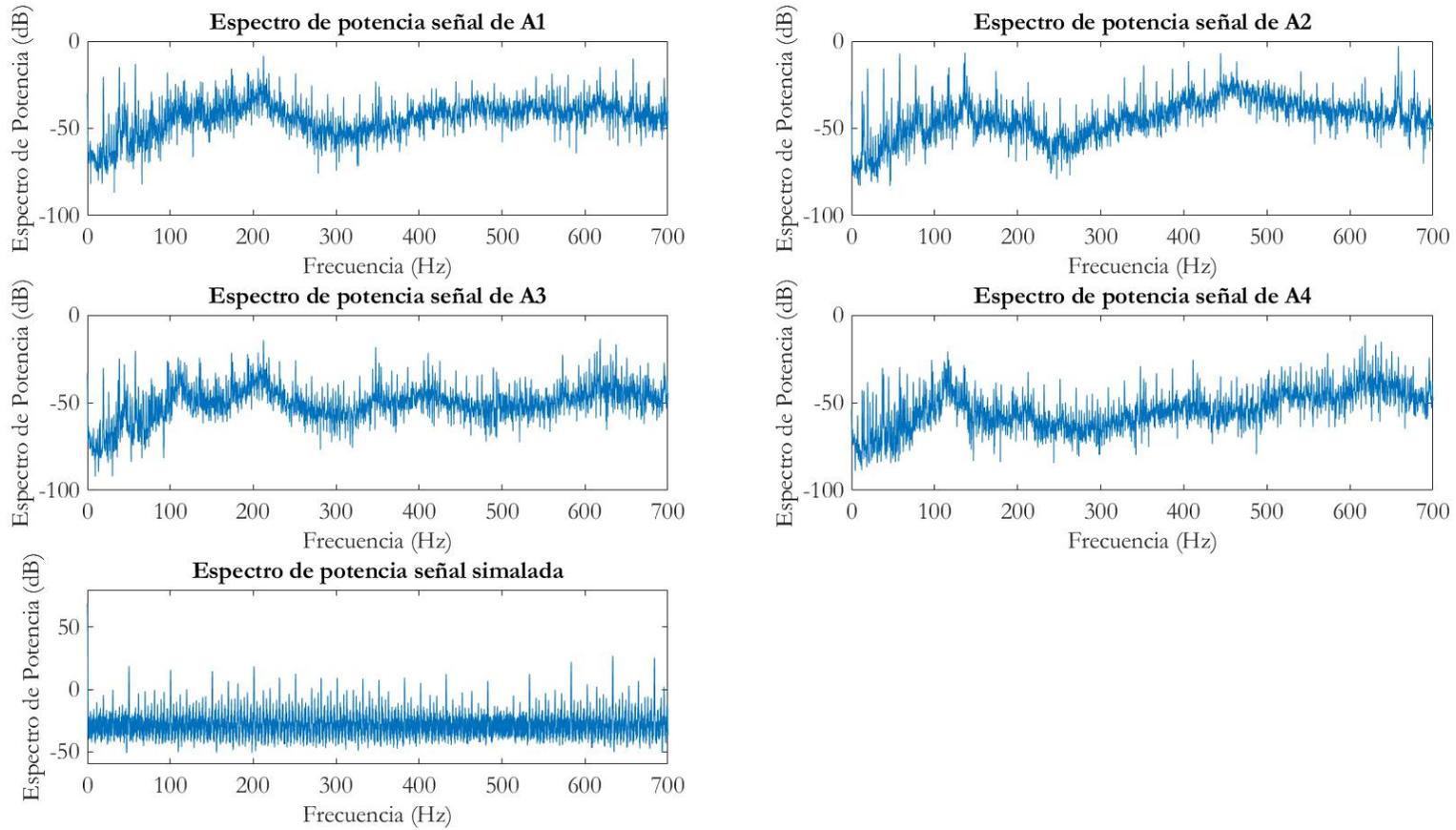


Figura 98: Espectros de potencia en condición L1. **Fuente:** Autor

En la siguiente figura se presenta los espectros de potencia en condición L2.

