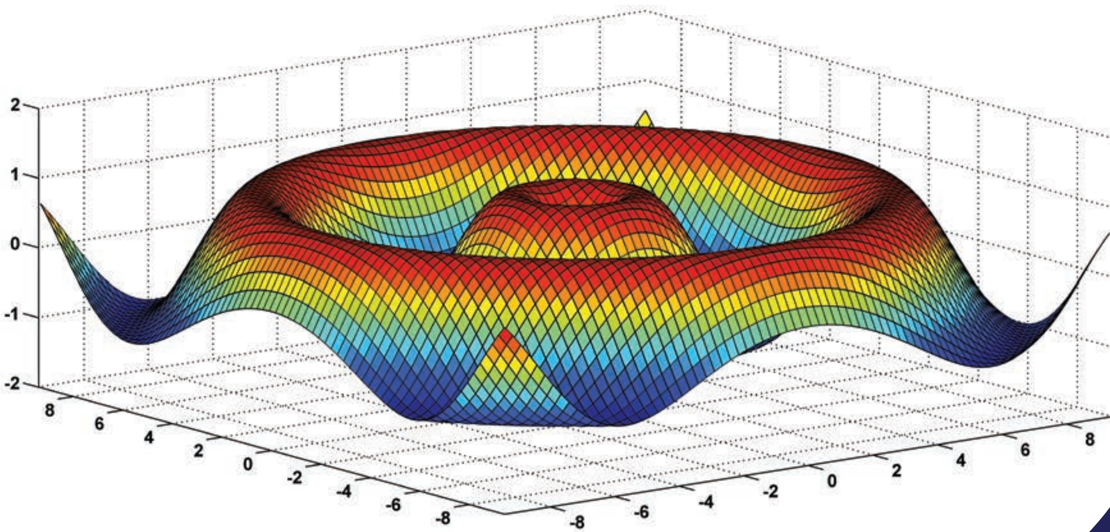
Introducción al Cálculo Diferencial con Geometría Analítica

Víctor Huilcapi Subía



Universidad Politécnica Salesiana

Introducción al Cálculo Diferencial con Geometría Analítica

Víctor Huilcapi Subía

Introducción al Cálculo Diferencial con Geometría Analítica

ABYA YALA

2015

Introducción al Cálculo Diferencial con Geometría Analítica
Víctor Huilcapi Subía
Colaboradores: Ing. Richard Timbiano / Ing. Ricardo Cajo

1era. Edición: Universidad Politécnica Salesiana 2015
Av. Turuhuayco 3-69 y Calle Vieja
Casilla: 2074
P.B.X.: (+593 7) 2050000
Fax: (+593 7) 4088958
e-mail: rpublicas@ups.edu.ec
www.ups.edu.ec

Área de Ciencia y Tecnología
CARRERA DE
INGENIERÍA ELECTRÓNICA

Casilla: 2074
P.B.X.: (+593 7) 2050000
Cuenca-Ecuador

Diseño
Diagramación
Impresión: Editorial Universitaria Abya-Yala
Quito-Ecuador

ISBN: 978-9978-10-232-9

Impreso en Quito-Ecuador, diciembre 2015

Publicación arbitrada de la Universidad Politécnica Salesiana

Índice

CAPÍTULO III
Límites

CAPÍTULO IV
Derivadas

CAPÍTULO V
Aplicaciones de la derivada

Glosario de simbología y notación

A continuación se muestra la simbología y notación de mayor uso en este texto y sus respectivos significados.

d_{AB}	distancia entre los puntos a y b
u	unidad
H	hipotenusa de un triángulo rectángulo
PM	punto medio de un segmento de recta
A	área
S	semiperímetro
r	radio de una circunferencia
m	pendiente de una recta
θ	ángulo de inclinación respecto al eje x
LLR	longitud del lado recto
e	excentricidad
f	foco
Dom	dominio
Rg	rango
$\Re$	reales
∞	infinito
lim	límite
D_x	derivada con respecto a la variable x
=	igual

$>$	mayor que
$<$	menor que
$\geq$	mayor o igual que
$\leq$	menor o igual que
$\approx$	similar que
$\|(.)\|$	valor absoluto de
Log	logaritmo en base 10
ln	logaritmo natural
$\cup$	unión
$\cap$	intersección
$\varnothing$	conjunto vacío
R	ángulo entre dos segmentos
$\in$	pertenece a
$\notin$	no pertenece a
α	ángulo alfa
β	ángulo beta
φ	ángulo phi
γ	ángulo gama
L.R	lado recto

Agradecimientos

En primer lugar, y por sobre todo a Dios creador del Universo, a mi esposa Elizabeth, a mis hijas Doménica y Sofía, quienes me impulsan a ser mejor cada día, a mis padres, familiares y a mis estudiantes, así también a la Universidad Politécnica Salesiana sede Guayaquil.

Víctor Huilcapi Subía

Prefacio

El presente texto ha sido elaborado con el objetivo principal de poder aportar al fortalecimiento del dominio de los fundamentos del Cálculo Diferencial y la Geometría Analítica por parte de los estudiantes universitarios que cursan los primeros niveles de sus carreras, de tal manera que su proceso de enseñanza-aprendizaje sea óptimo.

En esta primera edición se estudia los aspectos básicos de la geometría analítica en el plano: secciones cónicas y las rectas, las funciones de una variable real, entre las principales está la cuadrática, la de valor absoluto; los límites y derivadas de funciones polinómicas, trigonométricas, exponenciales, logarítmicas, entre otras, y se termina con aplicaciones de las derivadas resolviendo ejercicios de optimización usando máximos y mínimos.

Los temas son tratados empleando un lenguaje sencillo que permite comprender con facilidad las temáticas abordadas, así también en la presenta obra se ha hecho uso de una potente herramienta matemática (utilizada ampliamente en las áreas de ciencias básicas y ciencias tecnológicas), MATLAB, para simular y verificar los ejercicios resueltos en el texto, de esta manera, nos ponemos a la vanguardia con el uso de las nuevas tecnologías de información y comunicación (NTIC) que permite a los estudiantes manejar los programas desarrollados por el autor y colaboradores a fin de que estos puedan ser ampliados y/o mejorados.

Este trabajo inició aproximadamente en el 2005 como una recopilación de las clases de cálculo diferencial del autor a sus estudiantes de Ingeniería Electrónica de la Universidad Politécnica Salesiana en la ciudad de Guayaquil, a lo largo de los años la misma ha sido fortalecida con la retroalimentación de alumnos y docentes a quienes les agradezco sus valiosos aportes. El autor actualmente se encuentra trabajando en una segunda edición de este texto con una mayor cobertura de temas inherentes al cálculo de una variable.

Víctor Manuel Huilcapi Subía

Introducción

El presente texto tiene el propósito de ser un aporte a los estudiantes universitarios de los primeros niveles de las carreras de Ingenierías y afines, así también como a la difusión de las ciencias matemáticas. Es una recopilación de diversos tipos de ejercicios y experiencias adquiridas en los aproximadamente diez años de labor docente profesional.

Inicialmente se abarcan temas de Geometría Analítica, y luego se desarrolla el estudio de límites y funciones de una variable real, así como también se analizan las derivadas, y sus aplicaciones. En muchos de los ejemplos se han incluido el uso de la herramienta informática MATLAB.

Este trabajo ha sido hecho con mucho esfuerzo y perseverancia para ustedes.

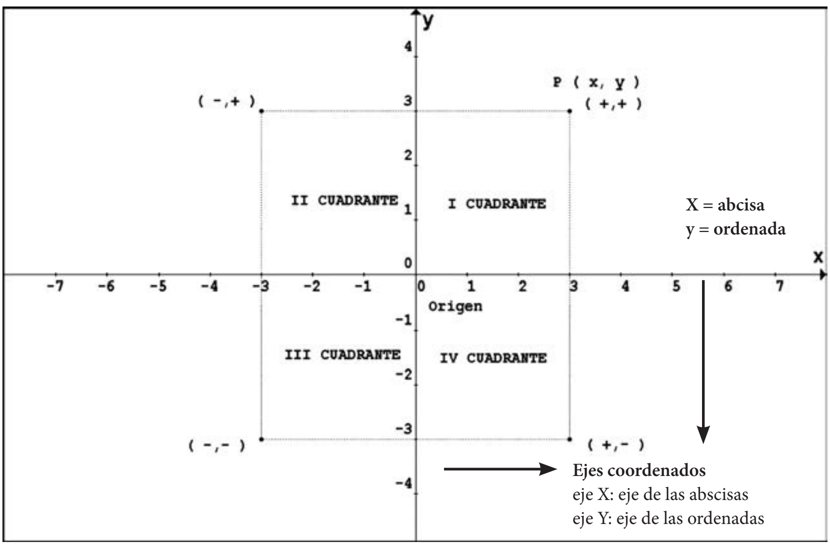
Capítulo 1

Geometría Analítica

Sistema de coordenadas rectangulares

El sistema de coordenadas rectangulares está formado por dos ejes perpendiculares entre sí, denominados EJES COORDENADOS, que se interceptan en un punto denominado ORIGEN, dividiendo al plano cartesiano que lo contiene en cuatro cuadrantes como lo muestra la figura 1.1.

Figura 1.1 Sistema de coordenadas rectangulares



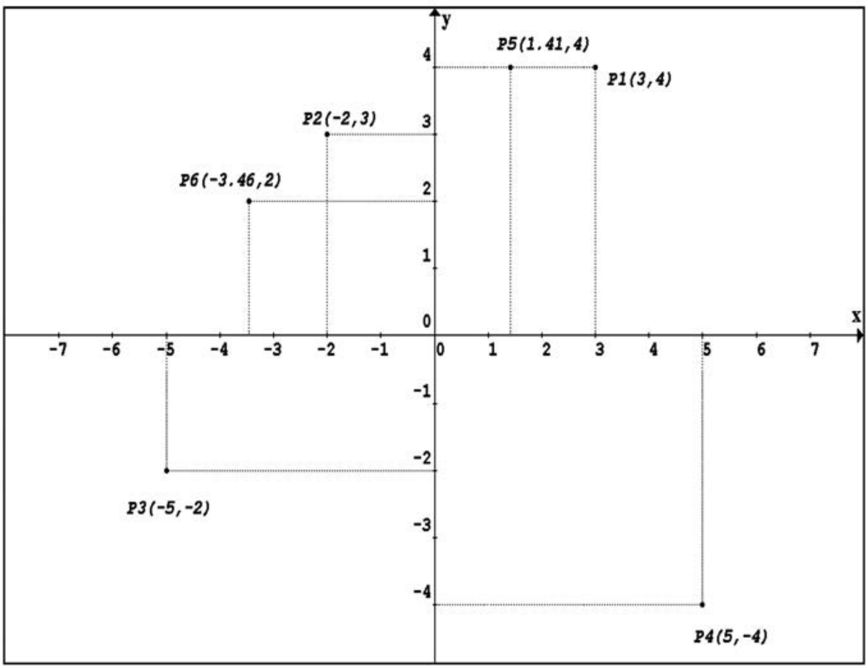
Así pues, para definir un punto en el plano es necesario conocer el valor de las dos coordenadas que son la posición en x (abscisa) y la posición en y (ordenada). Dichos valores pueden ser positivos o negativos.

Ejemplos:

1. Graficar los siguientes puntos en el sistema de coordenadas rectangulares $P_1(3,4)$; $P_2(-2,3)$; $P_3(-5,-2)$; $P_4(5,-4)$; $P_5(\sqrt{2},4)$; $P_6(-2\sqrt{3},2)$

Solución. Una vez que se tiene los puntos se procede a graficarlos en el plano tomando en cuenta primero la posición en x y luego la posición en y. Para los valores que poseen raíces es conveniente resolver su valor en decimales para luego ubicarlos en el plano.

Figura 1.2 Graficación de puntos en el plano cartesiano

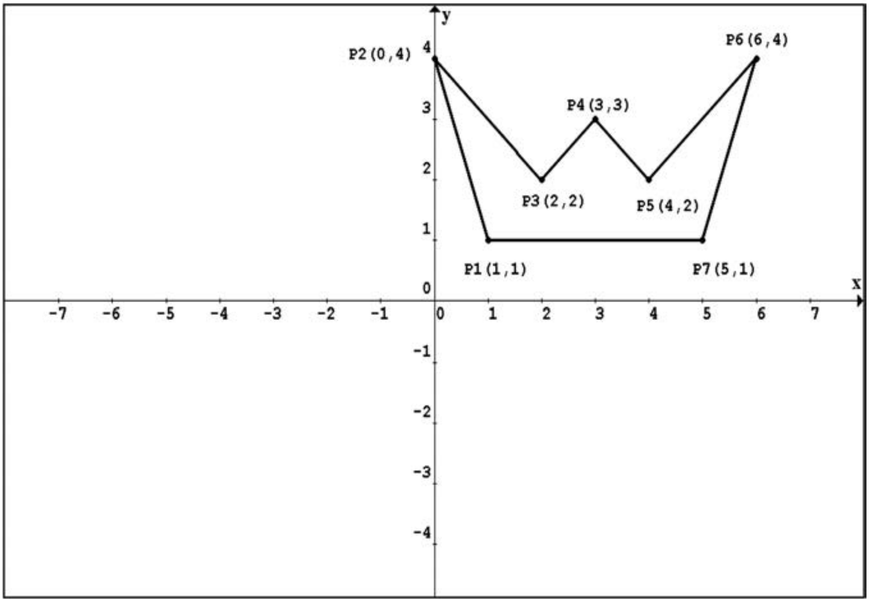


```
%MATLAB
%SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES
%Graficar los siguientes puntos en el sistema de
coordenadas
%rectangulares(3,4);(-2,3);(-5,-2);(5,-4);(sqr-
t(2),4);(-2sqrt(3),2)
clc
clf
%ejes
d=0.2;
eje=-10:1:10;
ceros = zeros(1,21);
plot(eje,ceros,'r+-')
hold on
plot(ceros,eje,'r+-')
 %gráfica
plot(3,4,'r*-')
plot(-2,3,'r*-')
plot(-5,-2,'r*-')
plot(5,-4,'r*-')
plot(sqrt(2),4,'r*-')
plot(-2*sqrt(3),2,'r*-')
 text(3+d,4+d,'P1(3,4)')
text(-2+d,3+d,'P2(-2,3)')
text(-5+d,-2+d,'P3(-5,-2)')
text(5+d,-4+d,'P4(5,-4)')
text(sqrt(2)+d,4+d,'P5')
text(-2*sqrt(3)+d,2+d,'P6')
 grid on
grid minor
axis([-10 10 -10 10])
axis square
```

2. Graficar el polígono que se forma al unir consecutivamente los puntos: $P_1(1,1)$; P_2 (0,4); P_3 (2,2); P_4 (3,3); P_5 (4,2); P_6 (6,4); P_7 (5,1)

Solución. Observe la figura 1.3.

Figura 1.3 Graficación de un polígono irregular en el plano cartesiano




```
%MATLAB
% Graficar el polígono que se forma al unir consecutiva-
mente los
% puntos: (1,1); (0,4); (2,2); (3,3); (4,2); (6,4);
(5,1)
clc
clf
%ejes
eje=-10:1:10;
ceros=zeros(1,21);
plot(eje,ceros,'r+-')
hold on
plot(ceros,eje,'r+-')
%gráfica
p=[1 0 2 3 4 6 5 1];
q=[1 4 2 3 2 4 1 1];
plot(p,q,'r.-')
%etiquetas
```

```
text(1,1,'P1(1,1)')
text(0,4,'P2(0,4)')
text(2,2,'P3(2,2)')
text(3,3,'P4(3,3)')
text(4,2,'P5(4,2)')
text(6,4,'P6(6,4)')
text(5,1,'P7(5,1)')
grid on
axis([-2 7 -2 5])
axis square
```

3. Graficar los elementos que forman la siguiente RELACIÓN, utilizando el plano cartesiano:

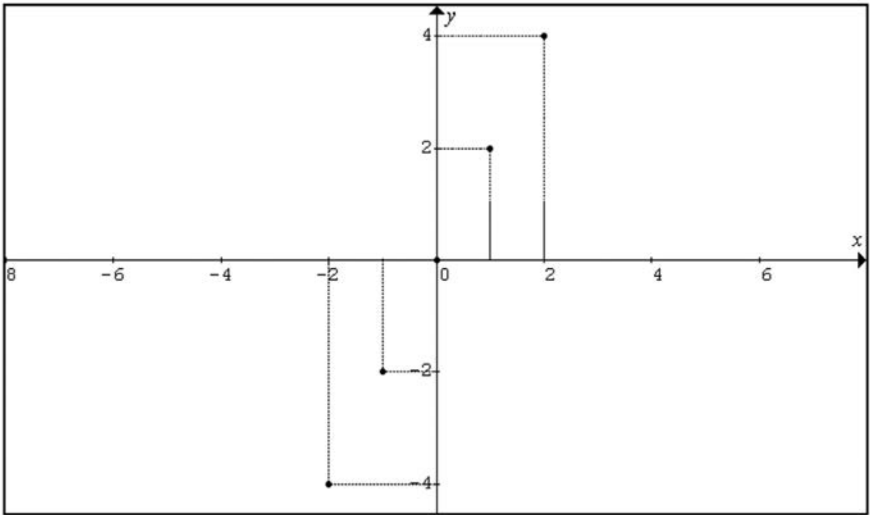
$$R = \{ (x,y) / x \in Z, -2 \leq x \leq 2, y = 2x \}$$

Solución. Se debe determinar cada par ordenado (*x,y*) que forma la relación R. Así pues, según la regla de correspondencia los valores de *x* deben pertenecer al conjunto de los números enteros (¢) comprendidos en el intervalo [-22] y cuyos valores de respectivos cumplen *y=2x*. Observe la tabla de valores 1.1 y la figura 1.4.

Tabla 1.1 Tabulación de los elementos de la relación R

X	Y	Elementos
-2	y = 2(-2) = -4	P1(-2,-4)
-1	y = 2(-1) = -2	P2(-1,-2)
0	y = 2(0) = 0	P3(0,0)
1	y = 2(1) = 2	P4(1,2)
2	y = 2(2) = -4	P5(2,4)

Figura 1.4 Graficación de la relación R del ejemplo 3



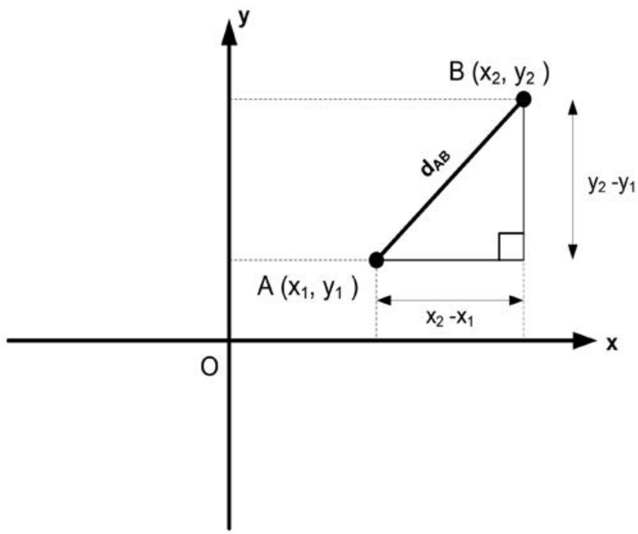

```
%MATLAB
% Graficar los elementos que forman la siguiente
RELACIÓN,
% utilizando el plano cartesiano:
% R={(x,y)/x e Z, -2<=x<=2, y=2x}
clc
clf
%ejes
eje=-10:1:10;
ceros=zeros(1,21);
plot(eje,ceros,'r+-')
hold on
plot(ceros,eje,'r+-')
%gráfica
x= -2:1:2;
y= 2*x;
plot(x,y,'b*-')
grid on
axis([-3 3 -5 5])
axis square
```

Distancia entre dos puntos

Dados dos puntos A (x_1, y_1) y B(x_2, y_2) en el plano cartesiano (figura 1.5) y observando el triángulo formado, se puede utilizar el teorema de Pitágoras para hallar la distancia entre ellos.

$$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Figura 1.5 Distancia entre dos puntos



Ejemplos:

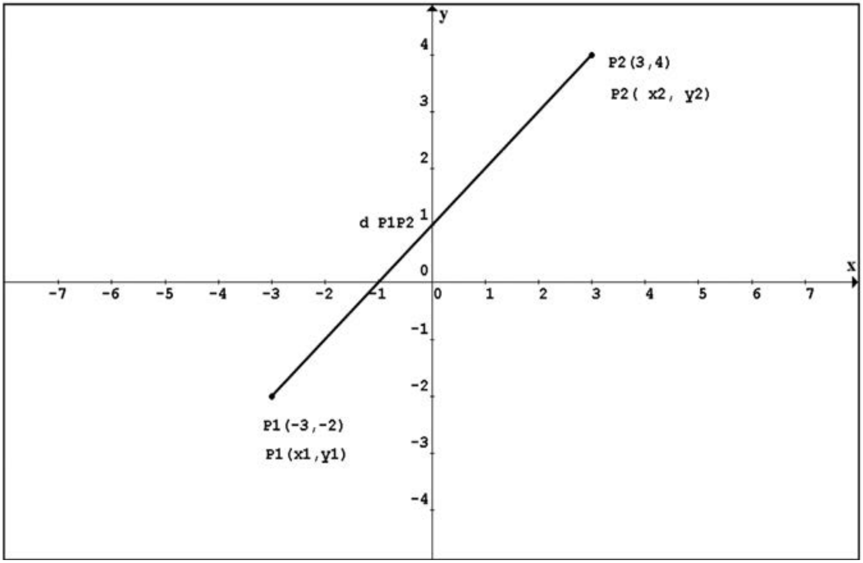
1. Calcule la distancia entre los puntos $P_1(-3,-2)$; $P_2(3,4)$.

Solución. Reemplazando directamente en la fórmula para hallar la distancia entre dos puntos.

$$d_{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad = \sqrt{(3-(-3))^2 + (4-(-2))^2} \quad = \sqrt{36+36} \quad = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

Observe la figura 1.6.

Figura 1.6 Gráfica de la distancia entre dos puntos




```
%MATLAB
% DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS
% Calcule la distancia entre los puntos (-3,-2);
(3,4).
clc
% ejes
eje=-10:1:10;
ceros=zeros(1,21);
plot(eje,ceros,'r+-')
hold on
plot(ceros,eje,'r+-')
% Distancia
% P1=(-3,-2)
% P2=(3,4)
d=sqrt((-3-3)^2 + (-2-4)^2)
% gráfica
p=[-3 3];
q=[-2,4];
plot(p,q,'b*-')
```

```
text(-3,-2,'P1(-3,-2)')
text(3,4,'P2(3,4)')
text(0,1,'d')
grid on
axis([-5 5 -5 5])
axis square
```

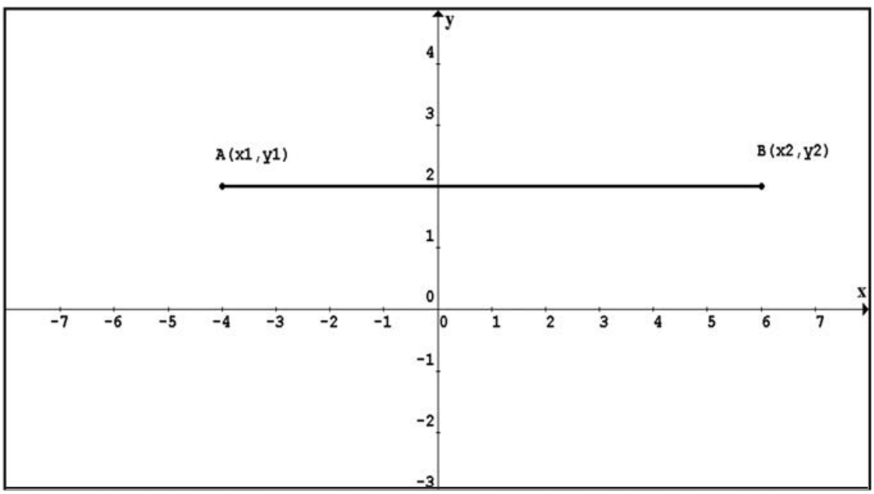
2. Demuestre analíticamente que la distancia entre dos puntos alineados horizontalmente es $d=|x_2-x_1|$. Calcule, además, la distancia entre los puntos A (–4,2) y B (6,2).

Solución. Graficamos dos puntos que cumplan la condición de estar alineados horizontalmente en el plano cartesiano (ver figura 1.7), y aplicamos la fórmula de la distancia, observando que la ordenada es igual a la ordenada . Así tenemos:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_2)^2} \quad = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + 0} = |x_2 - x_1|$$

NOTA: Como la diferencia (x_2-x_1) está elevada al cuadrado siempre será positiva, por lo cual se puede utilizar el valor absoluto.

Figura 1.7 Gráfica de la distancia entre dos puntos alineados horizontalmente



Luego realizamos el cálculo de la distancia entre los puntos dados: $A(-4,2)$ y $B(6,2)$.

$$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(6-(-4))^2 + (2-2)^2} = \sqrt{100} = 10$$

NOTA: Si los puntos estuvieran alineados verticalmente la distancia entre ellos sería $d = |y_2\text{-}y_1|$, ya que en este caso la abscisa x_1 es igual a la abscisa $x_2 = |x_1\text{-}x_2|$

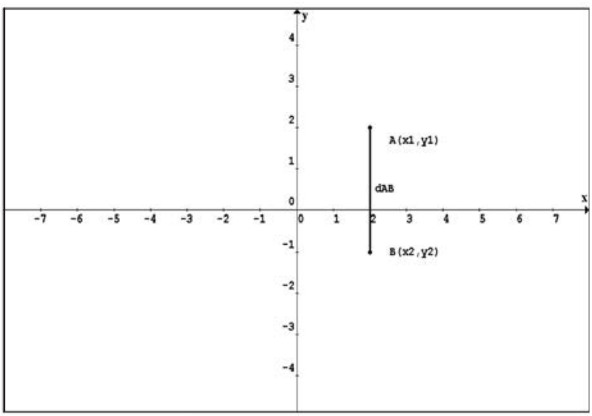
$$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad d_{AB} = |y_2 - y_1|$$

Figura 1.8 Gráfica de la distancia entre dos puntos alineados verticalmente

NOTA: Si los puntos estuvieran alineados verticalmente la distancia entre ellos sería d = $|y_2\text{-}y_1|$, ya que en este caso la abscisa x_1 es igual a la abscisa $x_2, (x_1 = x_2)$

$$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

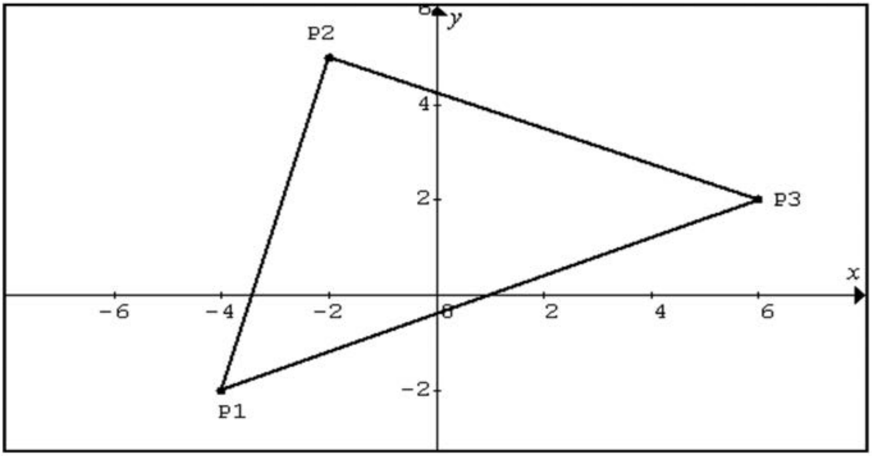
$$d_{AB} = |y_2 - y_1|$$



3. Hallar el perímetro de un triángulo cuyos vértices son los puntos $P_1(-4,-2)$, $P_2(-2,5)$y $P_3(6,2)$.

Solución. Primero, para orientarnos con este ejemplo realizamos el gráfico en el cual ubicamos los puntos y formamos el triángulo, luego, con la fórmula de distancia, hallamos la longitud de cada uno de los lados.

Figura 1.9 Cálculo del perímetro del triángulo formado por P_1, P_2, P_3



$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-2+4)^2 + (5+2)^2} = \sqrt{4+49} = \sqrt{53}$$

$$\overline{P_2P_3} = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} = \sqrt{(6+2)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{64+9} = \sqrt{73}$$

$$\overline{P_1P_3} = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} = \sqrt{(6+4)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{100+16} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$$

Sabiendo que el perímetro del triángulo es la suma de todos los lados, tenemos:

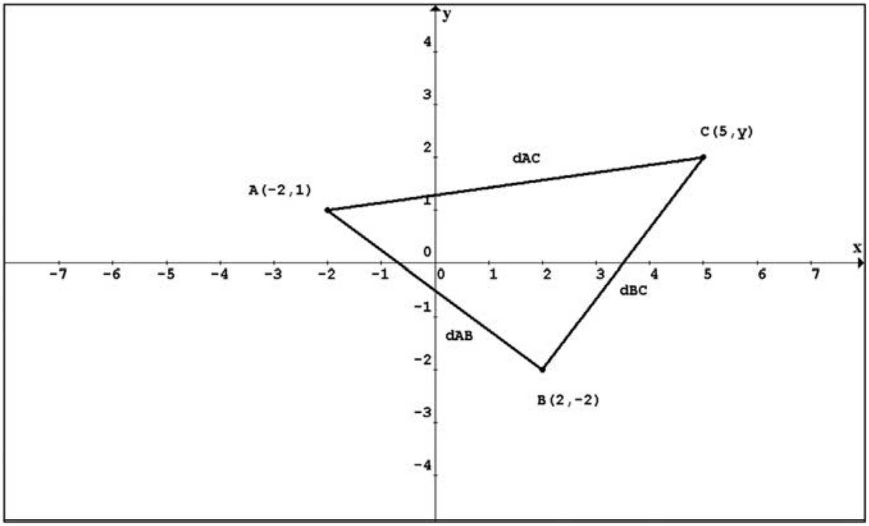
$$Perímetro = \sqrt{53} + \sqrt{73} + 2\sqrt{29} = 26.6u$$

4. Dados los siguientes puntos , A(-21), B(2, -2)y C(5, y) calcule el valor de la ordenada *y* del punto C, de tal forma que al unir los puntos se forme un triángulo rectángulo.

Solución. Para encontrar la ordenada *y*, aplicaremos el Teorema de Pitágoras, ya que todo triángulo rectángulo lo cumple. Así:

$$h^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Figura 1.10 Gráfico del triángulo rectángulo formado por *A, B, C*



H = dAC ; a = dAB ; b = dBC

$$d_{AC} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(5-(-2))^2 + (y-1)^2} = \sqrt{49 + (y-1)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2-(-2))^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

$$d_{BC} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(5-2)^2 + (y-(-2))^2} = \sqrt{9 + (y+2)^2}$$

$$\left[\sqrt{49 + (y-1)^2}\right]^2 = 5^2 + \left[\sqrt{9 + (y+2)^2}\right]^2$$

se simplifican los radicales :

$$49 + (y-1)^2 = 25 + 9 + (y+2)^2 \qquad ;\textit{se resuelven los binomios}$$

$$49 + y^2 - 2y + 1 = 25 + 9 + y^2 + 4y + 4 \qquad ;\textit{se simplifica } y^2$$

$$-2y - 4y = 38 - 49 - 1$$

$$-6y = -12$$

$$y = 2$$

Comprobación:

$$d_{AC} = \sqrt{49+(2-1)^2} \quad = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} \qquad (d_{AC})^2 = (d_{AB})^2 + (d_{BC})^2$$

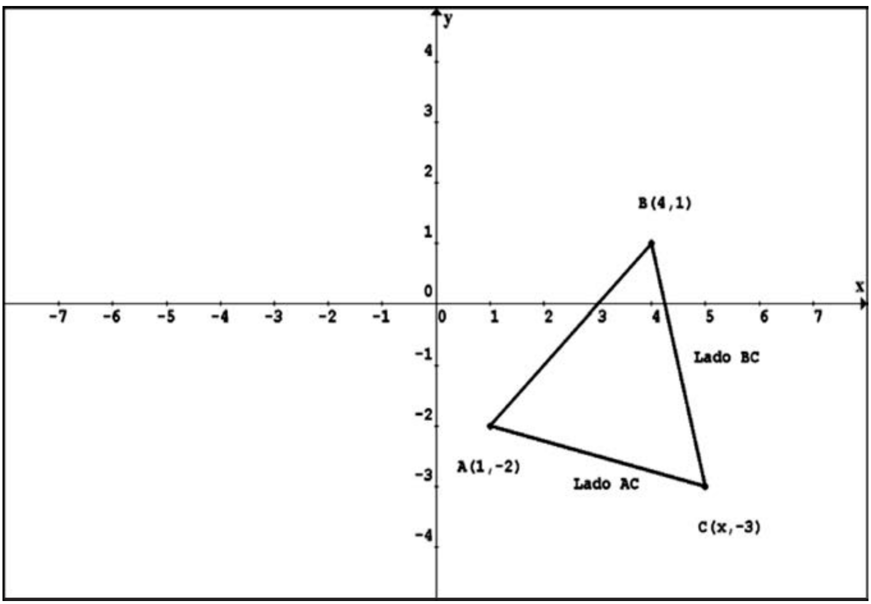
$$d_{BC} = \sqrt{9+(2+2)^2} \quad = \sqrt{25} = 5 \qquad (\sqrt{50})^2 = 5^2 + 5^2$$

$$d_{AB} = 5 \qquad 50 = 50\ (DEMOSTRADO)$$

5. Dados los siguientes puntos , A(1,-2), B(4,1) y C(x,-3), calcule el valor de la abscisa x del punto C, de tal forma que al unir los puntos se forme un triángulo isósceles con lados **AC** igual a **BC**.

Solución. Observe el gráfico.

Figura 1.11 Gráfico del triángulo isósceles formado por A, B, C



Un triángulo isósceles, por definición, es aquel que tiene dos lados iguales, y dos ángulos iguales. Nosotros analizaremos los lados iguales. Así:

$$d_{AC}=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}\quad=\sqrt{\left(x-1\right)^2+\left(-3-(-2)\right)^2}\quad=\sqrt{(x-1)^2+1}=\sqrt{x^2-2x+1+1}$$
$$d_{AC}=\sqrt{x^2-2x+2}$$
$$d_{BC}=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}\quad=\sqrt{\left(x-4\right)^2+\left(-3-1\right)^2}\quad=\sqrt{(x-4)^2+16}=\sqrt{x^2-8x+16+16}$$
$$d_{BC}=\sqrt{x^2-8x+32}$$
$$d_{AC}=d_{BC}$$
$$\left(\sqrt{x^2-2x+2}\right)^2=\left(\sqrt{x^2-8x+32}\right)^2;\textit{Elevamos al cuadrado y simplificamos los radicales}$$
$$x^2-2x+2=x^2-8x+32\qquad;\textit{Simplificamos } x^2$$
$$-2x+8x=32-2$$
$$6x=30$$
$$x=5$$

Entonces la coordenada del punto C es **(5,–3)**

Comprobación:

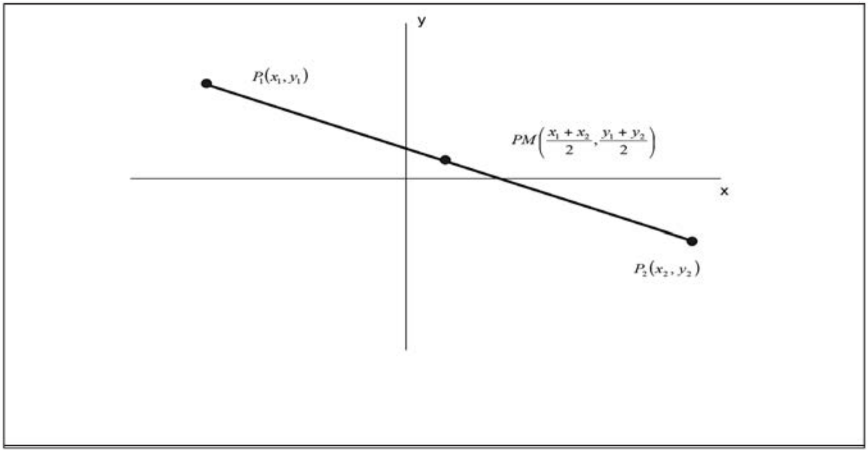
$$d_{AC}=\sqrt{x^2-2x+2}=\sqrt{5^2-2(5)+2}=\sqrt{25-10+2}=\sqrt{17}$$
$$d_{BC}=\sqrt{x^2-8x+32}=\sqrt{5^2-8(5)+32}=\sqrt{25-40+32}=\sqrt{17}\quad(\textit{DEMOSTRADO})$$

Punto medio de un segmento

Sean dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ que definen un segmento de recta. Las coordenadas del punto medio están dadas por:

$$PM=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

Figura 1.12 Punto medio de un segmento de recta

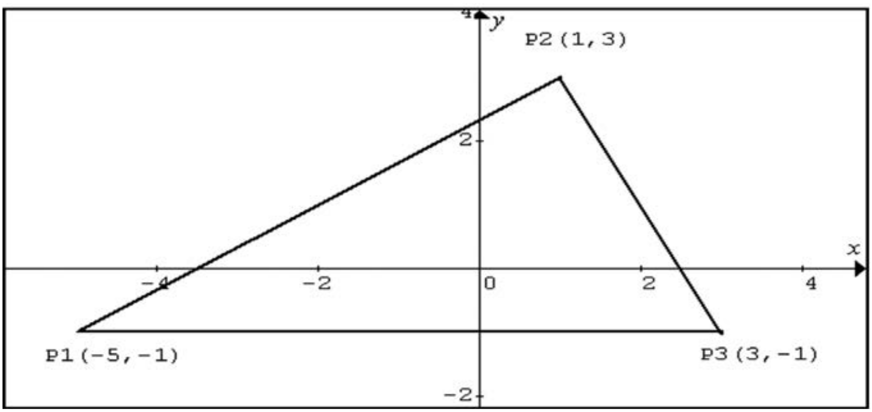


Ejemplos:

1. Hallar el área de la figura formada por la unión de los puntos medios de cada uno de los lados del triángulo que tiene como vértices los puntos $P_1(-5,-1)$, $P_2(1,3)$ y $P_3(3,-1)$.

Solución. Con los puntos dados hacemos la gráfica de la figura 1.13.

Figura 1.13 Gráfico del triángulo formado por P_1, P_2, P_3



Luego, hallamos los puntos medios de cada lado:

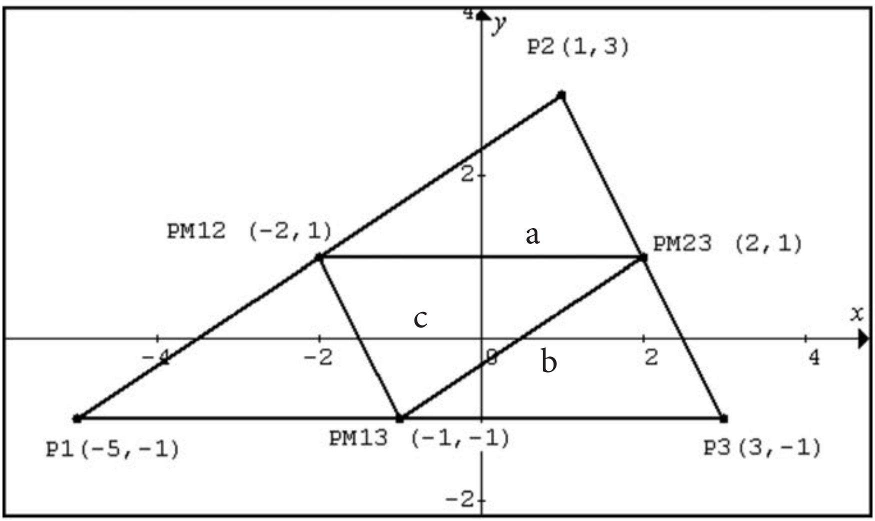
$$PM_{12} = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = PM_{12} = \left(\frac{-5+1}{2}, \frac{-1+3}{2}\right) = PM_{12} = \left(\frac{-4}{2}, \frac{2}{2}\right) = PM_{12} = (-2,1)$$

$$PM_{23} = \left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right) = PM_{23} = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{3-1}{2}\right) = PM_{23} = \left(\frac{4}{2}, \frac{2}{2}\right) = PM_{23} = (2,1)$$

$$PM_{13} = \left(\frac{x_1+x_3}{2}, \frac{y_1+y_3}{2}\right) = PM_{13} = \left(\frac{-5+3}{2}, \frac{-1-1}{2}\right) = PM_{13} = \left(\frac{-2}{2}, \frac{-2}{2}\right) = PM_{13} = (-1,-1)$$

Uniendo estos puntos se forma un triángulo inscrito en otro (Observe la figura 1.14):

Figura 1.14 Gráfico del triángulo inscrito formado por $PM_{12,}PM_{23,}PM_{13}$



Como lo que se pide en el ejemplo es hallar el área de este nuevo triángulo, vamos a hacerlo utilizando la fórmula del área en función de su *semiperímetro* (s):

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

De donde *a*, *b* y *c* son las longitudes de los lados del triángulo inscrito; procedemos a hallarlas (utilizando la fórmula de distancia entre dos puntos):

$$a = \sqrt{(x_{12} - x_{23})^2 + (y_{12} - y_{23})^2} = \sqrt{(-2-2)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$b = \sqrt{(x_{23} - x_{13})^2 + (y_{23} - y_{13})^2} = \sqrt{(2+1)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{9+4} = 3.6055$$

$$c = \sqrt{(x_{12} - x_{13})^2 + (y_{12} - y_{13})^2} = \sqrt{(-2+1)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{1+4} = 2.2361$$

Sabiendo luego, que el semiperímetro es la mitad del perímetro, es decir:

$$s = \frac{perímetro}{2} = \frac{a+b+c}{2} = \frac{4+3.6055+2.2361}{2} = \frac{9.8416}{2} = 4.9208$$

Por último, aplicando la fórmula del área del triángulo en función de su semiperímetro, tenemos:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{4.9208(4.9208-4)(4.9208-3.6055)(4.9208-2.2361)} = 4u^2$$

```
%MATLAB
% PUNTO MEDIO
% Hallar el área de la figura formada por la unión de
los puntos
% medios de cada uno de los lados del triángulo que
tiene como
% vértices los puntos (-5,-1), (1,3) y (3,-1).
clc
% coordenadas
p1=([-5,-1])
p2=([1,3])
p3=([3,-1])
% puntos medios
m1=(p1+p2)/2
m2=(p2+p3)/2
```

```
m3=(p3+p1)/2
% lados del triángulo formado por los puntos medios
a=m2-m1
b=m3-m2
c=m1-m3
% magnitud de los lados del triángulo formado por
% los puntos medios.
a=norm(a,2)
b=norm(b,2)
c=norm(c,2)
% semiperímetro
s=(a+b+c)/2
% area del triángulo formado por los puntos medios
A=sqrt(s*(s-a)*(s-b)*(s-c))
```

División de un segmento

Dados dos puntos $A(x_1,y_1)$ y $B(x_2,y_2)$ en el plano cartesiano como se muestra en la figura 1.15, y sea un tercer punto $C(x,y)$ que divide al segmento AB en una relación r dada. Entonces:

a. Si el punto $C(x,y)$ se encuentra entre el segmento AB la relación r es **positiva**, ya que los segmentos AC y CB están dirigidos en el mismo sentido.

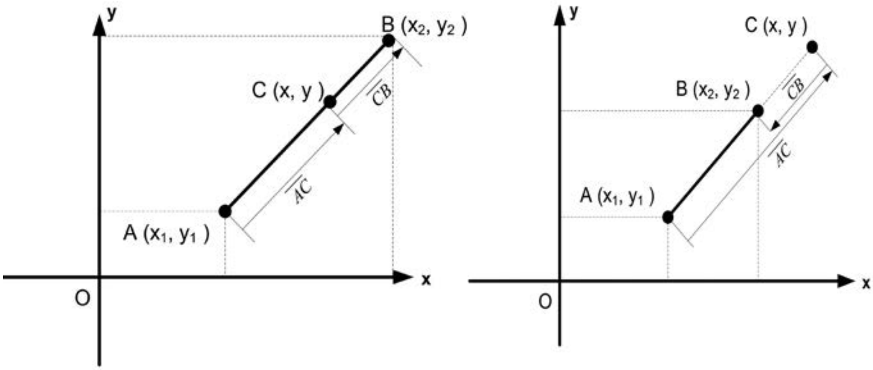
b. Si el punto $C(x,y)$ se encuentra fuera del segmento AB en uno u otro extremo la relación r es **negativa**, ya que los segmentos AC y CB están dirigidos en sentido opuesto.

c. Las ecuaciones que permiten calcular las coordenadas del punto de división $C(x,y)$ del segmento AB son:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r} \quad ; \quad y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}$$

$$r = relación = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} \; ; r \neq -1$$

Figura 1.15 División de un segmento rectilíneo



a) Relación positiva b) Relación negativa

Ejemplos:

1. Sean $P_1(-3,-2)$ y $P_2(5,2)$ los puntos extremos de un segmento de recta. Hallar las coordenadas del punto $P(x,y)$ que divide a este segmento en la relación $r = 3$.

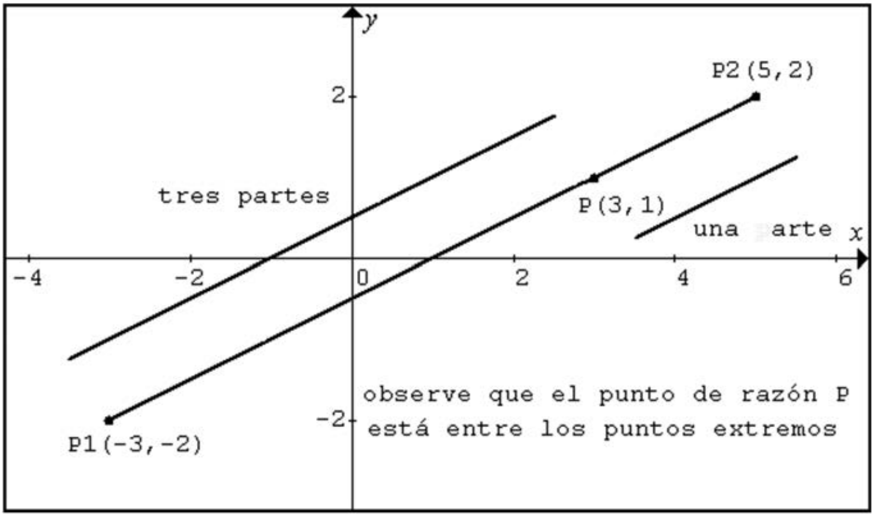
Solución. Utilizando las fórmulas tenemos:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} = \frac{-3 + (3)(5)}{1 + 3} = \frac{12}{4} = 3$$

$$y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r} = \frac{-2 + (3)(2)}{1 + 3} = \frac{4}{4} = 1$$

Por lo tanto, el punto $P(3,1)$ divide al segmento de recta en la relación r=3. Observe la figura 1.16.

Figura 1.16 División del segmento rectilíneo $\overline{P_1P_2}$ en una relación de 3




```
%MATLAB
% DIVISION DE UN SEGMENTO
% Sean P1(-3,-2)y P2(5,2) los puntos extremos de un
segmento de
% recta.
% Hallar las coordenadas del punto P(X,Y) que divide
a este
% segmento en la relación R=3.
clc
clf
format rat
% Ejes
eje=-10:1:10;
ceros=zeros(1,21);
plot(eje,ceros,'r+-')
hold on
plot(ceros,eje,'r+-')
% Datos
p1=[-3 -2];
p2=[5 2];
x1 = p1(1);
```

```
y1 = p1(2);
x2 = p2(1);
y2 = p2(2);
r=3 ; % Esta es la relación de división del segmento, puede
% cambiarse a voluntad y generar un nuevo punto P y una
%nueva gráfica
% Cálculo del punto P(x,y)
x=(x1+r*x2)/(1+r)
y=(y1+r*y2)/(1+r)
% Cálculos auxiliares para graficar la recta emplean-
do la ecuación
% de la recta con dos puntos P1 Y P2.
a=x1:0.1:x2 ;    %abcisas
m=(y2-y1)/(x2-x1); %pendiente
b= (a-x1)*m + y1 ; %ecuacion de la recta / ordenadas
% gráfica
plot(x1,y1,'b*-')
plot(x2,y2,'b*-')
plot(x,y,'b*-')
plot(a,b,'k-')
text(x1,y1,'P1')
text(x2,y2,'P2')
text(x,y,'P')
grid on
axis([-5 6 -5 5])
axis square
```

2. Sean $P_1(4,-2)$ y $P_2(0,1)$ los puntos extremos de un segmento de recta. Hallar las coordenadas del punto $P(x,y)$ que divide a este segmento en la relación $r=-\frac{3}{2}$.

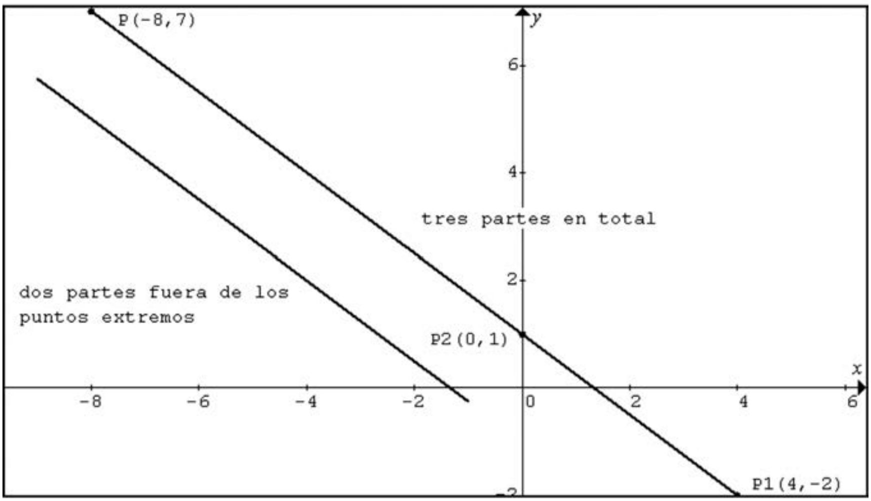
Solución. Utilizando las fórmulas tenemos:

$$x=\frac{x_1+rx_2}{1+r}=\frac{4+\left(-\frac{3}{2}\right)(0)}{1-\frac{3}{2}}=\frac{4}{-\frac{1}{2}}=-8$$

$$y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r} = \frac{-2 + \left(-\frac{3}{2}\right)(1)}{1 - \frac{3}{2}} = \frac{-\frac{7}{2}}{-\frac{1}{2}} = 7$$

Por lo tanto, el punto $P(-8,7)$ divide al segmento de recta en la relación $r = -\frac{3}{2}$. Observe la figura 1.17.

Figura 1.17 División del segmento rectilíneo $\overline{P_1P_2}$ en una relación de 3/2



Pendiente y ángulo de inclinación de una recta

Una característica de una línea recta es el valor de su pendiente que se relaciona directamente con la medida del ángulo que forma con el eje horizontal, es decir, su inclinación.

Sean $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ dos puntos de una recta, el valor de la pendiente m de dicha recta está dado por:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

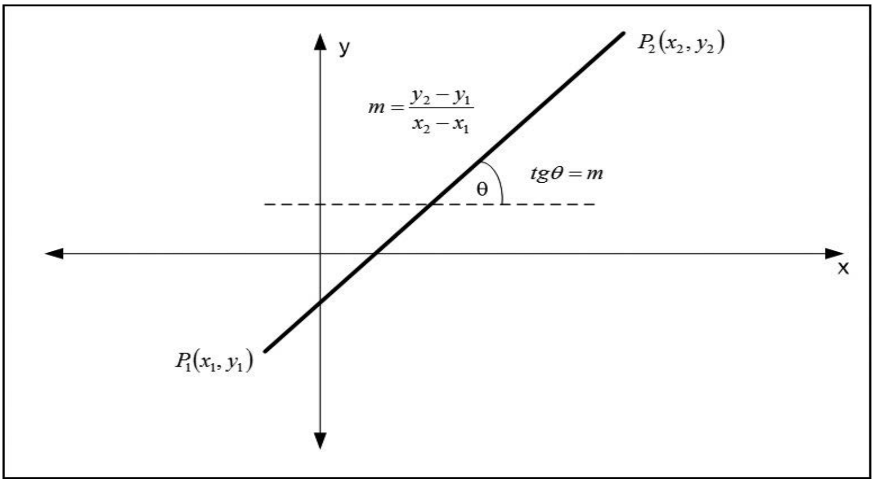
Es necesario reconocer que si el valor de la pendiente de una recta es positivo, entonces la recta crece; caso contrario (de ser negativo) la recta decrece.

Así mismo, la pendiente se relaciona con el ángulo de inclinación con respecto al eje de las x según:

$$tg\theta = m$$

El ángulo θ resultante estará definido desde una línea horizontal trazada en cualquier lugar de la trayectoria de la recta.

Figura 1.18 Pendiente y ángulo de inclinación de una recta



Ejemplos:

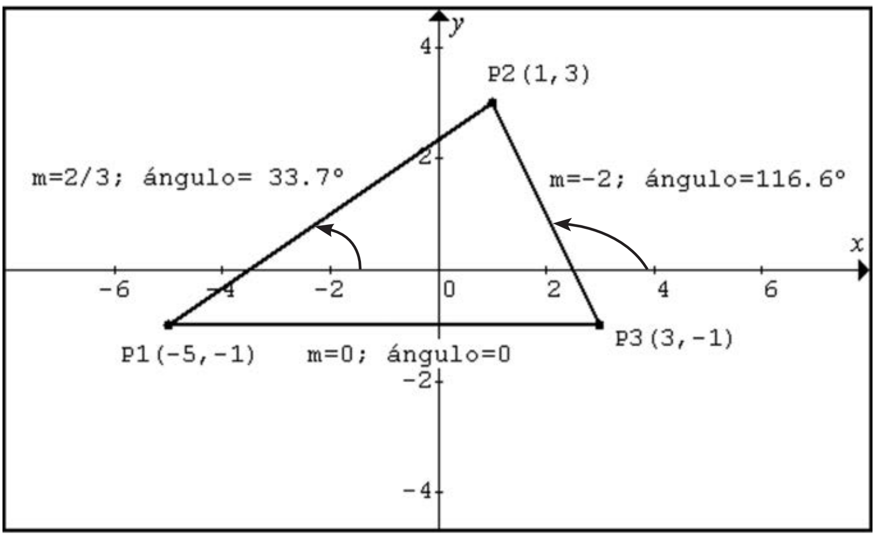
1. Sean $P_1(-5,-1)$, $P_2(1,3)$ y $P_3(3,-1)$ los vértices de un triángulo. Hallar la pendiente y el ángulo de inclinación de cada uno de sus lados.

Solución. Utilizando la fórmula de la pendiente y relacionando los lados.

$$m_{12} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3+1}{1+5} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$
$$m_{23} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{-1-3}{3-1} = \frac{-4}{2} = -2$$
$$m_{13} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{-1+1}{3+5} = \frac{0}{8} = 0$$

Con estos resultados de pendientes, se observa que el lado corresponde a un segmento de recta creciente (pendiente positiva), el lado a un segmento de recta decreciente (pendiente negativa), y el lado a un segmento de recta constante (pendiente nula). Observe la figura 1.19:

Figura 1.19 Pendiente y ángulos de inclinación del triángulo formado por P_1, P_2, P_3



Así mismo, para hallar los ángulos que las rectas forman con respecto al eje *x*, aplicamos la fórmula que relaciona la pendiente con su ángulo de inclinación, como se describe a continuación:

$$tg\theta_1 = m_{12} \qquad tg\theta_2 = m_{23} \qquad tg\theta_3 = m_{13}$$

$$\theta_1 = tg^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \qquad \theta_2 = tg^{-1}(-2) \qquad \theta_3 = tg^{-1}(0)$$

$$\theta_1 = 33.7^o \qquad \theta_2 = -63.4^o \qquad \theta_3 = 0^o$$

$$luego \quad -63.4^o + 180 = 116.6^o$$

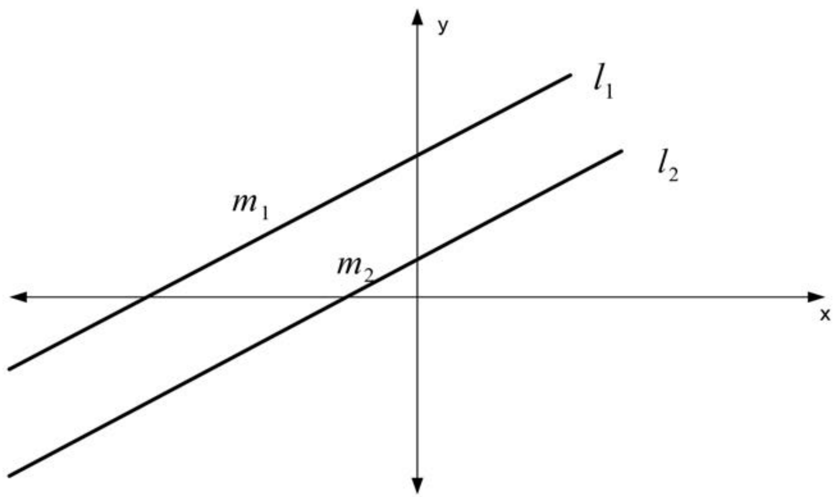
$$\rightarrow \theta_2 = 116.6^o$$

Criterios de paralelismo y perpendicularidad

Se conoce que dos rectas l_1 y l_2 son paralelas (que siguen la misma dirección) si sus pendientes m_1 y m_2 son iguales.

$$si \qquad m_1 = m_2 \qquad \rightarrow \qquad paralelismo$$

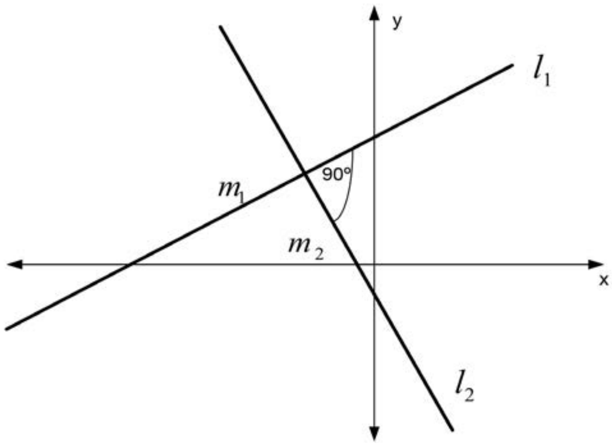
Figura 1.20 Rectas paralelas



Así mismo se conoce que dos rectas l_1 y l_2 son perpendiculares (que se cortan formando un ángulo de 90º) si el producto entre sus pendientes m_1 y m_2 resulta ser igual a –1.

$$si \qquad m_1 m_2 = -1 \qquad \rightarrow \qquad perpendicularidad$$

Figura 1.21 Rectas perpendiculares



Ejemplos:

1. Demostrar que un rectángulo cuyos vértices son los puntos $P_1(-3,1)$, $P_2(3,5)$, $P_3(5,2)$ y $P_4(-1,-2)$ está formado tanto por lados paralelos como perpendiculares.

Solución. Previamente se debe calcular la pendiente en cada lado del rectángulo.

$$m_{12} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-1}{3+3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

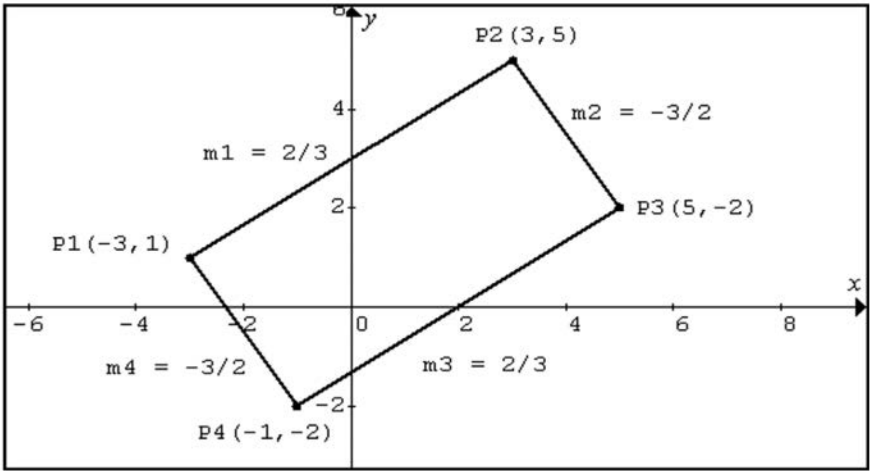
$$m_{23} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{2-5}{5-3} = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$m_{34} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} = \frac{-2-2}{-1-5} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$$

$$m_{14} = \frac{y_4 - y_1}{x_4 - x_1} = \frac{-2-1}{-1+3} = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}$$

Luego de estos resultados y tras observar la figura 1.22, se concluye:

Figura 1.22 Rectángulo formado por los puntos P_1, P_2, P_3, P_4



Utilizando los criterios:

$$m_{12} = m_{34}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \therefore segmentos \quad paralelos$$

$$m_{23} = m_{14}$$

$$-\frac{3}{2} = -\frac{3}{2} \therefore segmentos \quad paralelos$$

$$m_{12}m_{23} = -1$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) = -1$$

$$-1 = -1$$

$$\therefore segmentos \quad perpendiculares$$

$$m_{34}m_{14} = -1$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) = -1$$

$$-1 = -1$$

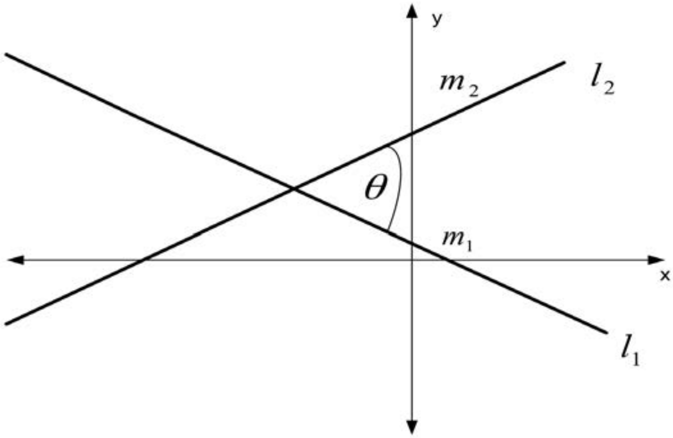
$$\therefore segmentos \quad perpendiculares$$

Ángulo entre dos rectas

Sean dos rectas l_1 y l_2 (no perpendiculares) cuyas pendientes son m_1 y m_2 respectivamente; luego, la relación del ángulo entre estas dos rectas y sus pendientes es:

$$tg\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 * m_2}$$

Figura 1.23 Ángulo entre dos rectas



NOTA: Es necesario, al utilizar la fórmula para hallar el ángulo entre dos rectas, que se tome el orden de las pendientes en sentido contrario al de las manecillas del reloj, caso contrario los resultados pueden resultar incorrectos.

Ejemplos:

1. Sean dos rectas: l_A que pasa por los puntos $P_1(1,2)$ y $P_2(4,6)$; y l_B, que pasa por los puntos $P_3(-3,1)$ y $P_4(4,-1)$. Hallar el ángulo entre ambas rectas.

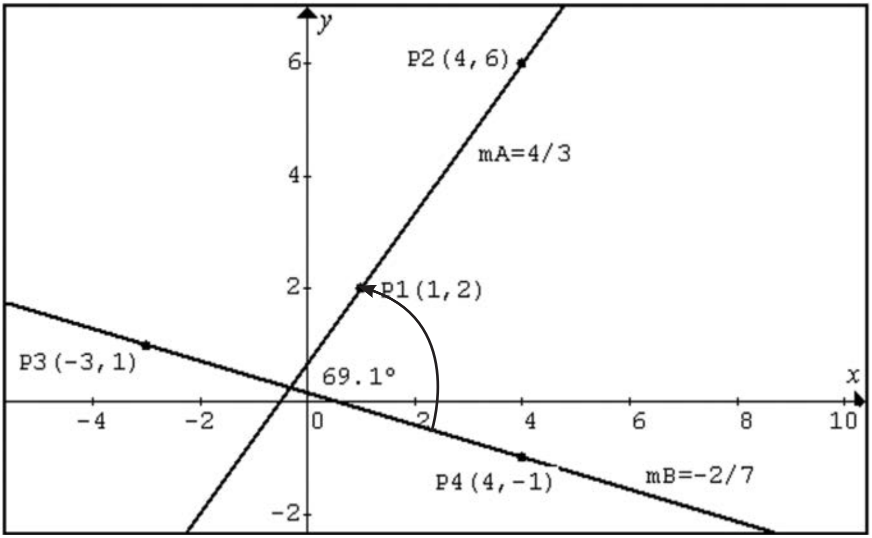
Solución. Hallemos primero el valor de la pendiente en cada recta.

$$l_A : m_A = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-2}{4-1} = \frac{4}{3}$$

$$l_B : m_B = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} = \frac{-1-1}{4+3} = -\frac{2}{7}$$

Observando la figura 1.24, nos damos cuenta que las pendientes deben ser tomadas en orden de m_B a m_A (sentido opuesto a las manecillas del reloj).

Figura 1.24 Ángulo entre las rectas l_A y l_B



Trabajando con la fórmula del ángulo entre dos rectas se tiene:

$$tg\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 * m_2} = \frac{m_A - m_B}{1 + m_B * m_A} = \frac{\frac{4}{3} - \left(-\frac{2}{7}\right)}{1 + \left(-\frac{2}{7}\right)\left(\frac{4}{3}\right)} = \frac{\frac{4}{3} + \frac{2}{7}}{1 - \frac{8}{21}} = \frac{\frac{34}{21}}{\frac{13}{21}} = \frac{34}{13}$$

Por último, hallando el ángulo:

$$tg\theta = \frac{34}{13}$$

$$\theta = tg^{-1}\left(\frac{34}{13}\right)$$

$$\theta = 69.1^{\circ}$$

```
%MATLAB
%1.7 ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS
%Sean dos rectas:LA,que pasa por los puntos P1(1,2) y
P2(4,6); y LB,
%que pasa por los puntos P3(-3,1) y P4(4,-1). Hallar
el ángulo entre
%las rectas.
clc
clf
format rat
% Ejes
eje=-10:1:10;
ceros=zeros(1,21);
plot(eje,ceros,'r+-')
hold on
plot(ceros,eje,'r+-')
% Datos
p1=[1 2]; p2=[4 6]; p3=[-3 1]; p4=[4 -1];
x1 = p1(1);   y1 = p1(2);   x2 = p2(1);   y2 = p2(2);
x3 = p3(1);   y3 = p3(2);   x4 = p4(1);   y4 = p4(2);
% Cálculo de las pendientes m1 y m2
m1=(y2-y1)/(x2-x1)
m2=(y4-y3)/(x4-x3)
format short
angulo=atan((m1-m2)/(1+m1*m2))*180/pi
% Cálculos auxiliares para graficar las rectas
empleando la ecuación
% de la recta con dos puntos.
a=-5:0.1:5 ;    %abcisas
b=(a-x1)*m1 + y1 ; %ecuación de la recta LA/
ordenadas
c=(a-x3)*m2 + y3 ; %ecuación de la recta LB/ ordenadas
% gráfica
plot(x1,y1,'b*-')
plot(x2,y2,'b*-')
plot(x3,y3,'b*-')
plot(x4,y4,'b*-')
text(x1,y1,'P1')
text(x2,y2,'P2')
text(x3,y3,'P3')
text(x4,y4,'P4')
```

```
plot(a,b,'k-')
plot(a,c,'b-')
grid on
grid minor
axis([-4 6 -2 8])
axis square
```

Sean los puntos , $A(-2,-3)$, $B(-1,3)$ y $C(6,1)$ los vértices de un triángulo. Demostrar que los ángulos interiores del triángulo suman 180º.

Solución. Hallamos primero el valor de cada una de las pendientes de los segmentos de recta que conforman los lados del triángulo.

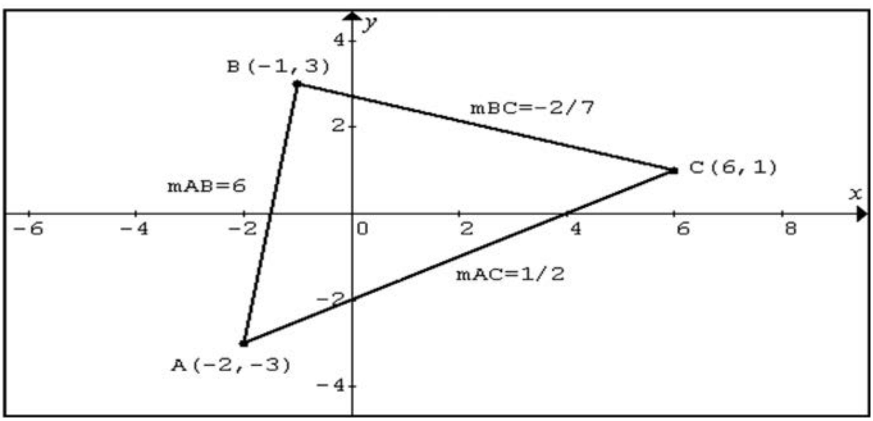
$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3+3}{-1+2} = \frac{6}{1} = 6$$

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{1-3}{6+1} = -\frac{2}{7}$$

$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{1+3}{6+2} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Luego, hallamos los ángulos comprendidos entre cada dos lados del triángulo. Observe la figura 1.25:

Figura 1.25 Cálculo de ángulos internos del triángulo formado por *A, B, C*



$$\theta_A = tg^{-1}\left(\frac{m_{AB} - m_{AC}}{1 + m_{AC} * m_{AB}}\right) = tg^{-1}\left(\frac{6 - \frac{1}{2}}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)(6)}\right) = tg^{-1}\left(\frac{\frac{11}{2}}{\frac{4}{1}}\right) = tg^{-1}\left(\frac{11}{8}\right) = 54^{o}$$

$$\theta_B = tg^{-1}\left(\frac{m_{BC} - m_{AB}}{1 + m_{AB} * m_{BC}}\right) = tg^{-1}\left(\frac{-\frac{2}{7} - 6}{1 + (6)\left(-\frac{2}{7}\right)}\right) = tg^{-1}\left(\frac{-\frac{44}{7}}{-\frac{5}{7}}\right) = tg^{-1}\left(\frac{44}{5}\right) = 83.5^{o}$$

$$\theta_C = tg^{-1}\left(\frac{m_{AC} - m_{BC}}{1 + m_{BC} * m_{AC}}\right) = tg^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{2}{7}}{1 + \left(-\frac{2}{7}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}\right) = tg^{-1}\left(\frac{\frac{11}{14}}{\frac{6}{7}}\right) = tg^{-1}\left(\frac{11}{12}\right) = 42.5^{o}$$

Por último, sumamos los tres ángulos hallados.

$$\theta_A + \theta_B + \theta_C = 54^{o} + 83.5^{o} + 42.5^{o} = 180^{o} \quad \text{(DEMOSTRADO)}$$

Ecuación de una línea recta

Una línea recta es una relación entre dos variables y de la forma:

$$ax + by + c = 0 \quad ; a, b, c \in \Re$$

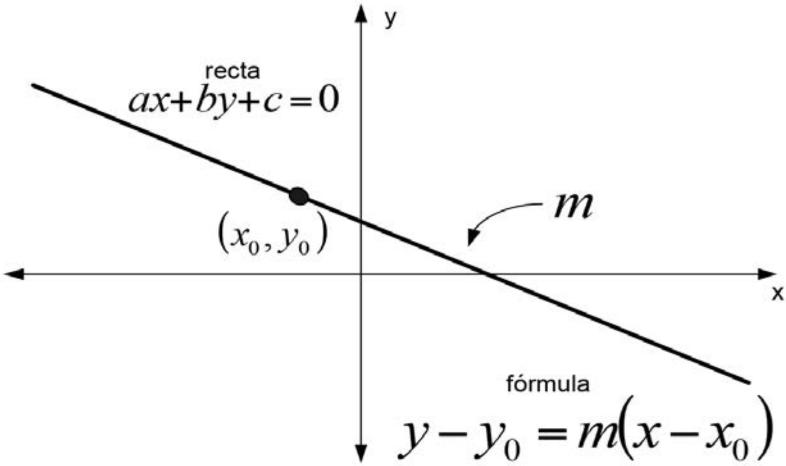
Así también a y b no pueden ser ambas cero a la vez.

Para hallar la ecuación de una línea recta tan solo se necesita un punto determinado de la recta (x_0, y_0) y el valor de su pendiente m.

A continuación se muestra, la fórmula *punto-pendiente* para hallar la ecuación de la recta:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Figura 1.26 Gráfico de una recta conocido un punto y su pendiente



También se puede hallar la ecuación de una recta conociendo dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) de manera directa:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Ejemplos:

1. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P_1(-4,-2)$ y $P_2(5,3)$.

Solución. Primero hallamos el valor de la pendiente.

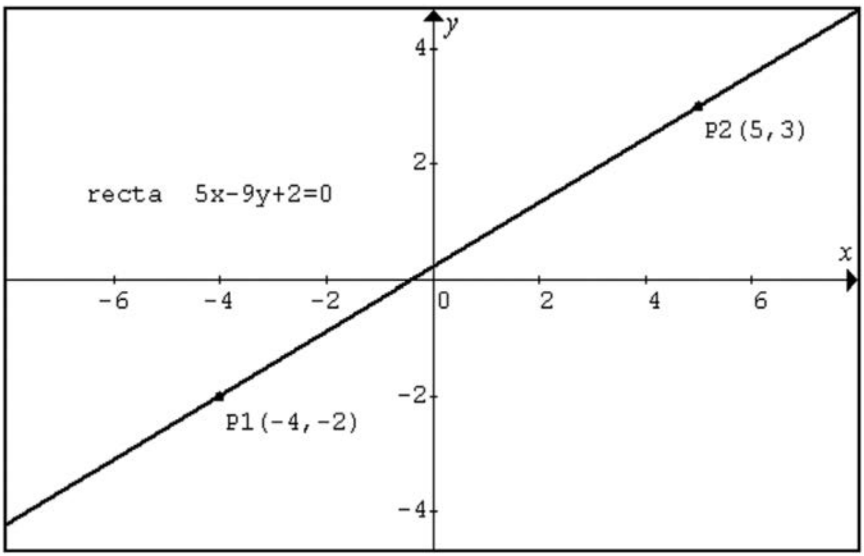
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3+2}{5+4} = \frac{5}{9}$$

Luego aplicamos la fórmula para hallar la ecuación de la recta, para ello podemos utilizar cualquier punto perteneciente a la recta.

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$y - 3 = \frac{5}{9}(x - 5)$$
$$9(y - 3) = 5(x - 5)$$
$$9y - 27 = 5x - 25$$
$$5x - 25 - 9y + 27 = 0$$
$$5x - 9y + 2 = 0$$

Observe la figura 1.27:

Figura 1.27 Gráfica de la recta 5*x*-9*y*+2=0



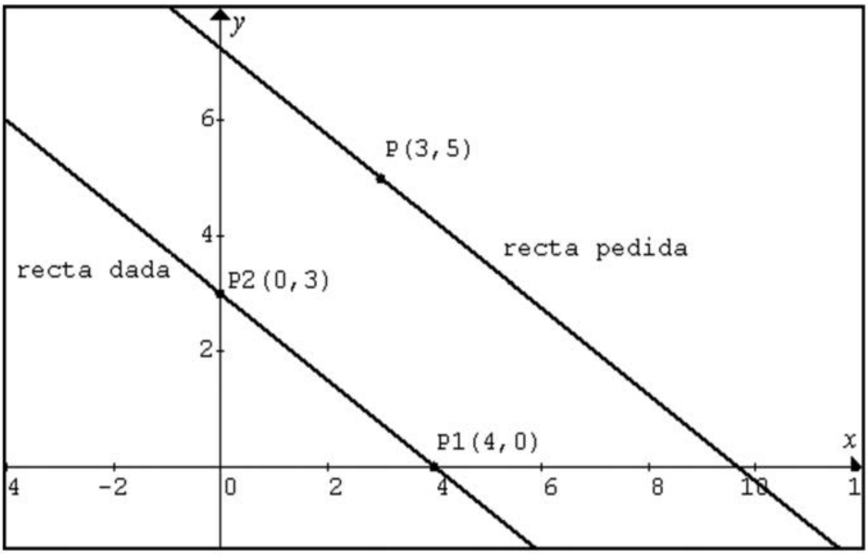
2. Hallar la ecuación de una recta que pasa por el punto y que es paralela a la recta 3*x*+4*y*-12=0.

Solución. Este ejemplo se lo resuelve siguiendo el criterio de paralelismo; para ello necesitamos conocer la pendiente de la recta dada. Primeramente, localicemos dos puntos de esta recta (más fácilmente que intersecten los ejes coordenados).

Sea y=0, entonces:
$3x+4(0)-12=0$
$3x=12$
$x=4$ Luego tenemos: $P_1(4,0)$
Así mismo, sea x =0, entonces:
$y=3$ Luego tenemos: $P_2(0,3)$

Con estos puntos podemos ubicar la recta dada en el plano e ilustrarnos mejor para obtener la recta pedida.

Figura 1.28 Gráfica de dos rectas paralelas



Como tenemos dos puntos de la recta dada podemos hallar la pendiente de la misma.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-0}{0-4} = -\frac{3}{4}$$

Pues bien, como las rectas deben ser paralelas sus valores de pendientes deben ser iguales, por lo tanto, la pendiente de la recta dada la utilizamos para asociarla a la recta pedida junto con el punto (3,5) por donde pasa esta recta.

Utilizamos la fórmula para hallar la ecuación de la recta:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$y - 5 = -\frac{3}{4}(x - 3)$$
$$4(y - 5) = -3(x - 3)$$
$$4y - 20 = -3x + 9$$
$$3x + 4y - 29 = 0$$

3. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(2,3)$ y que es perpendicular a la recta 5x-6y-17=0.

Solución. Para resolver este ejemplo nos basamos en el criterio de perpendicularidad, para ello debemos obtener la pendiente de la recta dada.

Manipulamos la ecuación de la recta dada hasta llegar a la forma debida:

Ecuación dada original: $5x\text{-}6y\text{-}17 = 0$

Reordenando términos: $6y = 5x\text{-}17$

Sacando factor común: $6y = 5\left(x - \frac{17}{5}\right)$

Despejando: $6y = 5\left(x - \frac{17}{5}\right)$

Tomando la forma: $y - 0 = \frac{5}{6}\left(x - \frac{17}{5}\right)$

De aquí, si se compara la expresión $y\text{-}y_0=m_1(x\text{-}x_0)$ con $y - 0 = \frac{5}{6}\left(x - \frac{17}{5}\right)$ podemos equiparar m_1 con $\frac{5}{6}$. Por lo tanto:

$$m_1 = \frac{5}{6}$$

Así también, utilizando el criterio de perpendicularidad obtenemos m_2(la pendiente de la recta perpendicular a la recta dada).

$$m_1 m_2 = -1$$

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

$$m_2 = -\frac{1}{\frac{5}{6}}$$

$$m_2 = -\frac{6}{5}$$

Con este valor de la pendiente que pertenece a la recta perpendicular y con el punto dado de dicha recta podemos hallar su ecuación respectiva.

$$y - y_0 = m_2(x - x_0)$$

$$y - 3 = -\frac{6}{5}(x - 2)$$

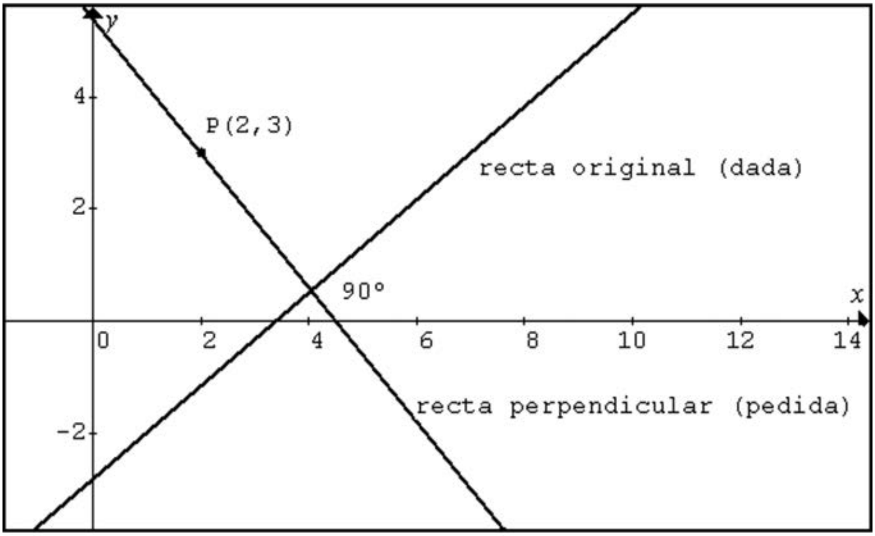
$$5(y-3) = -6(x-2)$$

$$5y - 15 = -6x + 12$$

$$6x + 5y - 27 = 0$$

Observe la figura 1.29:

Figura 1.29 Gráfica de dos rectas perpendiculares



4. Hallar el valor de k de tal manera que las rectas $2x$-$5y$-$3 = 0$ y $5x+ky$-$22 = 0$ sean perpendiculares.

Solución. Como se debe cumplir la condición de que las rectas sean perpendiculares, debemos obtener primero el valor de la pendiente de cada recta.

Pasos	Ecuación 1	Ecuación 2
Ecuación dada original:	$2x-5y-3=0$	$5x+ky-22=0$
Reordenando términos:	$-5y=-2x+3$	$ky=-5x+22$
Sacando factor común:	$-5y=-2\left(x-\frac{3}{2}\right)$	$ky=-5\left(x-\frac{22}{5}\right)$
Despejando:	$y=\frac{2}{5}\left(x-\frac{3}{2}\right)$	$y=-\frac{5}{k}\left(x-\frac{22}{5}\right)$
Tomando la forma:	$y-0=\frac{2}{5}\left(x-\frac{3}{2}\right)$	$y-0=-\frac{5}{k}\left(x-\frac{22}{5}\right)$

De estos últimos resultados se observa que los valores correspondientes de las pendientes son:

$$m_1 = \frac{2}{5} \text{ y } m_2 = -\frac{5}{k}$$

Pues bien, siguiendo el criterio, para que dos rectas sean perpendiculares el producto entre sus pendientes debe resultar igual a –1.

$$m_1 m_2 = -1$$

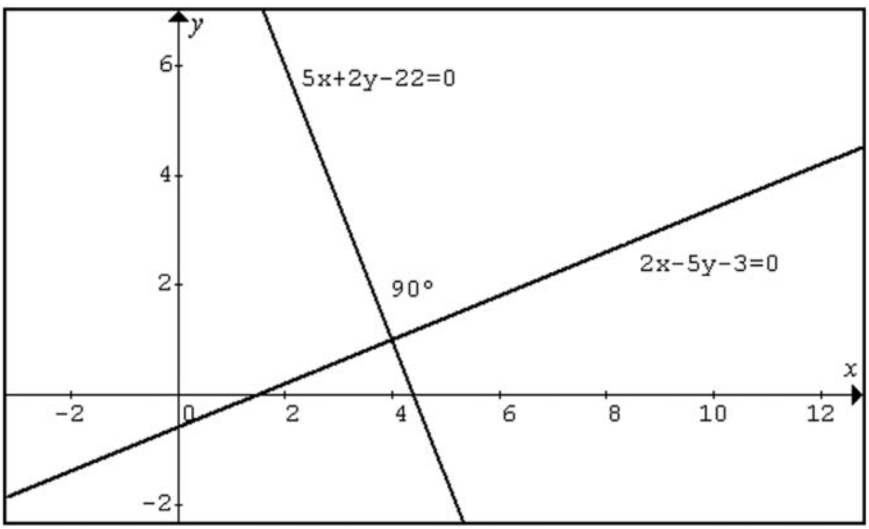
$$\left(\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{5}{k}\right) = -1$$

$$-\frac{2}{k} = -1$$

$$k = 2$$

Por lo tanto, las rectas perpendiculares son $2x$-$5y$-3=0 y $5x$+$2y$-22=0. Observe la figura 1.30:

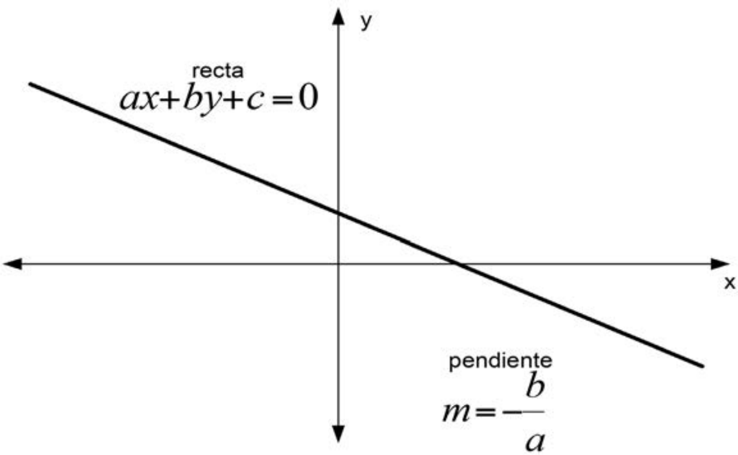
Figura 1.30 Gráfica de dos rectas perpendiculares $5x+2y-22 = 0$ y $2x-5y-3 = 0$



Hasta aquí, el lector se encontrará ya familiarizado con la importancia que tiene la pendiente en una recta, pues es ella quien le ofrece su carácter de inclinación y los criterios respecto a ella (la pendiente) sirven para relacionarla con otras rectas. Con todo esto, muchas veces necesitamos saber de manera inmediata el valor de la pendiente de una recta expresada en la forma $ax+by+c = 0$; de donde, despejando la variable se puede deducir que la pendiente estará dada por:

$$m = -\frac{a}{b}$$

Figura 1.31 Análisis de la pendiente de una recta de la forma **$ax+by+c = 0$**



5. Hallar el valor de de tal manera que las rectas kx-2y-2=0 y 3x+(k-5)y+4=0 sean paralelas.

Solución. Primero, debemos hallar la pendiente de cada una de las rectas; p ente dado.

$$m_1 = -\frac{a_1}{b_1} \qquad m_2 = -\frac{a_2}{b_2}$$

$$m_1 = -\frac{k}{-2} \qquad m_2 = -\frac{3}{k-5}$$

Luego, siguiendo la condición de que las rectas deben ser paralelas, sus pendientes deben ser iguales.

$$m_1 = m_2$$

$$-\frac{k}{-2} = -\frac{3}{k-5} ;)$$

-6=k2-5k

k^2-5k+6=0

(k-3)(k-2)=0

De aquí se observa que existen dos valores de k.

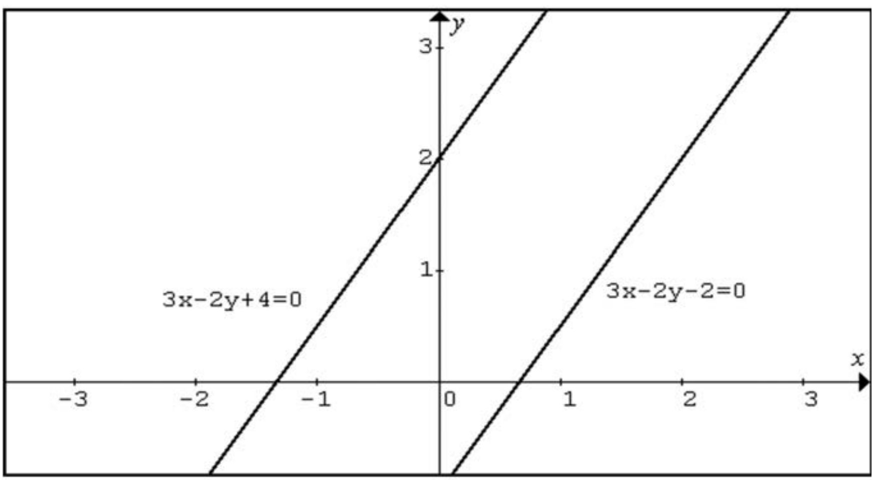
$k = 3$ y $k = 2$

Ambos valores son válidos, pues no existen restricciones.

- Utilizando el valor de $k = 3$, tenemos

$$\begin{cases} 3x - 2y - 2 = 0 \\ 3x - 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

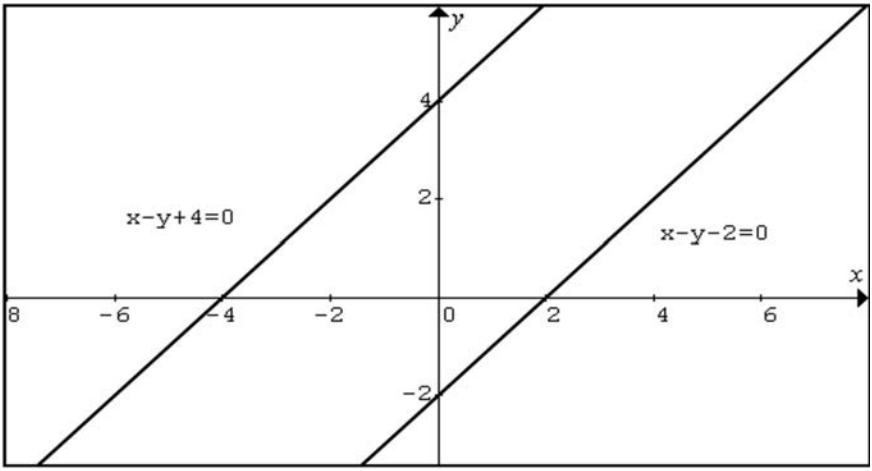
Figura 1.32 Graficación de rectas del ejemplo 5, para *k*=2



- Utilizando el valor de k=2, tenemos

$$\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x - y + 4 = 0 \end{cases}$$

Figura 1.33 Graficación de rectas del ejemplo 5, para k=2



6. Una recta l_1 pasa por los puntos A(-4,-1) y B(11,5), y otra recta l_2 pasa por el punto C(-1,6) y el punto D cuya abscisa es 3.

Hallar la ordenada del punto D sabiendo que l_1 es perpendicular a l_2. Hallar la ecuación de ambas rectas.
Solución. Calculamos la pendiente de l_1.

$$m_1 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5+1}{11+4} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

Luego, si l_1 es perpendicular a l_2, entonces el producto entre sus pendientes es –1.

$$m_1 = m_2$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)m_2 = -1$$

$$m_2 = \frac{-1}{\frac{2}{5}}$$

$$m_2 = -\frac{5}{2}$$

Este valor corresponde a la pendiente de l_2, con esto tenemos:

$$m_2 = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C}$$

$$-\frac{5}{2} = \frac{y_D - 6}{3+1}$$

$$y_D = -\frac{5}{2}(4) + 6$$

$$y_D = -4 \text{ (a)}$$

Para resolver el literal (b) necesitamos las pendientes y un punto cualquiera de cada recta.

Recta l_1:

$$y - y_A = m_1(x - x_A)$$

$$y + 1 = \frac{2}{5}(x+4)$$

$$5(y+1) = 2(x+4)$$

$$5y + 5 = 2x + 8$$

$$2x - 5y + 3 = 0$$

Recta l_2:

$$y - y_C = m_2(x - x_C)$$

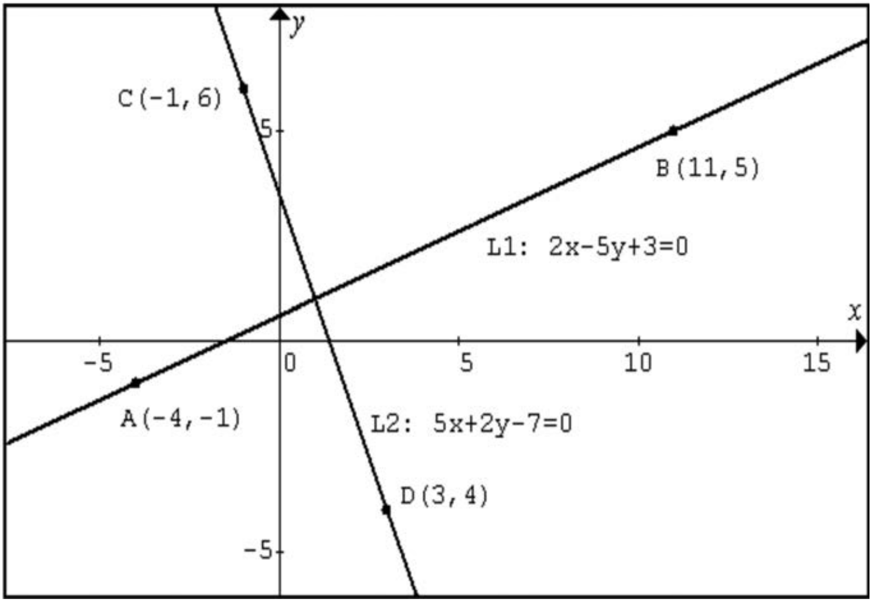
$$y - 6 = -\frac{5}{2}(x+1)$$

$$2(y-6) = -5(x+1)$$

$$2y - 12 = -5x - 5$$

$$5x + 2y - 7 = 0$$

Figura 1.34 Graficación de rectas del ejemplo 6, que pasan por los puntos *A*; *B*; *C*; *D*



Circunferencia

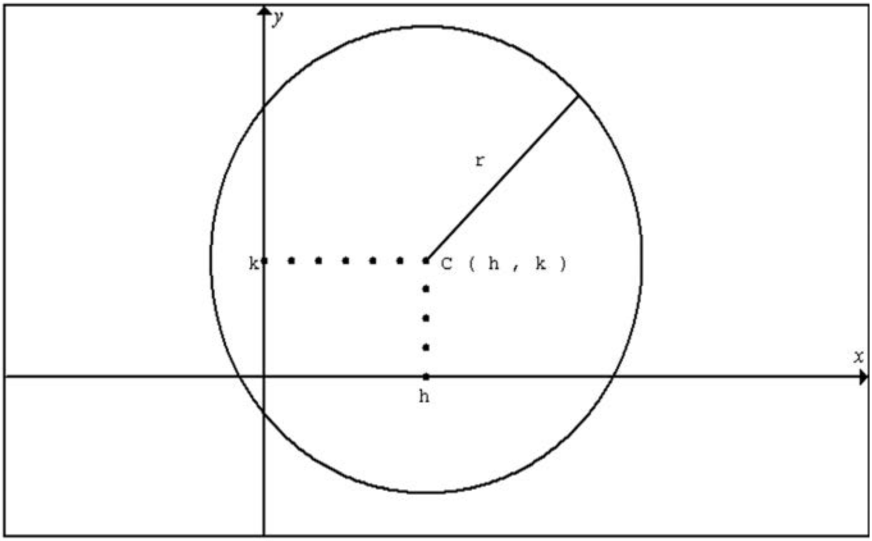
La cónica más sencilla es la circunferencia, la cual expresa el lugar geométrico de cualquier punto (x,y) que se encuentra siempre a una misma distancia, llamada radio r, con respecto a otro punto fijo llamado centro y cuyas coordenadas son $C(h,k)$.

La ecuación en la forma ordinaria de la circunferencia tiene la forma:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \quad \begin{cases} h,k\in\Re \\ r>0 \end{cases}$$

Y la ecuación general es: $Ax^2+By^2+Dx+Ey^2+F=0$

Figura 1.35 La circunferencia



De la ecuación dada se deduce que cuando la circunferencia tiene su centro en el origen de coordenadas $C(0,0)$ la forma se reduce a:

$$x^2+y^2=r^2$$

Ejemplos:

1. Hallar la ecuación de la circunferencia con centro en C (3,–1) y radio igual a $\sqrt{6}$.

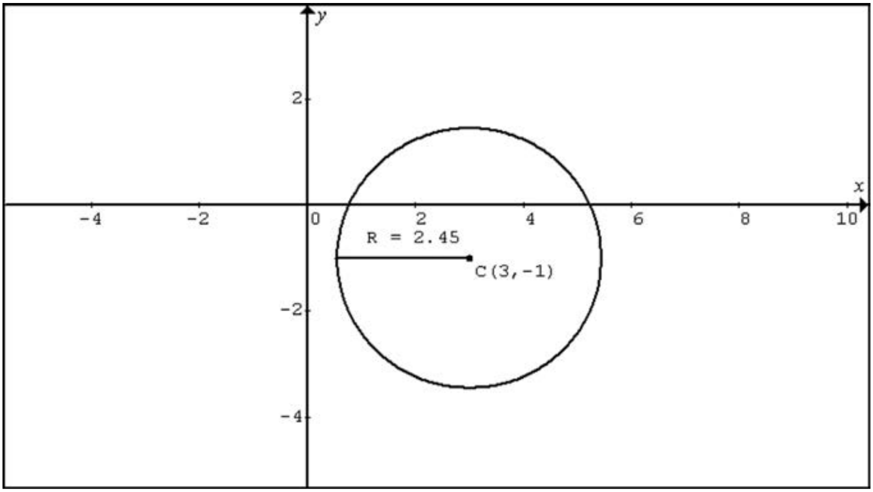
Solución. Como tenemos su centro y su radio reemplazamos en la ecuación de la circunferencia y obtenemos:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

$$(x-3)^2+(y+1)^2=(\sqrt{6})^2$$

$$(x-3)^2+(y+1)^2=6$$

Figura 1.36 Circunferencia con centro C(3,1) y radio $\sqrt{6}$.




```
%MATLAB
% CIRCUNFERENCIA 1
% 1. Hallar la ecuación de la circunferencia con cen-
tro en
% C(3,-1) y radio igual a (6)^1/2
clc
% ejes
eje=[-10:1:10];
ceros=zeros(1,21);
plot(eje,ceros,'r+-')
hold on
plot(ceros,eje,'r+-')
% datos
h=3;
k=-1;
r=sqrt(6);
% Circunferencia
t=0:0.1:2*pi;
x=h+r*cos(t);
y=k+r*sin(t);
% gráfico
plot(x,y)
plot(h,k,'r*-')
```

```
text(h,k,'C')
grid on
grid minor
axis([-2 8 -5 5])
axis square
```

2. Hallar la ecuación de la circunferencia con centro en C (–3,–6) y que pasa por el punto P(1,–1).

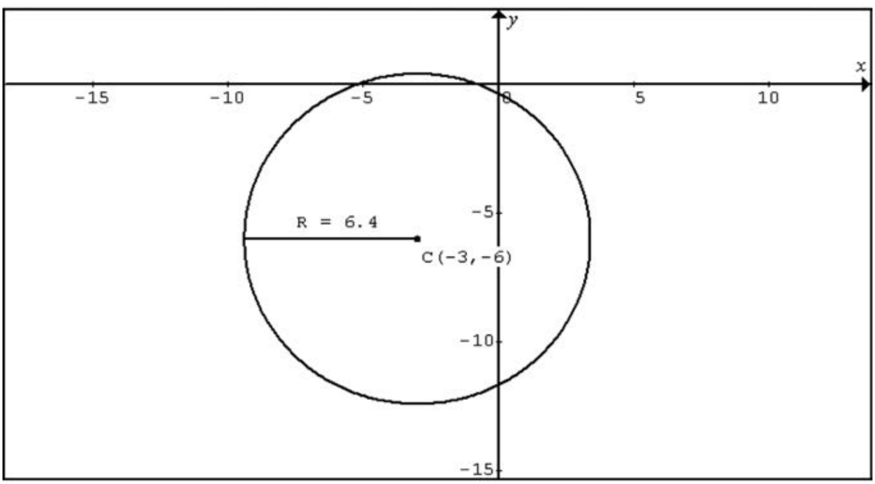
Solución. Como tenemos el centro y un punto P perteneciente a la circunferencia podemos hallar el radio con la fórmula de distancia (que es precisamente de donde se deduce la ecuación de la circunferencia, la demostración puede encontrarla en textos de geometría analítica de los referenciados en la sección de bibliografía).