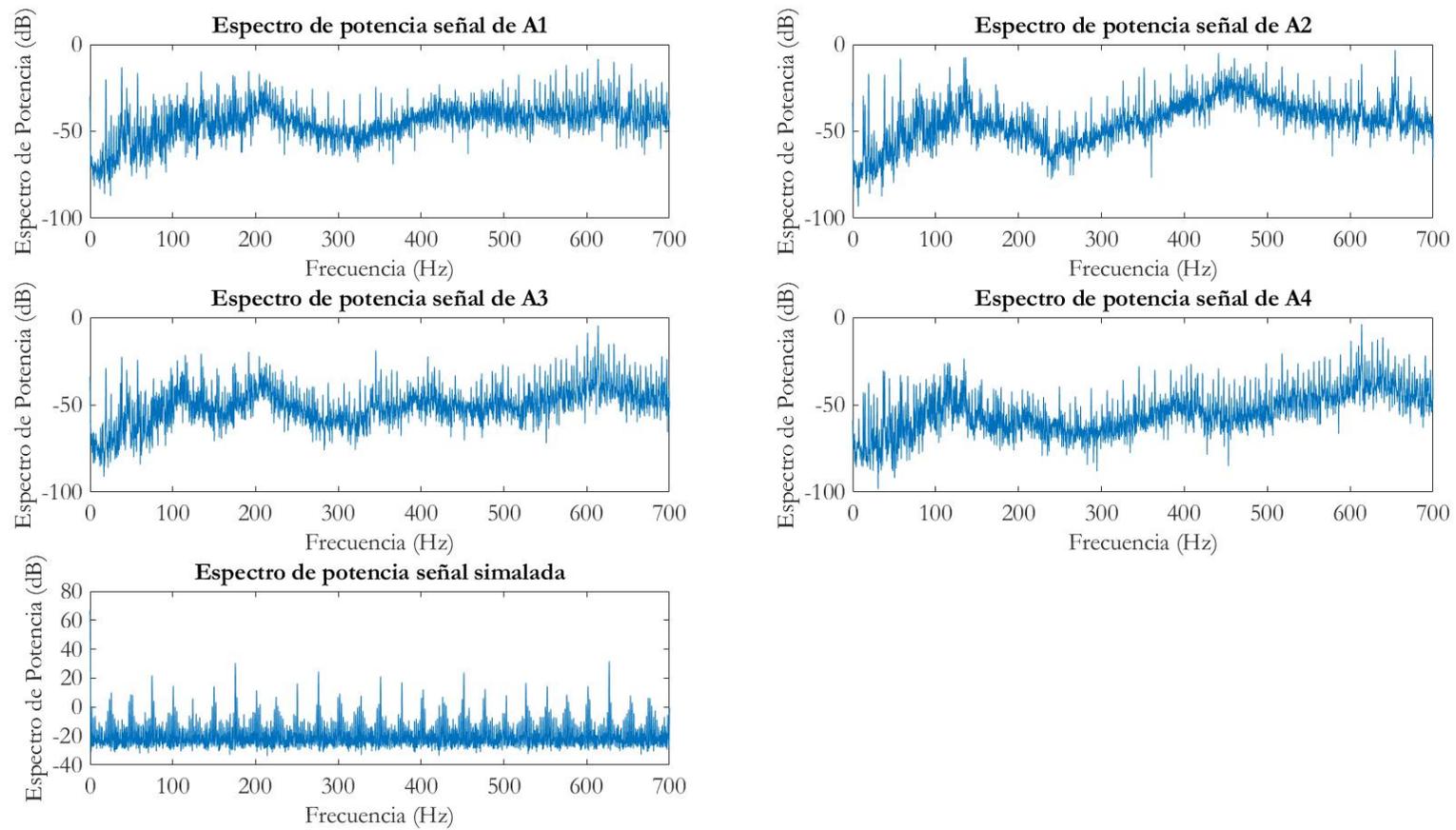


Figura 99: Espectros de potencia en condición L2. **Fuente:** Autor

En la siguiente figura se presenta los espectros de potencia en condición L3.