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad = \sqrt{((-3)-1)^2 + ((-6)-(-1))^2} = \sqrt{16+25} = \sqrt{41} = 6.4$$

Luego reemplazando las coordenadas del centro y el valor del radio hallado obtenemos la ecuación:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$
$$(x-(-3))^2 + (y-(-6))^2 = (\sqrt{41})^2$$
$$(x+3)^2 + (y+6)^2 = 41$$

Figura 1.37 Circunferencia con centro C(–3,–6) y punto P(1,–1)



```
%MATLAB
% CIRCUNFERENCIA 2
% Hallar la ecuación de la circunferencia con centro
en C(-3,-6)
% y que pasa por el punto P(1,-1).
clc
% ejes
eje=[-10:1:10];
ceros=zeros(1,21);
plot(eje,ceros,'r+-')
hold on
plot(ceros,eje,'r+-')
% datos
h=-3;
k=-6;
x1=1;
y1=-1
r=sqrt((h-x1)^2+(k-y1)^2);
% Circunferencia
t=0:0.1:2*pi;
x=h+r*cos(t);
y=k+r*sin(t);
% gráfico
plot(x,y)
plot(h,k,'r*-')
text(h,k,'C')
plot(1,-1,'r*-')
text(1,-1,'P')
grid on
axis([-12 6 -14 4])
axis square
```

3. Reducir a la forma ordinaria la ecuación de la circunferencia y hállense su centro y su radio.

$$4x^2+4y^2-24x+16y-30 = 0$$

Solución: Pasando el término independiente al segundo miembro y dividiendo toda la ecuación para cuatro, tenemos:

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y = \frac{30}{4}$$

Luego reordenando los términos, completando trinomios y equilibrando la ecuación tenemos:

RECUERDE: Para completar un trinomio (es decir, convertir un binomio de la forma ax^2+bx en un trinomio cuadrado perfecto) se divide el segundo miembro para 2 y se lo eleva al cuadrado $\rightarrow \left(\frac{b}{2}\right)^2$

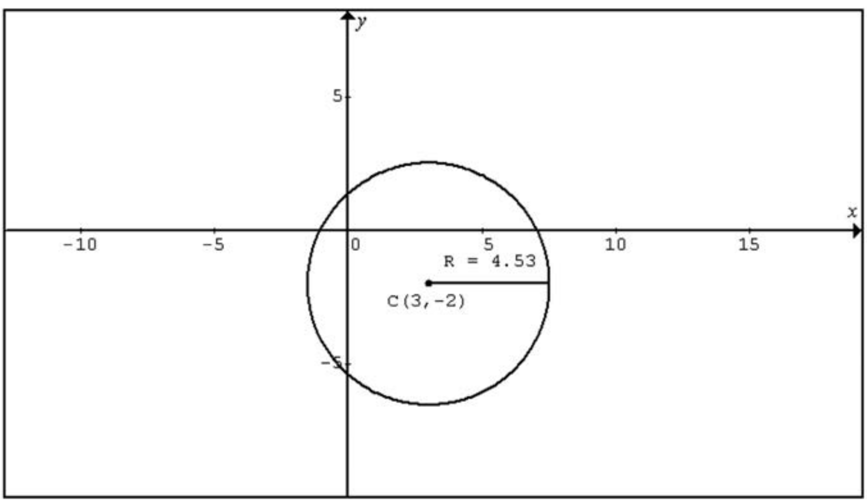
$$\left(x^2 - 6x + 9\right) + \left(y^2 + 4y + 4\right) = \frac{30}{4} + 9 + 4$$

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = \frac{41}{2}$$

Como ya obtuvimos la ecuación solicitada se puede observar que su centro y su radio son:

Centro: $C(3,-2)$ y $r = \sqrt{\frac{41}{2}}$

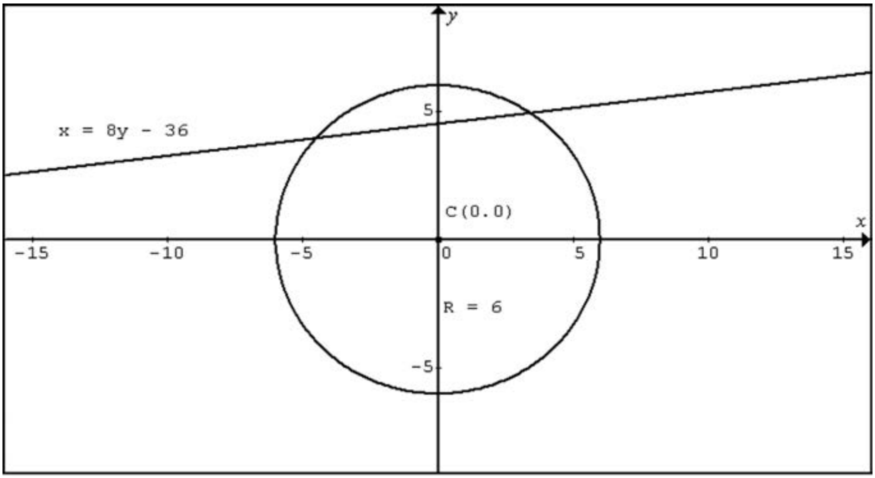
Figura 1.38 Circunferencia con centro C(3,–2) y radio $\sqrt{41/2}$



4. Una cuerda de la circunferencia $x^2+y = 36$ es un segmento de recta cuya ecuación es $x\text{-}8y+36 = 0$. Hallar la longitud de la cuerda.

Solución. Como se observa la figura 1.39, la recta en donde se encuentra la cuerda intersecta a la circunferencia en dos puntos.

Figura 1.39 Circunferencia $x^2+y^2 = 36$ intersectada por la recta x-8y+36=0



Luego, para hallar la longitud de la cuerda en la recta dada despejamos x

$$x = 8y\text{-}36$$

Luego sustituyendo este valor de en la ecuación de la circunferencia dada tenemos:

$$x^2+y^2 = 36$$

$$(8y\text{-}36)^2+y^2 = 36$$

$$64y^2\text{-}576y+1296+y^2\text{-}36 = 0$$

$$65y^2\text{-}576y+1260 = 0$$

Resolviendo este trinomio (por factorización de la forma ax^2+bx+c, o mediante el uso de la fórmula general $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ que sirve para resolver una ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$) obtenemos los valores de y:

$$y_1 = 4.9 \; ; \; y_2 = -4.8$$

Reemplazando estos valores en la ecuación de la recta obtenemos los valores de :

$$x_1 = 3.2 \; ; \; x_2 = -4.8$$

Con estos resultados sabemos entonces que los puntos de intersección de la recta con la circunferencia son

$$P_1(3.2,4.9) \text{ y } P_2(-4.8,3.9)$$

Luego, aplicando la fórmula para hallar la distancia entre dos puntos obtenemos la longitud de la cuerda.

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad = \sqrt{((-4.8)-(3.2))^2 + ((3.9)-(4.9))^2} = \sqrt{64+1} = 8.1$$

```
%MATLAB
% CIRCUNFERENCIA 4
% 4. Una cuerda de la circunferencia x^2+y^2=36 es un
segmento de
% recta cuya ecuación es x-8y+36=0. Hallar la longi-
tud de la cuerda.
clc
clf
% ejes
eje=[-10:1:10];
ceros=zeros(1,21);
plot(eje,ceros,'r+-')
hold on
plot(ceros,eje,'r+-')
% datos
syms a b real
h=0;
k=0;
```

```
r=6;
[a b]=solve('x^2+y^2=36','x-8*y+36=0')
x1=a(1)
y1=b(1)
x2=a(2)
y2=b(2)
% Circunferencia
t=0:0.1:2*pi;
x=h+r*cos(t);
y=k+r*sin(t);
% gráfico
plot(x,y)
plot(h,k,'r*-')
text(h,k,'C')
% secante
d=sqrt((x2-x1)^2+(y2-y1)^2)
x=-10:0.1:10;
y=(x+36)./8;
plot(x,y)
% gráfico
plot(x1,y1,'r*-')
plot(x2,y2,'r*-')
grid on
grid minor
axis([-10 10 -10 10])
axis equal
```

5. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo diámetro es el segmento de recta que une los puntos (–3,5) y (7,–3).

Solución. Sabiendo que el punto medio PM del diámetro es el centro C de la circunferencia, se tiene que:

$$PM=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$C=\left(\frac{-3+7}{2},\frac{5-3}{2}\right)$$

$$C=(2,1)$$

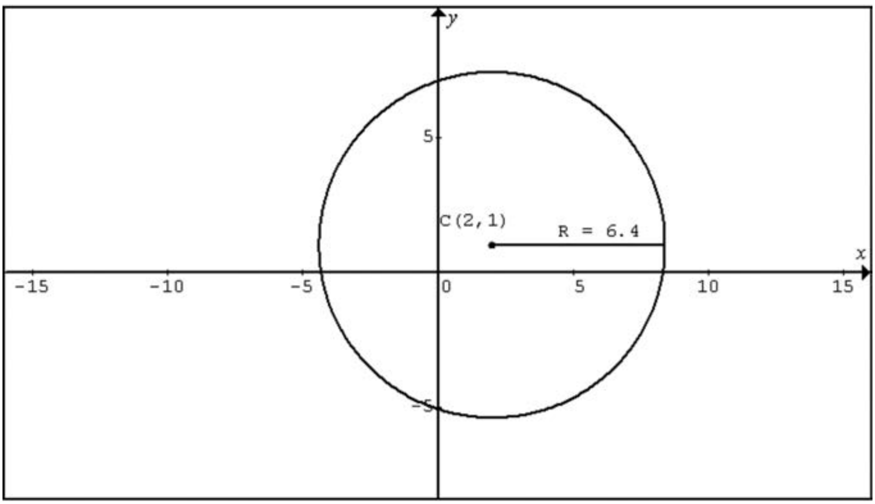
Luego, como ya tenemos su centro (2,1) y con un punto P dado en el ejercicio en este caso vamos a utilizar el punto (–3,5), podemos hallar el radio con la fórmula de distancia.

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2-(-3))^2 + (1-5)^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41} = 6.4$$

Luego en la fórmula ordinaria de la circunferencia reemplazamos su centro y su radio y obtenemos la ecuación:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$
$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{41})^2$$
$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 41$$

Figura 1.40 Circunferencia con centro en el punto medio del segmento formado por (–3,5) y (7,–3)




```
%MATLAB
% CIRCUNFERENCIA 5
% 5. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo
diámetro el
% segmento de recta que une los puntos (-3,5) y
(7,-3).
```

```
clc
% ejes
eje=[-10:1:10];
ceros=zeros(1,21);
plot(eje,ceros,'r+-')
hold on
plot(ceros,eje,'r+-')
% datos
P1=[-3 5] %PUNTO 1
P2=[7 -3] %PUNTO 2
x1=P1(1); y1=P1(2); x2=P2(1); y2=P2(2);
%Cálculos
C=(P1+P2)/2  %CENTRO
h=C(1)   % h
k=C(2)   % k
r=(P2-P1)/2;
r=norm(r)  % r
% Circunferencia
t=0:0.1:2*pi;
x=h+r*cos(t);
y=k+r*sin(t);
% gráfico
plot(x,y)
plot(h,k,'r*-')
text(h,k,'C')
% gráfico
plot(x1,y1,'r*-')
plot(x2,y2,'r*-')
grid on
grid minor
axis([-10 10 -10 10])
axis equal
```

6. Reducir a la forma ordinaria la ecuación de la circunferencia y encuentre el centro y el radio.

$$10x^2+10y^2-20x+60y-12 = 0$$

Solución. Pasando el término independiente al segundo miembro y dividiendo toda la ecuación para 10 tenemos:

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y = \frac{6}{5}$$

Luego reordenando los términos, completando trinomios y equilibrando la ecuación tenemos:

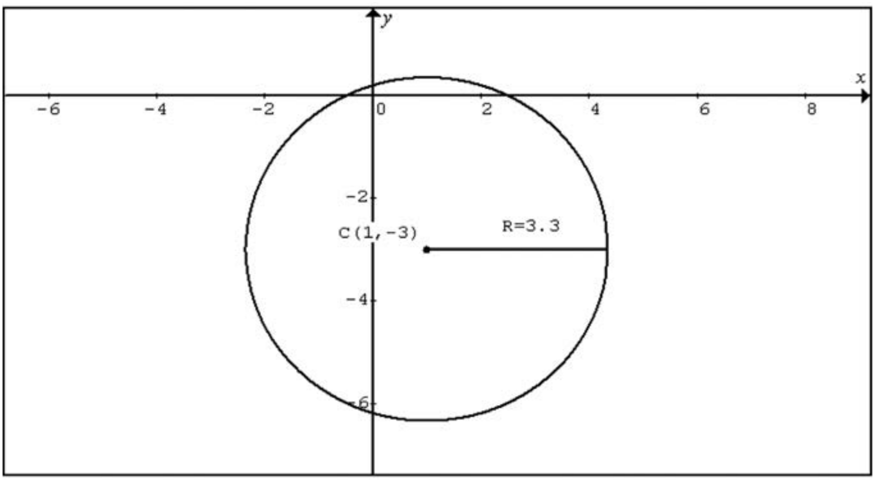
$$\left(x^2 - 2x + 1\right) + \left(y^2 + 6y + 9\right) = \frac{6}{5} + 1 + 9$$

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = \frac{56}{5}$$

Como ya obtuvimos la ecuación solicitada se puede observar que su centro y su radio son:

Centro: $C(1,-3)$ y $r = \sqrt{\frac{56}{5}}$

Figura 1.41 Circunferencia $10x^2+10y^2-20x+60y-12=0$



7. Reducir a la forma ordinaria la ecuación de la circunferencia y encuentre el centro y el radio.

$$24x^2+24y^2+192x-96y+30 = 0$$

Solución. Pasando el término independiente al segundo miembro y dividiendo toda la ecuación para (24) tenemos:

$$x^2 + y^2 + 8x - 4y = -\frac{30}{24}$$

Luego reordenando los términos, completando trinomios y equilibrando la ecuación tenemos:

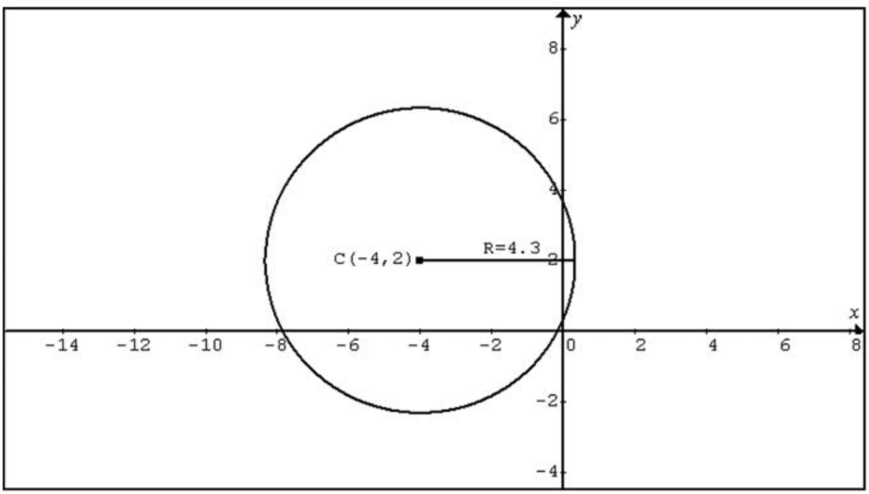
$$\left(x^2 + 8x + 16\right) + \left(y^2 - 4y + 4\right) = -\frac{30}{24} + 16 + 4$$

$$(x+4)^2 + (y-2)^2 = \frac{75}{4}$$

Como ya obtuvimos la ecuación solicitada se puede observar que su centro y su radio son:

C(-42) y $r = \sqrt{\frac{75}{4}}$

Figura 1.42 Circunferencia 24x^2+24y^2+192x-96y+30 = 0



8. Reducir a la forma ordinaria de la ecuación de la circunferencia dada por la siguiente ecuación.

$$x^2+y^2-10x-8y+41=0$$

Solución. Pasando el término independiente al segundo miembro, agrupando y completando trinomios tenemos:

$$(x^2-10x)+(y^2-8y) = -41$$
$$(x^2-10x+25)+(y^2-8y+16) = -41+25+16$$
$$(x-5)^2+(y-4)^2 = 0$$

De esta respuesta se observa que el lugar geométrico es el punto C(5,4), ya que el valor del radio es cero.

9. Reducir a la forma ordinaria la ecuación de la circunferencia dada y encuentre su centro y su radio.

$$6x^2+6y^2-60x-24y+192 = 0$$

Solución. Pasando el término independiente al segundo miembro y dividiendo toda la ecuación para 6 tenemos:

$$x^2+y^2-10x-4y=-\frac{192}{6}$$

Luego reordenando los términos, completando trinomios y equilibrando la ecuación tenemos:

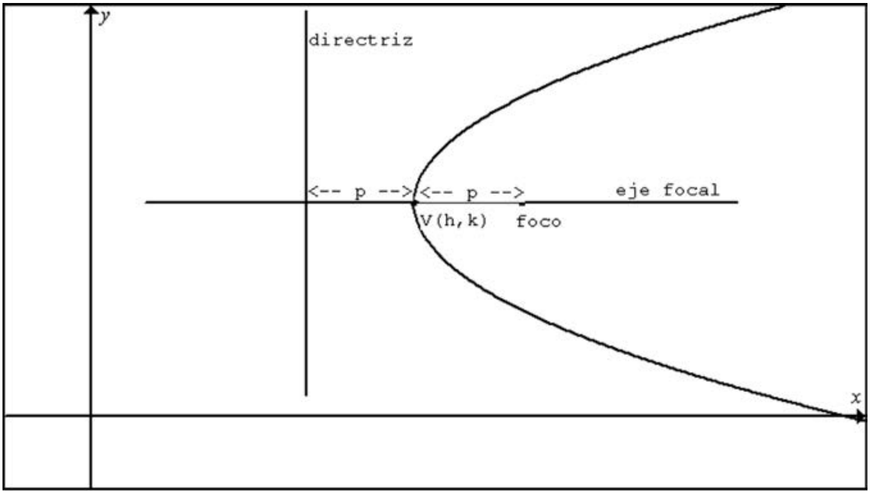
$$\left(x^2-10x+25\right)+\left(y^2-4y+4\right)=-32+25+4$$
$$\left(x-5\right)^2+\left(y-2\right)^2=-3$$

Tras este resultado obsérvese que: ¡NO EXISTE LUGAR GEOMÉTRICO, YA QUE EL SEGUNDO MIEMBRO DE LA ECUACIÓN DEBE SER > 0!

Parábola

De manera sencilla se puede decir que una parábola es una curva que se abre desde un punto $V(h,k)$ llamado vértice de tal manera que envuelve a otro punto f llamado foco, de donde la distancia entre el vértice y el foco es igual a un valor constante p.

Figura 1.43 La parábola



La recta que contiene al vértice y al foco se conoce como *eje focal*. También, si se toma la misma distancia p desde el vértice hacia el lado contrario del foco se obtiene un lugar geométrico por donde pasa una recta conocida como *directriz*, la cual es perpendicular al eje focal.

La ecuación ordinaria de una parábola cuyo eje focal es paralelo al eje x es:

$$(y-k)^2=4p(x-h)$$

Nota 1: Una vez obtenido el valor p la parábola se abre hacia la derecha si este valor es positivo y hacia la izquierda si es negativo.

Así mismo, si la parábola tiene su eje focal paralelo al eje y, su ecuación ordinaria será de la forma:

$$(x-h)^2=4p(y-k)$$

Nota 2: Una vez obtenido el valor p la parábola se abre hacia arriba si este valor es positivo y hacia abajo si es negativo.

La ecuación general de una parábola horizontal o vertical es respectivamente: $Cy^2+Dx+Ey+F=0$ $Ax^2+Dx+Ey+F=0$

Ejemplos:

1. Dada la ecuación de la parábola , encontrar las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto.

Solución. Despejamos de la ecuación dada y de ahí se observa que:

$$y^2 = -4x$$

De la ecuación de la parábola se tiene que:

$$4P = -4$$
$$P=-1$$

Entonces la coordenada del foco es: $F(-1,0)$. Luego la ecuación de la directriz (observando la figura 1.44) es:

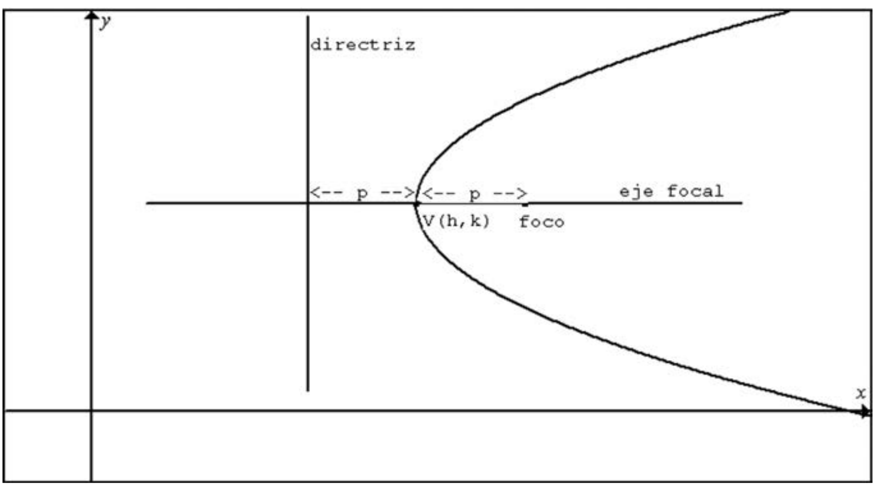
$$x = 1$$

Por definición la longitud del lado recto será:

$$L.R = |4P|$$
$$L.R = |-4|$$
$$L.R = 4$$

El **lado recto** (L.R.) es un segmento de recta perpendicular al eje focal que une dos puntos de la parábola pasando por el foco, la longitud de este segmento es $L.R = |4P|$.

Figura 1.44 Parábola $\mathbf{2y^2 = -8x}$



```
%MATLAB
% PARÁBOLA HORIZONTAL
% 1. Dada la ecuación de la parábola 2y^2=-8x, encon-
trar las
% coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y
la longitud
% del lado recto.
clc
clf
%ejes
eje=[-10:1:10];
ceros=zeros(1,21);
plot(eje,ceros,'r+-')
hold on
plot(ceros,eje,'r+-')
%datos
h=0;
k=0;
p=-1;
%parábola horizontal
t=0:0.1:2*pi;
x=h+p./(tan(t).*tan(t));
y=k+2*p./tan(t);
%gráfico
plot(x,y)
text(h,k,'V')
text(h+p,k,'F')
%directriz
y=-10:.1:10;
x=h-p;
plot(x,y,'b.-')
%rejilla
grid on
grid minor
axis([-10 10 -10 10])
axis square
```

2. Dada la ecuación de la parábola $y^2-4y+6x-8=0$, encontrar las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto.

Solución: Pasando la expresión $6x-8$ al segundo miembro, completando el trinomio cuadrado y equilibrando la ecuación tenemos:

$$y^2-4y+4=-6x+8+4$$
$$(y-2)^2 = -6x+12$$
$$(y-2)^2 = -6(x-2)$$

De esta ecuación se observa que el vértice es $V(2,2)$
También se tiene que

$$4P = -6$$
$$P = -\frac{3}{2}$$

Luego las coordenadas del foco son $F\left(\frac{1}{2},2\right)$

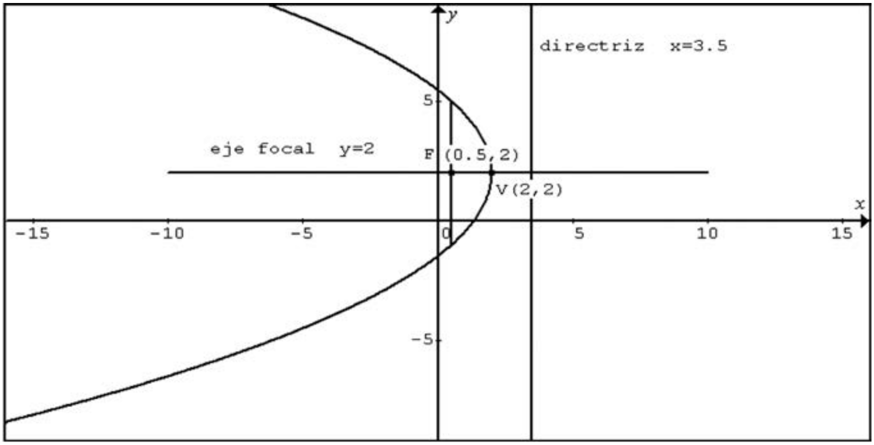
La ecuación de la directriz es:

$$x = \frac{7}{2}$$

La longitud del lado recto es:

$$L.R = |4P|$$
$$L.R = 6$$

Figura 1.45 Parábola y^2-4y+6x-8 = 0



3. Encontrar la ecuación de la parábola que tiene foco (5, –2) y directriz y=1.

Solución. La definición de parábola establece que la distancia *dFP* de cualquier punto (x,y) de la parábola con respecto al foco, es igual a la distancia *dAP* con respecto a la directriz. Con esto se tiene que

$$dFP = dAP$$

De donde,

$$dFP = \sqrt{(x-5)^2 + (y+2)^2}$$
$$dAP = \sqrt{(x-x)^2 + (y-1)^2}$$

Igualando las dos distancias tenemos:

$$\sqrt{(x-5)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y-1)}$$

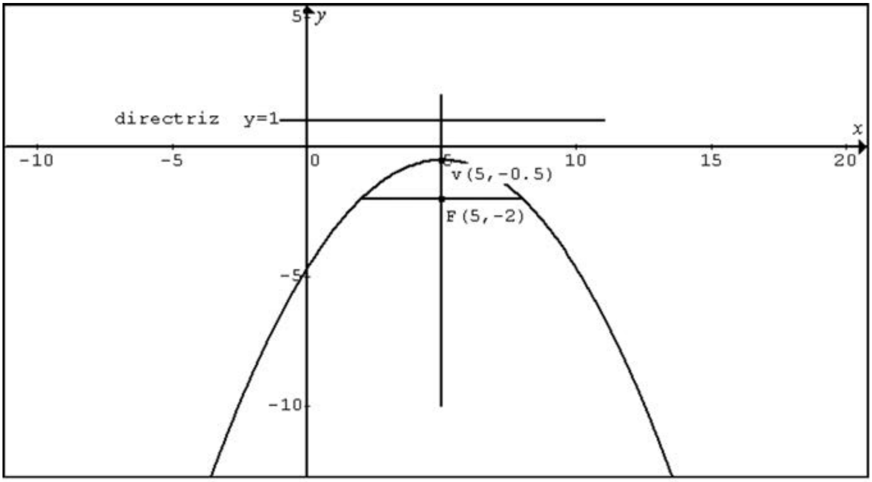
Elevando al cuadrado ambos miembros y simplificando las raíces:

$$(x\text{-}5)^2+(y+2)^2 = (y\text{-}1)^2$$
$$x^2\text{-}10x+25+y^2+4y+4 = y^2\text{-}2+1$$
$$x^2\text{-}10x+25+4y+4+2y\text{-}1 = 0$$

Entonces la ecuación de la parábola nos queda:

$$x^2\text{-}10x+6y+28 = 0$$

Figura 1.46 Parábola con foco en (5,–2) y directriz y =1



4. Encontrar la ecuación de la parábola que tiene vértice en (2, –2), y que pasa por el punto (5, –5).

Solución. Dado el vértice y el punto reemplazamos en la ecuación de la parábola y obtenemos el valor de *P*.

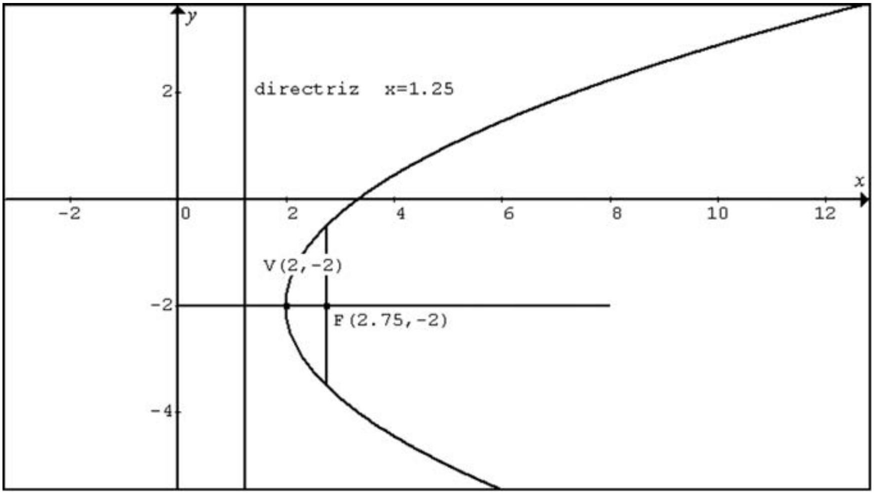
$$(y\text{-}k)^2 = 4P(x\text{-}h)$$
$$(\text{-}5+2)^2 = 4P(5\text{-}2\ )$$
$$9=12P$$

$$P = \frac{3}{4}$$

Luego, con este valor de P y con el vértice de la parábola, reemplazamos y obtenemos la ecuación solicitada.

$$(y+2)^2 = 3(x\text{-}2)$$
$$y^2 +4y+4y=3x\text{-}6$$
$$y^2 \text{-}3y+4y+10=0$$

Figura 1.47 Parábola con vértice en (2,–2) y punto (5,–5)



5. Hallar la ecuación de la parábola cuyo vértice y foco son los puntos $V(-5,2)$ y $f(-1,2)$. Hallar también la ecuación de su directriz y su eje focal.

Solución. Como nos dan las coordenadas del vértice y del foco, podemos obtener el valor de P (restando las abscisas) y tenemos:

$$P = |-5-(-1)|$$
$$P = |-5+1|$$
$$P = 4|$$

Luego reemplazando en la ecuación de la parábola tenemos:

$$(y-k)^2 = 4P(x-h)$$
$$(y-2)^2 = 16(x+5)$$

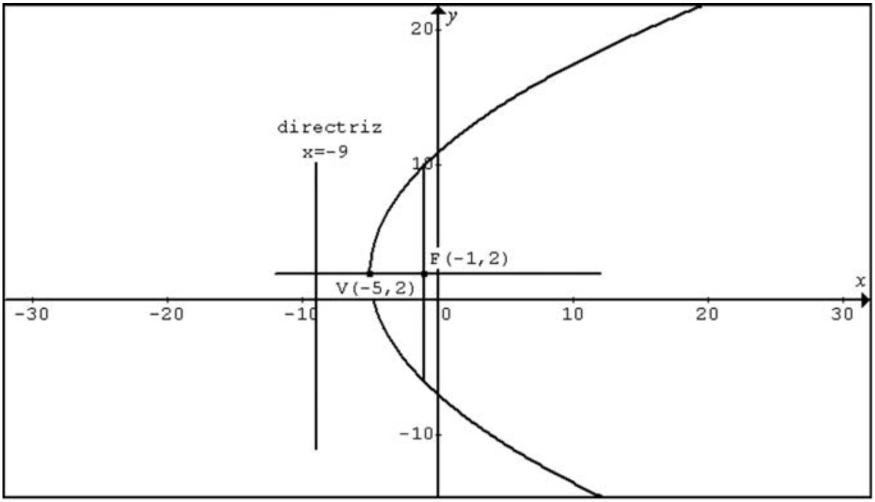
Ecuación del eje paralelo a x:

$$y = 2$$

Ecuación de la directriz:

$$y = -9$$

Figura 1.48 Parábola con vértice en (–5,2) y foco (–1,2)



6. Dada la ecuación de la parábola , encontrar las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto.

Solución. Trasponiendo términos, sacando factor común y completando trinomios, tenemos:

$$3x^2 - 9x = 5y + 2$$

$$3\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) = 5y + 2 + \frac{27}{4}$$

$$3\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 5y + \frac{35}{4}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{3}y + \frac{35}{12}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{3}\left(y + \frac{7}{4}\right)$$

De aquí se observa que el vértice es $V\left(\frac{3}{2}, -\frac{7}{4}\right)$, también que:

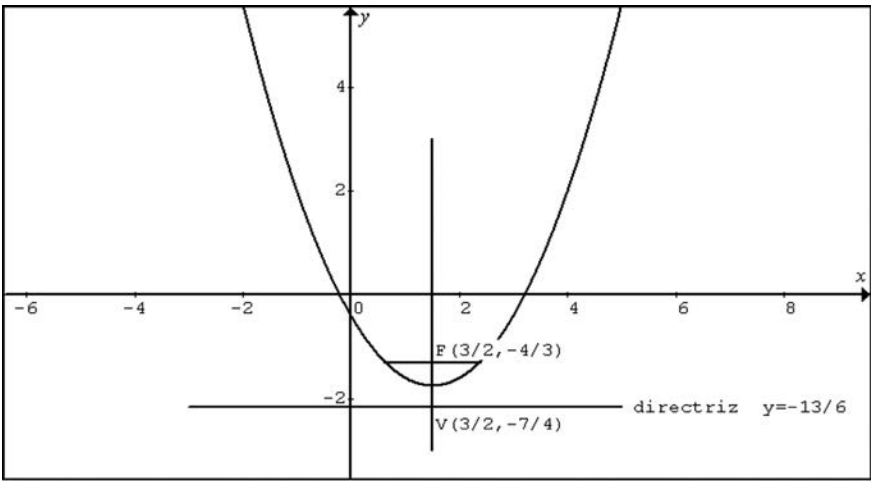
$$4P = \frac{5}{3}$$
$$P = \frac{5}{12}$$

Luego la coordenada del foco es $F\left(\frac{3}{2}, -\frac{4}{3}\right)$

La ecuación de la directriz es $y = -\frac{13}{6}$

Longitud del lado recto $L.R = |4P|$ se convierte en $L.R = \frac{5}{3}$

Figura 1.49 Parábola $3x^2$-9x-5y-2 = 0




```
%MATLAB
% PARÁBOLA HORIZONTAL
% 6. Dada la ecuación de la parábola 3x^2-9x-5y-2=0,
encontrar
% las coordenadas del foco, la ecuación de la direc-
triz y
% la longitud del lado recto.
clc
clf
%ejes
```

```
eje=[-10:1:10];
ceros=zeros(1,21);
plot(eje,ceros,'r+-')
hold on
plot(ceros,eje,'r+-')
%datos
h=3/2;
k=-7/4;
p=5/12;
%parábola
t=0:0.1:2*pi;
x=h+2*p*tan(t);
y=k+p*tan(t).*tan(t);
%gráfico
plot(x,y)
text(h,k,'V')
plot(h,k+p,'r*-')
text(h,k+p,'F')
%directriz
x=-10:.1:10;
y=k-p;
plot(x,y,'b.-')
%rejilla
grid on
grid minor
axis([-10 10 -10 10])
axis square
```

7. Dada la ecuación de la parábola $4x^2+48y = 0$, encontrar las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto.

Solución: Despejamos de la ecuación dada y de ahí se observa que:

$$x^2 = -12y$$

De esta expresión obtenida se observa que:

$$4P = -12$$

$$P = -3$$

Entonces la coordenada del foco es $F(0,-3)$.

Luego la ecuación de la directriz:

$$y = 3$$

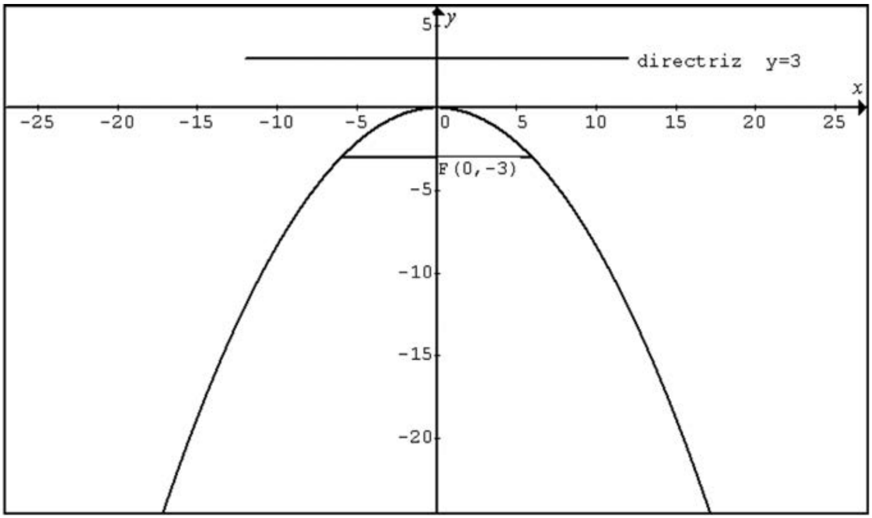
La longitud del lado recto será:

$$L.R = |4P|$$

$$L.R = |-12|$$

$$L.R = 12$$

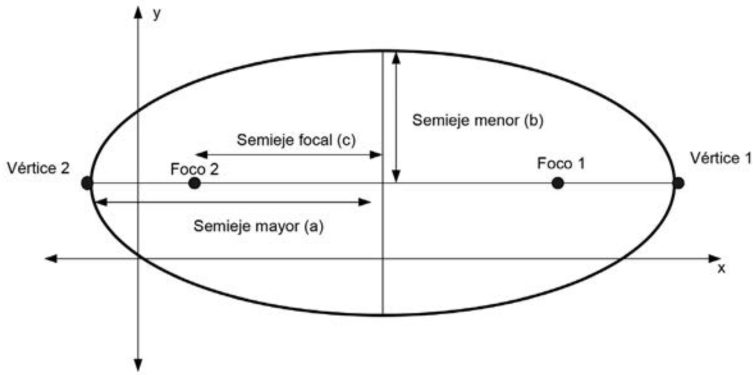
Figura 1.50 Parábola $4x^2+48y = 0$



Elipse

Considérese a la elipse, como una curva plana cerrada más bien de forma ovalada que consta de un punto central $C(h,k)$, dos vértices V_1 y V_2, que al mismo tiempo, se corresponden lateralmente con dos focos f_1 y f_2. El segmento de recta que une los vértices se conoce como eje mayor; este segmento es perpendicular a otro que intercepta al centro y que une dos puntos de la elipse, y se lo conoce como eje menor.

Figura 1.51 Elipse paralela al eje x



La ecuación en la forma ordinaria de una elipse cuyo eje mayor es paralelo al eje *x* como lo muestra la figura 1.51 es de la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Si la elipse posee el eje mayor paralelo al eje *y* (figura 1.52) entonces su forma ordinaria será:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

Observe entonces que el paralelismo de la elipse se corresponde con la posición de su eje mayor.

La ecuación general de una elipse es: $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ donde A y C tienen el mismo signo, o el producto A.C > 0.

La forma de determinar si se trata de una elipse horizontal o vertical, es recordando que en toda elipse se cumple que $a > b$. Así:

- Si el mayor coeficiente está bajo $(x\text{-}h)^2$ la elipse es horizontal

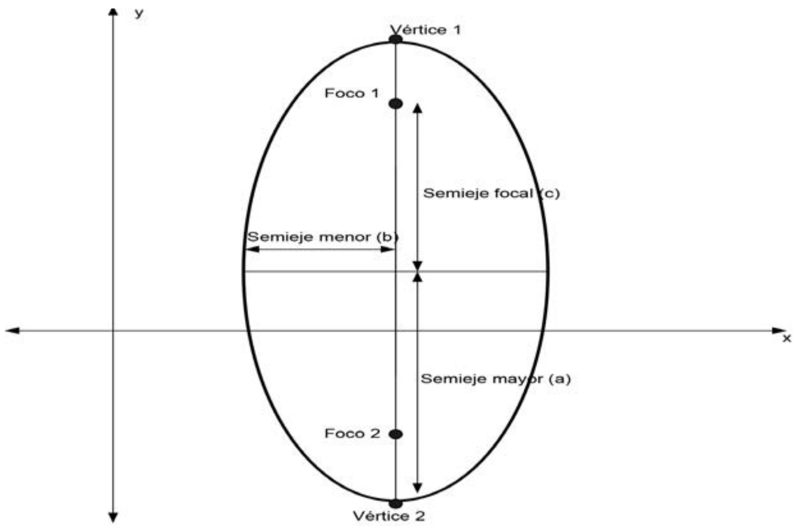
- Si el mayor coeficiente está bajo $(y\text{-}k)^2$ la elipse es vertical

Las longitudes de los semiejes mayor, menor y focal se relacionan mediante la ecuación:

$$a^2 = b^2+c^2$$

La longitud del lado recto es $LLR = \dfrac{2b^2}{a}$

Figura 1.52 Elipse paralela al eje *y*



Otra característica que presenta la elipse es su *excentricidad e*, que es la relación entre los semiejes focal y mayor.

$$e = \frac{c}{a}$$

Ejemplos:

1. Sea la elipse $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{4} = 1$. Realizar el gráfico. Hallar las coordenadas de los focos y la excentricidad.

Solución. El centro de la elipse está en (0 , 0) y por la forma de su ecuación se tiene que es paralela al eje . Siendo las longitudes de los semiejes mayor y menor $a = \sqrt{36} = 6$ y $b = \sqrt{4} = 2$ respectivamente. Luego

$$c^2 = a^2 - b^2$$

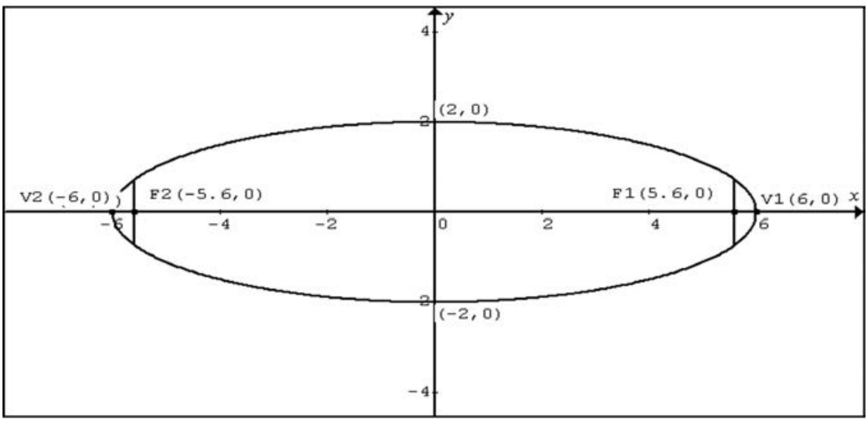
$$c^2 = 36-4$$

$$c = \pm 4\sqrt{2}$$

Por lo tanto, las coordenadas de los focos son $f_1(4\sqrt{2}, 0)$ y $f_2(-4\sqrt{2}, 0)$; y su excentricidad está dada por

$$e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Figura 1.53 Elipse $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{4} = 1$




```
%MATLAB
% ELIPSE HORIZONTAL
% 1. Sea la elipse x^2/36 + y^2/4 =1. Realizar el
gráfico.
% Hallar las coordenadas de los focos y la
excentricidad.
clc
clf
```

```
%ejes
eje=[-10:1:10];
ceros=zeros(1,21);
plot(eje,ceros,'r+-')
hold on
plot(ceros,eje,'r+-')
%datos
h=0;  k=0;  a=6;  b=2;
%elipse
c=sqrt(a^2-b^2)
t=0:.05:2*pi;
x=h+a*cos(t);
y=k+b*sin(t);
%gráfico
plot(x,y)
plot(h,k,'r*-')
text(h+.2,k,'C')
plot(h+c,k,'r*-')
text(h+c-.4,k,'F')
plot(h-c,k,'r*-')
text(h-c+.2,k,'F´')
plot(h+a,k,'r*-')
text(h+a+.2,k,'V')
plot(h-a,k,'r*-')
text(h-a-.5,k,'V´')
grid on
grid minor
axis([-10 10 -10 10])
axis square
```

2. Sea la elipse $16x^2+y^2-96x-2y+129 = 0$. Realizar el gráfico. Hallar las coordenadas de los focos y la excentricidad.

Solución. Reordenando los términos, despejando el término independiente y factorizando, se tiene.

$$16(x^2-6x)+(y^2-2y) = -129$$

Completando trinomios y equilibrando la ecuación:

$$16(x^2-6x+9)+(y^2-2y+1) = -129+144+1$$

$$16(x-3)^2+(y-1)^2 = 16$$

$$\frac{(x-3)^2}{1}+\frac{(y-1)^2}{16}=1$$

De aquí se observa que el centro de la elipse está en (3 , 1) y por la forma se tiene que es paralela al eje (mayor denominador). Siendo las longitudes de los semiejes mayor y menor $a=\sqrt{16}=4$ y $b=\sqrt{1}=1$ respectivamente. Luego:

$$c^2 = a^2-b^2$$

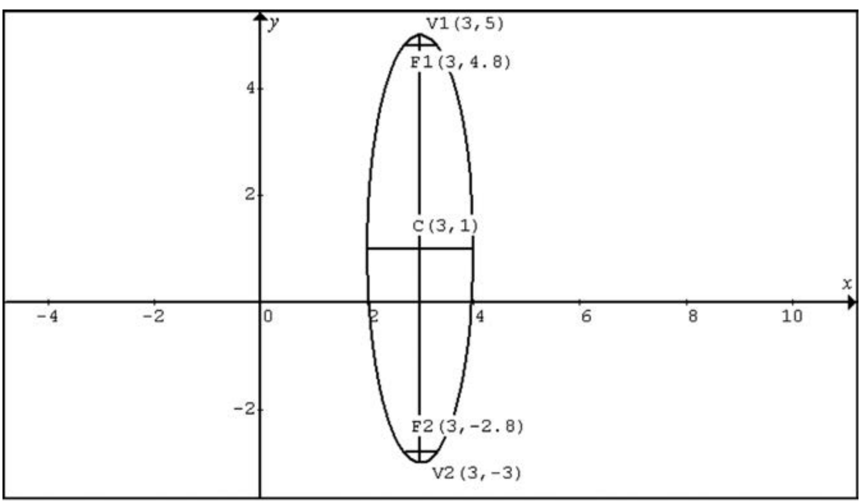
$$c^2 = 16-1$$

$$c = \pm\sqrt{15}$$

Por lo tanto, las coordenadas de los focos son $f_1(3,1+\sqrt{15})$ y $f_2(3,1-\sqrt{15})$ y su excentricidad está dada por:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

Figura 1.54 Elipse 16x²+y²-96-2y+129 = 0



```
%MATLAB
% ELIPSE VERTICAL
% 2. Sea la elipse 16x^2+y^2-96x-2y+129=0. Realizar
el gráfico.
% Hallar las coordenadas de los focos y la
excentricidad.
clc
clf
%ejes
eje=[-10:1:10];
ceros=zeros(1,21);
plot(eje,ceros,'r+-')
hold on
plot(ceros,eje,'r+-')
%datos
h=3;  k=1;  a=4;  b=1;
%elipse
c=sqrt(a^2-b^2)
t=0:.05:2*pi;
x=h+b*cos(t);
y=k+a*sin(t);
%gráfico
plot(x,y)
plot(h,k,'r*-')
text(h+.1,k,'C')
plot(h,k+c,'r*-')
text(h,k+c-.4,'F')
plot(h,k-c,'r*-')
text(h,k-c+.2,'F´')
plot(h,k+a,'r*-')
text(h,k+a+.2,'V')
plot(h,k-a,'r*-')
text(h,k-a-.5,'V´')
grid on
grid minor
axis([-2 8 -4 6])
axis square
```

3. Sea la excentricidad de la elipse $e = 0.8$ y su centro ubicado en C (-2,-2) . Hallar la ecuación de la elipse si esta es paralela al eje x. Graficar la elipse.

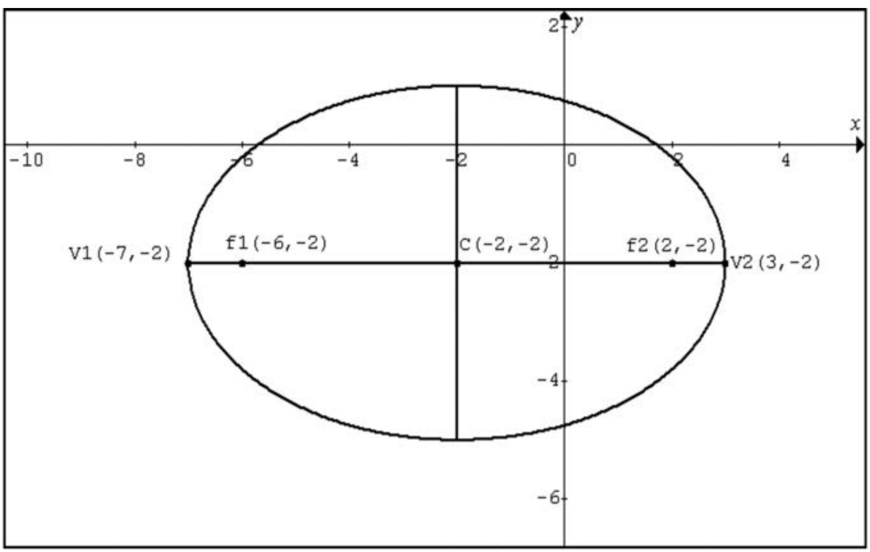
Solución. Por el valor de excentricidad se tiene que:

$$e = 0.8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} = \frac{c}{a}$$
$$\rightarrow a = 5$$
$$\rightarrow c = 4$$
$$\rightarrow b^2 = a^2 - c^2$$
$$b^2 = 25 - 16$$
$$b = 3$$

Luego, considerando los valores de a, b y las coordenadas del centro, la ecuación de la elipse es:

$$\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

Figura 1.55 Elipse paralela al eje x, con e = 0.8 y centro ubicado en (2, -2)



4. Hallar la ecuación de la elipse, si su centro es C (4, –1), uno de los focos en (1, –1) y pasa por el punto (8, –1).

Solución. Con el centro y uno de los focos dados podemos encontrar el valor de c y asimismo con el centro y el punto dado podemos encontrar el valor de a con la fórmula de distancia entre dos puntos.

$$FC = c = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad = \sqrt{(4-1)^2 + (-1-(-1))^2} \quad = \sqrt{9+0} \quad = 3$$

Entonces: $c = 3$

$$PC = a = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad = \sqrt{(4-8)^2 + (-1-(-1))^2} \quad = \sqrt{16+0} \quad = 4$$

Entonces: $a = 4$

Luego por el teorema de Pitágoras encontramos el valor de b:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} \quad = \sqrt{(4)^2 - (3)^2} \quad = \sqrt{16-9} \quad = \sqrt{7}$$

Luego determinamos los vértices y el otro foco, y nos queda:

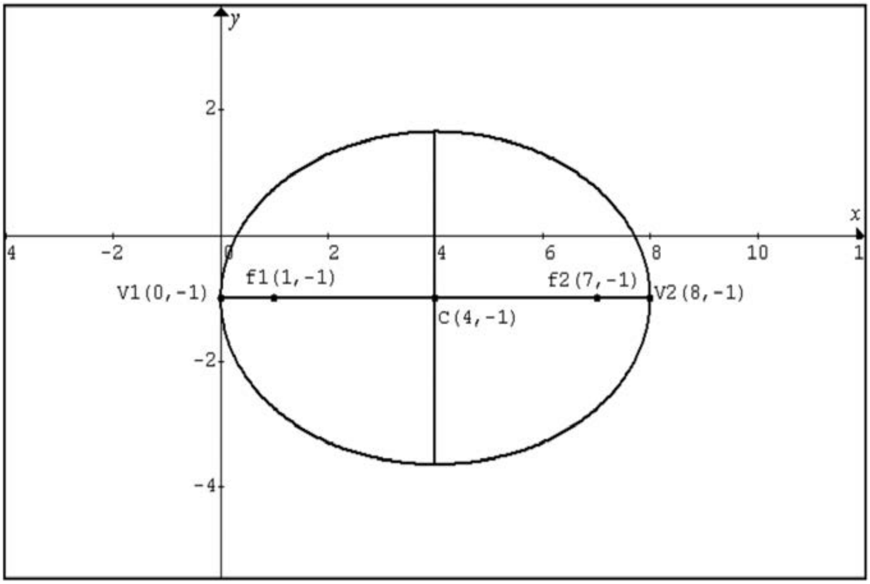
$$V_1(h+a,k) \; ; \; V_1(4+4\text{-}1) \; ; \; V_1(8,\text{-}1)$$
$$V_2(h+a,k) \; ; \; V_2(4\text{-}4\text{-}1) \; ; \; V_2(0,\text{-}1)$$
$$F_2(h+c,k) \; ; \; F_2(4+3\text{-}1) \; ; \; F_2(7,\text{-}1)$$

Luego, considerando los valores de a, b y las coordenadas del centro, la ecuación de la elipse es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{7} = 1$$

Figura 1.56 Elipse paralela al eje x, con centro en (4,−1) y vértices en (0,−1) y (8,−1)



5. Los focos de una elipse son los puntos (5, 10) y (5, 2) y la longitud de su eje menor es 10. Hallar la ecuación de la elipse, su excentricidad y las coordenadas de sus vértices.

Solución. Como nos dan la longitud del eje menor es:

$$2b = 10$$
$$b = 5$$

Luego determinamos las coordenadas del centro de la elipse:

$$h = \frac{5+5}{2} \qquad k = \frac{10+2}{2}$$
$$h = 5 \qquad k = 6$$

$$c(5,6)$$

Luego con el centro y uno de los focos dados podemos encontrar el valor de *c* con la fórmula de distancia.

$$FC = c = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad = \sqrt{(5-5)^2 + (10-6)^2} \quad = \sqrt{0+16} \quad = 4$$

Luego por Pitágoras encontramos el valor de a:

$$a = \sqrt{c^2 + b^2} \quad = \sqrt{(4)^2 + (5)^2} \quad = \sqrt{16+25} \quad = \sqrt{41} = 6.4$$

Luego, considerando los valores de *a, b* y las coordenadas del centro, la ecuación de la elipse es:

$$\frac{(x-5)^2}{25} + \frac{(y-6)^2}{41} = 1 \qquad e = \frac{c}{a} = \frac{4}{\sqrt{41}}$$

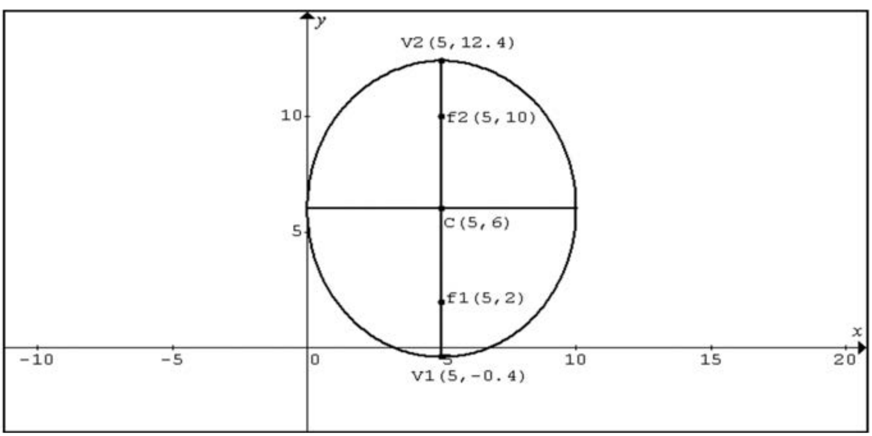
Luego determinamos los vértices y nos queda:

$$V_2(5,12.4) \ V_1(5,\text{-}0.4)$$

Luego su excentricidad está dada por:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{\sqrt{41}}$$

Figura 1.57 Elipse paralela al eje y, con centro en (5,6) y vértices en (5,–0.4) y (5,12.4)



6. Hallar la ecuación de la elipse, si su centro es C (0, 0), uno de los vértices en (0, 8) y su excentricidad es $e = \frac{1}{2}$.

Solución. En el vértice de la elipse dada tenemos: $a = 8$ y las coordenadas del otro vértice son (0, –8).

En la excentricidad: $e = \frac{c}{a}$

$$\frac{1}{2} = \frac{c}{8} \quad \text{de donde: } c = 4$$

Luego por Pitágoras encontramos el valor de :

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} \quad = \sqrt{(8)^2 - (4)^2} \quad = \sqrt{64 - 16} \quad = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

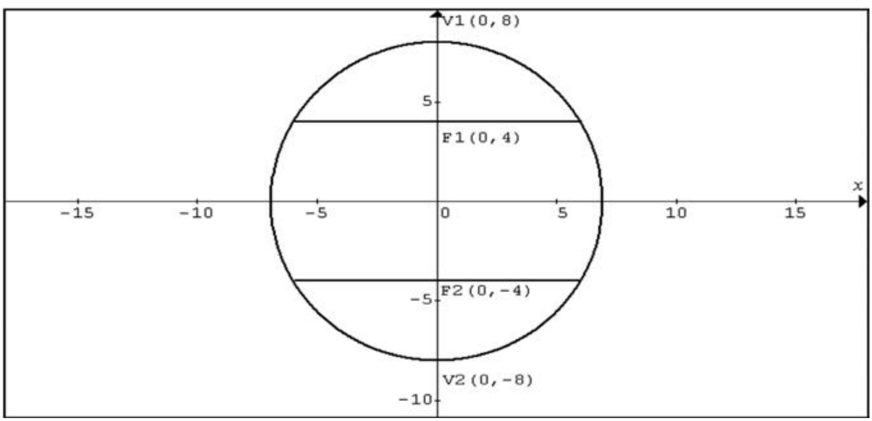
Luego, considerando los valores de *a, b*, la ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{64} = 1$$

Coordenadas de los focos: $F_1(0,4)$ y $F_2(0,-4)$

Figura 1.58 Elipse paralela al eje y, con centro en el origen y vértices en (0,8) y (0,–8)



7. Los vértices de una elipse son los puntos (−4 , 8) y (−4 , −4) y la longitud de su lado recto es 3. Hallar la ecuación de la elipse, su excentricidad y las coordenadas de sus focos.

Solución. Con los vértices de la elipse encontramos la longitud del eje mayor, podemos encontrar el valor de *a* con la fórmula de distancia.

$$V_1V_2 = a = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2} \quad = \sqrt{\left(-4-(-4)\right)^2 + \left(-4-8\right)^2} \quad = \sqrt{0+144} \quad = 12$$

Longitud del eje mayor es:

$$2a = 12$$

$$a = 6$$

Luego determinamos las coordenadas del centro de la elipse:

$$h = \frac{-4-4}{2} \qquad k = \frac{8-4}{2}$$

$$h = -4 \qquad k = 2$$

$$C(-4,2)$$

Luego, como la longitud del lado recto es: $\dfrac{2b^2}{a} = 3$, de donde $b = 3$:

Luego por Pitágoras encontramos el valor de *c*:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad = \sqrt{(6)^2 - (3)^2} \quad = \sqrt{36-9} \quad = \sqrt{27} = 5.1$$

Luego, considerando los valores de *a, b* y las coordenadas del centro, la ecuación de la elipse es:

$$\frac{(x+4)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{36} = 1$$

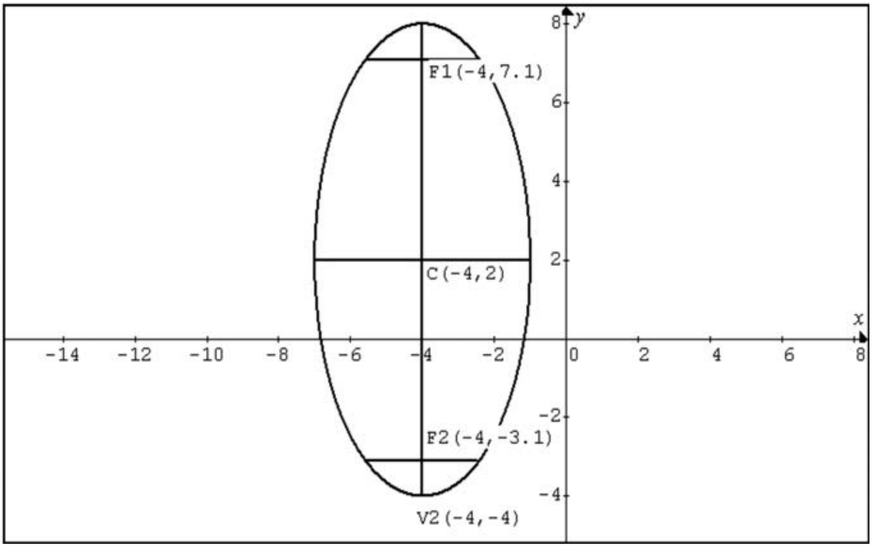
Luego determinamos los focos y nos queda:

$$F_1(-4,7.1) \quad F_2(-4,-3.1)$$

Así mismo, su excentricidad está dada por:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{27}}{6}$$

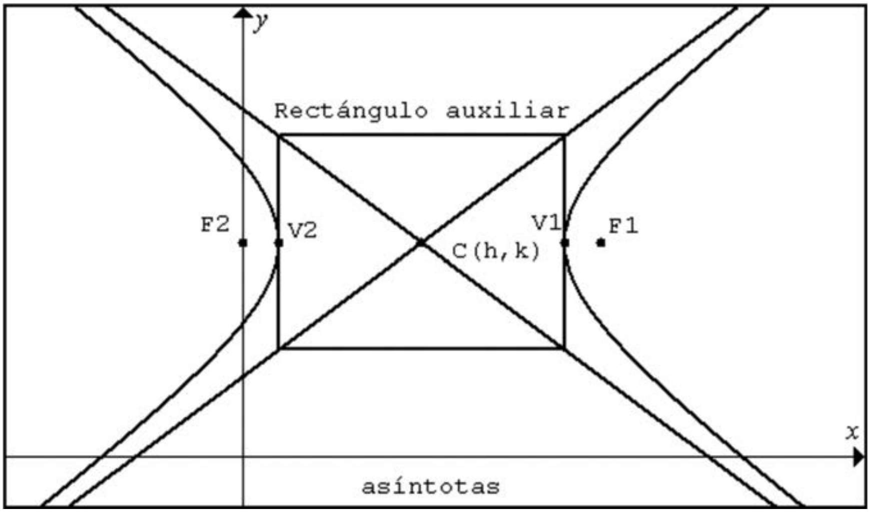
Figura 1.59 Elipse paralela al eje y, vértices en (−4 , 8) y (−4 , −4), longitud de lado recto igual a 3



Hipérbola

Una hipérbola se construye a manera de dos curvas aproximadamente parabólicas en dirección contrarias; es decir, una hipérbola es una gráfica con dos partes.

Figura 1.60 La hipérbola



La ecuación ordinaria de una hipérbola cuyo eje focal (segmento recto que une los dos focos) es paralelo al eje *x* es de la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Si la hipérbola posee el eje focal paralelo al eje *y*, entonces su forma será:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

La ecuación general de una hipérbola es: $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F = 0$ donde A y C tienen diferente signo, o el producto A.C < 0.

Observe entonces que el paralelismo de la hipérbola se corresponde con la posición de su eje focal, tanto con la variable positiva; sin importar los valores *a* y *b*.

Nuevamente como se consideró en la elipse, en la hipérbola la distancia desde el centro hasta el vértice es una longitud *a* que se lo conoce como *semieje transverso*; la distancia desde el centro, perpendicular al eje transverso, hasta el lado del rectángulo auxiliar posee una longitud *b* que se lo conoce como *semieje conjugado*; la distancia desde el centro a cualquiera de los dos focos posee una longitud c que se lo conoce como *semieje focal*.

Las longitudes de los semiejes focal, transverso y conjugado se relacionan mediante la ecuación:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

La *excentricidad e* de una hipérbola es la relación entre los semiejes focal y mayor.

$$e = \frac{c}{a}$$

Así también, podemos hallar la longitud del lado recto en una hipérbola, recordando que este lado recto corresponde al ancho de la hipérbola a nivel del foco. Es decir, un segmento de recta perpendicular al eje focal que une dos puntos de la curva.

Lado recto:

$$LLR = \frac{2b^2}{a}$$

Ejemplos:

1. Hallar la ecuación de la hipérbola, las coordenadas de los vértices, la longitud del eje transverso y excentricidad, cuyos focos son $f_1(0,10)$ y $f_2(0,-10)$; la longitud del eje conjugado es igual a 16.

Solución. Por la posición que tienen las coordenadas de los focos se concluye que la hipérbola es paralela al eje de las y, y su centro está determinado por el punto medio entre los focos

$$C = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$C\left(\frac{0+0}{2}, \frac{10-10}{2}\right)$$

$$C(0,0)$$

Luego, la hipérbola tiene su centro en el origen. Siendo las longitudes de sus semiejes:

$$c = 10$$

$$b = \frac{16}{2} = 8$$

$$a^2 = c^2 - b^2$$

$$a^2 = 100 - 64$$

$$a = 6$$

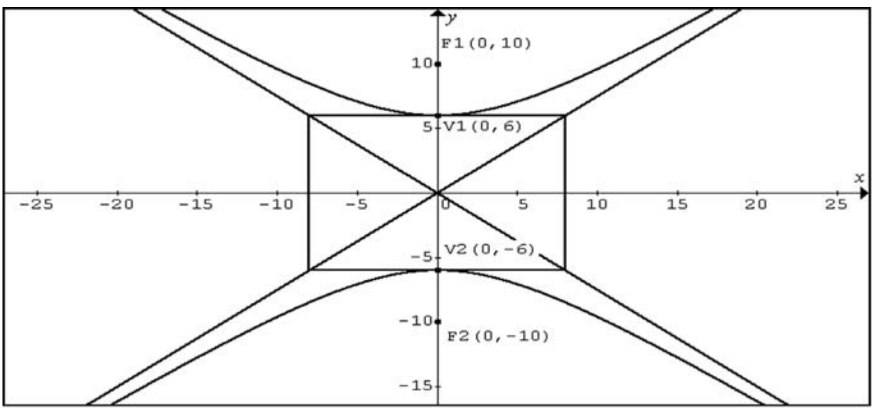
De aquí se tiene que:

- Ecuación de la hipérbola: $\dfrac{y^2}{36} - \dfrac{x^2}{64} = 1$
- Coordenadas de los vértices: $v_1(0,6)$ y $v_2(0,\text{-}6)$
- Longitud del eje transverso: $2a = 12$
- Excentricidad: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{10}{6} = \dfrac{5}{3}$
- Asíntotas: $by + ax = 0$; $by - ax = 0$

Entonces tenemos que:

$8y + 6x = 0$; $8y - 6x = 0$

Figura 1.61 Hipérbola con $f_1(0,10)$ y $f_2(0,10)$, y longitud del eje conjugado 16



```
% MATLAB
% HIPÉRBOLA EJE TRANSVERSO VERTICAL
% 1. Hallar la ecuación de la hipérbola, las coorde-
nadas de los
% vértices, la longitud del eje transverso y excen-
tricidad cuyos
% focos son F1=(0,10) y F2=(0,-10), y la longitud del
eje conjugado
% es igual a 16.
clc
clf
%ejes
eje=[-15:1:15];
ceros=zeros(1,31);
plot(eje,ceros,'r+-')
hold on
plot(ceros,eje,'r+-')
%datos
h=5;  k=0;  c=10; b=8;
a=sqrt(c^2-b^2)
%hipérbola
t=0:0.1:2*pi;
x=h+b*tan(t); %x=h+b*tan(t)
y=k+a*sec(t); %y=k+a*sec(t)
%asíntotas
x1=-10:1:10;
y1=a*(x1-h)/b+k;
y2=-a*(x1-h)/b+k;
%gráfico
plot(x,y)
%CENTRO(h,k)
plot(h,k,'r*')
text(h,k,'C')
%GRÁFICO ASÍNTOTAS
plot(x1,y1,'r--',x1,y2,'r--')
%VÉRTICES
plot(h,k-a,'r*',h,k+a,'r*')
text(h,k-a,'V´')
text(h,k+a,'V')
%FOCOS
```

```
plot(h,k-c,'r*',h,k+c,'r*')
text(h,k-c,'C´')
text(h,k+c,'C')
% EJE CONJUGADO
plot(h-b,k,'r*',h+b,k,'r*')
text(h-b,k,'b´')
text(h+b,k,'b')
grid on
grid minor
axis([-15 15 -15 15])
axis square
```

2. Dada la ecuación de la hipérbola, determinar las coordenadas del centro, vértices y focos, excentricidad, las longitudes de los ejes transversos y conjugados, y del lado recto.

$$x^2-16y^2+2x+64y+81=0$$

Solución. Reordenando términos, agrupando, completando trinomio y factorizando, tenemos:

$$\left(x^2+2x\right)-16\left(y^2-4y\right)=-81$$
$$\left(x^2+2x+1\right)-16\left(y^2-4y+4\right)=-81+1-64$$
$$\left(x+1\right)^2-16\left(y-2\right)^2=-144$$
$$\frac{\left(y-2\right)^2}{9}-\frac{\left(x+1\right)^2}{144}=1$$

De acuerdo con esta ecuación se tiene que:

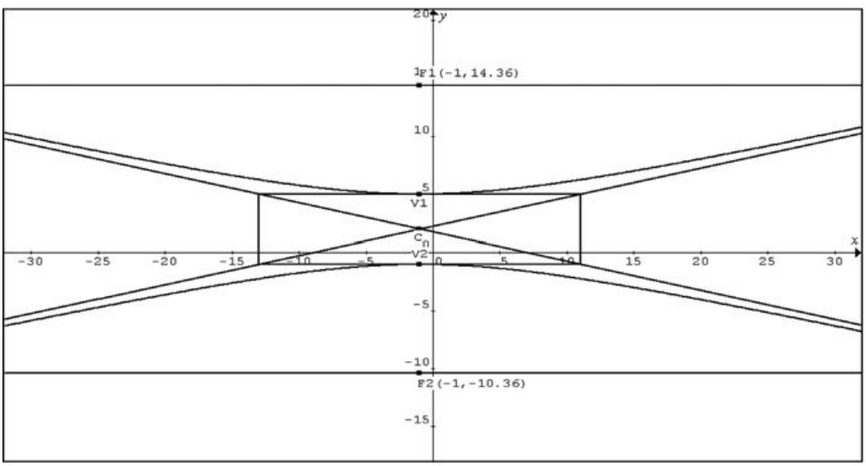
$$a=\sqrt{9}=3$$
$$b=\sqrt{144}=12$$
$$c^2=a^2+b^2$$
$$c^2=9+144$$
$$c=3\sqrt{17}$$

De aquí se concluye que

- Coordenadas del centro: C(-1,2)
- Coordenadas de los vértices: v_1(-15) y v_2(-1,-1)
- Coordenadas de los focos: $f_1(-1,2+3\sqrt{17})$ y $f_2(-1,2-3\sqrt{17})$
- Excentricidad: $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{3\sqrt{17}}{3}=\sqrt{17}$
- Longitud del eje transverso: $2a = 6$
- Longitud del eje conjugado: $2b = 24$
- Longitud del lado recto: $LLR=\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2(144)}{3}=96$
- Asíntotas: $\dfrac{y-2}{3}+\dfrac{x+1}{12}=0$; $\dfrac{y-2}{3}-\dfrac{x+1}{12}=0$

$$x+4y-7 = 0 \quad ; \quad x-4y+9 = 0$$

Figura 1.62 Hipérbola x^2-16y^2+2x+64y+81 = 0



3. Los vértices de una hipérbola son (0, 6) y (0,–6) y su excentricidad es igual a $\frac{5}{3}$. Hallar la ecuación de la hipérbola y las coordenadas de sus focos.

Solución. En los vértices de la hipérbola dada tenemos que:

$$a = 6$$

En la excentricidad: $e = \dfrac{c}{a}$

$$\frac{5}{3} = \frac{c}{6}$$

$$c = 10$$

Luego por Pitágoras encontramos el valor de *b*:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} \quad = \sqrt{(10)^2 - (6)^2} \quad = \sqrt{100 - 36} \quad = \sqrt{64} = 8$$

Luego, considerando los valores de *a, b*, la ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

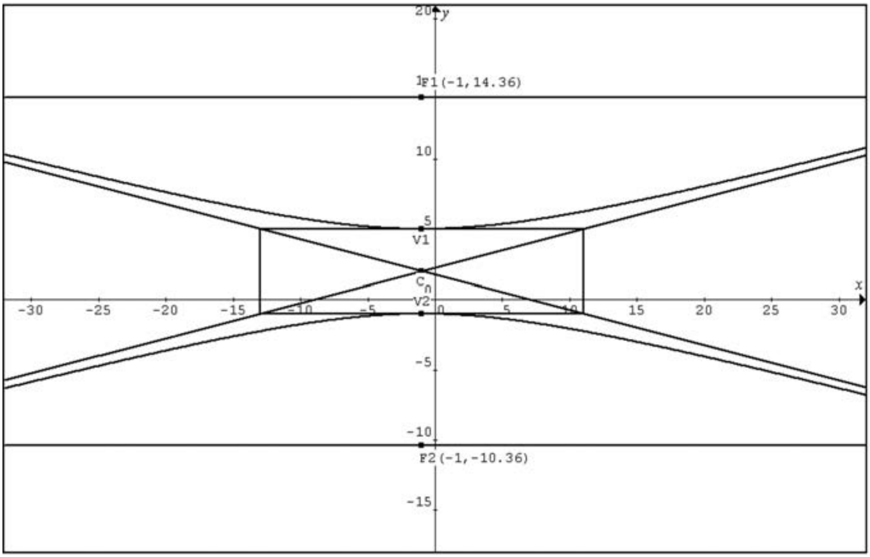
$$\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{64} = 1$$

Coordenadas de los focos: $F_1(0,10)$ y $F_2(0,-10)$

- Asíntotas: by+ax = 0 ; by-ax = 0

  8y+6x = 0 ; 8y-6y = 0

Figura 1.63 hipérbola con vértices en (0 , 6) y (0 ,–6) y excentricidad es igual a 5/3



4. Los focos de una hipérbola son (–9 , 4) y (–3 , 4) y la longitud del eje conjugado es igual a 4. Hallar la ecuación de la hipérbola, las coordenadas de sus vértices y su excentricidad.

Solución. Como el eje conjugado es: $2b = 4$; de donde: $b = 2$
Luego determinamos las coordenadas del centro de la hipérbola.

$$h = \frac{-9-3}{2} \quad k = \frac{4+4}{2}$$

$$h = -6 \qquad k = 4$$

$$C(-6,4)$$

Luego con el centro y uno de los focos dados podemos encontrar el valor de c con la fórmula de distancia.

$$FC = c = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2} = \sqrt{\left(-6-(-9)\right)^2 + \left(4-4\right)^2} = \sqrt{9+0} = 3$$

Luego por Pitágoras encontramos el valor de *a*:

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} \quad = \sqrt{(3)^2 - (2)^2} \quad = \sqrt{9-4} \quad = \sqrt{5} = 2.2$$

Luego, considerando los valores de *a, b* y las coordenadas del centro, la ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x+6)^2}{5} - \frac{(y-4)^2}{4} = 1$$

Luego determinamos los vértices y nos queda:

$V_1(h+a,k)$; $V_1(-6+2.2,4)$; $V_1(-3.8,4)$

$V_2(h-a,k)$; $V_2(-6-2.2,4)$; $V_2(-8.2,4)$

Luego su excentricidad está dada por:

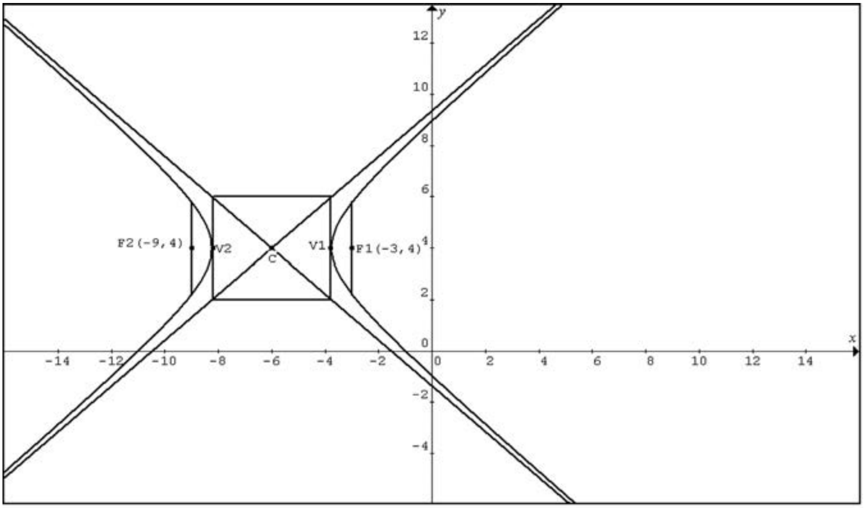
$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

Asíntotas: $\frac{(x-h)}{a} + \frac{(y-k)}{b} = 0$; $\frac{(x-h)}{a} - \frac{(y-k)}{b} = 0$

$$\frac{x+6}{\sqrt{5}} + \frac{y-4}{2} = 0 \qquad \frac{x+6}{\sqrt{5}} - \frac{y-4}{2} = 0$$

$$2x + \sqrt{5}y + 3.05 = 0 \qquad 2x - \sqrt{5}y + 20.9 = 0$$

Figura 1.64 Hipérbola con focos en (–9 , 4) y (–3 , 4) y longitud del eje conjugado igual a 4




```
%MATLAB
% HIPÉRBOLA EJE TRANSVERSO HORIZONTAL
% 4. Los focos de una hipérbola son (-9 , 4) y (-3 ,
4) y la longitud
% del eje conjugado es igual a 4. Hallar la ecuación
de la hipérbola,
% las coordenadas de sus vértices y su excentricidad.
clc
clf
%ejes
eje=[-15:1:15];
ceros=zeros(1,31);
plot(eje,ceros,'r--')
hold on
plot(ceros,eje,'r--')
%datos
h=-6; k=4; c=3; b=2;
a=sqrt(c^2-b^2)
%hipérbola
t=0:0.1:2*pi;
```

```
x=h+a*sec(t); %x=h+a*sec(t)
y=k+b*tan(t); %y=k+b*tan(t)
%asíntotas
x1=-10:1:10;
y1=b*(x1-h)/a+k;
y2=-b*(x1-h)/a+k;          ;
%gráfico
plot(x,y)
plot(x1,y1,'r--',x1,y2,'r--')
%CENTRO(h,k)
plot(h,k,'r*')
text(h,k,'C')
%FOCOS
text(h-c,k,'F2')
text(h+c,k,'F1')
plot(h-c,k,'r*',h+c,k,'r*')
% EJE CONJUGADO
plot(h,k-b,'r*',h,k+b,'r*')
text(h,k-b,'b´')
text(h,k+b,'b')
grid on
grid minor
axis([-15 15 -15 15])
axis square
```

5. Hallar la ecuación de la hipérbola y su excentricidad, si los vértices son los puntos (4,0) y (–4,0) y sus focos son los puntos (7,0) y (–7,0).

Solución. Como nos dan las coordenadas de sus vértices y focos, tenemos:

$$\text{En } V(4,0)\ ;\ a = 4$$
$$\text{En } F(7,0)\ ;\ c = 7$$

Luego por el teorema de Pitágoras encontramos el valor de b:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} \quad = \sqrt{(7)^2 - (4)^2} \quad = \sqrt{49 - 16} \quad = \sqrt{33}$$

Luego, considerando los valores de a *y b*, la ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{33}=1$$

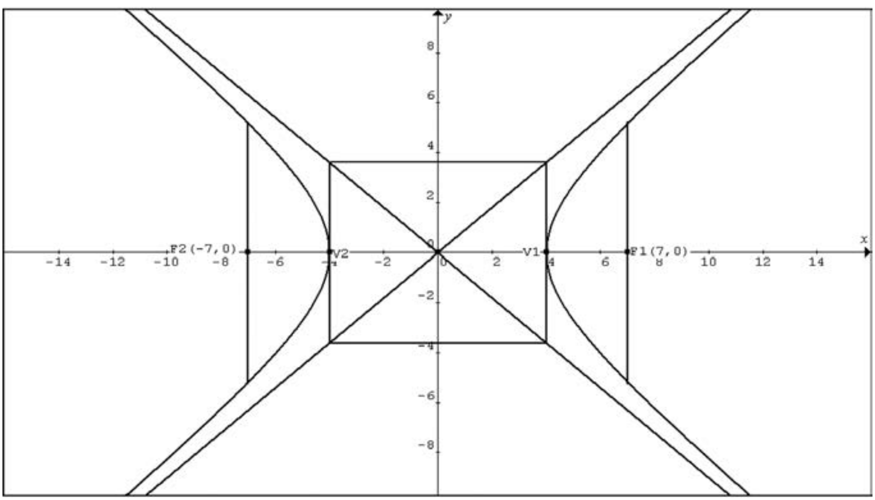
Luego su excentricidad está dada por:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{7}{4}$$

- Asíntotas: $bx+ay=0$; $bx-ay=0$

$$\sqrt{33}x+4y=0 \quad ; \quad \sqrt{33}x-4y=0$$

Figura 1.65 Hipérbola con vértices en (4,0) y (–4,0) y focos en los puntos (7,0) y (–7,0)



6. Dada la ecuación de la hipérbola , determinar las coordenadas del centro, vértices y focos, excentricidad, las longitudes de los ejes transversos y conjugados, y del lado recto.

Solución. Según esta ecuación se tiene que:

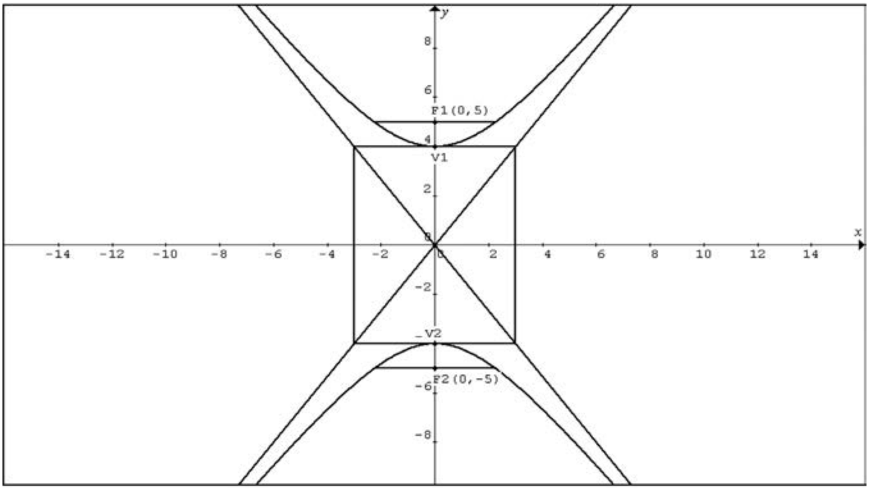
$$a = \sqrt{16} = 4$$
$$b = \sqrt{9} = 3$$
$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c^2 = 16 + 9$$
$$c = 5$$

De aquí se concluye que:

- Coordenadas del centro: $C(0,0)$
- Coordenadas de los vértices: $v_1(0,4)$ y $v_2(0,-4)$
- Coordenadas de los focos: $f_1(0,5)$ y $f_2(0,-5)$
- Excentricidad: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{5}{4}$
- Longitud del eje transverso: $2a = 8$
- Longitud del eje conjugado: $2b = 6$
- Longitud del lado recto: $LLR = \dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{2(9)}{4} = \dfrac{9}{2}$
- Asíntotas: $by+ax = 0$; $by-ax = 0$

$$3y+4x = 0 \ ; \ 3y-4x = 0$$

Figura 1.66 Hipérbola $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$



7. El centro de una hipérbola es el punto $C(3,7)$ y uno de sus focos es $F_1(9,7)$; si la excentricidad es igual a 3. Hallar la ecuación, las coordenadas del otro foco y de sus vértices y las longitudes de sus ejes transverso y conjugado.

Solución. Con el centro y uno de los focos dados podemos encontrar el valor de c con la fórmula de distancia.

$$FC = c = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2} \quad = \sqrt{\left(9-3\right)^2 + \left(7-7\right)^2} \quad = \sqrt{36+0}$$

$$c = 6$$

En la excentricidad:

$$e = \frac{c}{a}$$

$$3 = \frac{6}{a}$$

Luego por Pitágoras encontramos el valor de b:

$$b=\sqrt{c^2-a^2} \quad =\sqrt{(6)^2-(2)^2} \quad =\sqrt{36-4} \quad =\sqrt{32}=4\sqrt{2}$$

Luego, considerando los valores de *a, b* y las coordenadas del centro, la ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{(y-7)^2}{32}=1$$

Luego determinamos los vértices y nos queda:

$$V_1(h+a,k) \;;\; V_1(3+2,7) \;;\; V_1(5,7)$$
$$V_2(h-a,k) \;;\; V_2(3-2,7) \;;\; V_2(1,7)$$

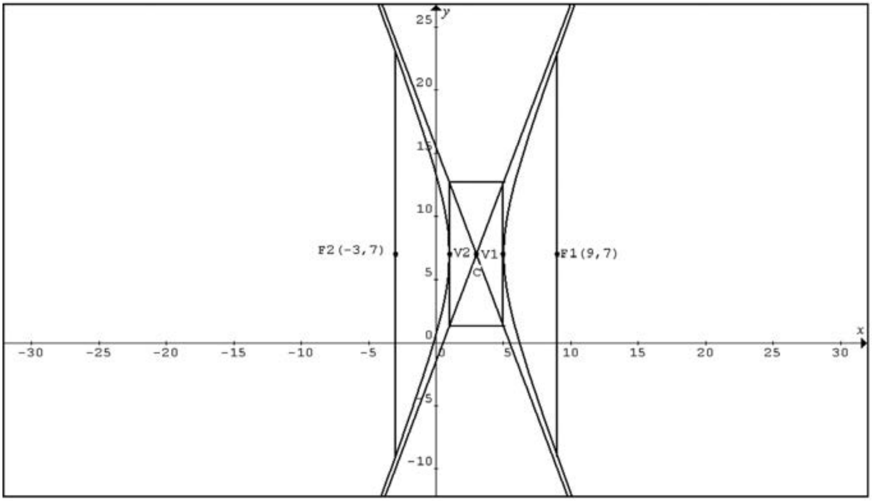
Luego determinamos las coordenadas del otro foco:

$$F_2(h-c,k) \;;\; F_2(3-6,7) \;;\; F_2(3-7)$$

- Longitud del eje transverso: $2a = 4$
- Longitud del eje conjugado: $2b=8\sqrt{2}$
- Longitud del lado recto: $LLR=\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2(32)}{2}=32$
- Asíntotas: $\dfrac{x-3}{2}+\dfrac{y-7}{4\sqrt{2}}=0 \;;\; \dfrac{x-3}{2}-\dfrac{y-7}{4\sqrt{2}}=0$

$$4\sqrt{2}x+2y-30.9=0 \;;\; 4\sqrt{2}x-2y-2.9=0$$

Figura 1.67 Hipérbola con centro en $C(3,7)$, un foco en $F_1(9,7)$y excentricidad 3



Ejercicios adicionales

A continuación, para mejorar la habilidad del estudiante se presentan diversos ejercicios resueltos.

1. Reducir a la forma ordinaria la ecuación de la circunferencia y hállense su centro y su radio.

$$4x^2+4y^2+28x-8y+53 = 0$$

Solución. Pasando el término independiente al segundo miembro y dividiendo toda la ecuación para 4 tenemos:

$$x^2+y^2+7x-2y=-\frac{53}{4}$$

Luego reordenando los términos, completando trinomios y equilibrando la ecuación tenemos:

$$\left(x^2+7x+\frac{49}{4}\right)+\left(y^2-2y+1\right)=-\frac{53}{4}+\frac{49}{4}+1$$

$$\left(x+\frac{7}{2}\right)^2+\left(y-1\right)^2=0$$

Tras este resultado obsérvese que: ¡NO EXISTE UNA CIRCUNFERENCIA, YA QUE EL SEGUNDO MIEMBRO DE LA ECUACIÓN DEBE SER > 0, LA ECUACIÓN REPRESENTARÍA EL PUNTO (–7/2 , 1)!

2. Dada la ecuación de la hipérbola, determinar las coordenadas del centro, vértices y focos, excentricidad, las longitudes de los ejes transversos y conjugados, y del lado recto.

$$9x^2\text{-}16y^2\text{-}18x\text{-}64y\text{-}199 = 0$$

Solución. Reordenando términos, agrupando, completando trinomios y factorizando se tiene:

$$9\left(x^2-2x\right)-16\left(y^2+4y\right)=199$$

$$9\left(x^2-2x+1\right)-16\left(y^2+4y+4\right)=199+9-64$$

$$\left(x-1\right)^2-16\left(y+2\right)^2=144$$

$$\frac{\left(x-1\right)^2}{16}-\frac{\left(y+2\right)^2}{9}=1$$

Según esta ecuación se tiene que:

$$a=\sqrt{16}=4$$

$$b=\sqrt{9}=3$$

$$c^2=a^2+b^2$$

$$c^2=16+9$$

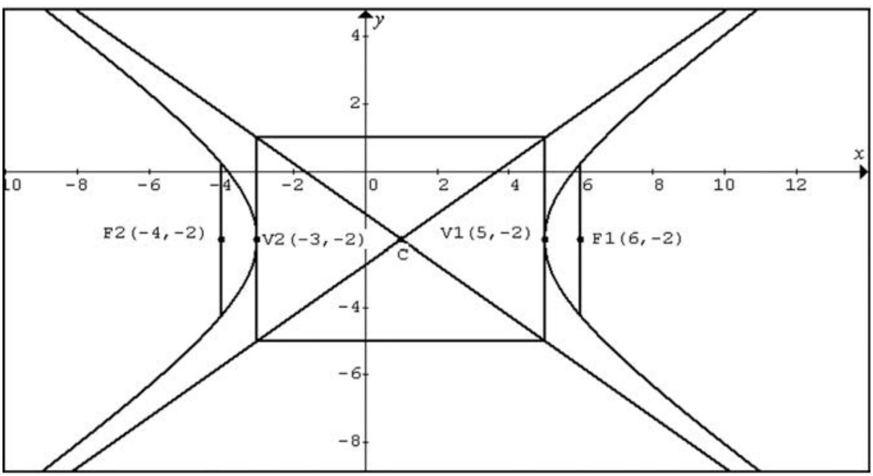
$$c=5$$

De aquí se concluye que:

- Coordenadas del centro: $C(1,-2)$
- Coordenadas de los vértices: $V_1(5,-2)$ y $V_2(-3,-2)$
- Coordenadas de los focos: $f_1(6,-2)$ y $f_2(-4,-2)$ y
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$
- Longitud del eje transverso: $2a = 8$
- Longitud del eje conjugado: $2b = 6$
- Longitud del lado recto: $LLR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(9)}{4} = \frac{9}{2}$
- Asíntotas: $\frac{(x-h)}{a} + \frac{(y-k)}{b} = 0$; $\frac{(x-h)}{a} - \frac{(y-k)}{b} = 0$

$3x+4y^2+5 = 0$; $3x$-4y-11 = 0

Figura 1.68 hipérbola $9x^2$-$16y^2$-$18x$-$64y$-199 = 0



3. Uno o varios de los siguientes enunciados son VERDADEROS, identifíquelos.

A. La excentricidad de x^2-2y^2 = 6, es 3. (FALSO)
Justificación. Dividiendo toda la ecuación para 6 se tiene:

$$\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$$

Según esta ecuación se tiene que:

$$\begin{aligned}
&\rightarrow a=\sqrt{6}\\
&\rightarrow b=\sqrt{3}\\
&\rightarrow c^2=a^2+b^2\\
&c^2=6+3\\
&c=3
\end{aligned}$$

Luego su excentricidad está dada por:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{3}{\sqrt{6}}$$

B. La directriz de 2x^2-y = 6; es y = -3. (FALSO)

Justificación. Despejamos x^2 de la ecuación dada y de ahí se observa que:

$$x^2=\frac{1}{2}(y+6)$$

De esta expresión obtenida se observa que:

$$4P=\frac{1}{2}$$

$$P = \frac{1}{8}$$

Luego la ecuación de la directriz:

$$y = P$$
$$y = -\frac{1}{8}$$

C. El eje mayor de $3x^2 + 2y^2 - 1 = 6x - 4y + 6$, es $a = 2$. (FALSO)

Justificación. Reordenando términos, agrupando, completando trinomio y factorizando se tiene:

$$3\left(x^2 - 2x\right) + 2\left(y^2 + 2y\right) = 6 + 1$$
$$3\left(x^2 - 2x + 1\right) + 2\left(y^2 + 2y + 1\right) = 7 + 3 + 2$$
$$3\left(x - 1\right)^2 + 2\left(y + 1\right)^2 = 12$$
$$\frac{\left(x-1\right)^2}{4} + \frac{\left(y+1\right)^2}{6} = 1$$

Según esta ecuación se tiene que:

$$a = \sqrt{6}$$
$$b = \sqrt{4} = 2$$
$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$c^2 = 6 - 4$$
$$c = \sqrt{2}$$

D. Las rectas $3x - y + 5 = 0$; $2x + 6y - 1 = 0$, son paralelas. (FALSO)

Justificación. En las rectas dadas, despejamos y y luego determinamos las pendientes en ambas rectas.

$$3x - y + 5 = 0 \rightarrow y = 3x + 5 \rightarrow m_1 = 3$$

$$2x + 6y - 1 = 0 \rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{6} \rightarrow m_2 = -\frac{1}{3}$$

RECUERDE: Que para que dos rectas sean PARALELAS sus pendientes tienen que ser iguales (es decir, $m_1 = m_2$).