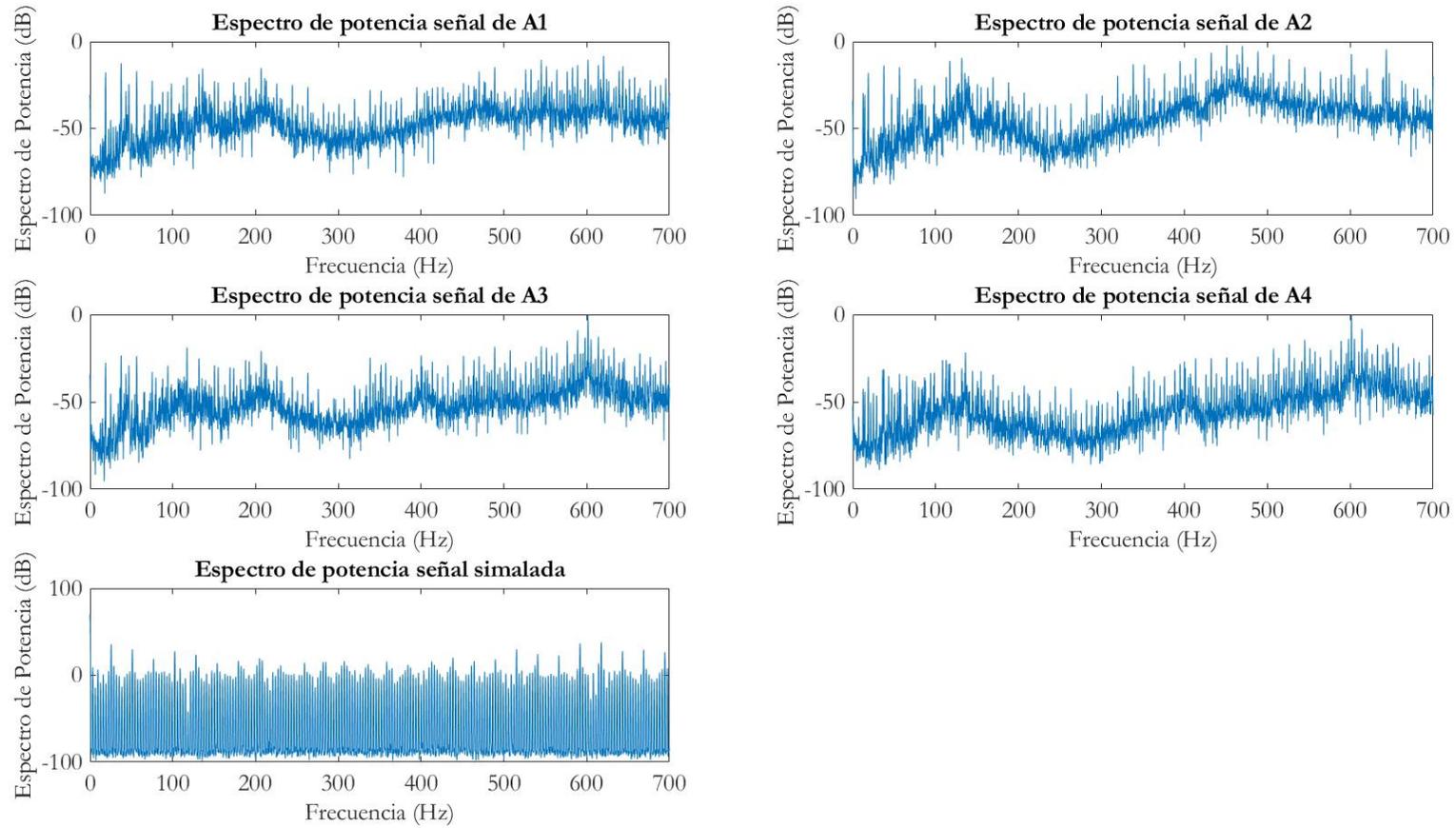


Figura 100: Espectros de potencia en condición L3. **Fuente:** Autor



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA SALESIANA

SEDE CUENCA

CARRERA DE INGENIERÍA MECÁNICA

*Trabajo de titulación previo a la
obtención del título de
Ingeniero Mecánico*

PROYECTO TÉCNICO:

**“MODELAMIENTO MATEMÁTICO DE UNA CAJA DE
ENGRANAJES CON DIFERENTES CARGAS PARA LA
OBTENCIÓN DE LOS PATRONES DE VIBRACIÓN”**

*“MATHEMATICAL MODELING OF A GEARBOX WITH DIFFERENT LOADS TO
OBTAIN THE VIBRATION PATTERNS”*

Autor:

Ariel Abel Berrezueta Parra

Tutor:

Dra. Mariela Cerrada Lozada

Cotutor:

Dr. René Vinicio Sánchez Loja

Cuenca - Ecuador

Julio 2021