Entonces tenemos que:

$$m_1 = m_2$$

$$3 \neq -\frac{1}{3}$$

E. El área del círculo, cuya ecuación es $x^2 + y^2 - 8y = 0$ es 16π. (VERDADERO)

Justificación. Agrupando y completando trinomios tenemos:

$$x^2+(y^{2-}8y+16) = 0$$

$$x^2+(y-4)2 = 16$$

De esta respuesta se puede observar que su radio es:

$$r = 4$$

RECUERDE: Que el área del círculo está dada por la siguiente fórmula:

$$A = \pi\, r^2$$

Entonces tenemos que:

$$A = \pi(4)^2$$

$$A = 16\pi$$

4. Graficar las siguientes ecuaciones, indicando los parámetros o características correspondientes:

A. $x^2+4y^2-6x+16y+21=0$

Solución. Reordenando los términos, despejando el término independiente y factorizando, se tiene:

$$(x^2-6x)+4(y^2+4y)=-21$$

Completando trinomios y equilibrando la ecuación:

$$(x^2-6x+9)+4(y^2+4y+4):$$

$$(x-3)^2+4(y+2)^2=4$$

$$\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{1}=1$$

Según esta ecuación se tiene que:

$$a=\sqrt{4}=2$$

$$b=\sqrt{1}=1$$

$$c^2=a^2-b^2$$

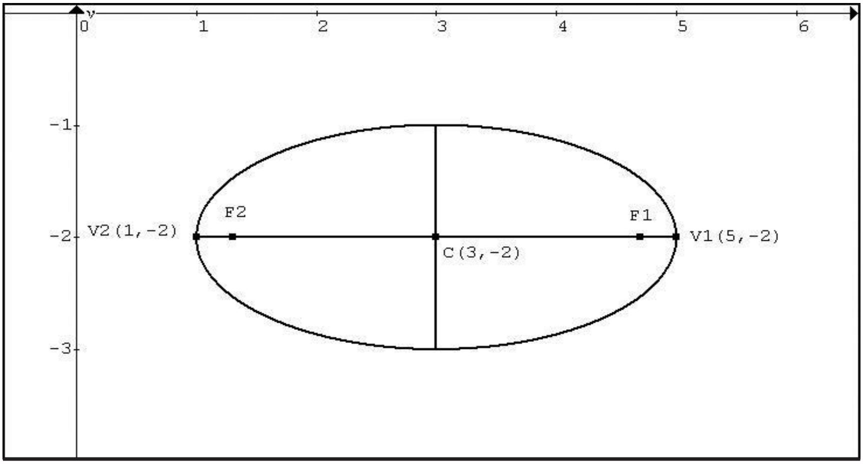
$$c^2=4-1$$

$$c=\sqrt{3}$$

- De aquí se concluye que:
- Coordenadas del centro: $c(3,2)$
- Coordenadas de los vértices: $v_1(5,-2)$ y $v_2(1,-2)$
- Coordenadas de los focos: $f_1(3+\sqrt{3},-2)$ y $f_2(3-\sqrt{3},-2)$
- Excentricidad: $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- Longitud del eje mayor: $2a=4$

- Longitud del eje menor: $2b = 2$
- Longitud del lado recto: $LLR = \dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{2(1)}{2} = 1$

Figura 1.69 Elipse y^2-4y-8x = 0



B. $y^2 - 4y - 8x - 28 = 0$

Solución. Pasando la expresión -8x-28 al segundo miembro, completamos trinomios cuadrados y equilibrando la ecuación tenemos:

$$y^2 - 4y + 4 = 8x + 28 + 4$$

$$(y-2)^2 = 8x + 32$$

$$(y-2)^2 = 8(x+4)$$

De esta ecuación se observa que el vértice es $V(-4,2)$
También se tiene que:

$$4P = 8$$

$$P = 2$$

Luego las coordenadas del foco son:

$$F(h+P,k)$$

$$F(-2,2)$$

La ecuación de la directriz es:

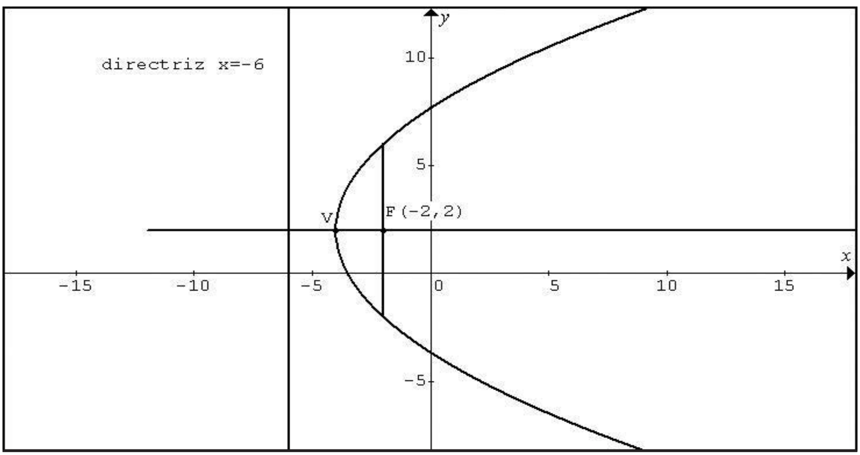
$$x = h - P$$
$$x = -4 - 2$$
$$x = -6$$

Longitud del lado recto es:

$$L.R = |4P|$$

$$L.R = 8$$

Figura 1.70 Parábola y^2**-4**y**-8**x-28 **= 0**



C. $y^2 - 4y - 6x + 13 = 0$

Solución. Pasando la expresión -6x+13 al segundo miembro, completamos trinomios cuadrados y equilibrando la ecuación tenemos:

$$y^2 - 4y + 4 = 6x - 13 + 4$$

$$(y-2)^2 = 6x - 9$$

$$(y-2)^2 = 6\left(x - \frac{9}{6}\right)$$

$$(y-2)^2 = 6\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

De esta ecuación se observa que el vértice es $V\left(\frac{3}{2}, 2\right)$

También se tiene que:

$$4P = 6$$

$$P = \frac{3}{2}$$

Luego las coordenadas del foco son:

$$F(h+P,k)$$

$$F(3,2)$$

La ecuación de la directriz es:

$$x = h - P$$

$$x = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}$$

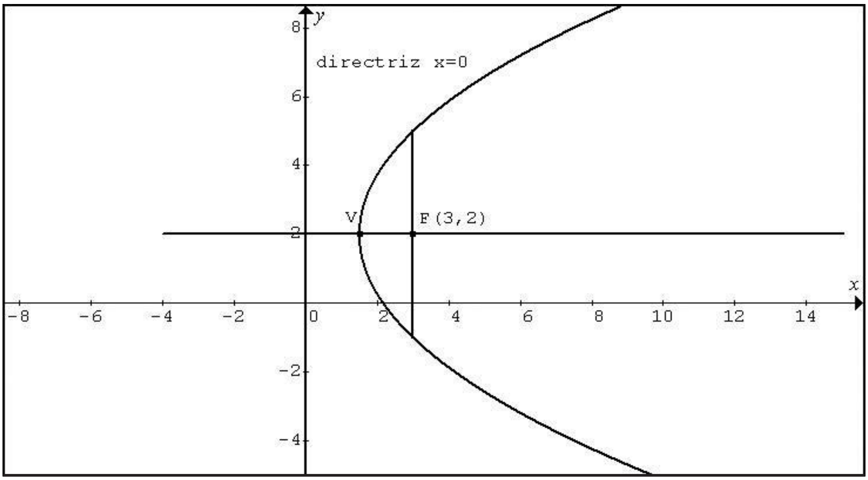
$$x = 0$$

Longitud del lado recto es:

$$L.R = |4P|$$

$$L.R = 6$$

Figura 1.71 Parábola y^2-4y-6x+13 = 0



D. $4y^2 - x^2 + 8y - 6x - 4 = 0$

Solución. Reordenando términos, agrupando, completando trinomio y factorizando se tiene:

$$4\left(y^2+2y\right)-\left(x^2+6x\right)=4$$

$$4\left(y^2+2y+1\right)-\left(x^2+6x+9\right)=4+4-9$$

$$4\left(y+1\right)^2-\left(x+3\right)^2=-1$$

$$\frac{\left(x+3\right)^2}{1}-\frac{\left(y+1\right)^2}{\frac{1}{4}}=1$$

Según esta ecuación se tiene que:

$$a=\sqrt{1}=1$$

$$b=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$

$$c^2=a^2+b^2$$

$$c^2 = 1 + \frac{1}{4}$$

$$c = \sqrt{\frac{5}{4}}$$

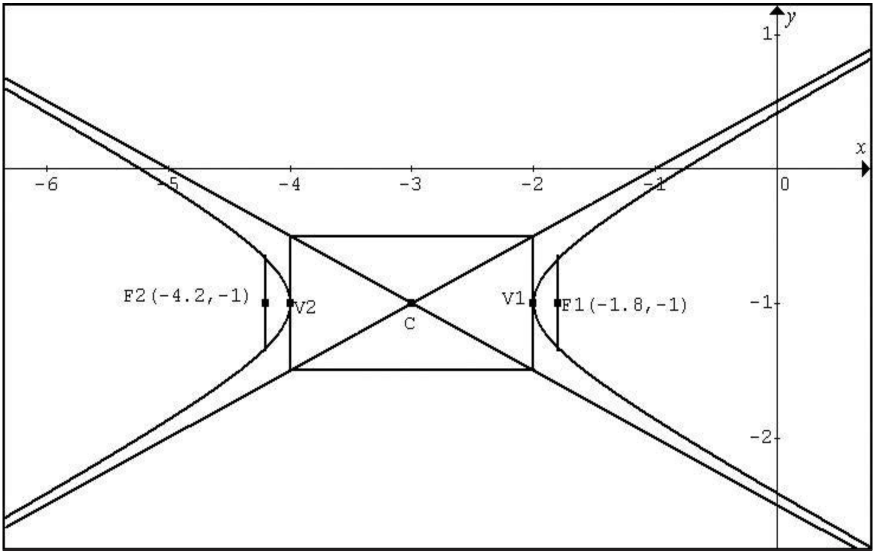
De aquí se concluye que:

- Coordenadas del centro: C(-3,-1)
- Coordenadas de los vértices: $v_1(-2,-1)$ y $v_2(-4,-1)$
- Coordenadas de los focos: $f_1\left(-3+\sqrt{\frac{5}{4}},-1\right)$ y $f_2\left(-3-\sqrt{\frac{5}{4}},-1\right)$
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{\frac{5}{4}}}{1} = \sqrt{\frac{5}{4}}$
- Longitud del eje transverso: $2a = 2$
- Longitud del eje conjugado: $2b = 1$
- Longitud del lado recto: $LLR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2\left(\frac{1}{4}\right)}{1} = \frac{1}{2}$
- Asíntotas: $\frac{(x-h)}{a} + \frac{(y-k)}{b} = 0$; $\frac{(x-h)}{a} - \frac{(y-k)}{b} = 0$

$$\frac{x+3}{1} + \frac{y+1}{\frac{1}{2}} = 0 \quad ; \quad \frac{x+3}{1} - \frac{y+1}{\frac{1}{2}} = 0$$

$$x + 2y + 5 = 0 \ ; \ x - 2y + 1 = 0$$

Figura 1.72 Hipérbola $4y^2-x-8y-6x-4=0$



E. $4x^2+9y^2+32x-18y+37=0$

Solución. Reordenando los términos, despejando el término independiente y factorizando, se tiene:

$$4(x^2+8x)+9(y^2-2y)=-37$$

Completando trinomios y equilibrando la ecuación:

$$4(x^2+8x+16)+9(y^2-2y+1)=$$

$$4(x+4)^2+9(y-1)^2=36$$

$$\frac{(x+4)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$$

Según esta ecuación se tiene que:

$$a=\sqrt{9}=3$$

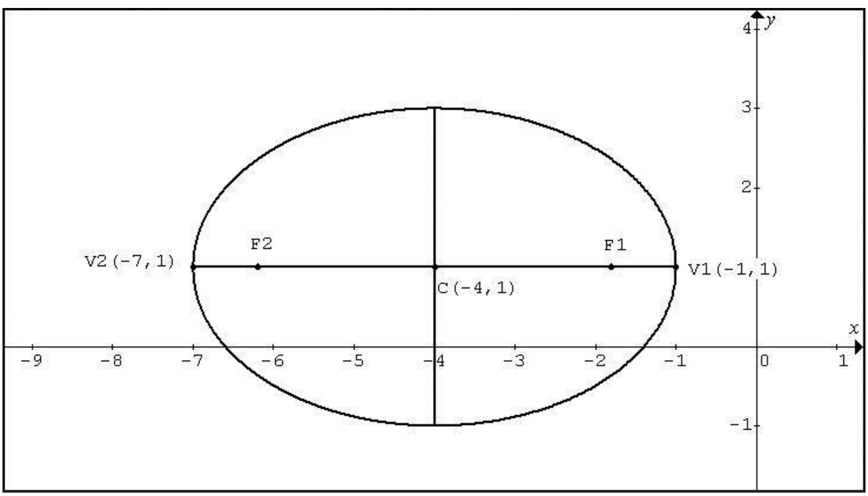
$$b=\sqrt{4}=2$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$c^2 = 9 - 4$$
$$c = \sqrt{5}$$

De aquí se concluye que:

- Coordenadas del centro: C(-4,1)
- Coordenadas de los vértices: $v_1(-1,1)$ y $v_2(-7,1)$
- Coordenadas de los focos: $f_1(-4+\sqrt{5},1)$ y $f_2(-4-\sqrt{5},1)$
- Excentricidad: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$
- Longitud del eje mayor: $2a = 6$
- Longitud del eje menor: $2b = 4$
- Longitud del lado recto: $LLR = \dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{2(4)}{3} = \dfrac{8}{3}$

Figura 1.73 Elipse $4x^2+9y^2+32x-18y+37=0$



F. $\mathbf{9x^2+9y^2+27x-18y+1 = 0}$

Solución. Pasando el término independiente al segundo miembro y dividiendo toda la ecuación para 9 tenemos:

$$x^2 + y^2 + 3x - 2y = -\frac{1}{9}$$

Luego reordenando los términos, completando trinomios y equilibrando la ecuación tenemos:

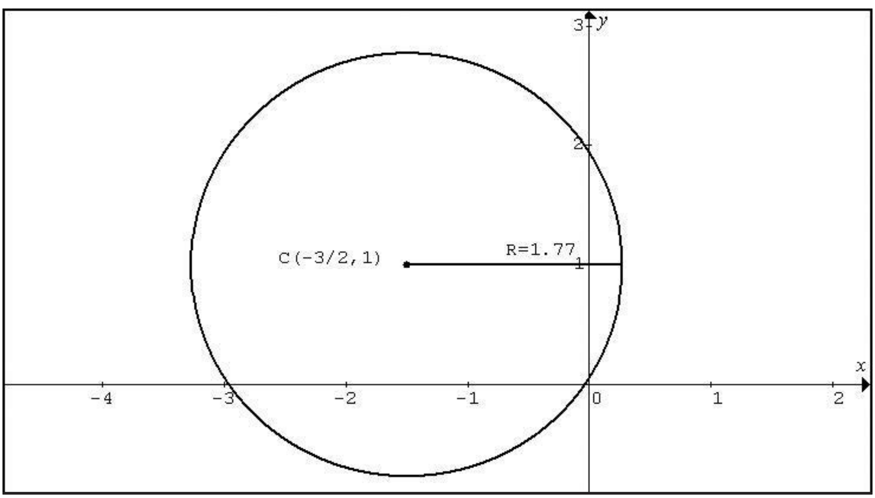
$$\left(x^2 + 3x + \frac{9}{4}\right) + \left(y^2 - 2y + 1\right) = -\frac{1}{9} + \frac{9}{4} + 1$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - 1\right)^2 = \frac{113}{36}$$

Como ya obtuvimos la ecuación solicitada se puede observar que su centro y su radio son:

$$C\left(-\frac{3}{2}, 1\right) \text{ y } r = \sqrt{\frac{113}{36}}$$

Figura 1.74 Circunferencia 9x^2+9y^2+27-18y+1 = 0



5. Grafique las siguientes ecuaciones, indicando los parámetros o características correspondientes:

a) $x^2 + 4y^2 + 10x + 4y + 1 = 0$

Solución. Reordenando los términos, despejando el término independiente y factorizando, se tiene:

$$(x^2 + 10x) + 4(y^2 + y) = -1$$

Completando trinomios y equilibrando la ecuación:

$$(x^2 + 10x + 25) + 4(y^2 + y + \frac{1}{4}) = -1 + 25 + 1$$

$$(x+5)^2 + 4(y + \frac{1}{2})^2 = 25$$

$$\frac{(x+5)^2}{25} + \frac{(y+\frac{1}{2})^2}{\frac{25}{4}} = 1$$

Según esta ecuación se tiene que:

$$a = \sqrt{25} = 5$$

$$b = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c^2 = 25 - \frac{25}{4}$$

$$c = \sqrt{\frac{75}{4}}$$

De aquí se concluye que:

- Coordenadas del centro: $C\left(-5, -\frac{1}{2}\right)$

- Coordenadas de los vértices: $v_1\left(0,-\dfrac{1}{2}\right)$ y $v_2\left(-10,-\dfrac{1}{2}\right)$

- Coordenadas de los focos: $f_1\left(-5+\sqrt{\dfrac{75}{4}},-\dfrac{1}{2}\right)$ y $f_2\left(-5-\sqrt{\dfrac{75}{4}},-\dfrac{1}{2}\right)$

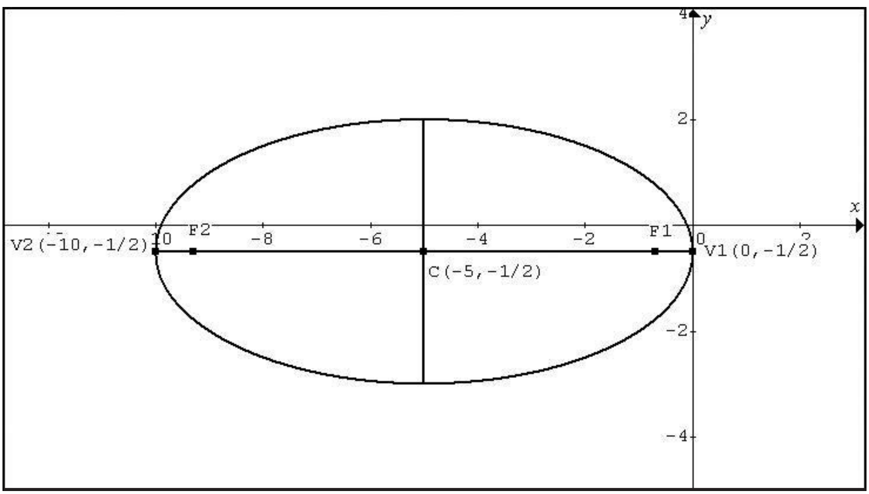
- Excentricidad: $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{\dfrac{75}{4}}}{5}$

- Longitud del eje mayor: $2a=10$

- Longitud del eje menor: $2b=5$

- Longitud del lado recto: $LLR=\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2\left(\dfrac{25}{4}\right)}{5}=\dfrac{5}{2}$

Figura 1.75 Elipse $x^2+4y^2+10x+4y+1=0$



b) $x^2+1-2y^2=2(x+2y)$

Solución. Reordenando términos, agrupando, completando trinomios y factorizando se tiene:

$$x^2+1-2y^2-2x-4y=0$$
$$\left(x^2-2x\right)-2\left(y^2+2y\right)=-1$$
$$\left(x^2-2x+1\right)-2\left(y^2+2y+1\right)=-1+1-2$$
$$\left(x-1\right)^2-2\left(y+1\right)^2=-2$$
$$\frac{\left(y+1\right)^2}{1}-\frac{\left(x-1\right)^2}{2}=1$$

Según esta ecuación se tiene que:

$$a=\sqrt{1}=1$$
$$b=\sqrt{2}$$
$$c^2=a^2+b^2$$
$$c^2=1+2$$
$$c=\sqrt{3}$$

De aquí se concluye que:

- Coordenadas del centro: $C(1,-1)$
- Coordenadas de los vértices: $v_1(1,0)$ y $v_2(1,-2)$
- Coordenadas de los focos: $f_1(1,-1+\sqrt{3})$ y $f_2(1,-1-\sqrt{3})$
- Excentricidad: $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$
- Longitud del eje transverso: $2a=2$
- Longitud del eje conjugado: $2b=2\sqrt{2}$
- Longitud del lado recto: $LLR=\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2(2)}{1}=4$

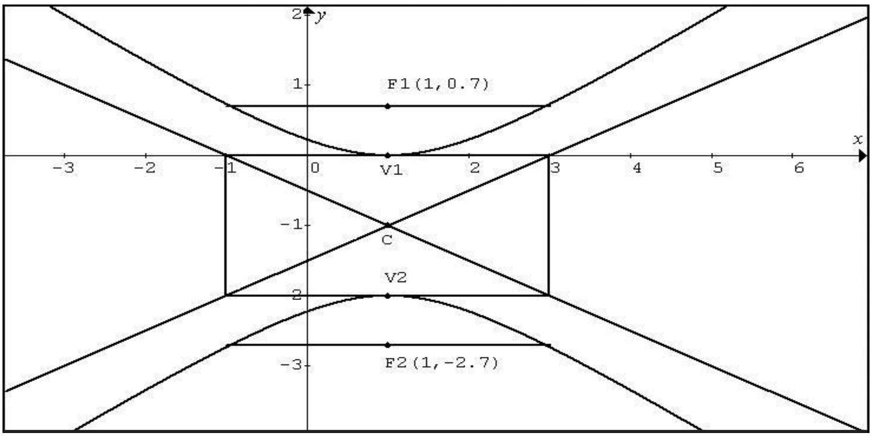
Asíntotas:

$$\frac{(y-k)}{a}+\frac{(x-h)}{b}=0 \;;\; \frac{(y-k)}{a}-\frac{(x-h)}{b}=0$$

$$\frac{y+1}{1}+\frac{x-1}{2}=0 \quad ; \quad \frac{y+1}{1}-\frac{x-1}{2}=0$$

$$x+2y+1=0 \quad ; \quad x-2y-3=0$$

Figura 1.76 Hipérbola $x^2+1-2y^2=2(x+2y)$



c) $5x^2-y=x-5$

Solución. Trasponiendo términos, sacando factor común y completando trinomios, tenemos:

$$5x^2-x=y-5$$

$$5\left(x^2-\frac{1}{5}x+\frac{1}{100}\right)=y-5+\frac{1}{20}$$

$$5\left(x-\frac{1}{10}\right)^2=y-\frac{99}{20}$$

$$\left(x-\frac{1}{10}\right)^2=\frac{1}{5}\left(y-\frac{99}{20}\right)$$

De aquí se observa que el vértice es $V\left(\frac{1}{10},\frac{99}{20}\right)$, también que:

$$4P=\frac{1}{5}$$

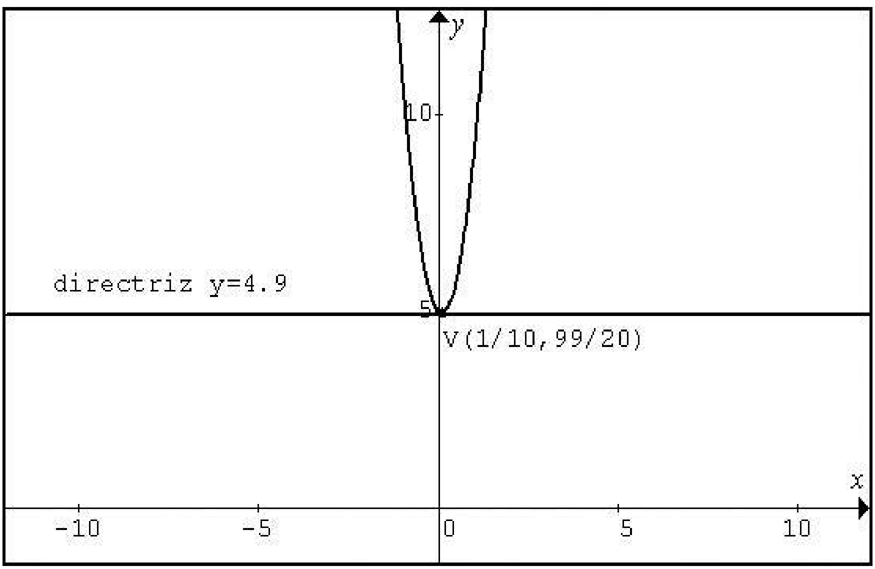
$$P=\frac{1}{20}$$

Luego la coordenada del foco es $F\left(\frac{1}{10},5\right)$

La ecuación de la directriz es $y=\frac{49}{10}$

Longitud del lado recto $L.R.=|4P|$ se convierte en $L.R=\frac{1}{5}$

Figura 1.77 Parábola $5x^2-y=x-5$



6. Determine la cónica y sus parámetros característicos, si su ecuación es:

$$9x^2+4y^2+72x-16y+124=0$$

a) Hipérbola $C(-1,2)$; $a=\sqrt{3}$; $b=2$; $c=\sqrt{7}$

b) Circunferencia $C(-1,2)$; $r=1$

c) Parábola $V(-2,2)$; $P=\frac{5}{4}$; $L_D : x=-2-\frac{5}{4}$; $F(-2+\frac{5}{4},2)$

d) Elipse $C(-4,2)$; $a=3$; $b=2$; $c=\sqrt{5}$

e) Ninguna de las anteriores.

Solución. Reordenando los términos, despejando el término independiente y factorizando, se tiene:

$$9(x^2+8x)+4(y^2-4y)=-124$$

Completando trinomios y equilibrando la ecuación:

$$9(x^2+8x+16)+4(y^2-4y+4)=-124+144+16$$

$$9(x+4)^2+4(y-2)^2=36$$

$$\frac{(x+4)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$$

Según esta ecuación se tiene que:

$$a=\sqrt{9}=3$$

$$b=\sqrt{4}=2$$

$$c^2=a^2-b^2$$

$$c^2=9-4$$

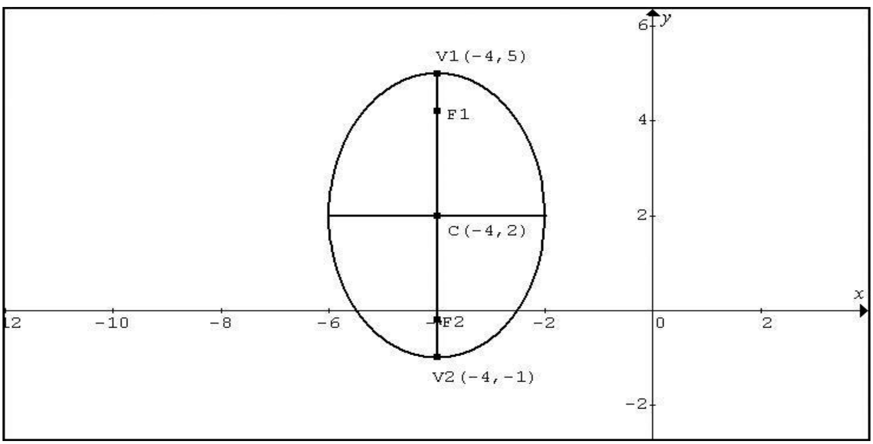
$$c=\sqrt{5}$$

De aquí se concluye que:

- Coordenadas del centro: $C(-4,2)$
- Coordenadas de los vértices: $v_1(-4,5)$ y $v_2(-4,-1)$
- Coordenadas de los focos: $f_1(-4,2+\sqrt{5})$ y $f_2(-4,2-\sqrt{5})$
- Excentricidad: $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$
- Longitud del eje mayor: $2a=6$
- Longitud del eje menor: $2b=4$
- Longitud del lado recto: $LLR=\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2(4)}{3}=\dfrac{8}{3}$

ELIPSE (d).

Figura 1.78 Elipse $9x^2+4y^2+72x-16y+124=0$



7. Determine la cónica y sus parámetros característicos, si su ecuación es:

$$y^2-5x-4y-6=0$$

a) Hipérbola $C(-1,2)$; $a=\sqrt{3}$; $b=2$; $c=\sqrt{7}$

b) Circunferencia $C(1,-2)$; $r=1$

c) Parábola $V(-2,2)$; $P=\frac{5}{4}$; $L_D: x=-2-\frac{5}{4}$; $F(-2+\frac{5}{4},2)$

d) Elipse $C(-4,2)$; $a=3$; $b=2$; $c=\sqrt{5}$

e) Ninguna de las anteriores.

Solución. Pasando la expresión $-5x-6$ al segundo miembro, completamos trinomios cuadrados y equilibrando la ecuación tenemos:

$$y^2-4y+4=5x+6+4$$

$$(y-2)^2=5x+10$$

$$(y-2)^2=5(x+2)$$

De esta ecuación se observa que el vértice es $V(-2,2)$
También se tiene que:

$$4P=5$$

$$P=\frac{5}{4}$$

Luego las coordenadas del foco son: $F(h+P,k)$, $F\left(-\frac{3}{4},2\right)$

La ecuación de la directriz es:

$$x=h-P$$

$$x=-2-\frac{5}{4}$$

$$x=-\frac{13}{4}$$

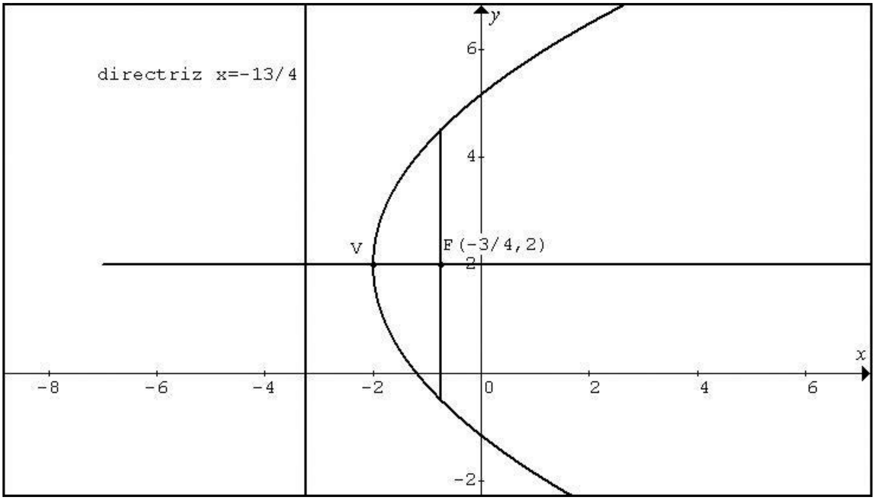
Longitud del lado recto es:

$$L.R=|4P|$$

$$L.R=5$$

PARÁBOLA (c).

Figura 1.79 Parábola $y^2 - 5x - 4y - 6 = 0$



8. Determine la cónica y sus parámetros característicos, si su ecuación es:

$$3x^2 + 3y^2 - 6x + 12y + 6 = 0$$

a) Hipérbola $C(-1,2)$; $a = \sqrt{3}$; $b = 2$; $c = \sqrt{7}$

b) Circunferencia $C(-1,2)$; $r = 1$

c) Parábola $V(-2,2)$; $P = \frac{5}{4}$; $L_D : x = -2 - \frac{5}{4}$; $F\left(-2 + \frac{5}{4}, 2\right)$

d) Elipse $C(-4,2)$; $a = 3$; $b = 2$; $c = \sqrt{5}$

e) Ninguna de las anteriores.

Solución. Pasando el término independiente al segundo miembro y dividiendo toda la ecuación para 3 tenemos:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = -2$$

Luego reordenando los términos, completando trinomios y equilibrando la ecuación tenemos:

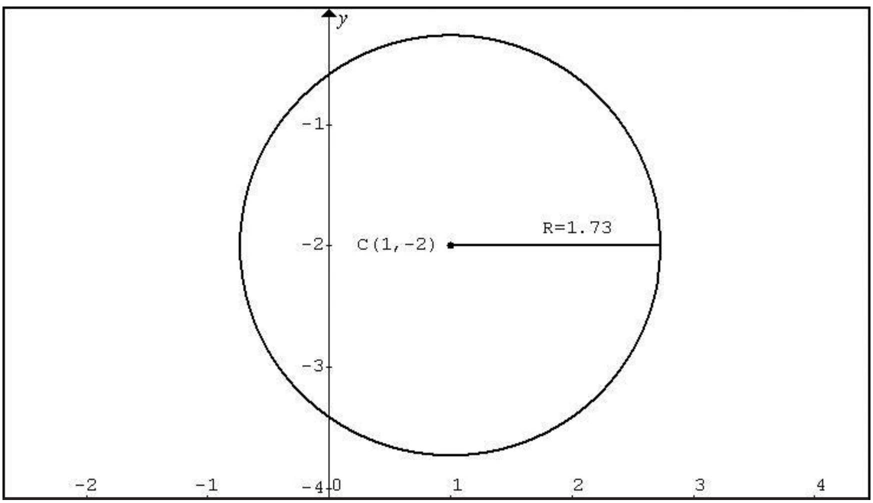
$$\left(x^2 - 2x + 1\right) + \left(y^2 + 4y + 4\right) = -2 + 1 + 4$$
$$\left(x - 1\right)^2 + \left(y + 2\right)^2 = 3$$

Como ya obtuvimos la ecuación solicitada se puede observar que su centro y su radio son:

$$Centro : C(1,-2) \quad \text{y} \quad r = \sqrt{3}$$

NINGUNA DE LAS ANTERIORES (e).

Figura 1.80 Circunferencia 3*x*²+ 3*y*² -6*x*+12y+6 = 0



9. Determine la cónica y sus parámetros característicos, si su ecuación es:

$$4x^2 - 3y^2 + 8x + 12y - 20 = 0$$

a) Hipérbola $C(-1,2)$; $a=\sqrt{3}$; $b=2$; $c=\sqrt{7}$

b) Circunferencia $C(1,-2)$; $r=1$

c) Parábola $V(-2,2)$; $P=\frac{5}{4}$; $L_D : x=-2-\frac{5}{4}$; $F(-2+\frac{5}{4},2)$

d) Elipse $C(-4,2)$; $a=3$; $b=2$; $c=\sqrt{5}$

e) Ninguna de las anteriores.

1.*Solución*. Reordenando términos, agrupando, completando trinomio y factorizando se tiene:

$$4\left(x^2+2x\right)-3\left(y^2-4y\right)=20$$
$$4\left(x^2+2x+1\right)-3\left(y^2-4y+4\right)=20+4-12$$
$$4(x+1)^2-3(y-2)^2=12$$
$$\frac{(x+1)^2}{3}-\frac{(y-2)^2}{4}=1$$

De acuerdo con esta ecuación se tiene que:

$$a=\sqrt{3}$$
$$b=\sqrt{4}=2$$
$$c^2=a^2+b^2$$
$$c^2=3+4$$
$$c=\sqrt{7}$$

De aquí se concluye que:

- Coordenadas del centro: $C(-1,2)$
- Coordenadas de los vértices: $v_1(-1+\sqrt{3},2)$ y $v_2(-1-\sqrt{3},2)$
- Coordenadas de los focos: $f_1(-1+\sqrt{7},2)$ y $f_2(-1-\sqrt{7},2)$

- Excentricidad: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$
- Longitud del eje transverso: $2a = 2\sqrt{3}$
- Longitud del eje conjugado: $2b = 4$
- Longitud del lado recto: $LLR = \dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{2(4)}{\sqrt{3}} = \dfrac{8}{\sqrt{3}}$
- Asíntotas:

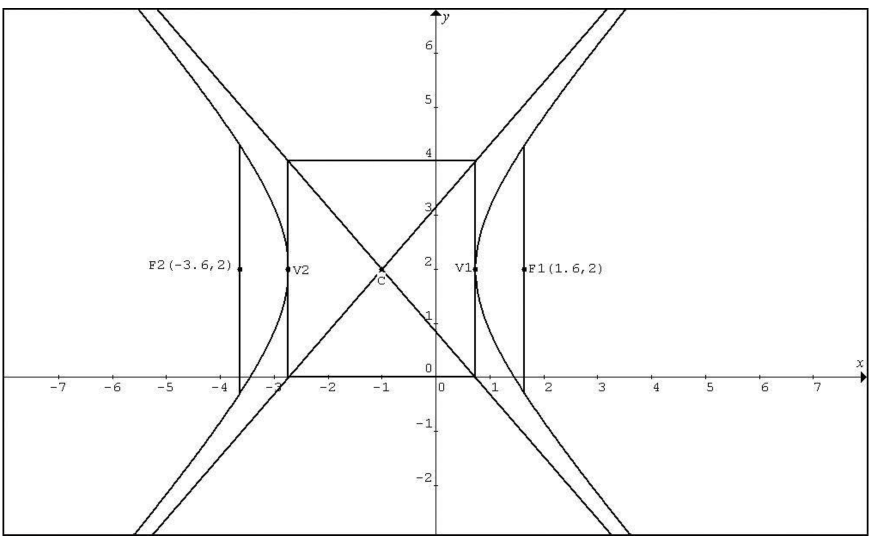
$$\frac{(x-h)}{a} + \frac{(y-k)}{b} = 0 \;;\; \frac{(x-h)}{a} - \frac{(y-k)}{b} = 0$$

$$\frac{x+1}{\sqrt{3}} + \frac{y-2}{2} = 0 \;;\; \frac{x+1}{\sqrt{3}} - \frac{y-2}{2} = 0$$

$$2x + \sqrt{3}y - 1.46 = 0 \;;\; 2x - \sqrt{3}y + 5.46 = 0$$

HIPÉRBOLA (a).

Figura 1.81 Hipérbola $4x^2$-$3y^2$+$8x$+$12y$ = *0*



Capítulo 2

Funciones de una variable real

Funciones de una variable real

Antes de empezar a definir lo que es una función es necesario comprender primero lo que es una regla de correspondencia.

Una regla de correspondencia es una expresión que indica cómo están relacionadas dos o más variables.

Ejemplos:

a. $y = x + 5$

b. $y = 2x^3 + 7x^2 - 12x + 5$

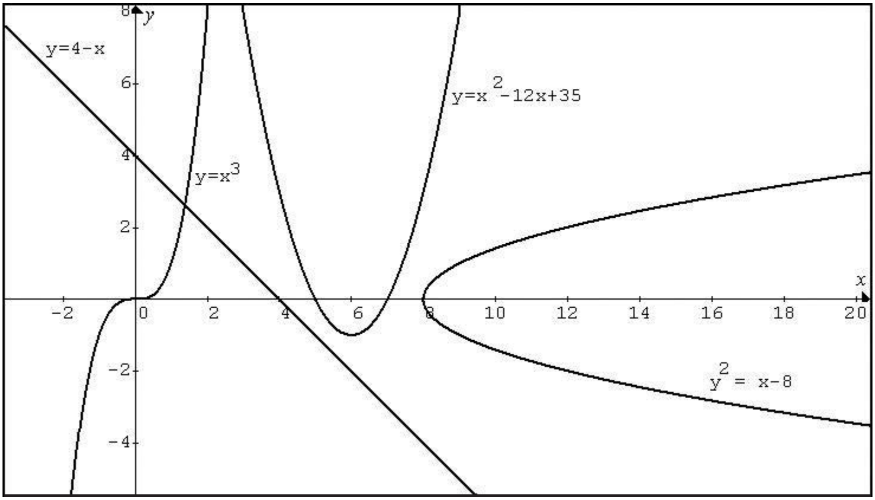
c. $\lim_{x \to a} f(x) = L$

d. $z = 3t - 8$

e. $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$

Se conoce también que cada regla de correspondencia puede expresarse gráficamente como por ejemplo, en el plano cartesiano:

Figura 2.1 Reglas de correspondencia

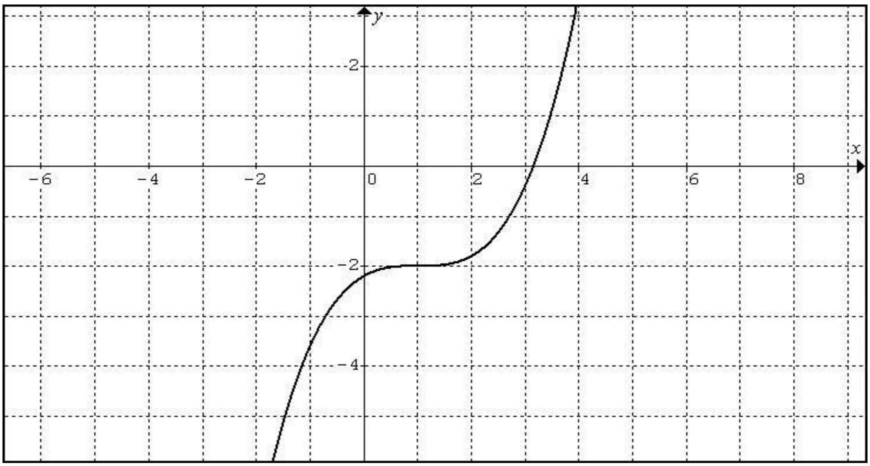


Nótese que en este tipo de gráfico (de dos dimensiones) es necesario el uso de dos variables, una de ellas debe servir como variable independiente (x) y la otra como variable dependiente (y). Por lo que para hacer un gráfico en el plano se debe evaluar, por ejemplo, un valor determinado de x para obtener su respectivo valor de y. Así es como se puede elaborar una tabla de pares ordenados, como la mostrada en la tabla 2.1:

Tabla 2.1 Tabla de pares ordenados de una relación

x	y
–3,0	–14,8
–2,0	–7,4
–1,0	–3,6
0	–2,2
1,0	–2,0
2,0	–1,8
3,0	–0,4
4,0	3,4

Figura 2.2 Gráfico de los pares ordenados de la tabla 2.1

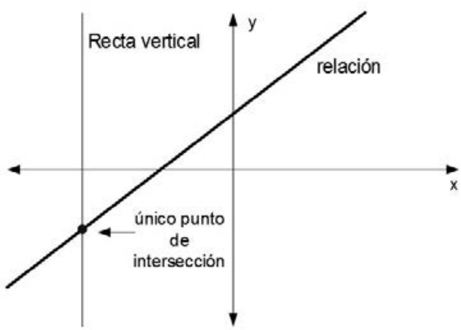


Sin embargo, debe entenderse que **no toda relación es función.**

Se tiene una **función** entre dos variables *x* y *y* (variable independiente y dependiente, respectivamente) cuando **para cada valor de *x* existe un único valor de *y*.**

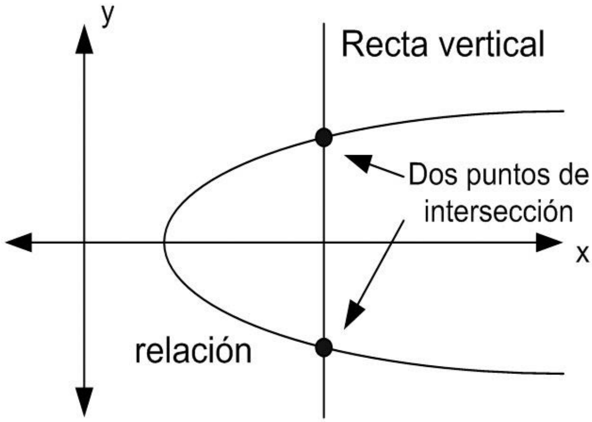
Se puede determinar, gráficamente, que una relación es función con solo trazar una recta vertical infinita en cualquier extensión del dominio de la función; así pues, si una relación es función, dicha recta vertical deberá intersectar tan solo en un punto al gráfico.

Figura 2.3 Prueba de la recta vertical. Función.



Caso contrario, si la recta vertical trazada intersecta en dos puntos al gráfico, entonces dicha relación no será función.

Figura 2.4 Prueba de la recta vertical. No función.



Cada función puede expresarse según su variable independiente.

Ejemplos:

$f(x)$, que se lee "f es una función de x", o simplemente "f de x"; $g(y)$, $h(v)$, etc.

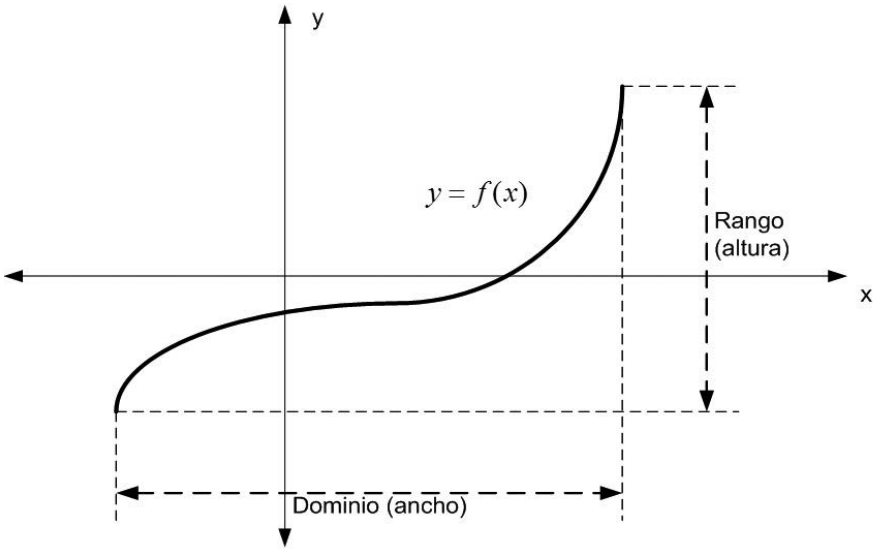
Dominio y rango de una función

Se considera dominio de una función $f(x)$, a todo el conjunto de posibles valores de x para los cuales la función está definida, es decir, para aquellos valores en que la función existe y que pueden ser evaluados en la función. En la figura 2.5 se asignaría al dominio de una función como el ancho (horizontal) de la misma.

El **rango** de una función $f(x)$ son **todos los posibles valores que resultan de una función** una vez evaluados todos los elementos del dominio (es decir de x). En la figura 2.5 se asignaría al rango de una función como el intervalo de altura de dicho gráfico.

- **Recuerde: Dominio en el eje x y rango en el eje y.**

Figura 2.5 Dominio y rango de una función



No necesariamente la función debe ser continua, ya que se pueden tener funciones con dominio compartido, es decir, con reglas de correspondencia múltiples. Más adelante en el texto se analizarán este tipo de funciones.

Clasificación de funciones

Una función según la naturaleza de cómo están relacionadas sus variables se clasifica en:

INYECTIVA: cuando sus variables se relacionan **de uno a uno**; es decir, cuando a un elemento del dominio le corresponde un único elemento del rango y, así mismo, cuando un elemento del rango le corresponde un solo elemento del dominio. Gráficamente se puede determinar que una función es inyectiva cuando al trazar una recta horizontal, esta deberá intersectar a la función en tan solo un punto.

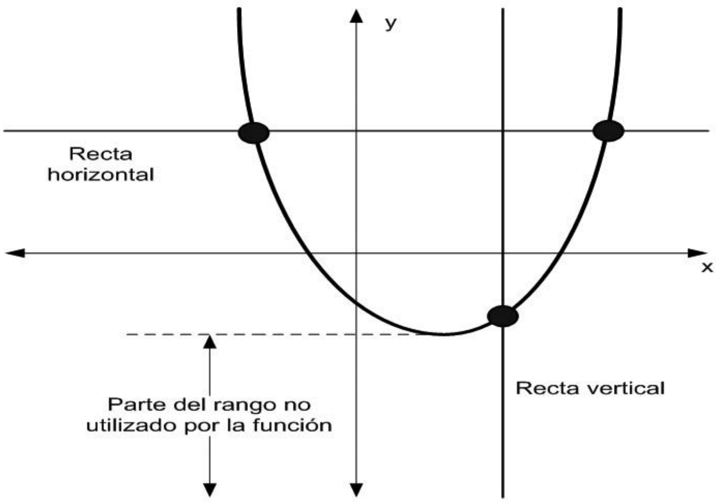
SOBREYECTIVA: cuando todos los elementos del rango están siendo correspondidos por elementos del dominio; es decir, no deben quedar elementos del rango sin corresponderse (sobrantes).

BIYECTIVA: cuando es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

No es necesario que una función sea inyectiva o sobreyectiva; de hecho, hay funciones que no cumplen característica alguna.

Observe la siguiente figura 2.6:

Figura 2.6 Prueba de la recta horizontal para determinar si la función es inyectiva.



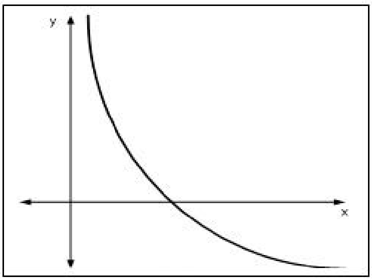
De la figura 2.6 se puede decir que:

- Por la prueba de la recta vertical, esta relación ***es función***.
- Por la prueba de la recta horizontal, esta función **no es inyectiva**, dado que intersecta dos puntos.
- La función existe en todo su dominio, pero no en todo su rango (hay una región en el eje vertical que no está siendo ocupada por la función), se concluye entonces que es una función **no sobreyectiva**.

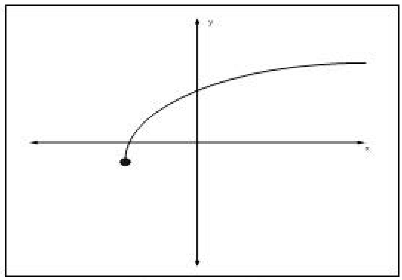
- Al no cumplirse inyectividad ni sobreyectividad, se tiene entonces que es una función **no biyectiva**.

Demás ejemplos:

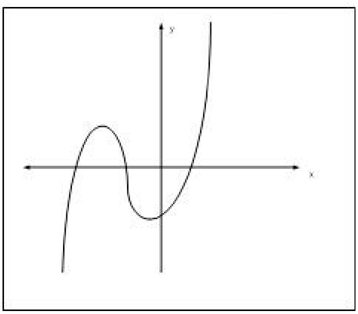
Figura 2.7 Análisis de inyectividad, sobreyectividad y biyectividad de una función



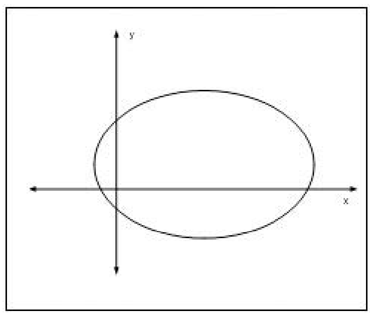
Es inyectiva
Es sobreyectiva
Es biyectiva



Es inyectiva
No es sobreyectiva
No es biyectiva



No es inyectiva
Es sobreyectiva
No es biyectiva

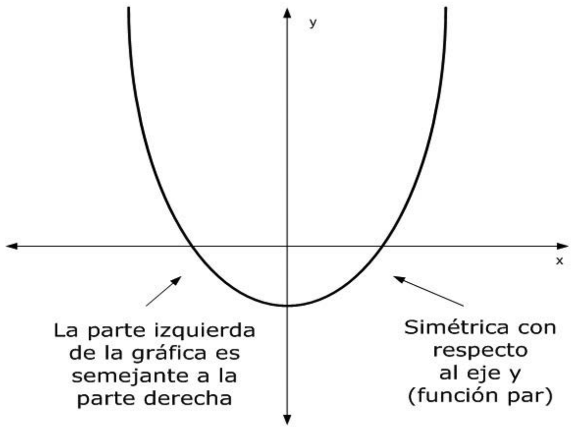


No es función

Así pues, para definir una función es necesario analizar su comportamiento (trayectoria) en todo su dominio.

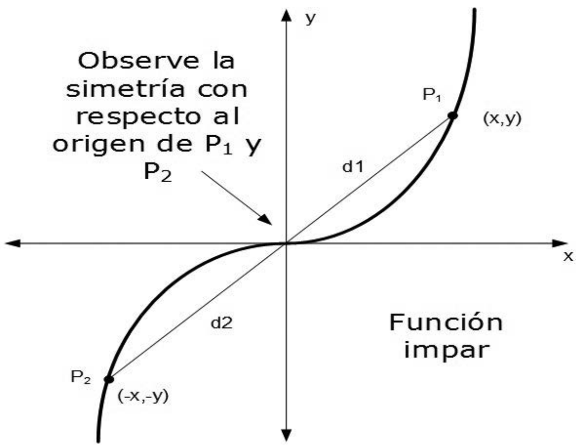
Para indicar el hecho de que **una función es par** se debe observar su **simetría con el eje** y.

Figura 2.8 Función par



Así mismo, para indicar el hecho de que una función es impar se debe observar su simetría con el origen.

Figura 2.8 Función impar



También, algebraicamente se puede determinar si una función es par o impar; siguiendo las definiciones:

Función par: $f(x) = f(-x)$

Función impar: $f(-x) = -f(x)$

Ejemplos:

1. Sea la función $f(x) = 3x^2\text{-}4$, determinar si es par, impar o ninguna.

Solución. Para que sea par se necesita que $f(x) = f(-x)$, luego

$$f(x) = f(-x)$$
$$3x^2 - 4 = 3(-x)^2 - 4$$
$$3x^2 - 4 = 3x^2 - 4$$

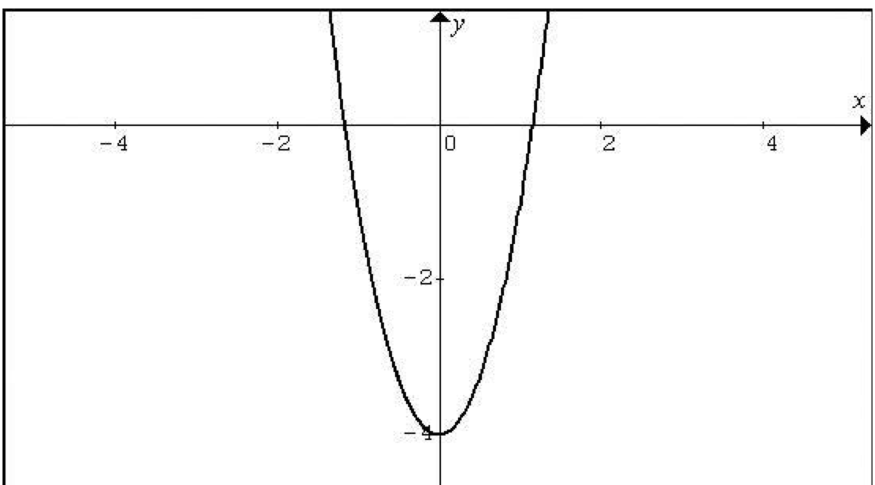
Entonces, la función **es par**.
Para que sea impar se necesita que $f(-x) = -f(x)$, luego

$$f(-x) = -f(x)$$
$$3(-x)^2 - 4 = -\left(3x^2 - 4\right)$$
$$3x^2 - 4 \neq -3x^2 + 4$$

Entonces, la función **no es impar**.

Así graficando la función en la figura 2.9 se observa que es simétrica con respecto al eje y.

Figura 2.9 Gráfico de la función $f(x) = 3x^2$-4



Indicar si la función $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x$ es par, impar o ninguna.

Solución. Para que sea par se necesita que $f(x)=f(-x)$, luego

$$f(x)=f(-x)$$

$$\frac{1}{3}x^3-4x=\frac{1}{3}(-x)^3-4(-x)$$

$$\frac{1}{3}x^3-4x\neq-\frac{1}{3}x^3+4x$$

Entonces, la función **no es par**.
Para que sea impar se necesita que $f(-x)=-f(x)$, luego

$$f(-x)=-f(x)$$

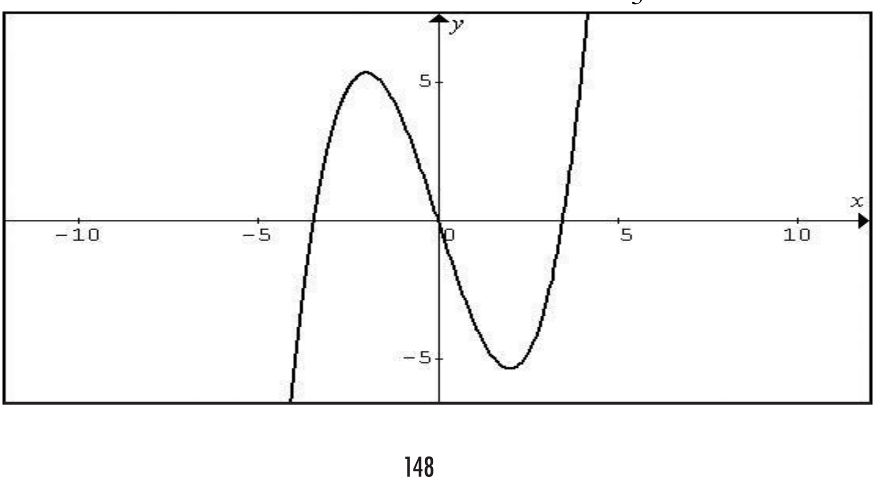
$$\frac{1}{3}(-x)^3-4(-x)=-\left(\frac{1}{3}x^3-4x\right)$$

$$-\frac{1}{3}x^3+4x=-\frac{1}{3}x^3+4x$$

Entonces, la función **es impar.**

Así graficando la función en la figura 2.10 se observa que es simétrica con respecto al origen.

Figura 2.10 Gráfico de la función *f*(*x*) = $\frac{1}{3}x^3-4x$



Indicar si la función $f(x)=2x^3-5x^2+3x-1$; es par, impar o ninguna.

Solución. Para que sea par se necesita que $f(x)=f(-x)$, luego

$$f(x)=f(-x)$$

$$2x^3-5x^2+3x-1=2(-x)^3-5(-x)^2+3(-x)-1$$

$$2x^3-5x^2+3x-1\neq -2x^3-5x^2-3x-1$$

Entonces, la función **no es par**.

Para que sea impar se necesita que $f(-x)=-f(x)$, luego

$$f(-x)=-f(x)$$

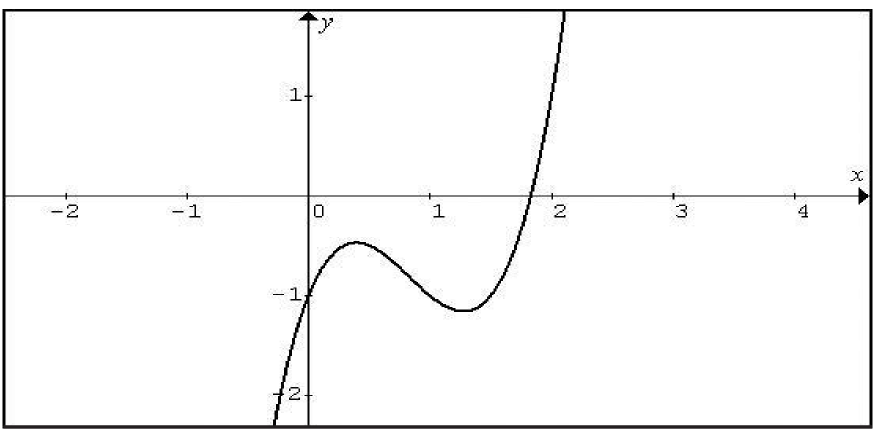
$$2(-x)^3-5(-x)^2+3(-x)-1=-\left(2x^3-5x^2-3x-1\right)$$

$$-2x^3-5x^2-3x-1=-2x^3+5x^2+3x+1$$

Entonces, la función **no es impar**.

Así graficando la función, en la figura 2.11 se observa que no es simétrica con respecto al eje *y* ni con respecto al origen.

Figura 2.11 Gráfico de la función $f(x)=2x^3-5x^2+3x-1$



```
%MATLAB
% FUNCIONES
%1. Sea la función f(x)=3x^2-4, determinar si es par,
impar o ninguna.
%2. Indicar si la función f(x)=(x^3)/3 - 4x ; es par,
impar o ninguna.
%3 Indicar si la función f(x)=2x^3-5x^2+3x-1; es par,
impar o ninguna.
clc
clf
%función
x=-15:0.1:15;
y1=3*x.^2-4;
y2=x.^3/3-4*x;
y3=2*x.^3-5*x.^2+3*x-1;
%gráfica 1
subplot(1,3,1); plot(x,y1)
hold on
eje=-15:1:15;
ceros=zeros(1,31);
plot(eje,ceros,'r+-')
plot(ceros,eje,'r+-')
grid on
grid minor
axis([-5 5 -5 5])
axis square
%gráfica 2
subplot(1,3,2); plot(x,y2)
hold on
eje=-15:1:15;
ceros=zeros(1,31);
plot(eje,ceros,'r+-')
plot(ceros,eje,'r+-')
grid on
grid minor
axis([-5 5 -5 5])
axis square
%gráfica 3
subplot(1,3,3); plot(x,y3)
hold on
```

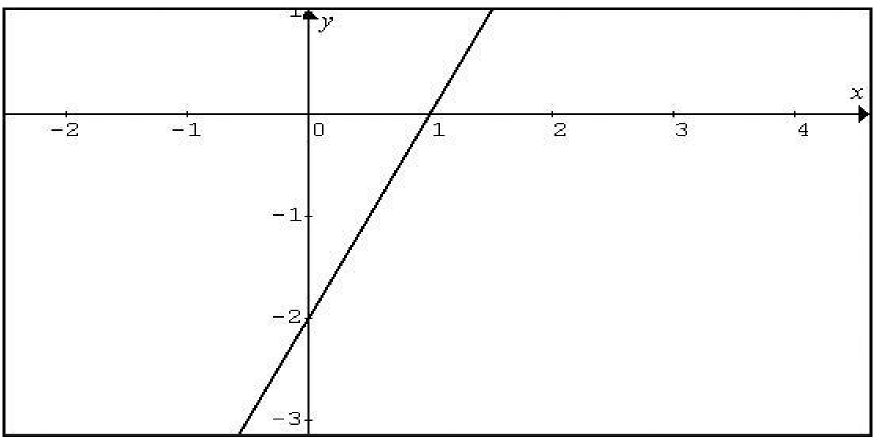
```
eje=-15:1:15;
ceros=zeros(1,31);
plot(eje,ceros,'r+-')
plot(ceros,eje,'r+-')
grid on
grid minor
axis([-5 5 -5 5])
axis square
```

Podemos indicar también la monotonía de una función; es decir, si es creciente o decreciente en algún intervalo de su dominio, como se detalla a continuación:

$$si \qquad x_2 > x_1 \qquad y \qquad f(x_2) > f(x_1) \qquad \rightarrow \qquad creciente$$
$$si \qquad x_2 > x_1 \qquad y \qquad f(x_2) < f(x_1) \qquad \rightarrow \qquad decreciente$$

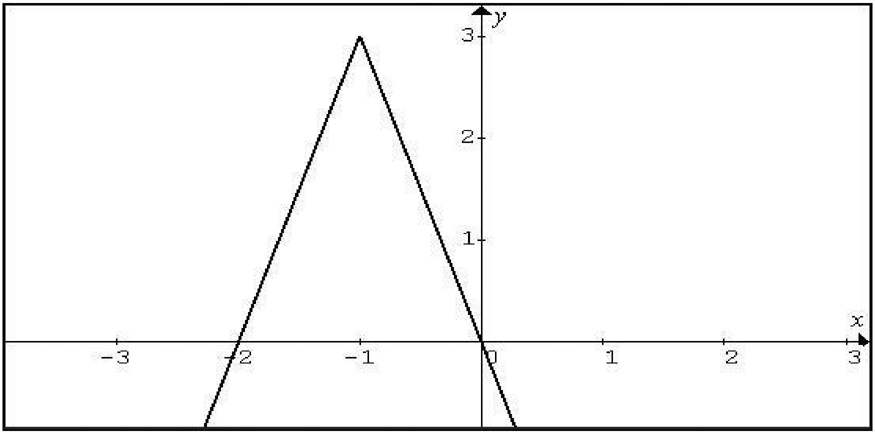
Cuando el gráfico de una función es una línea recta, **el valor de su pendiente** (valor intrínseco de la recta que indica su inclinación) nos proporciona el valor de **crecimiento** o **decrecimiento** de la misma.

Figura 2.12 Función creciente en todo $\Re$



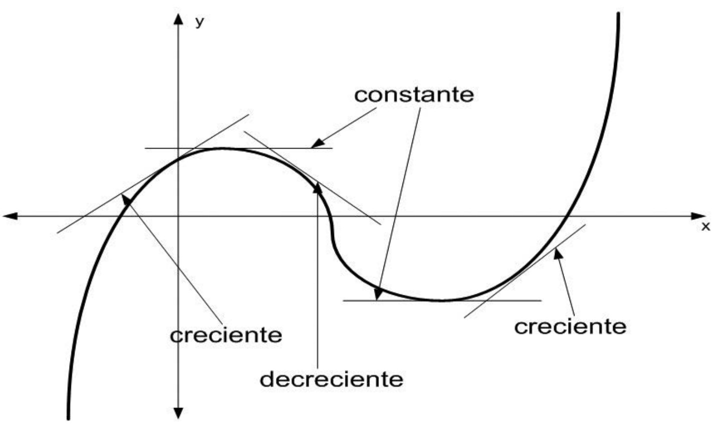
También se puede determinar que una función crece o decrece mediante la **simple observación del gráfico** (trayectoria de la función).

Figura 2.13 Creciente en (-∞, –1) y decreciente en (–1, ∞)



Cuando se necesita analizar el crecimiento o decrecimiento en una función cuya gráfica es una curva, **se debe trazar una recta tangente a la curva** en el punto en donde se desea conocer su monotonía.

Figura 2.14 Análisis de crecimiento o decrecimiento de una función a través de rectas tangentes



Obsérvese en la figura 2.14 que cuando la recta tangente creada en la curva es horizontal, se tiene entonces que la función en ese punto es constante; es decir, no crece ni decrece. Así también una función no puede ser creciente y decreciente a la vez.

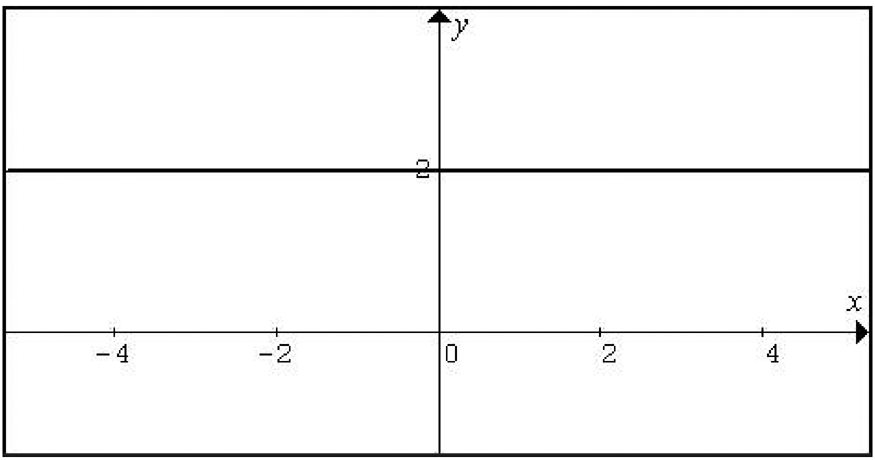
Tipos de funciones

CONSTANTE: De la forma $f(x) = a$

Línea recta horizontal infinita. El valor a puede ser cualquier número real.

Ejemplo:

Figura 2.15 Gráfico de la función $f(x) = 2$

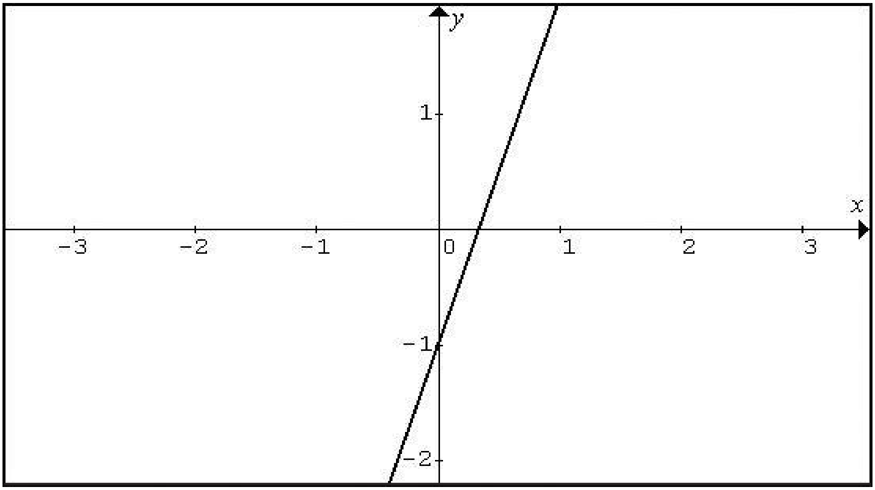


LINEAL: De la forma $f(x) = mx + b$

- Línea recta. El valor m se conoce como pendiente de la recta (precisamente es quien produce la inclinación). El coeficiente b puede ser cualquier valor real.

Ejemplo:

Figura 2.16 Gráfico de la función $f(x) = 3x-1$



CUADRÁTICA: De la forma $f(x)=ax^2+bx+c$

- Línea curva llamada parábola. El coeficiente *a* debe ser cualquier valor real diferente de cero.

Ejemplo:

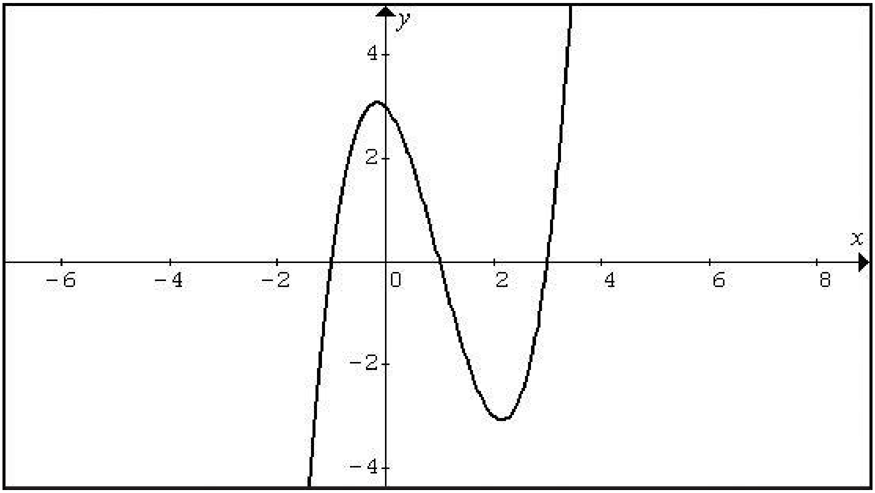
Figura 2.17 Gráfico de la función $f(x)=2x^2-8x+7$

CÚBICA: De la forma $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

- Línea curva. El coeficiente *a* puede ser cualquier valor real diferente de cero.

Ejemplo:

Figura 2.18 Gráfico de la función $f(x)=x^3-3x^2-x+3$

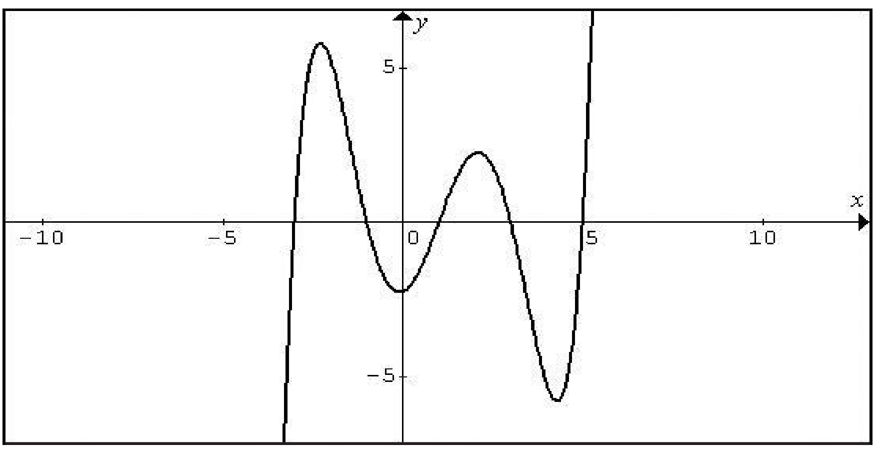


POLINÓMICA: De la forma $f(x)=a_1x^n+a_2x^{n-1}+a_3x^{n-2}......+a_{n-1}x+a_n$

- Línea curva, por lo general con varios puntos máximos y mínimos.

Ejemplo:

Figura 2.19 Gráfico de la función $f(x)=0.05x^5-0.25x^4-0.5x^3+2.5x^2+0.45x-2.25$



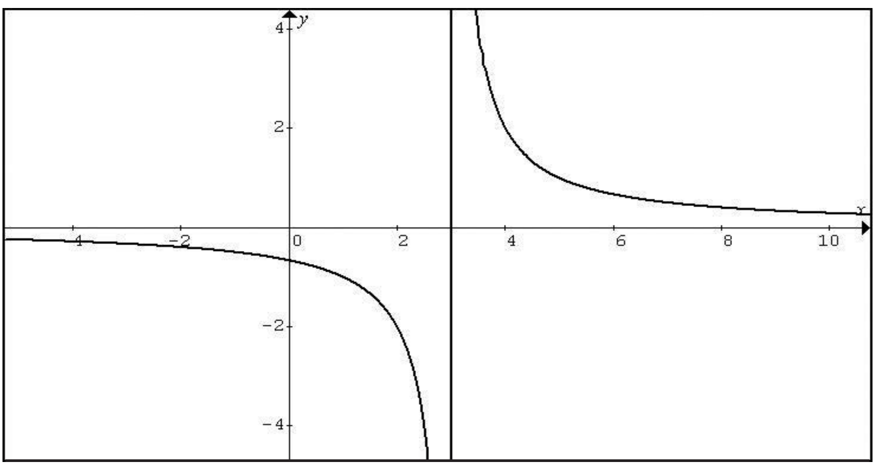
```
%MATLAB
% FUNCIONES CONSTANTE, LINEAL, CUADRÁTICA Y CÚBICA
clc
clf
%función
x=-15:0.1:15;
y1=2*ones(length(x));
y2=3*x-1;
y3=2*x.^2-8*x+7;
y4=x.^3-3*x.^2-x+3;
%gráfica 1
subplot(2,2,1); plot(x,y1,'b-')
hold on
eje=-15:1:15;
ceros=zeros(1,31);
plot(eje,ceros,'r+-')
plot(ceros,eje,'r+-')
grid on
grid minor
axis([-5 5 -5 5])
axis square
%gráfica 2
subplot(2,2,2); plot(x,y2)
hold on
eje=-15:1:15;
ceros=zeros(1,31);
plot(eje,ceros,'r+-')
plot(ceros,eje,'r+-')
grid on
grid minor
axis([-5 5 -5 5])
axis square
%gráfica 3
subplot(2,2,3); plot(x,y3)
hold on
eje=-15:1:15;
ceros=zeros(1,31);
plot(eje,ceros,'r+-')
plot(ceros,eje,'r+-')
grid on
grid minor
```

```
axis([-5 5 -5 5])
axis square
%gráfica 4
subplot(2,2,4); plot(x,y4)
hold on
eje=-15:1:15;
ceros=zeros(1,31);
plot(eje,ceros,'r+-')
plot(ceros,eje,'r+-')
grid on
grid minor
axis([-5 5 -5 5])
axis square
```

Existen muchos otros tipos de funciones a definir: racional (fracción), radical (raíces cuadradas, cúbicas, etc.), trigonométricas, logarítmicas, exponenciales, con valor absoluto, etc. De todas ellas según su naturaleza se espera la destreza del estudiante para poder graficarlas ya sea por su conocimiento básico a papel y lápiz (utilizando tabla de datos), o mediante el uso de algún *software* graficador como por ejemplo Matlab. En el presente texto se las graficará como parte de varios ejercicios resueltos.

Ejemplo:

Figura 2.20 Gráfico de la función $f(x)=\dfrac{2}{x-3}$



Observe que se trata de una gráfica doble y que posee una asíntota en x = 3

Análisis básico de la función cuadrática

En la sección anterior se definió a la función cuadrática como una expresión de la forma $f(x)=ax^2+bx+c$; $a,b,c\in\Re,\ a\neq 0$, y los coeficientes de cada término son valores reales. Recuerde que esta función produce un gráfico conocido como parábola.

Procedimiento para graficar una función cuadrática

1. Utilizando el vértice y los cortes con los ejes:

Trabajemos con un ejemplo.

Sea $f(x)=x^2+4x+2$. Graficar la función.

Solución. Por la forma de la función se tiene que $\begin{cases} a=1 \\ b=4 \\ c=2 \end{cases}$

Primero hallamos las coordenadas del vértice (x,y) de la parábola, donde por definición: $x=-\dfrac{b}{2a}$, entonces:

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{4}{2(1)}=-2$$

Este valor de *x* lo reemplazamos en la función para obtener el valor de *y*:

$$y=f(-2)=(-2)^2+4(-2)+2 \qquad \rightarrow \qquad y=4-8+2=-2$$

Con esto, el vértice de la parábola es el punto -2,-2.

Luego procedemos a hallar las intersecciones con los ejes:

Intersecciones con el eje x. Usamos la fórmula general para resolver una ecuación de segundo grado:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-4\pm\sqrt{(4)^2-4(1)(2)}}{2(1)}=\frac{-4\pm\sqrt{8}}{2}=-2\pm\sqrt{2}$$

Así pues, las intersecciones son $x_1=-2-\sqrt{2}\cong-3.41$ y $x_2=-2+\sqrt{2}\cong-0.59$

Cabe recalcar aquí que la expresión b^2-4ac se lo conoce como **discriminante**; esto es que, si esta expresión es igual a cero, entonces la gráfica tiene un solo punto de intersección con el eje x; si resulta un valor positivo, la gráfica tiene dos puntos de intersección con el eje ; y si resulta un valor negativo, se concluye que la gráfica no posee intersecciones con el eje x, ya que está encerrada en una raíz cuadrada y para valores negativos no existe raíz cuadrada real.

$b^2-4ac > 0 \rightarrow$ dos puntos de intersección (dos raíces reales)

$b^2-4ac < 0 \rightarrow$ no hay intersección (no hay raíces reales)

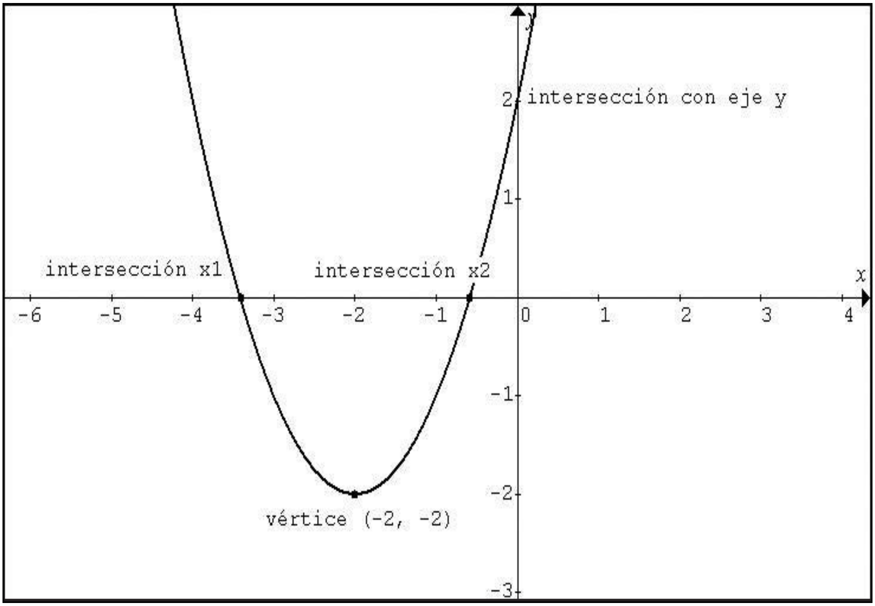
$b^2-4ac = 0 \rightarrow$ un solo punto de intersección (una sola raíz)

- Intersecciones con el eje y. Será el punto (0,c). Es decir, reemplazando en la variable x el valor de cero, se obtiene el valor de la intersección c con el eje de las y. Así:

$$y=c=f(0)=2$$

Con esto podemos bosquejar el gráfico de la función como sigue:

Figura 2.21 Gráfico de la función $f(x) = x^2+4x+2$



Algo importante a tener en consideración para bosquejar una parábola se trata del valor de *a*, así si $a > 0$ la parábola se abre hacia arriba, y si $a < 0$ para abajo. En el ejemplo $a = 1$

2. Utilizando desplazamiento de gráficos

Trabajemos con los siguientes ejemplos:

a. Sea $f(x) = -(x-3)^2 + 2$. Graficar dicha función.

Solución. Reconociendo la función por el exponente, sabemos que se trata de una función cuadrática.

Para empezar, la forma más básica de una función cuadrática es $f(x) = x^2$, de aquí, debemos observar detenidamente los siguientes gráficos, tomando en cuenta las modificaciones (desplazamientos horizontales y verticales, inversiones, etc.) que va sufriendo hasta llegar a la función que se desea graficar.

Figura 2.22 Gráfico de la función $f(x) = x^2$

Desplazándolo tres unidades a la derecha en la figura 2.22, tenemos:

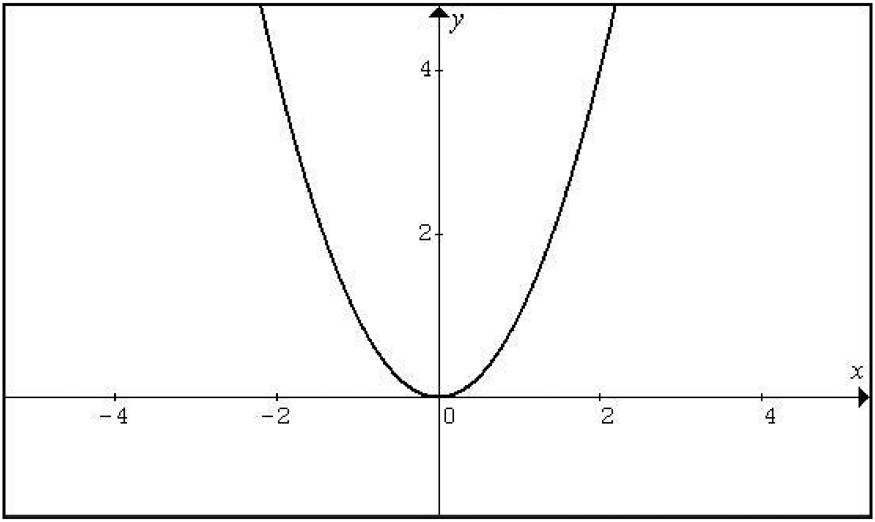


Figura 2.23 Gráfico de la función $f(x)$ = (x-3)²

Invirtiendo o rotando la figura 2.23 con respecto al eje x para anteponer el signo negativo, tenemos:

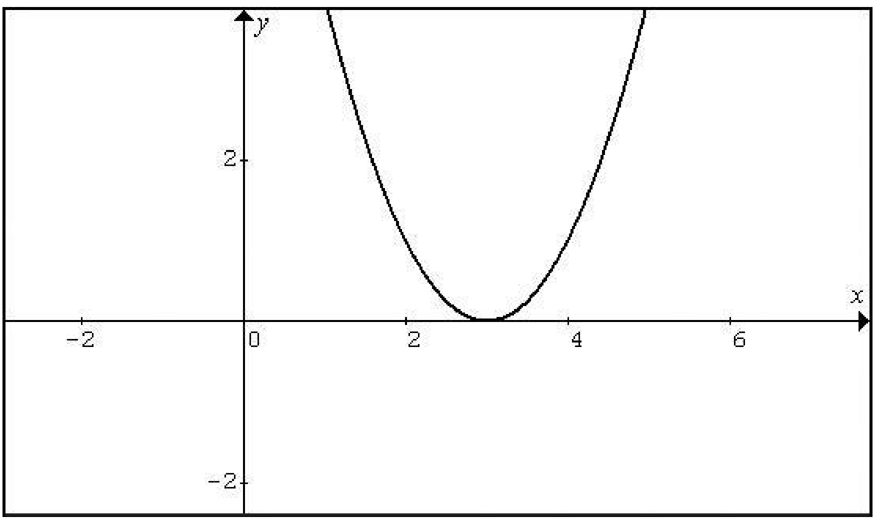
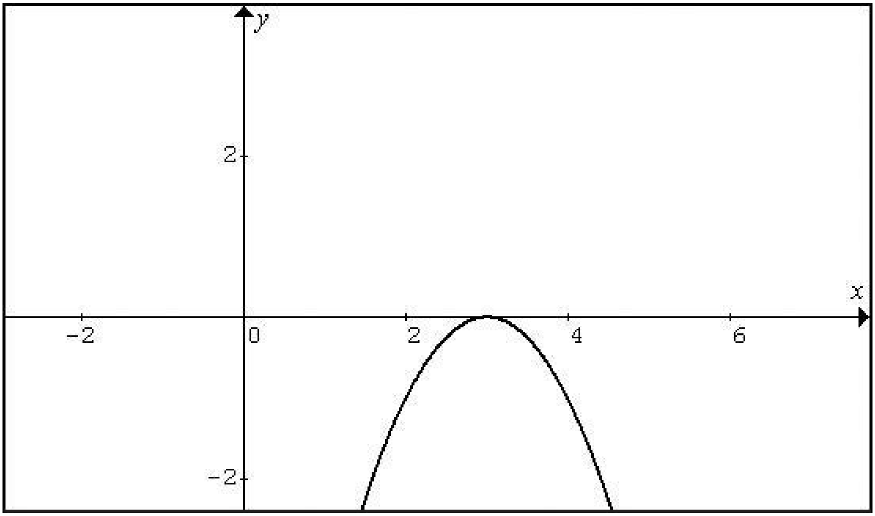
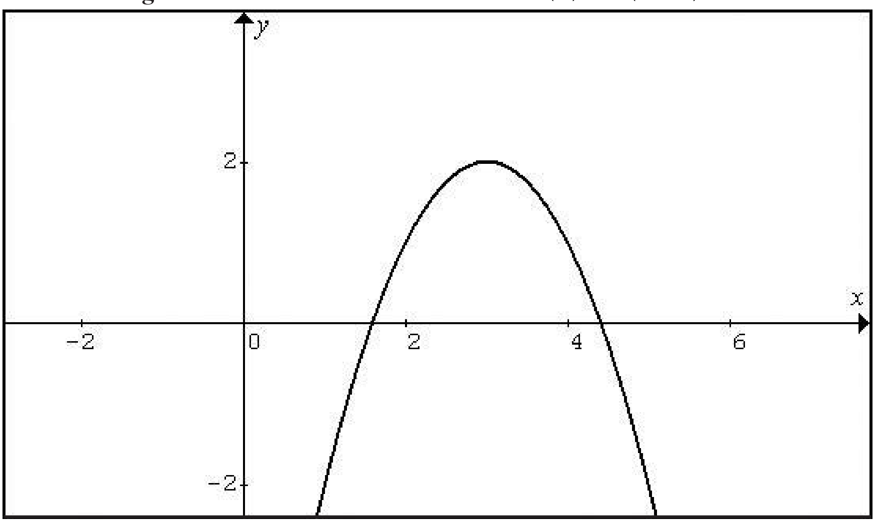


Figura 2.24 Gráfico de la función $f(x) = -(x-3)^2$



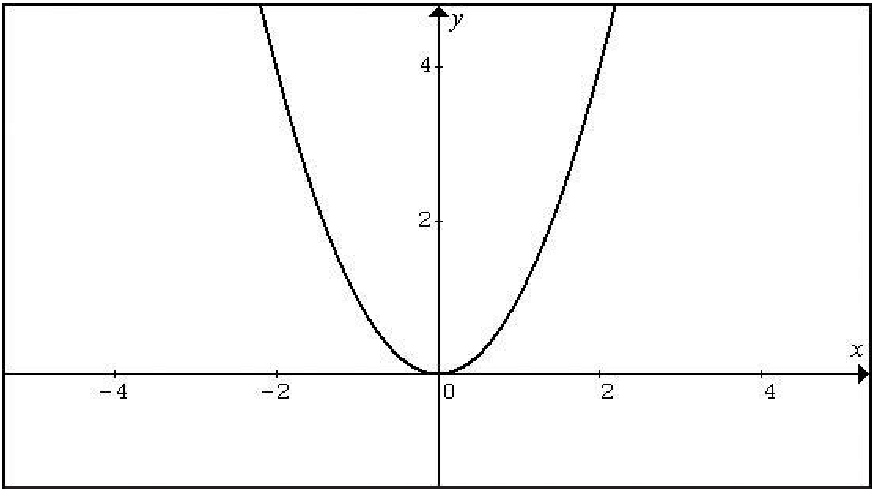
Por último, moviéndolo dos unidades hacia arriba la figura 2.24, tenemos:

Figura 2.25 Gráfico de la función $f(x) = -(x-3)^2 + 2$



b. Graficar la función $f(x)=(2x^2+4x)-1$.

Solución. Antes de empezar a mover los gráficos, primero es conveniente expresar la función, de modo que podamos reconocer los valores de su desplazamiento.



- Agrupando los dos primeros términos y sacando factor común.

$$f(x)=(2x^2+4x)-1$$

$$f(x)=2(x^2+2x)-1$$

- Completando el trinomio dentro del paréntesis, esto es, utilizando el coeficiente del segundo término (en este caso es el número 2), luego, dividiéndolo para 2 y este resultado elevándolo al cuadrado (obtenemos 1).

$$f(x)=2(x^2+2x+1)-1-2$$

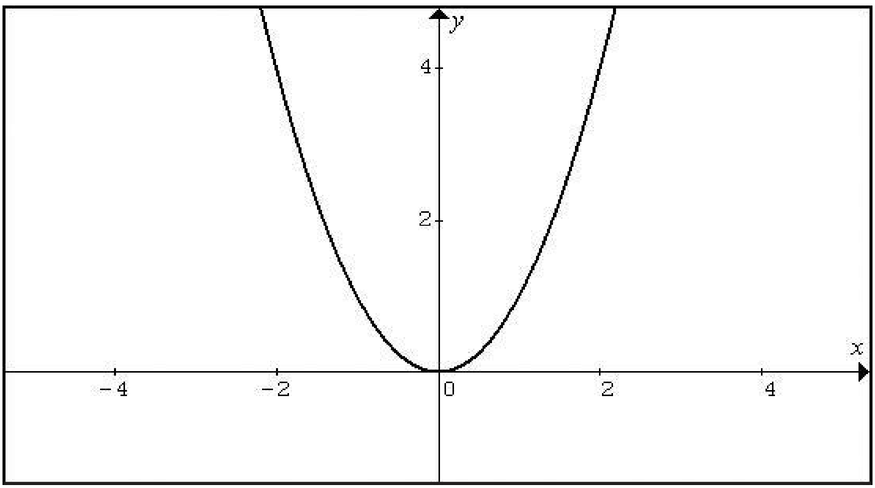
Observe que además de completar el trinomio, se debe también equilibrar la expresión restando el mismo número que se adicionó (nótese que al completar el trinomio con 1, este término dado que está entre paréntesis, multiplica directamente al 2, entonces lo que se ha agregado es realmente 2 y no 1; es la razón por la que, así mismo, se resta 2 fuera del paréntesis para no alterar la expresión original).

- Factorizando el trinomio cuadrado perfecto dentro del paréntesis. Y reduciendo términos semejantes fuera del mismo. Finalmente, tenemos:

$$f(x)=2(x+1)^2-3$$

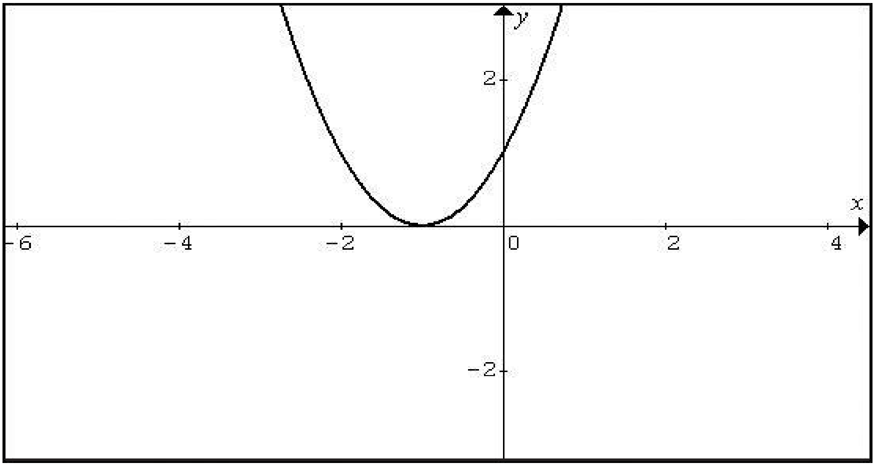
Con esta expresión podemos, a partir de la función básica $f(x)=x^2$, empezar los desplazamientos:

Figura 2.26 Gráfico de la función $f(x)=x^2$



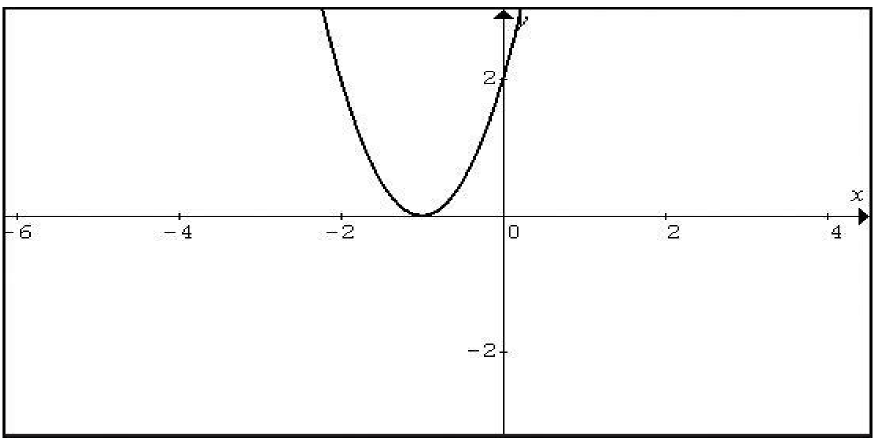
Desplazando el gráfico de la figura 2.26 una unidad hacia la izquierda (obsérvese aquí, al igual que en el ejemplo anterior, que los desplazamientos ocurren en sentido opuesto al signo; es decir, se utiliza el signo negativo para desplazamientos a la derecha y el signo positivo para desplazamientos a la izquierda).

Figura 2.27 Gráfico de la función $f(x)=(x+1)^2$



Multiplicando por 2 la expresión anterior se obtiene:

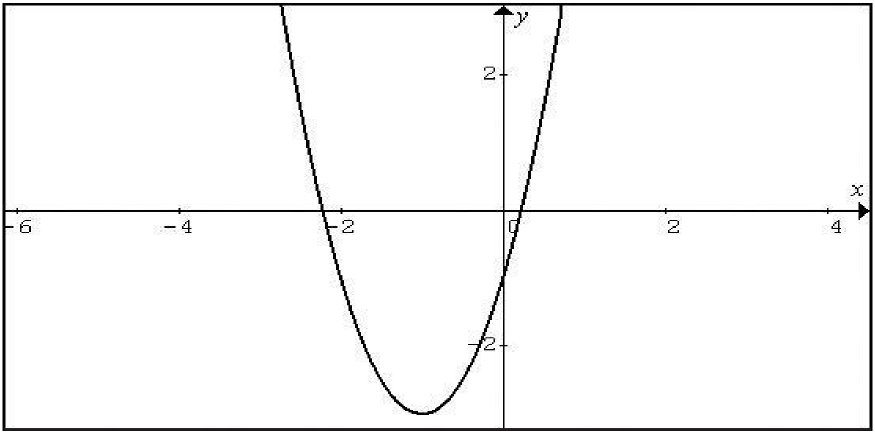
Figura 2.28 Gráfico de la función $f(x)=2(x+1)^2$



Nótese que el valor absoluto del factor multiplicador al ser mayor que 1 (2>1), produce una compresión lateral en el gráfico; esto hace inferir que si el valor absoluto del factor multiplicador fuera menor que 1, el gráfico tiende a ser más ancho lateralmente.

Por último, desplazando tres unidades hacia arriba, tenemos:

Figura 2.29 Gráfico de la función $f(x)=2(x+1)^2-3$



Ejercicios adicionales

1. Sea la función con regla de correspondencia múltiple:

$$f(x)=\begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-2} & ;x<0 \\ -|x-2| & ;0\le x<4 \\ (x-2)^2-3 & ;x\ge 4 \end{cases}$$

Determine:

a. El gráfico de la función, e indique si es par, impar, inyectiva o sobreyectiva.

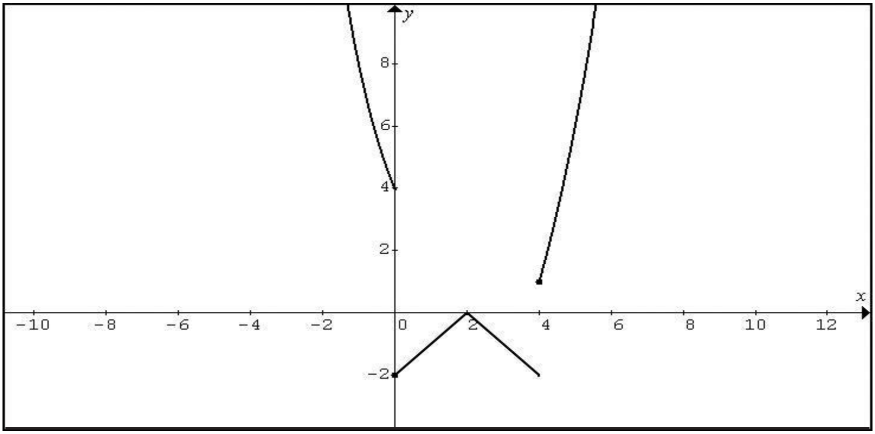
b. Dominio y rango de la función.

c. Intervalos de monotonía.

Solución.

a. Observe la figura 2.30.

Figura 2.30 Gráfico de la función del ejemplo 1, sección 2.6



Dado que la gráfica no es simétrica con respecto al eje *y* ni con respecto al origen, entonces no es par ni impar.

Observe que por la prueba de la recta horizontal se intersectaría en dos puntos, se tiene entonces que la función no es inyectiva; así mismo se observa que no es sobreyectiva ya que el rango de la función no existe en todo *y*.

b. $Dom = \Re$, y $Rg = [-2,0] \cup [1,\infty)$

c. El gráfico es creciente en $[0,2] \cup [4,\infty)$, y decreciente en $(-\infty,0) \cup (2,4)$.

En fin, nótese que esta última gráfica propiamente se trata de una función con regla de correspondencia múltiple.

```
% FUNCIÓN DEFINIDA POR TRAMOS
%1. Sea la función con regla de correspondencia
múltiple:
%   (1/2).^(x-2);   x<0
```

```
%f(x)= -abs(x-2);   0<=x<4
%   (x-2).^2-3;   x>=4
%Determine:
% a.El gráfico de la función, e indique si es par,
impar, inyectiva,
% o sobreyectiva.
% b.Dominio y rango de la función.
% c.Intervalos de monotonía.
clc
clf
% ejes
eje=-15:1:15;
ceros=zeros(1,31);
plot(eje,ceros,'r+-')
hold on
plot(ceros,eje,'r+-')
% tramos
x1=-15:0.1:0;
x2=0:0.1:4;
x3=4:0.1:15;
% función
y1=(1/2).^(x1-2);
y2=-abs(x2-2);
y3=(x3-2).^2-3;
% gráfica
plot(x1,y1)
plot(x2,y2)
plot(x3,y3)
grid on
grid minor
axis([-5 10 -5 10 ])
axis square
```

2. Sea la función con regla de correspondencia múltiple:

$$f(x)=\begin{cases} 5e^{x-2} & ;x<-4 \\ \left|(x+2)^2-1\right| & ;-4\le x<0 \\ 2|x-2| & ;x\ge 0 \end{cases}$$

Determine:

a. El gráfico de la función, e indique si es par, impar, inyectiva o sobreyectiva.

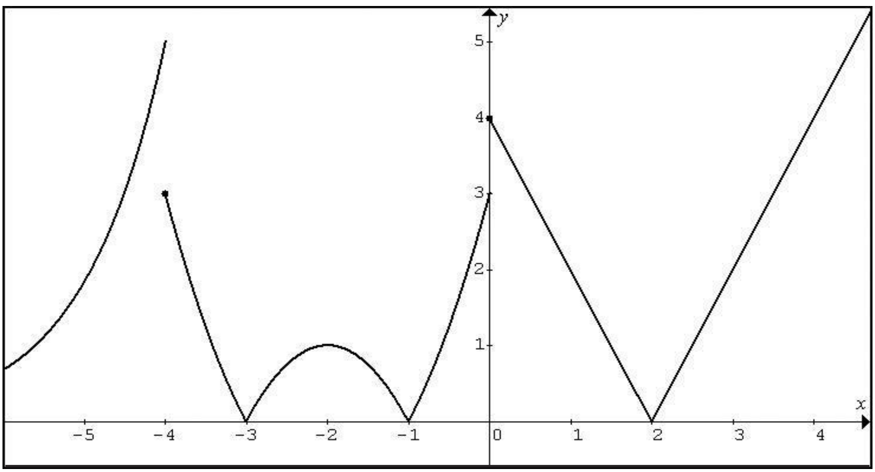
b. Dominio y rango de la función.

c. Intervalos de monotonía.

Solución.

a. Observe la figura 2.31.

Figura 2.31 Gráfico de la función del ejemplo 2, sección 2.6



a. La función no es par ni impar (no hay simetría). La función no es inyectiva ni sobreyectiva.

b. $Dom = \Re$, y $Rg = [0,\infty)$

c. El gráfico es creciente en $(-\infty,-4)\cup[-3,-2]\cup[-1,0)\cup[2,\infty)$, y

decreciente en $[-4,-3)\cup(-2,-1)\cup[0,2)$.

3. Sea la función con regla de correspondencia múltiple:

$$f(x)=\begin{cases} 2^{-x}+1 & ;x<0 \\ \left|(x-2)^2-1\right| & ;0\leq x<4 \\ -5x+23 & ;x\geq 4 \end{cases}$$

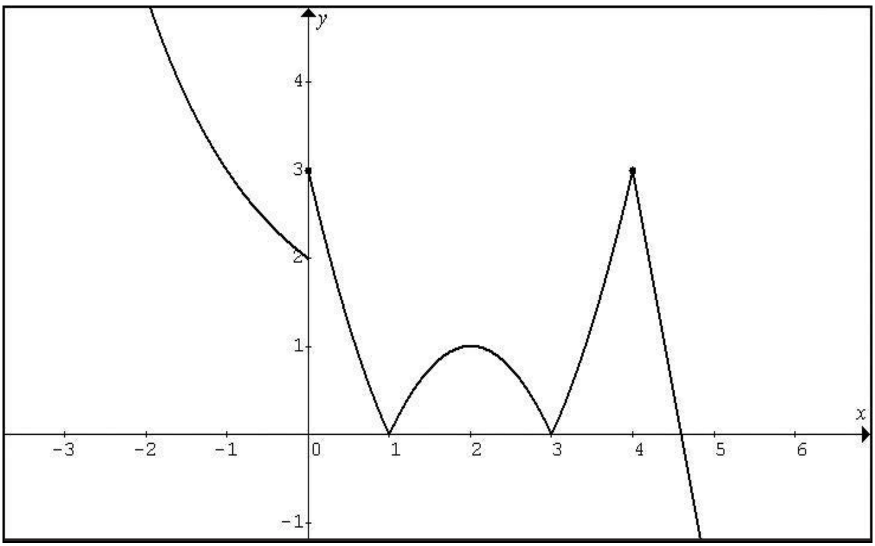
Determine:

a. El gráfico de la función.

b. Dominio y rango.

Solución.
Observe la figura 2.32

Figura 2.32 Gráfico de la función del ejemplo 3, sección 2.6



b. $Dom=\Re$, y $Rg=\Re$

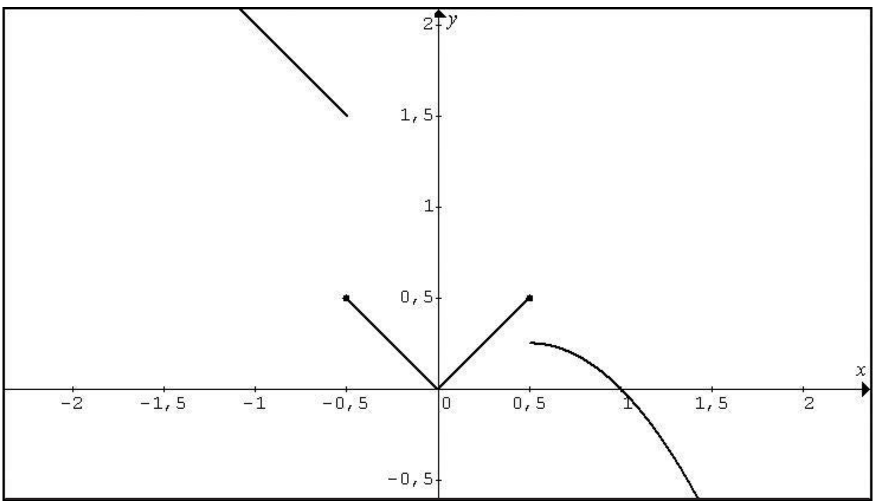
- El estudiante debe aprender a desarrollar los gráficos ya sea por desplazamiento y modificación de gráficos básicos o mediante una tabla de valores (con pares ordenados).

4. Sea la función con regla de correspondencia múltiple:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & ; x < -\dfrac{1}{2} \\ |x| & ; -\dfrac{1}{2} \leq x < \dfrac{1}{2} \\ x - x^2 & ; x \geq 4 \end{cases}$$

Observe la figura 2.33.

Figura 2.33 Gráfico de la función del ejemplo 4, sección 2.6



b. $Dom = \Re$, y $Rg = \left(-\infty, \frac{1}{2} \right] \cup \left(\frac{3}{2}, \infty \right)$

c. Calificando verdadero con V y falso con F:

El rango de la función es $\left(\frac{1}{2},1\right)^C$	F
La función es par en el intervalo [-1,1]	F
La función es inyectiva, pero no sobreyectiva	F
La función es decreciente en $\left(0,\frac{1}{2}\right)^C$	V
Ninguna de las anteriores es verdadera	F

5. Graficar la función $f(x)=\left|(x-5)^2-4\right|-2$ utilizando desplazamientos.

Solución. Si bien es cierto que en esta función existe el valor absoluto, empezamos trabajando desde adentro hacia afuera, es decir, primero la parte cuadrática.

Figura 2.34 Gráfico de la función $f(x)=x^2$, ejemplo 5

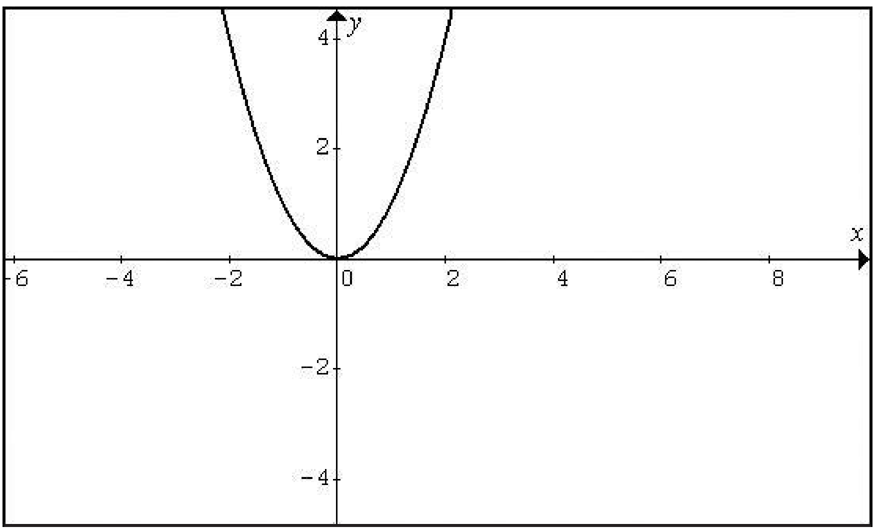


Figura 2.35 Gráfico de la función $f(x)=(x-5)^2$, ejemplo 5

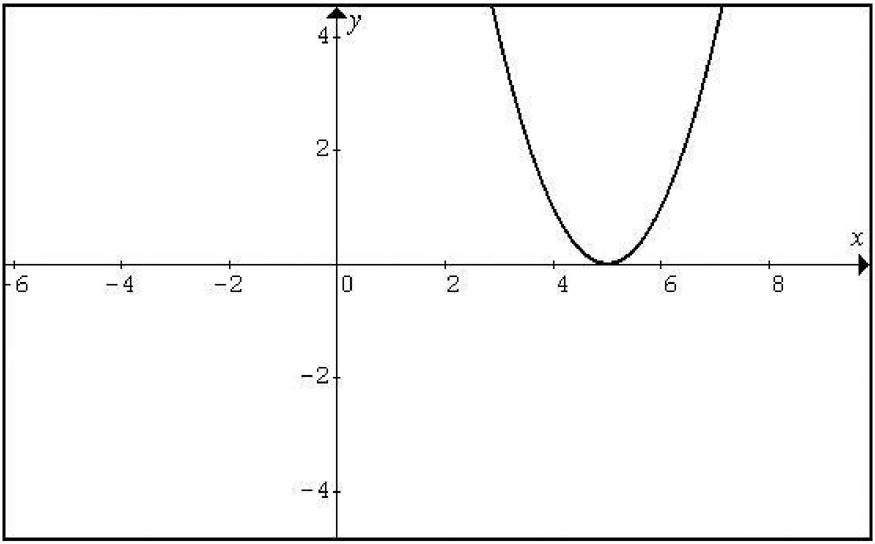
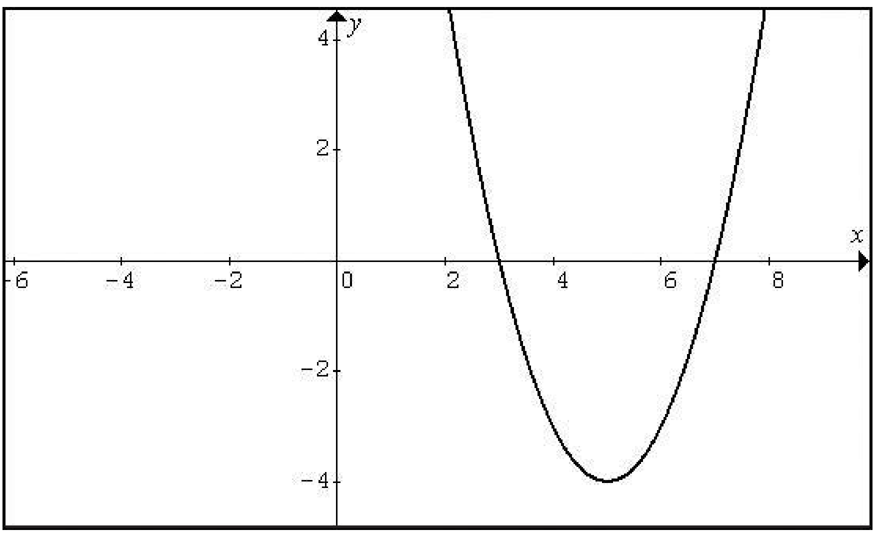
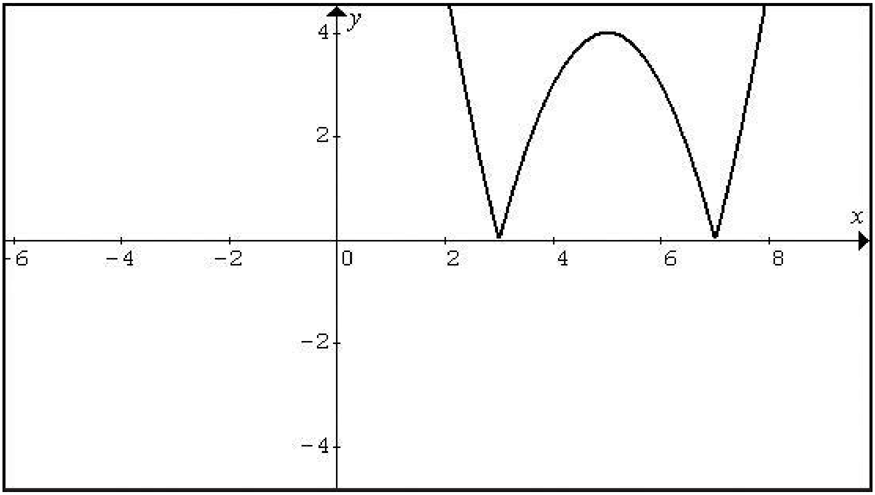


Figura 2.36 Gráfico de la función $f(x)=(x-5)^2-4$, ejemplo 5



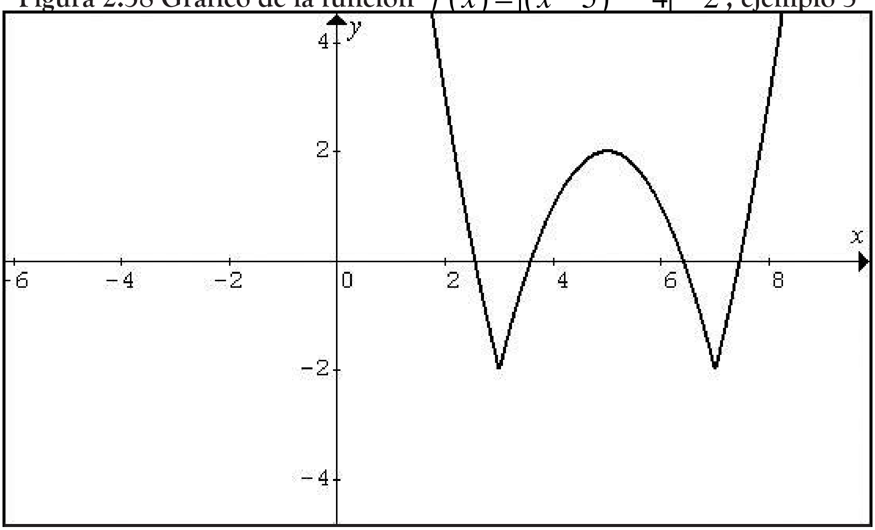
Aquí, observe lo que sucede al aplicarle el valor absoluto, pues toda respuesta (numérica y gráficamente) se hará positiva.

Figura 2.37 Gráfico de la función $f(x)=\left|(x-5)^2-4\right|$**, ejemplo 5**



Por último, aplicamos el desplazamiento fuera del valor absoluto.

Figura 2.38 Gráfico de la función $f(x)=\left|(x-5)^2-4\right|-2$**, ejemplo 5**



CAPÍTULO 3

Límites

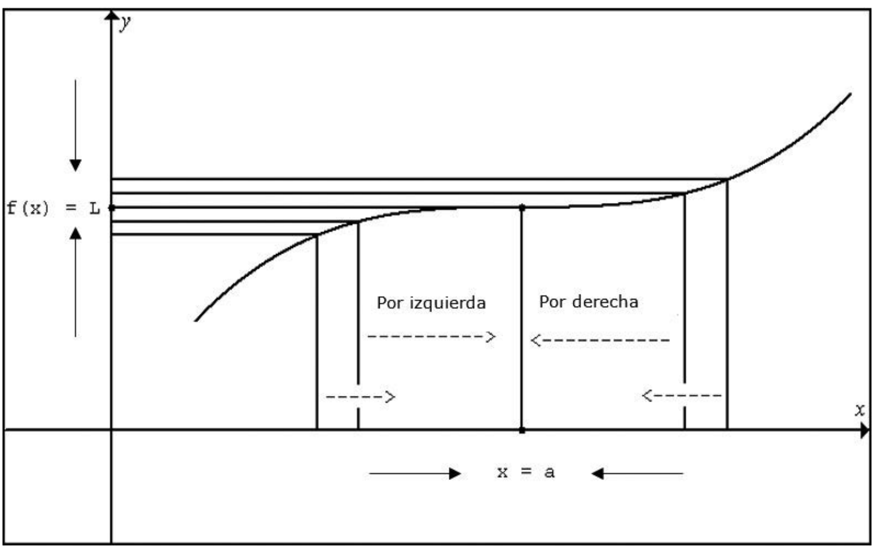
Definición de límite

El límite L de una función $f(x)$ cuando la variable independiente x tiende a un valor a se expresa como

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Que se lee: «el límite de una función f de x, cuando x tiende al valor de a es igual a L».

Figura 3.1 Definición intuitiva de Límite



Debe comprenderse que el valor del límite L de una función exista, sin la necesidad de que la función exista en dicho valor $x = a$. Esto es que, no necesariamente debe existir $f(a)$, sino que, más bien se debe observar la *tendencia, aproximación o acercamiento* de la función en dicho valor.

Teoremas y propiedades de los límites

Sean f y g funciones de x cuyo límite existe en $x = a$, siendo c una constante y n un entero positivo. Entonces,

Tabla 3.1 Propiedades de los límites

1. $\lim\limits_{x\to a} c = c$

2. $\lim\limits_{x\to a}(x) = a$

3. $\lim\limits_{x\to a} c.f(x) = c.\lim\limits_{x\to a} f(x)$

4. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x) \pm g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$

5. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x).g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x).\lim\limits_{x\to a} g(x)$

6. $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ siendo $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$

7. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^n = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^n$

8. $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$ siendo $\lim f(x) \geq 0$ cuando n es par.

Para el uso de estas propiedades es necesario que el lector las recuerde; para ello, se sugiere repasarlas de forma oral siguiendo, por ejemplo (para la propiedad 5), su lectura como: "*el límite de un producto es igual al producto de los límites*".

Límites de funciones polinómicas y racionales

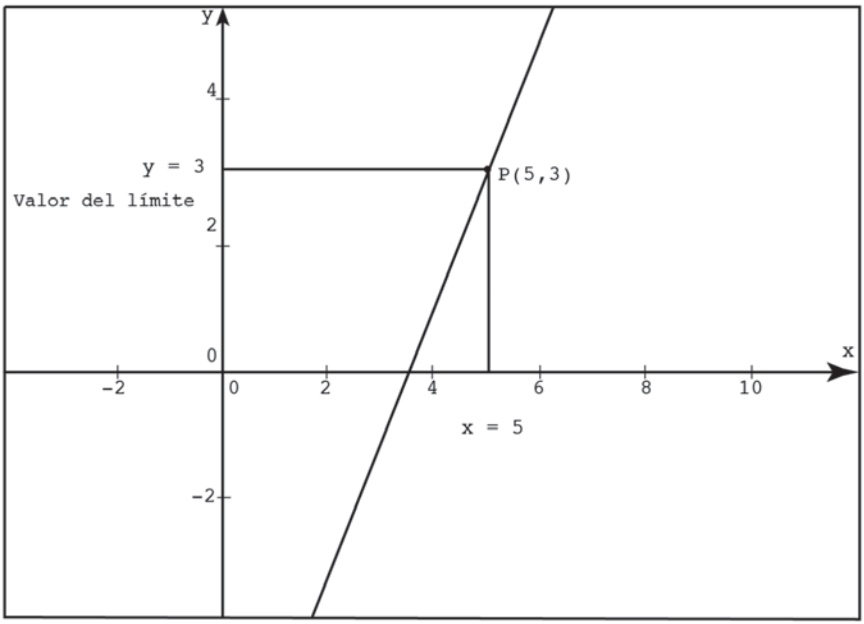
Al resolver el límite de una función polinómica se procede con el simple reemplazo del valor de su tendencia (variable independiente). Así pues si se tiene que $x \to a$ se evalúa directamente la función con $x = a$.

Ejemplos:Hallar el valor de los siguientes límites:

1. $\lim_{x\to 5}(2x-7) = 2(5)-7 = 3$

Demostración gráfica

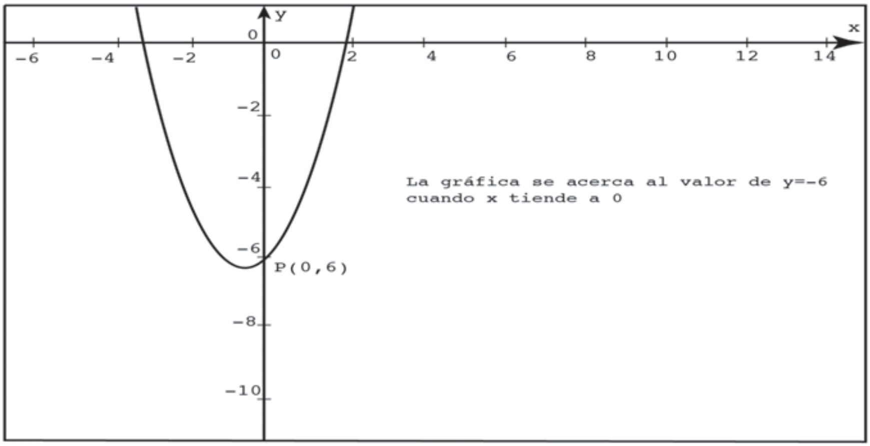
Figura 3.2 Gráfico del límite de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$



2. $\lim_{x\to 0}(\ x^2 + x - 6 \ ) = (0)^2 + (0) - 6 = -6$

Demostración gráfica

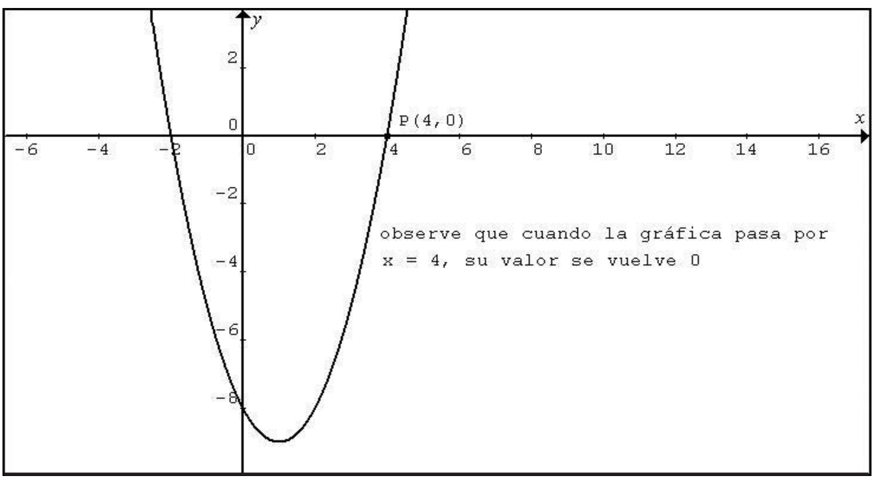
Figura 3.3 Gráfico del límite de la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$



3. $\lim\limits_{x \to 4}\left(x^2 - 2x - 8\right) = (4)^2 - 2(4) - 8 = 0$

Demostración gráfica

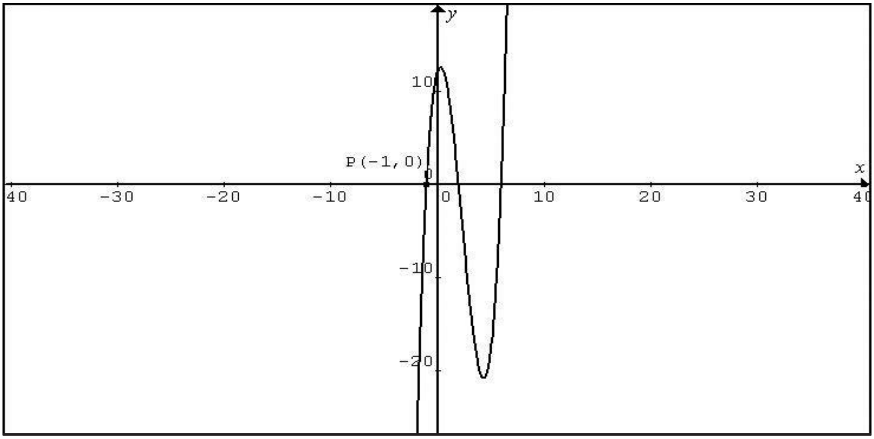
Figura 3.4 Gráfico del límite de la función *f*(*x*) = (*x*²-2*x*-8)



4. $\lim\limits_{x \to -1}\left(x^3 - 7x^2 + 4x + 12\right) = (-1)^3 - 7(-1)^2 + 4(-1) + 12 = 0$

Demostración gráfica

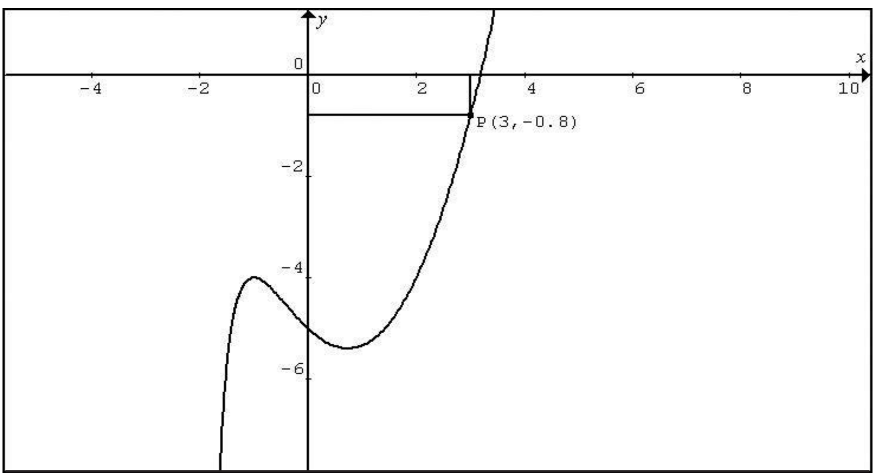
Figura 3.5 Gráfico del límite de la función $f(x)=\left(x^3-7x^2+4x+12\right)$



5. $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-7x-10}{x+2}=\frac{(3)^3-7(3)-10}{3+2}=\frac{-4}{5}=-0.8$

Demostración gráfica

Figura 3.6 Gráfico del límite de la función $f(x)=\frac{x^3-7x-10}{x+2}$



```
%MATLAB
%LÍMITES
%Hallar el valor de los siguientes límites:
clc
syms x

%lim(2x-7)
%x->5
L1=limit(2*x-7,x,5)

%lim(x^2+x-6)
%x->0
L2=limit(x^2+x-6,x,0)

%lim(x^2-2x-8)
%x->4
L3=limit(x^2-2*x-8,x,4)

%lim(x^3-7x^2+4x+12)
%x->-1
L4=limit(x^3-7*x^2+4*x+12,x,-1)

%lim(x^3-7x-10)/(x+2)
%x->3
L5=limit( (x^3-7*x-10)/(x+2),x,3)
```

Límites indeterminados

De la forma 0/0

Cuando el reemplazo directo del valor $x = a$ en la función $f(x)$ produce una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$ se procede a factorizar la expresión para luego, por simplificación, eliminar la indeterminación. De esta manera, se llegará a una expresión equivalente a la original cuyo reemplazo directo producirá el valor del límite.

Ejemplos: Hallar el valor de los siguientes límites:

1. $\lim_{t \to 9} \frac{t^2 - 81}{t - 9}$

Hagamos el reemplazo directo en la función con $t = 9$, entonces

$$\lim_{t \to 9} \frac{t^2 - 81}{t - 9} = \frac{9^2 - 81}{9 - 9} = \frac{0}{0}$$

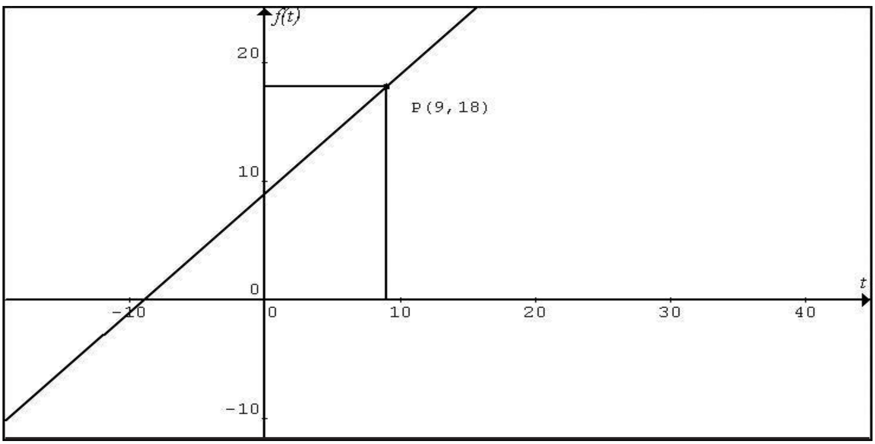
Luego, se produjo una indeterminación 0/0. De donde, para eliminarla, factorizamos la expresión original.

$$\lim_{t \to 9} \frac{t^2 - 81}{t - 9} = \lim_{t \to 9} \frac{(t+9)(t-9)}{t - 9} = \lim_{t \to 9}(t+9) = 18$$

Observe que la indeterminación se eliminó al simplificar los factores $(t-9)$. Esa es precisamente la ventaja que produce la factorización.

Demostración gráfica

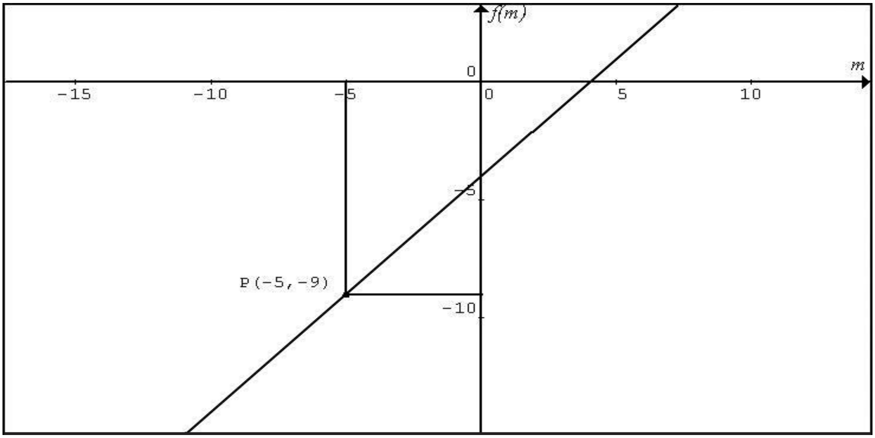
Figura 3.7 Gráfico del límite de la función $f(\mathrm{t}) = \frac{t^2 - 81}{t - 9}$



2. $\lim_{m \to -5} \frac{m^2 + m - 20}{m + 5} = \lim_{m \to -5} \frac{(m+5)(m-4)}{m + 5} = \lim_{m \to -5}(m-4) = -9$

Demostración gráfica

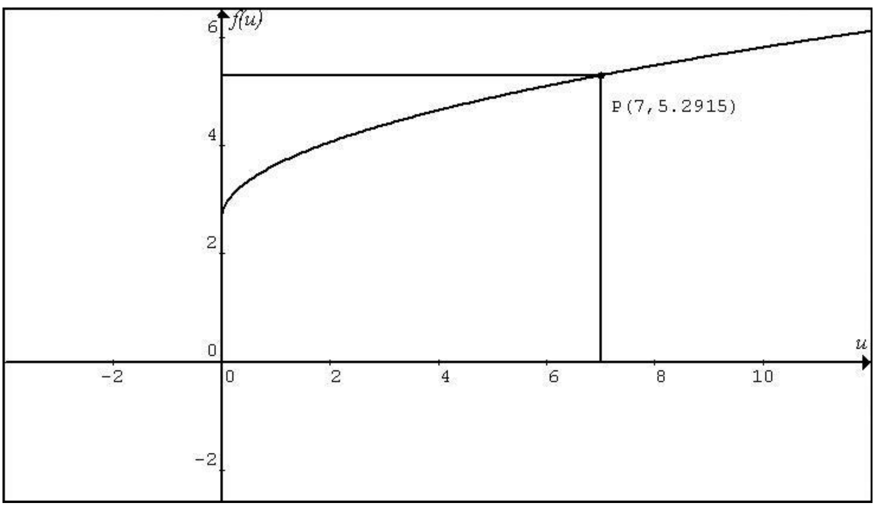
Figura 3.8 Gráfico del límite de la función $f(\mathrm{m}) = \dfrac{m^2 + m - 20}{m+5}$



3. $\lim\limits_{u \to 7} \dfrac{u-7}{\sqrt{u}-\sqrt{7}} = \lim\limits_{u \to 7} \dfrac{\left(\sqrt{u}+\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{u}-7\right)}{\sqrt{u}-\sqrt{7}} = \lim\limits_{u \to 7}\left(\sqrt{u}+\sqrt{7}\right) = 2\sqrt{7}$

Demostración gráfica

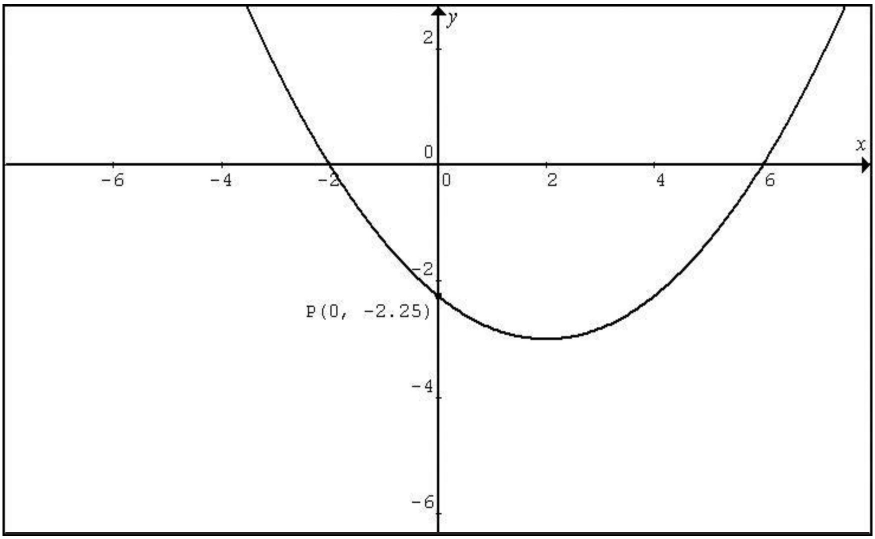
Figura 3.9 Gráfico del límite de la función $f(\mathrm{u}) = \dfrac{u-7}{\sqrt{u}-\sqrt{7}}$



4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^3-12x^2-36x}{16x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x\left(x^2-4x-12\right)}{16x}=\dfrac{3}{16}\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2-4x-12\right)=-\dfrac{9}{4}$

Demostración gráfica

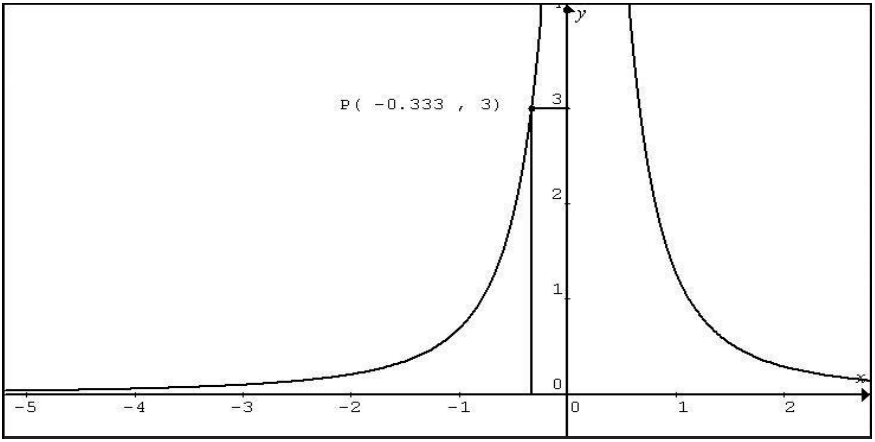
Figura 3.10 Gráfico del límite de la función $f(x)=\dfrac{3x^3-12x^2-36x}{16x}$



5. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}\dfrac{x+\frac{1}{3}}{x^3+\frac{1}{27}}=\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}\dfrac{x+\frac{1}{3}}{\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}\right)}=\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}\dfrac{1}{x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}}=\dfrac{1}{\frac{1}{3}}=3$

Demostración gráfica

Figura 3.11 Gráfico del límite de la función $f(x)=\dfrac{x+1/3}{x^3+1/27}$



De la forma ∞/∞

Esta forma por lo general se da cuando tenemos que $x \to \infty$, así pues, ocurre que al «reemplazar» este valor directamente en la función $f(x)$ se produce una indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Para eliminar esta indeterminación se procede a dividir cada uno de los términos de la función para la variable independiente con el mayor exponente. Luego (seguido de simplificación) se procede a reemplazar el valor sabiendo por último que toda constante dividida para ∞, entendido este como un número muy grande es igual a 0.

$$\frac{c}{\infty}=0$$

Ejemplos:

Hallar el valor de los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{5x^2+x}$

Hagamos el reemplazo directo en la función con $x = \infty$, entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{5x^2 + x} = \frac{\infty}{5(\infty)^2 + \infty} = \frac{\infty}{\infty}$$

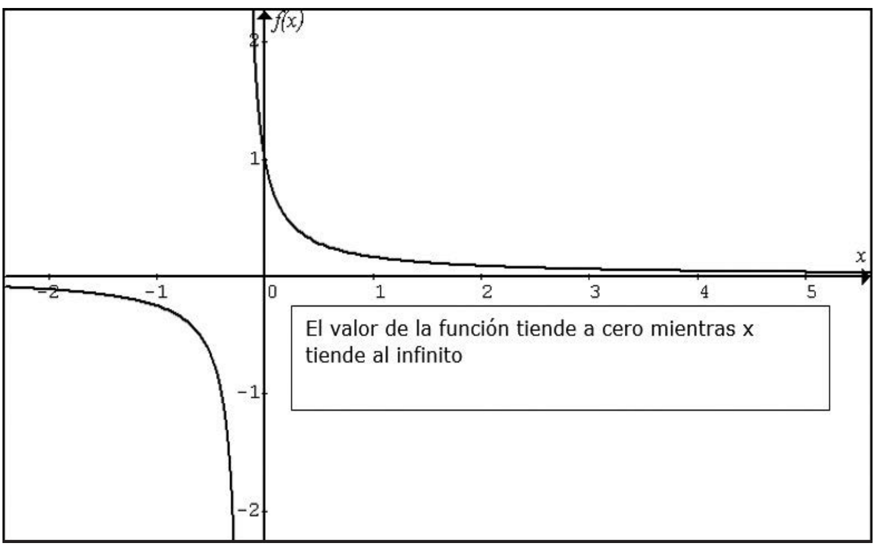
Luego, se produjo una indeterminación ¥/¥. De donde, para eliminarla, dividimos cada uno de los términos de la función para x^2 (la variable independiente con el mayor exponente en la función), así:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{5x^2 + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{5x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{5 + \frac{1}{x}} = \frac{\frac{1}{\infty}}{5 + \frac{1}{\infty}} = \frac{0}{5+0} = 0$$

- Se pudo haber seguido también un proceso alternativo de factorización y simplificación; sin embargo, no es recomendable cuando tenemos $x \to \infty$.

Demostración gráfica

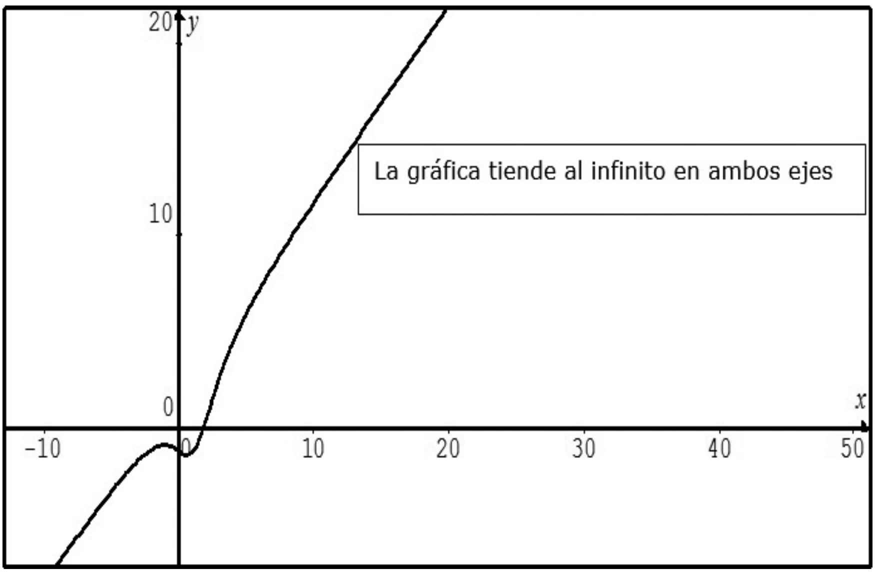
Figura 3.12 Gráfico del límite de la función $f(x) = \dfrac{x}{5x^2 + x}$



2. $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+6}{x^2-2x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}+\frac{6}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}-\frac{2x}{x^3}+\frac{5}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{6}{x^3}}{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{5}{x^3}}=\frac{1+0}{0-0+0}=\frac{1}{0}=\infty$$

Demostración gráfica

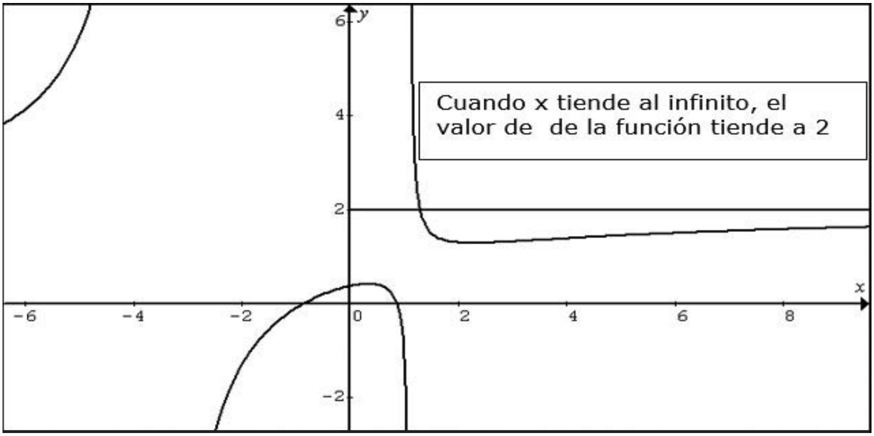
Figura 3.13 Gráfico del límite de la función $f(x)=\dfrac{x^3+6}{x^2-2x+5}$



3. $$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-3}{2x^2+5x-8}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{3}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}-\frac{8}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{3}{x^3}}{2+\frac{5}{x}-\frac{8}{x^2}}=\frac{4-0}{2+0-0}=\frac{4}{2}=2$$

Demostración gráfica

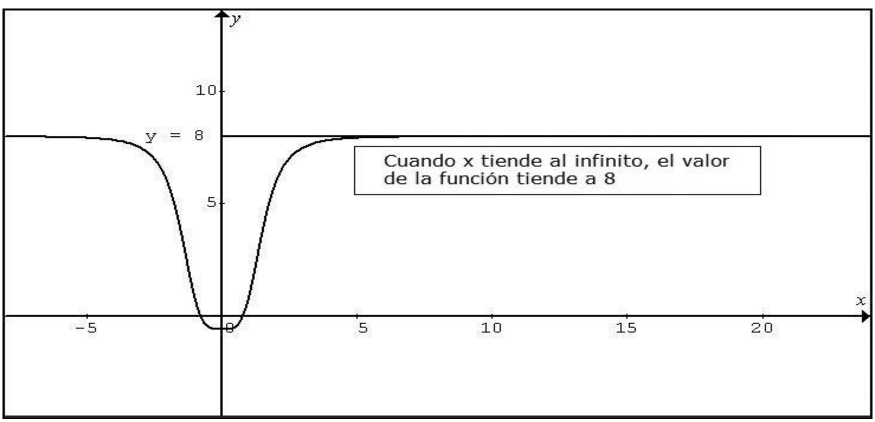
Figura 3.14 Gráfico del límite de la función $f(x)=\dfrac{4x^2-3}{2x^2+5x-8}$



4. $$\lim_{x\to\infty}\frac{8x^4-3}{5+x^4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{8x^4}{x^4}-\frac{3}{x^4}}{\frac{5}{x^4}+\frac{x^4}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{8-\frac{3}{x^4}}{\frac{5}{x^4}+1}=\frac{8-\frac{3}{\infty}}{\frac{5}{\infty}+1}=\frac{8-0}{0+1}=8$$

Demostración gráfica

Figura 3.15 Gráfico del límite de la función $f(x)=\dfrac{8x^4-3}{5+x^4}$



```
%MATLAB
%LÍMITES INDETERMINADOS
%Hallar el valor de los siguientes límites:

clc
syms m t u x

% DE LA FORMA 0/0
%lim(t^2-81)/(t-9)
%t->9
L1=limit((t^2-81)/(t-9),t,9)

%lim(m^2+m-20)/(m+5)
%m->-5
L2=limit((m^2+m-20)/(m+5),m,-5)

%lim(u-7)/(u^(1/2)-7^(1/2))
%u->7
L3=limit((u-7)/(u^(1/2)-7^(1/2)),u,7)

%lim(3x^3-12x^2-36x)/16x
%x->0
L4=limit((3*x^3-12*x^2-36*x)/16*x,x,0)

%lim(x+1/3)/(x^3+1/27)
%x->-1/3
L5=limit((x+1/3)/(x^3+1/27),x,-1/3)

% DE LA FORMA INFINITO/INFINITO
%lim x/(5x^2+x)
%x->infinito
L1=limit(x/(5*x^2+x),x,inf)

%lim (x^3+6)/(x^2-2x+5)
%x->infinito
L2=limit((x^3+6)/(x^2-2*x+5),x,inf)

%lim (4x^2-3)/(2x^2+5x-8)
%x->infinito
L3=limit((4*x^2-3)/(2*x^2+5*x-8),x,inf)
```

```
%lim (8x^4-3)/(5+x^4)
%x->infinito
L4=limit((8*x^4-3)/(5+x^4),x,inf)
```

Límites unilaterales

Hasta aquí se ha trabajado con límites cuyo valor existe en la función. Sin embargo, en esta sección se verificará (gráficamente) la existencia del límite sin necesidad de que la función exista en determinado valor de la variable independiente.

Una función puede poseer una tendencia al valor de un límite tanto por el lado izquierdo como por el derecho. Esto se enuncia a continuación:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L \qquad \text{; (por el lado izquierdo de la función)}$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = H \qquad \text{; (por el lado derecho de la función)}$$

Esta manera de determinar un límite es útil cuando se tienen funciones con dominio compartido (que no son continuas en un determinado intervalo). La estrategia para obtener estos límites consiste en las mismas manipulaciones realizadas en los ejemplos anteriores. Cabe recordar que se debe reemplazar valores en el dominio de la función.

Se debe tener en consideración que el límite de una función existe, si y solo si los límites laterales existen y son iguales. Así:

$$\lim_{x\to a} f(x) \text{ existe si y solo si } \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x)$$

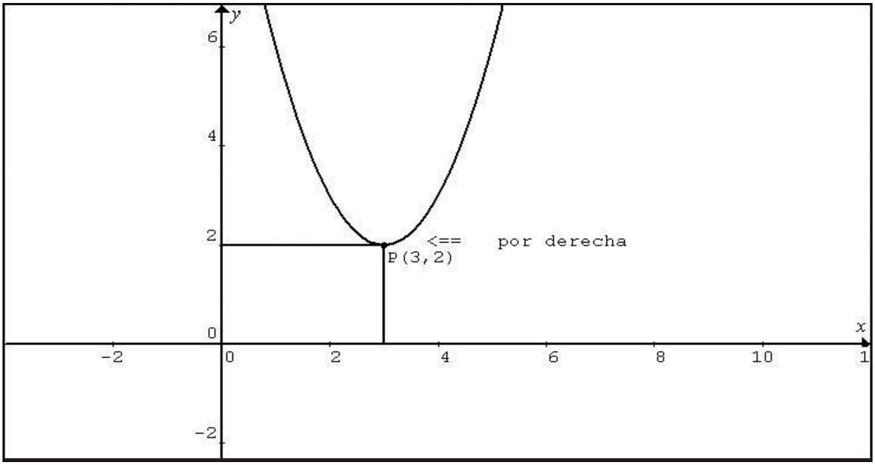
Ejemplos:

Hallar el valor de los siguientes límites:

1. $\lim_{x\to 3^+}\left[(x-3)^2+2\right] = (3-3)^2+2=2$

Demostración gráfica

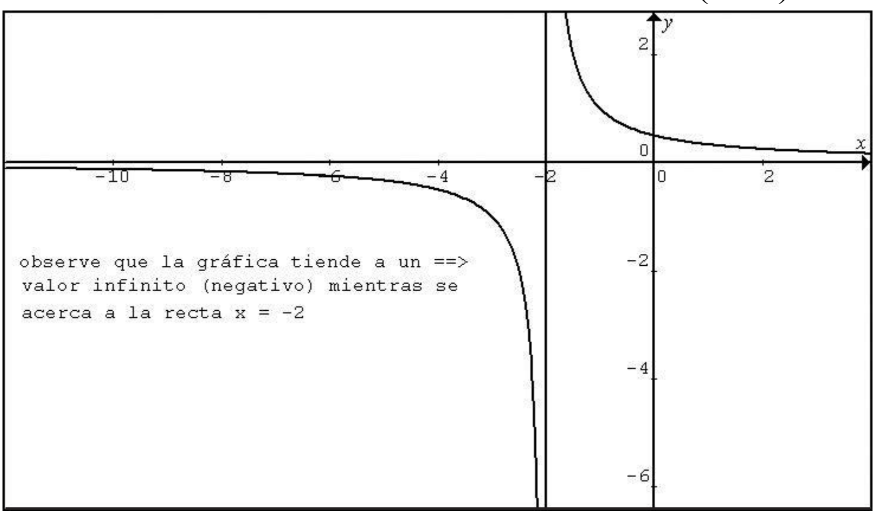
Figura 3.16 Gráfico del límite de la función $f(x)=2(x+1)^2$



2. $\lim_{x\to -2^-}\left(\dfrac{1}{x+2}\right)=\dfrac{1}{-2+2}=\dfrac{1}{0}=-\infty$ (observe la figura 3.17)

Demostración gráfica

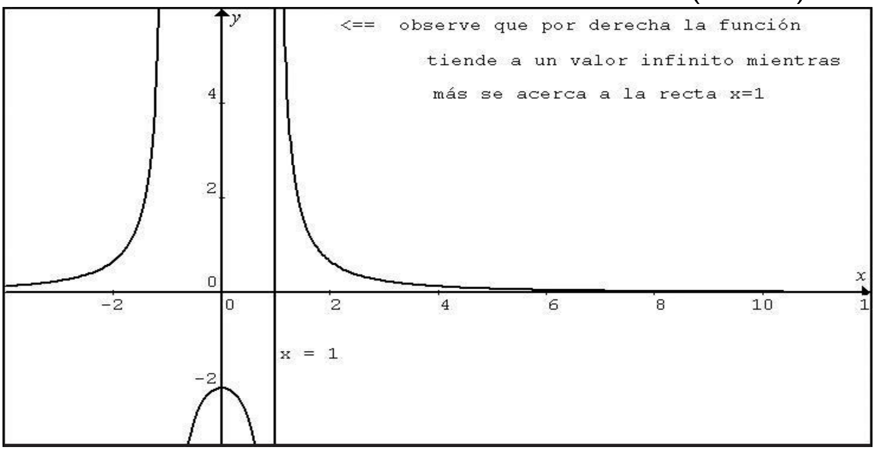
Figura 3.17 Gráfico del límite de la función $f(x)=\left(\dfrac{1}{x+2}\right)$



3. $\lim_{x\to 1^+}\left(\dfrac{2}{x^2-1}\right)=\dfrac{2}{(1)^2-1}=\dfrac{2}{0}=\infty$ (observe la figura 3.18)

Demostración gráfica

Figura 3.18 Gráfico del límite de la función $f(x)=\left(\dfrac{2}{x^2-1}\right)$



4. Hallar el límite de $f(x)=\begin{cases} x^2-2x-2 & ; \quad x\le 1 \\ 3-x & ; \quad x>1 \end{cases}$, cuando x tiende a 1, tanto por izquierda como por derecha.

- Por izquierda (utilizando la primera parte de la función, o sea, en donde su dominio es inferior a 1):

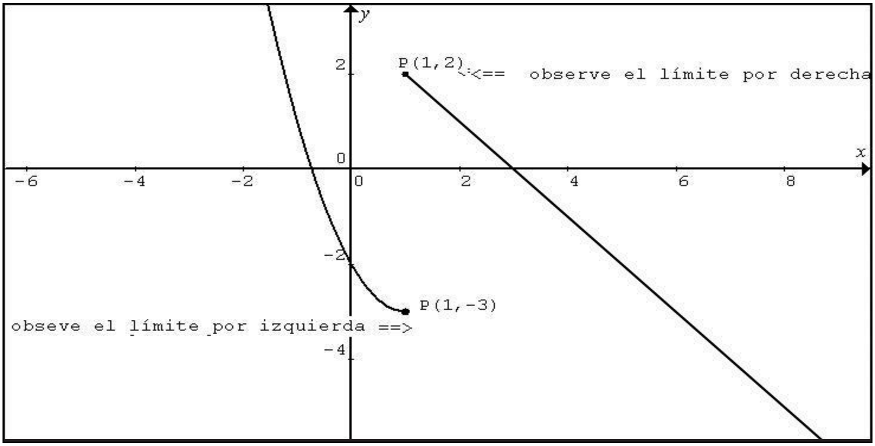
$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(x^2-2x-2\right)=(1)^2-2(1)-2=-3$$

- Por derecha (cuando el dominio de la función es mayor a 1):

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(3-x)=3-1=2$$

Podemos concluir que $\lim_{x \to 1} f(x)$ no existe.
Demostración gráfica

Figura 3.19 Gráfico del límite de la función $f(x)$, ejemplo 4, sección 3.5




```
%MATLAB
%LÍMITES UNILATERALES
clc
syms m t u x
%Hallar el valor de los siguientes límites:
%lim (x-3)^2+2
%x->3+
L1=limit((x-3)^2+2,x,3,'right')

%lim [1/(x+2)]
%x->2-
L2=limit(1/(x+2),x,-2,'left')
 %lim [2/(x^2-1)]
%x->1+
L3=limit(2/(x^2-1),x,1,'right')

% Dada la función
%   _
%   | x^2-2x-2;   x<=1
%f(x)= |
```

```
%   |_3-x   ;   x>1
% Hallar el límite de f(x) cuando x tiende a 1, tanto
por izquierda
% como por derecha.

%lim f(x)
%x->1-
L4a=limit(x^2-2*x-2,x,1,'left')
%lim f(x)
%x->1+
L4b=limit(3-x,x,1,'right')
```

5. Hallar el límite de $f(x)=\begin{cases} 2 & ;x<-4 \\ 3-2x-x^2 & ;-4\le x\le 1 \\ \dfrac{x-3}{2} & ;x>1 \end{cases}$, cuando x tiende al valor de –4 y de 1, tanto por izquierda como por derecha.

- Límite cuando x = –4 por izquierda:

$$\lim_{x\to -4^-} f(x)=\lim_{x\to -4^-} 2=2$$

- Límite cuando x = –4 por derecha:

$$\lim_{x\to -4^+} f(x)=\lim_{x\to -4^+}\left(3-2x-x^2\right)=3-2(-4)-(-4)^2=-5$$

- Límite cuando x = 1 por izquierda:

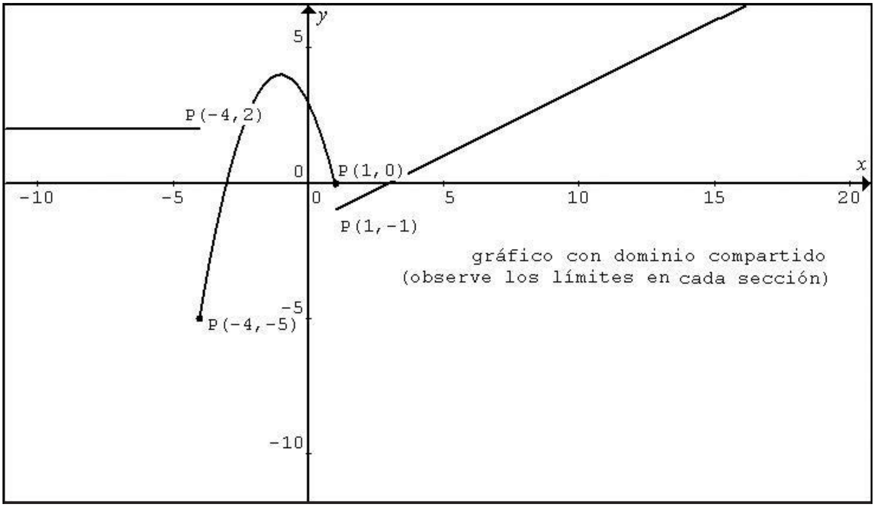
$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(3-2x-x^2\right)=3-2(1)-(1)^2=0$$

- Límite cuando x = 1 por derecha:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x-3}{2}\right)=\frac{1-3}{2}=-1$$

Demostración gráfica

Figura 3.20 Gráfico del límite de la función $f(x)$, ejemplo 5, sección 3.5



Límites trigonométrico

Cuando se requiere hallar el límite de una expresión que posee funciones trigonométricas, es útil el uso de los siguientes límites notables:

$$\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$$

Observe que el reemplazo directo del valor de $x=0$ (la variable independiente) en cualquiera de las dos funciones produce una indeterminación de la forma 0/0. Pues bien, si se observan los siguientes gráficos estas aparentes indeterminaciones quedarían eliminadas.

Figura 3.21 Gráfico del límite de la función $f(x) = \dfrac{sen(x)}{x}$

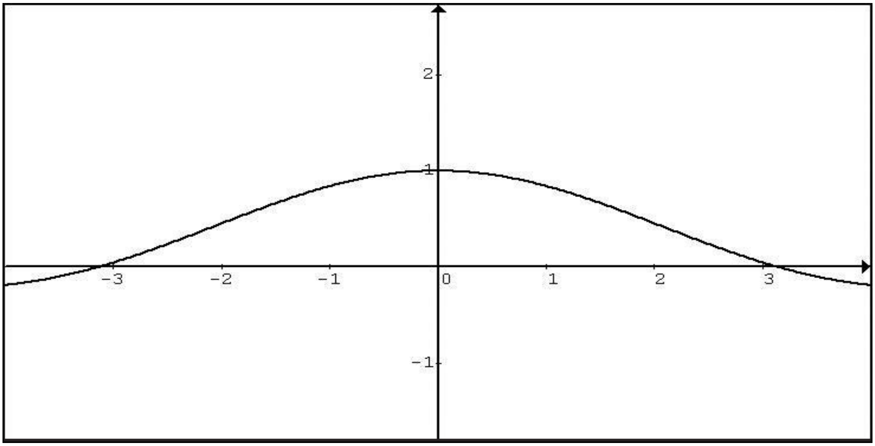
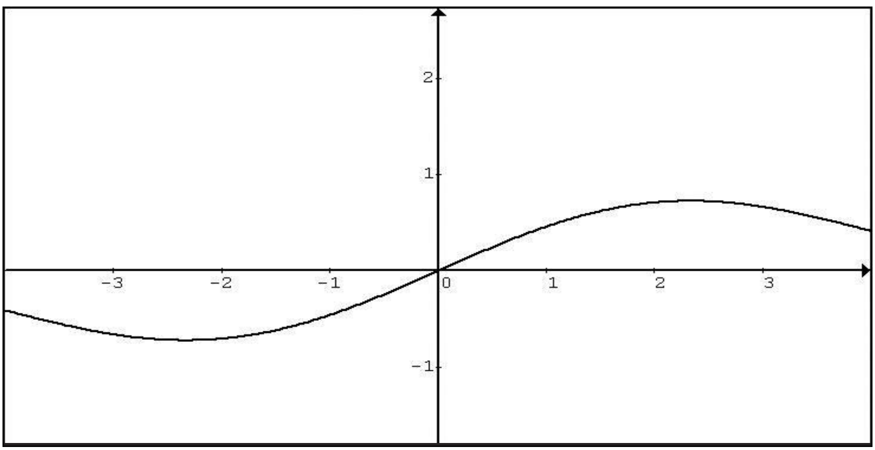


Figura 3.22 Gráfico del límite de la función $f(x) = \dfrac{1-\cos(x)}{x}$



Además del uso de estos límites notables a veces son necesarias también algunas identidades trigonométricas básicas.

Tabla 3.2 Identidades trigonométricas básicas.

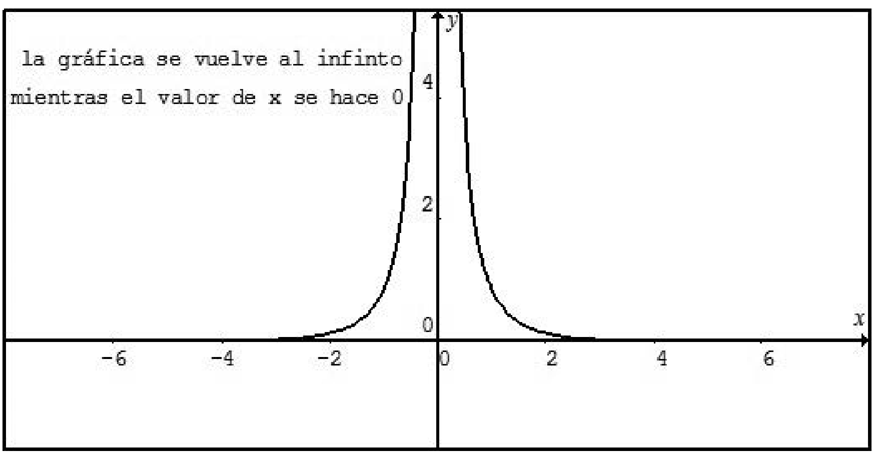
$sen(x)=\dfrac{1}{\csc(x)}$	$sen^2(x)+\cos^2(x)=1$
$\cos(x)=\dfrac{1}{\sec(x)}$	$1+\tan^2(x)=\sec^2(x)$
$\tan(x)=\dfrac{sen(x)}{\cos(x)}$	$1+\cot^2(x)=\csc^2(x)$
$\cot(x)=\dfrac{\cos(x)}{sen(x)}$	$sen(2x)=2sen(x)\cos(x)$
	$\cos(2x)=2\cos^2(x)-1$

Ejemplos:
Hallar el valor de los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{senx}{x^3}=\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\right)\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{senx}{x}\right)=(\infty)(1)=\infty$

Demostración gráfica

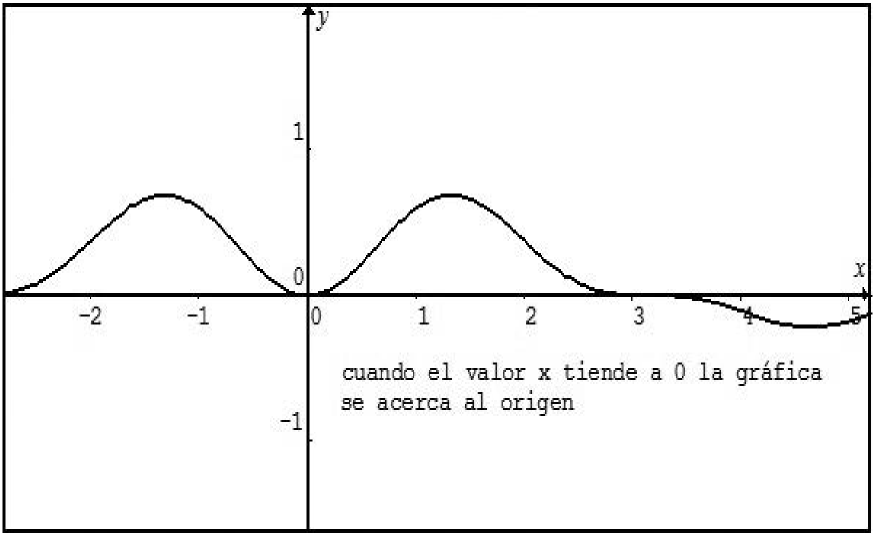
Figura 3.23 Gráfico del límite de la función $f(x)=\dfrac{sen(x)}{x^3}$



2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen^3 x}{x}=\left(\lim\limits_{x\to 0} sen^2 x\right)\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{senx}{x}\right)=(0)(1)=0$

Demostración gráfica

Figura 3.24 Gráfico del límite de la función $f(x)=\dfrac{sen^3(x)}{x}$



3. $\lim\limits_{u\to 2}\dfrac{sen(u-2)}{3u-6}=\lim\limits_{u\to 2}\dfrac{sen(u-2)}{3(u-2)}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{u\to 2}\dfrac{sen(u-2)}{u-2}$

Luego, según el cambio de variable

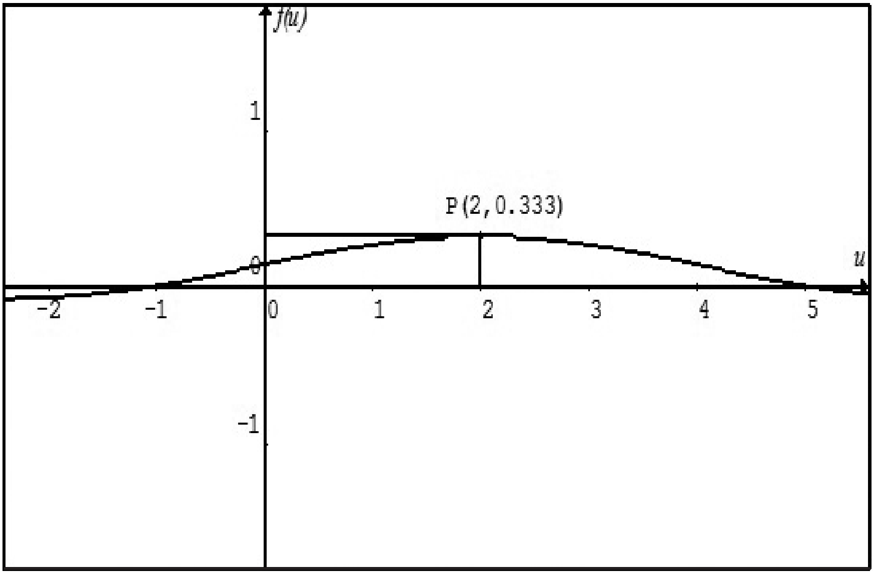
$v=u-2$

$siendo \quad u=2\to v=0$

Por último, se tiene que

$$\frac{1}{3}\lim_{u\to 2}\frac{sen(u-2)}{u-2}=\frac{1}{3}\lim_{v\to 0}\frac{senv}{v}=\frac{1}{3}$$

Figura 3.25 Gráfico del límite de la función $f(u)=\dfrac{sen(u-2)}{(u-2)}$



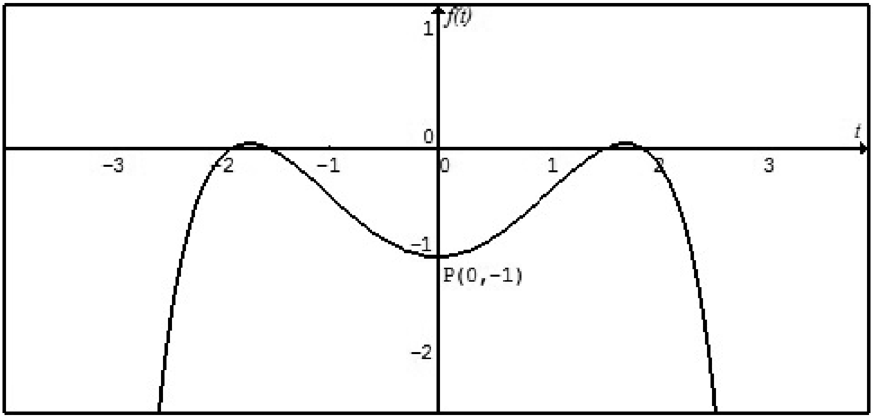
4. $$\lim_{t\to 0}\frac{t-2sent}{\tan t}=\lim_{t\to o}\frac{t-2sent}{\dfrac{sent}{\cos t}}=\lim_{t\to 0}\left[\cos t\left(\frac{t-2sent}{sent}\right)\right]=$$

Aplicando la propiedad de límites para productos entre funciones y desarrollando la división dentro del paréntesis, se tiene que

$$=\lim_{t\to 0}\cos t\bullet\lim_{t\to 0}\left(\frac{t}{sent}-2\right)=(1)(1-2)=-1$$

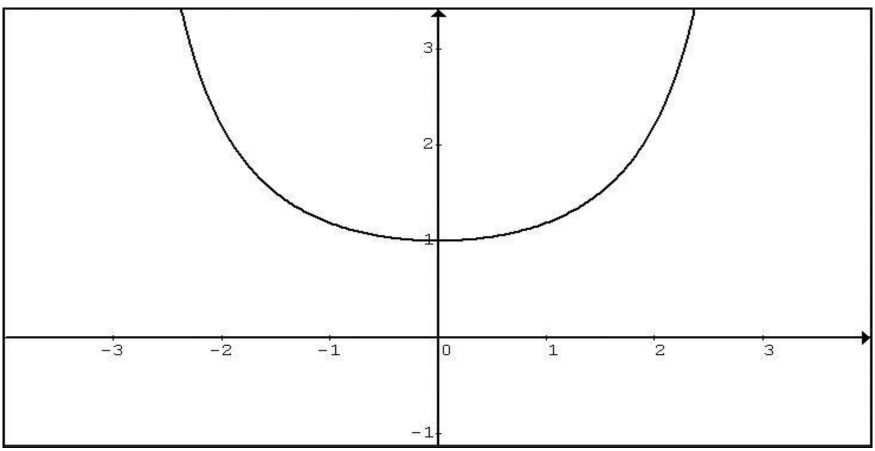
Demostración gráfica

Figura 3.26 Gráfico del límite de la función $f(t)=\dfrac{t-2sen(t)}{\tan(t)}$



La expresión $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{sen(x)}=1$, es otro límite notable. Observe el siguiente gráfico:

Figura 3.27 Gráfico del límite de la función $f\left(x\right)=\dfrac{x}{sen(x)}$



5. $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{1-\cos(2u)}{u\cdot sen(u)}$ Utilizando identidades trigonométricas:

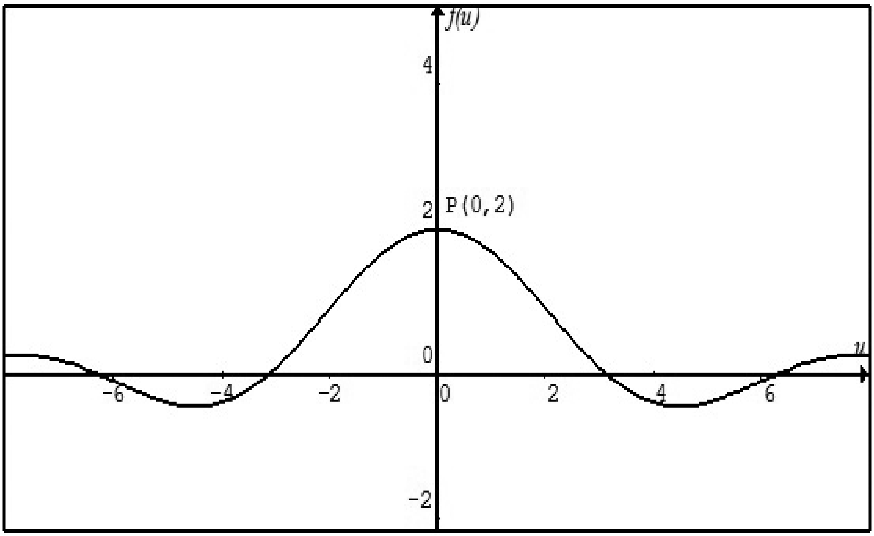
$$1-\cos 2u = 1-(2\cos^2 u - 1) = 1 - 2\cos^2 u + 1 = 2\left(1-\cos^2 u\right) = 2sen^2 u$$

se tiene que

$$\lim_{u\to 0}\frac{1-\cos(2u)}{u.sen(u)} = \lim_{u\to 0}\frac{2sen^2(u)}{u.sen(u)} = 2\lim_{u\to 0}\frac{sen(u)}{u} = 2$$

Demostración gráfica

Figura 3.28 Gráfico del límite de la función $f\left(u\right)=\dfrac{1-\cos 2u}{u\cdot sen(u)}$




```
%MATLAB
%LÍMITES TRIGONOMÉTRICOS
clc
syms t u x

%Hallar el valor de los siguientes límites:

%lim sen(x)/x
%x->0
a=limit(sin(x)/x,x,0)
```

```
%lim (1-cos(x))/x
%x->0
b=limit((1-cos(x))/x,x,0)
%lim x/sen(x)
%x->0
c=limit(x/sin(x),x,0)

 %lim sen(x)/x^3
%x->0
L1=limit(sin(x)/x^3,x,0)
%lim sen^3(x)/x
%x->0
L2=limit((sin(x))^3/x,x,0)

%lim sen(u-2)/(3u-6)
%u->2
L3=limit(sin(u-2)/(3*u-6),u,2)

%lim (t-2sen(t)/tan(t)
%t->0

L4=limit((t-2*sin(t))/tan(t),t,0)
%lim (1-cos(2u))/u*sen(u)
%u->0
L5=limit((1-cos(2*u))/(u*sin(u)),u,0)
```

Límites con funciones exponenciales

Se procede utilizando la estrategia de los casos anteriores cuando sea necesario.

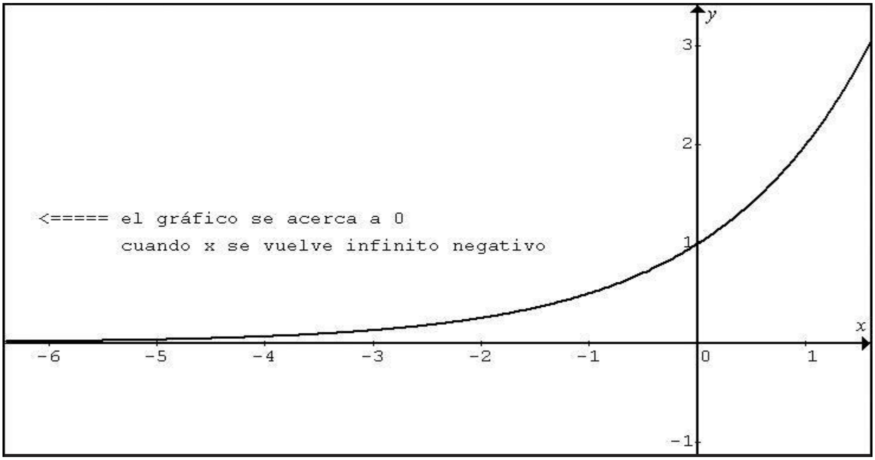
Ejemplos:

Hallar el valor de los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(2^x\right) = 2^{-\infty} = \dfrac{1}{2^{\infty}} = \dfrac{1}{\infty} = 0$

Demostración gráfica

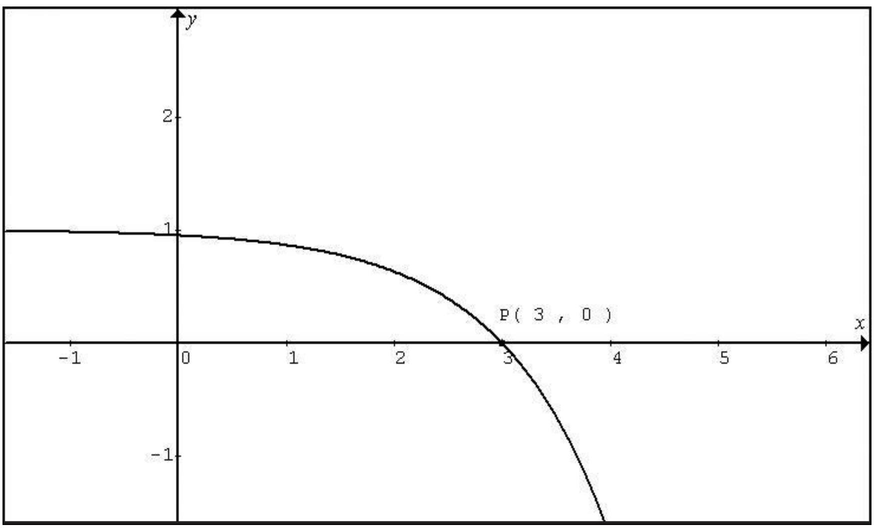
Figura 3.29 Gráfico del límite de la función $f(x)=(2^x)$



2. $\lim_{x\to 3}\left[1-e^{(x-3)}\right]=1-e^{(3-3)}=1-e^{0}=1-1=0$

Demostración gráfica

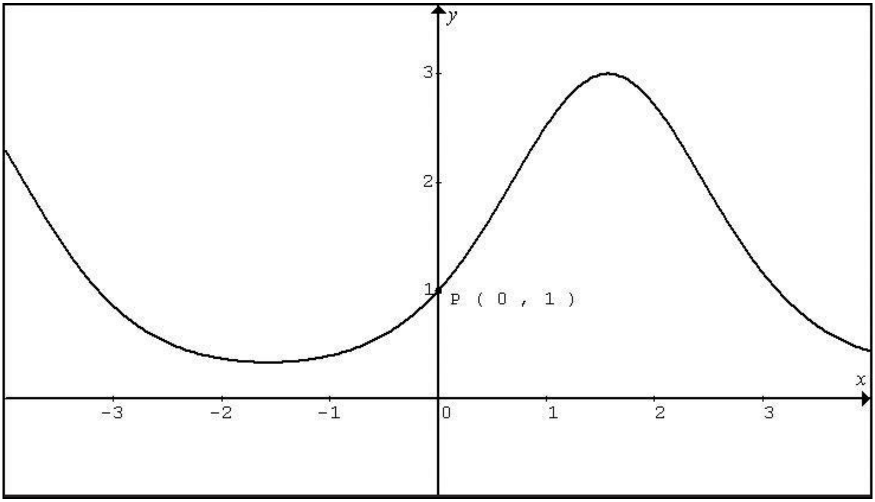
Figura 3.30 Gráfico del límite de la función $f(x)=1-e^{(x-3)}$



3. $\lim_{x\to 0}\left(3^{senx}\right)=3^{sen(0)}=3^{0}=1$

Demostración gráfica

Figura 3.31 Gráfico del límite de la función $f\left(x\right)=3^{senx}$




```
%MATLAB
%LÍMITES CON FUNCIONES EXPONENCIALES
%Hallar el valor de los siguientes límites:
clc
syms x

%lim 2^x
%x->-inf
L1=limit(2^x,x,-inf)

%lim (1-exp(x-3))
%x->3
L2=limit(1-exp(x-3),x,3)

%lim 3^sen(x)
%x->0
L3=limit(3^sin(x),x,0)
```

Límites con funciones logarítmicas

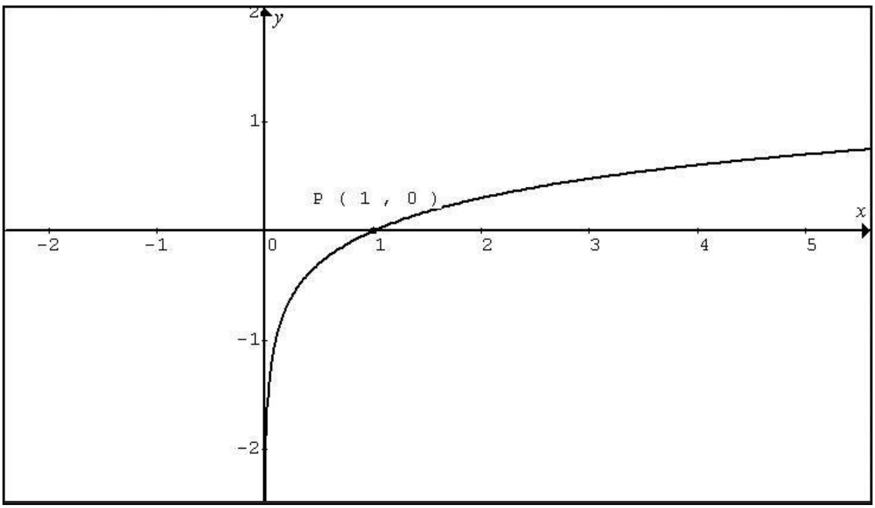
Se trabaja como los casos anteriores cuando sea necesario. Además, se debe cuidar que al reemplazar la función con variable independiente el argumento del logaritmo debe ser un valor mayor que cero, ya que logaritmos de números negativos no existen.

Ejemplos:

1. $\lim_{x\to 1}(\log x)=\log(1)=0$

Demostración gráfica

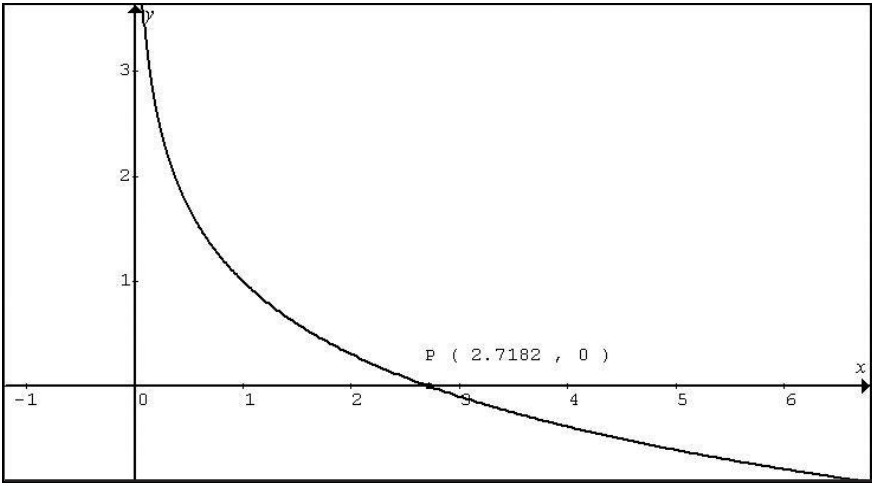
Figura 3.32 Gráfico del límite de la función $f(x)=\log(x)$



2. $\lim_{x\to e}\left[1-\ln(x)\right]=1-\ln(e)=1-1=0$

Demostración gráfica.

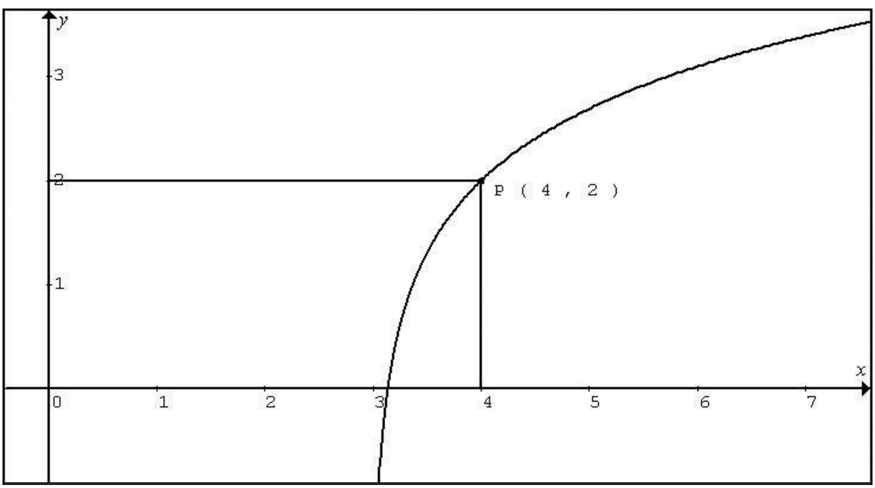
Figura 3.33 Gráfico del límite de la función $f(x) = 1 - \ln(x)$



3. $\lim_{x \to 4} [2 + \ln(x - 3)] = 2 + \ln(4 - 3) = 2 + \ln(1) = 2 + 0 = 2$

Demostración gráfica

Figura 3.34 Gráfico del límite de la función $f(x) = 2 + \ln(x - 3)$



```
%MATLAB
%LÍMITES CON FUNCIONES LOGARÍTMICAS
%Hallar el valor de los siguientes límites:
clc
syms x

%lim log(x)
%x->1
L1=limit(log10(x),x,1)

%lim [1-ln(x)]
%x->e
limit(1-(log(x)),x,exp(1));
L2=round(ans)    % redondea el último resultado

%lim [2+ln(x-3)]
%x->4
L3=limit(2+log(x-3),x,4)
```

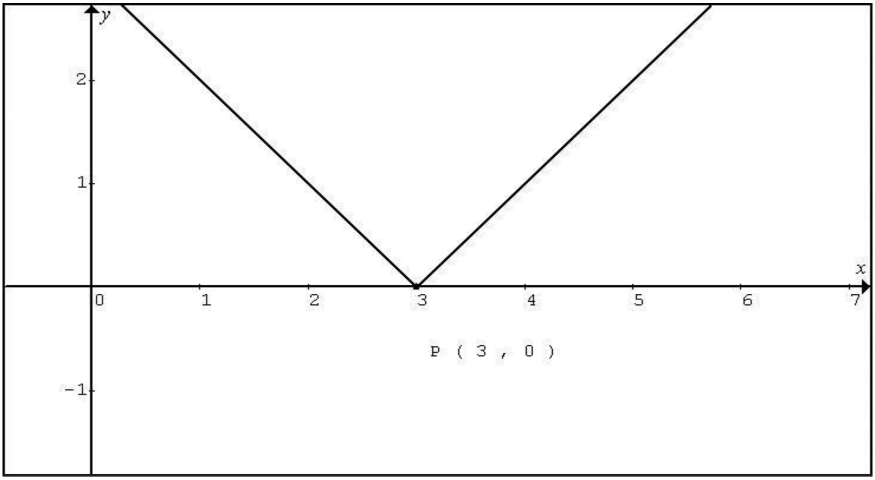
Límites con valor absoluto

Utilizando las reglas del valor absoluto de un número.
Ejemplos:

1. $\lim_{x \to 3} |x-3| = |3-3| = |0| = 0$

Demostración gráfica

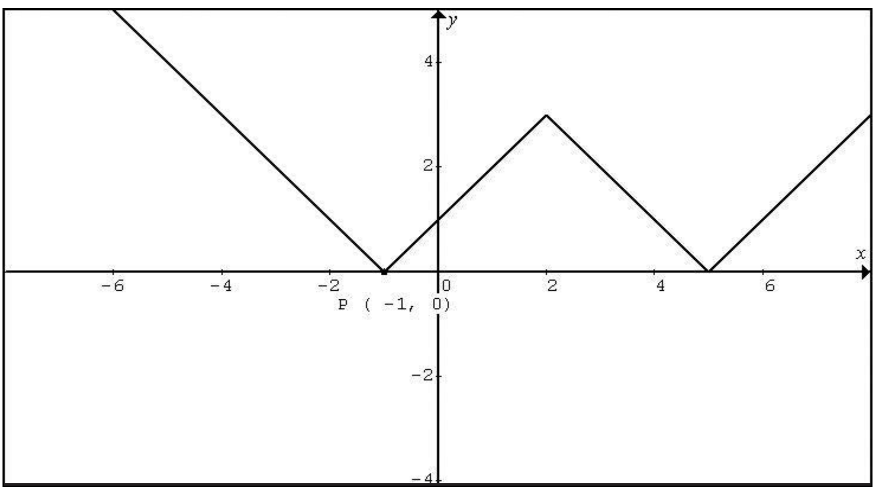
Figura 3.35 Gráfico del límite de la función $f\left(x\right)=\left|x-3\right|$



2. $\lim\limits_{x\to -1}\left|\left|x-2\right|-3\right|=\left|\left|-1-2\right|-3\right|=\left|\left|-3\right|-3\right|=\left|3-3\right|=0$

Demostración gráfica

Figura 3.36 Gráfico del límite de la función $f\left(x\right)=\left|\left|x-2\right|-3\right|$

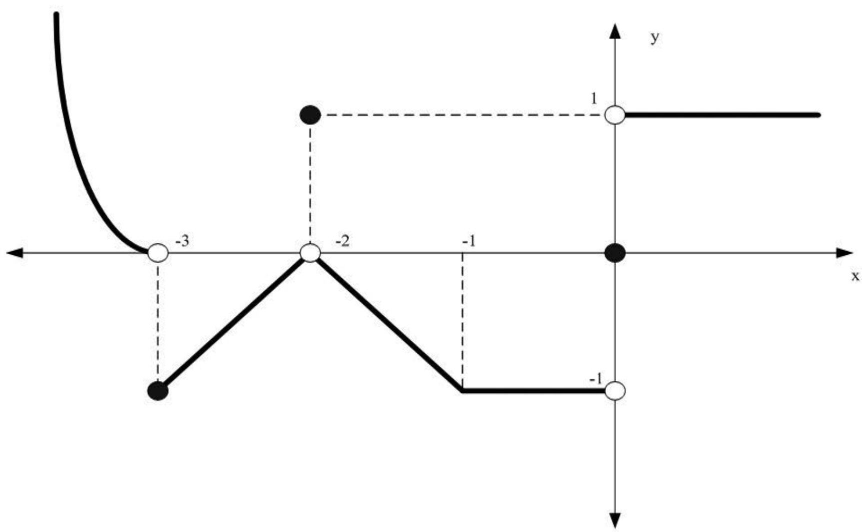


```
%MATLAB
%LÍMITES CON VALOR ABSOLUTO
%Hallar el valor de los siguientes límites:
clc
syms x

%lim |x-3|
%x->3
L1=limit(abs(x-3),x,3)

%lim ||x-2|-3|
%x->-1
L2=limit(abs(abs(x-2)-3),x,-1)
```

Ejercicios adicionales

1. Dada la siguiente función:

Figura 3.37 Gráfico de la función $f(x)$, ejemplo 1, sección 3.10

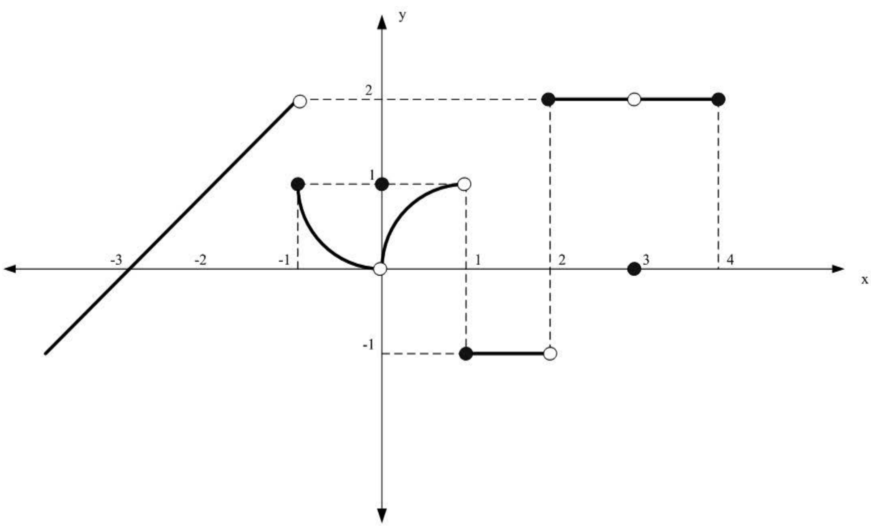


Se obtienen las siguientes respuestas:

ORDEN	RESPUESTA	ORDEN	RESPUESTA
a. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$	1	e. $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)$	−1
b. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$	−1	f. $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)$	0
c. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$	No existe, porque los límites laterales son diferentes	g. $f(0)$	0
d. $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$	0	h. $f(-2)$	1

2. Dada la siguiente función:

Figura 3.38 Gráfico de la función $f(x)$, ejemplo 2, sección 3.10



Se obtienen las siguientes respuestas:

ORDEN	RESPUESTAS	ORDEN	RESPUESTAS
a. $\lim_{x\to 0^+} f(x)$	0	e. $\lim_{x\to -2^-} f(x)$	1
b. $\lim_{x\to 1} f(x)$	No existe	f. $\lim_{x\to 3} f(x)$	2
c. $\lim_{x\to 1^-} f(x)$	1	g. $f(3)$	0
d. $\lim_{x\to 2^+} f(x)$	2	h. $f(2)$	2

3. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\left(\frac{3}{\csc x}-\frac{2}{ctgx}\right)\right]= \quad \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}(3senx-2\tan x)\right]$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3senx}{x}\right)-\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\tan x}{x}\right)$$

$$=3\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}-2\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$$

$$=3(1)-2(1)$$

$$=1$$

4. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-senx}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$

Haciendo el cambio de variable $u=\frac{\pi}{2}-x$; así, si $x\to\frac{\pi}{2}$, entonces $u\to 0$. Además $x=\frac{\pi}{2}-u$. Luego, tenemos:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-senx}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}=\lim_{u\to 0}\frac{1-sen\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}{u^2}$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{1-\left(sen\frac{\pi}{2}\cos u - senu\cos\frac{\pi}{2}\right)}{u^2}$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{1-\cos u}{u^2}$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{1-\cos u}{u^2} * \left(\frac{1+\cos u}{1+\cos u}\right)$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{1-\cos^2 u}{u^2\left(1+\cos u\right)}$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{1}{1+\cos u} \bullet \lim_{u\to 0} \frac{sen^2 u}{u^2}$$

$$= \frac{1}{2} \bullet \left(\lim_{u\to 0} \frac{senu}{u}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \bullet (1)^2$$

$$= \frac{1}{2}$$

5. $$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-x-2}{|x-2|} = \lim_{x\to 2^-} \frac{(x-2)(x+1)}{-(x-2)} = -\lim_{x\to 2^-}(x+1) = -3$$

6. $$\lim_{x\to\infty} \frac{x(2x+1)^2}{(x+2)(x-2)(x+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^3+4x^2+x}{x^3+x^2-4x-4}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4x^3}{x^3}+\frac{4x^2}{x^3}+\frac{x}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{x^2}{x^3}-\frac{4x}{x^3}-\frac{4}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{4+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}-\frac{4}{x^3}} = \frac{4+0+0}{1+0-0-0} = 4$$

7. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}*\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{2+x}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}{x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2+x-2}{x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

8. $$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-6x^2+1\ \ x-6}{x-1}$$

Utilizando (en el numerador) el método de factorización por evaluación:

+1	–6	+11	–6	+1
	+1	–5	+6	
+1	–5	+6	//	

Entonces:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^2-5x+6\right)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left(x^2-5x+6\right)=2$$

9. Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+3x & ;x<0 \\ e^{x+2} & ;0\le x<4 \\ -\dfrac{1}{2}x+1 & ;x\ge 4 \end{cases}$$

Determine:

a. El gráfico de la función, dominio y rango.

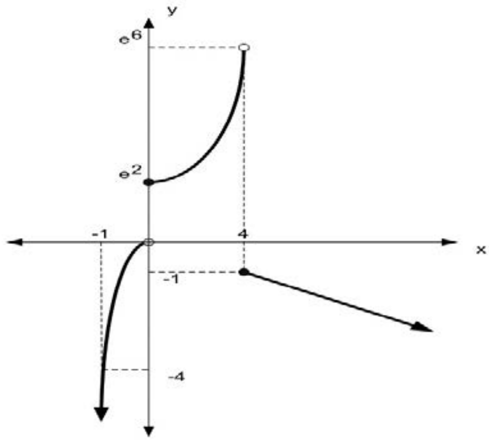
b. $\lim_{x\to 0^+} f(x), \lim_{x\to 0^-} f(x), \lim_{x\to 4} f(x)$

c. $f(4), f(0), f(2)$

d. Los intervalos de monotonía

Desarrollo
Observe la figura 3.39

Figura 3.39 Gráfico de la función $f(x)$, ejemplo 9, sección 3.10



$$Domf(x) = \Re \text{ , y } Rgf(x) = (-\infty,0) \cup [e^2, e^6)$$

b. $\lim_{x \to 0^+} f(x) = e^2$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$

$\lim_{x \to 4} f(x) = no \quad existe$

c. $f(4) = -1$

$f(0) = e^2$

$f(2) = e^4$

d. $f(x)$ es creciente en $(-\infty, 4]$; y decreciente en $[4, \infty)$

10. $$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^2+1\right)\left(n-3\right)\left(n+4\right)}{n\left(n-2\right)^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+n^3-12n^2+n^2+n-12}{n^4-6n^3+12n^2-8n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^4}{n^4}+\frac{n^3}{n^4}-\frac{11n^2}{n^4}+\frac{n}{n^4}-\frac{12}{n^4}}{\frac{n^4}{n^4}-\frac{6n^3}{n^4}+\frac{12n^2}{n^4}-\frac{8n}{n^4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}-\frac{11}{n^2}+\frac{1}{n^3}-\frac{12}{n^4}}{1-\frac{6}{n}+\frac{12}{n^2}-\frac{8}{n^3}}=\frac{1+\frac{1}{\infty}-\frac{11}{\infty}+\frac{1}{\infty}-\frac{12}{\infty}}{1-\frac{6}{\infty}+\frac{12}{\infty}-\frac{8}{\infty}}=1$$

11. $$\lim_{x\to\infty}\frac{6x-1}{\sqrt{x^2+5}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{6x}{x}-\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{5}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{6-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}}=\frac{6-\frac{1}{\infty}}{\sqrt{1+\frac{5}{\infty}}}=6$$

12. $$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}*\frac{\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}+1}*\frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt[4]{x}+1}*\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\left(\sqrt[4]{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt[4]{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}=\frac{(1+1)(1+1)}{1+1+1}=\frac{4}{3}$$

13. Sea $f\left(x\right)=\sqrt[3]{x}$, hallar $f'\left(x\right)=\lim_{h\to0}\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}$

$$f'\left(x\right)=\lim_{h\to0}\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$$

$$f'\left(x\right)=\lim_{h\to0}\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}*\frac{\left(\sqrt[3]{x+h}\right)^2+\left(\sqrt[3]{x+h}\right)\left(\sqrt[3]{x}\right)+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{x+h}\right)^2+\left(\sqrt[3]{x+h}\right)\left(\sqrt[3]{x}\right)+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}$$

$$f'\left(x\right)=\lim_{h\to0}\frac{x+h-x}{h\left[\ \left(\sqrt[3]{x+h}\right)^2+\left(\sqrt[3]{x+h}\right)\left(\sqrt[3]{x}\right)+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2\ \right]}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left[\left(\sqrt[3]{x+h}\right)^2+\left(\sqrt[3]{x+h}\right)\left(\sqrt[3]{x}\right)+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2\right]}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x+h}\right)^2+\left(\sqrt[3]{x+h}\right)\left(\sqrt[3]{x}\right)+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\left(\sqrt[3]{x}\right)\left(\sqrt[3]{x}\right)+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}$$

14. Sea $G(t)=\dfrac{t}{t+4}$, determine el límite $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{G(t+h)-G(t)}{h}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{G(t+h)-G(t)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{t+h}{t+h+4}-\dfrac{t}{t+4}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{t^2+4t+ht+4h-t^2-ht-4t}{(t+h+4)(t+4)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{4h}{(t+h+4)(t+4)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4}{(t+h+4)(t+4)}$$

$$=\frac{4}{(t+4)^2}$$

15. Si $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=4$ y $\lim\limits_{x\to 3}g(x)=8$, encuentre $\lim\limits_{x\to 3}\left[f^2(x)\bullet\sqrt[3]{g(x)}\right]$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3}\left[f^2(x)\bullet\sqrt[3]{g(x)}\right] &= \lim_{x\to 3} f^2(x)\bullet\lim_{x\to 3}\sqrt[3]{g(x)}\\
&=\left[\lim_{x\to 3} f(x)\right]^2\bullet\sqrt[3]{\lim_{x\to 3} g(x)}\\
&=[4]^2\bullet\sqrt[3]{8}\\
&=16\bullet 2\\
&=32
\end{aligned}$$

Capítulo 4

Derivadas

Derivadas de funciones algebraicas

Reglas para encontrar derivadas.

Tabla 4.1 Reglas generales de derivación

1. $D_x(k) = 0$, k es constante
2. $D_x(x) = 1$
3. $D_x k \bullet f(x) = k \bullet D_x f(x)$
4. $D_x(f(x) + g(x) \ = D_x f(x) + D_x g(x)$
5. $D_x(f(x) - g(x) \ = D_x f(x) - D_x g(x)$
6. $D_x(f(x) \bullet g(x) \ = f(x) D_x g(x) + g(x) D_x f(x)$
7. $D_x \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{g(x) D_x f(x) - f(x) D_x g(x)}{\left[g(x)\right]^2}; g(x) \neq 0$
8. $D_x x^n = n x^{n-1}$

La primera derivada de una función $y = f(x)$ se denota por $y'(x)$ o $f'(x)$, a continuación se muestran varios ejemplos:

Ejemplos:

Encontrar las derivadas de las siguientes funciones:

1. $y = 8$

$y' = 0$

2. $y = 10x$

$y' = 10$

3. $y = 20x - 5$

$y' = 20 - 0$

$y' = 20$

4. $y = x + 25x$

$y' = 1 + 25$

$y' = 26$

5. $y = x^2$

$y' = 2x^{2-1}$

$y' = 2x$

6. $y = 4x^4 + x^3$

$y' = 16x^{4-1} + 3x^{3-1}$

$y' = 16x^3 + 3x^2$

7. $y = 6x^{-3}$

$y' = -3(6)x^{-3-1}$

$$y' = -18x^{-4}$$

8. $y = \dfrac{\pi}{x}$

$$y = \pi(x^{-1})$$

$$y' = \pi(-1x^{-1-1})$$

$$y' = -\pi(x^{-2})$$

$$y' = -\frac{\pi}{x^2}$$

9. $y = \dfrac{3}{x^3} + x^{-2}$

$$y = 3x^{-3} + x^{-2}$$

$$y' = -3(3)x^{-3-1} + (-2)x^{-2-1}$$

$$y' = -9x^{-4} - 2x^{-3}$$

$$y' = -\frac{9}{x^4} - \frac{2}{x^3}$$

10. $y = \dfrac{1}{5x} + 2x$

$$y = \frac{1}{5}x^{-1} + 2x$$

$$y' = -1(\frac{1}{5})x^{-1-1} + 2$$

$$y' = -\frac{1}{5}x^{-2} + 2$$

$$y' = -\frac{1}{5x^2} + 2$$

11. $y = 2x^2 \bullet 7x^5$

$$y' = (2x^2)D_x(7x^5) + (7x^5)D_x(2x^2)$$

$$y' = 2x^2(35x^{5-1}) + 7x^5(4x^{2-1})$$

$$y' = 2x^2(35x^4) + 7x^5(4x)$$

$$y' = 70x^6 + 28x^6$$

$$y' = 98x^6$$

12. $y = (x^2 + 2) \bullet (x^3 + 1)$

$$y' = (x^2 + 2)D_x(x^3 + 1) + (x^3 + 1)D_x(x^2 + 2)$$

$$y' = (x^2 + 2)(3x^2) + (x^3 + 1)(2x)$$

$$y' = 3x^4 + 6x^2 + 2x^4 + 2x$$

$$y' = 5x^4 + 6x^2 + 2x$$

$$y' = x(5x^3 + 6x + 2)$$

13. $y = (2x + 1)^2$

$$y' = 2(2x + 1)^{2-1} \bullet (2 + 0)$$

$$y' = 2(2x + 1) \bullet 2$$

$$y' = 4(2x + 1)$$

$$y' = 8x + 4$$

14. $y = \dfrac{x - 1}{x + 1}$

$$y' = \frac{(x+1)D_x(x-1)-(x-1)D_x(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$y' = \frac{(x+1)(1)-(x-1)(1)}{(x+1)^2}$$

$$y' = \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}$$

$$y' = \frac{2}{(x+1)^2}$$

15. $y = \dfrac{2}{x^2+5}$

$$y' = \frac{(x^2+5)D_x(2)-(2)D_x(x^2+5)}{(x^2+5)^2}$$

$$y' = \frac{(x^2+5)(0)-(2)(2x)}{(x^2+5)^2}$$

$$y' = \frac{-4x}{(x^2+5)^2}$$

16. $y = (x+1) \bullet (x-4)$

$$y' = (x+1)D_x(x-4)+(x-4)D_x(x+1)$$

$$y' = (x+1)(1)+(x-4)(1)$$

$$y' = x+1+x-4$$

$$y' = 2x-3$$

17. $y = (x^3 - 2x) \bullet (3x - 1)$

$y' = (x^3 - 2x)D_x(3x - 1) + (3x - 1)D_x(x^3 - 2x)$

$y' = (x^3 - 2x)(3) + (3x - 1)(3x^2 - 2)$

$y' = 3x^3 - 6x + 9x^3 - 3x^2 - 6x + 2$

$y' = 12x^3 - 3x^2 - 12x + 2$

18. $y = (5x + 6) \bullet (x - 8x^2)$

$y' = (5x + 6)D_x(x - 8x^2) + (x - 8x^2)D_x(5x + 6)$

$y' = (5x + 6)(1 - 16x) + (x - 8x^2)(5)$

$y' = -80x^2 - 91x + 6 + 5x - 40x^2$

$y' = -120x^2 - 86x + 6$

19. $y = (2 - x^2) \bullet (x - 9)$

$y' = (2 - x^2)D_x(x - 9) + (x - 9)D_x(2 - x^2)$

$y' = (2 - x^2)(1) + (x - 9)(-2x)$

$y' = 2 - x^2 - 2x^2 + 18x$

$y' = -3x^2 + 18x + 2$

20. $y = (1 - x^2 + 3x^3) \bullet (1 - 2x^5)$

$y' = (1 - x^2 + 3x^3)D_x(1 - 2x^5) + (1 - 2x^5)D_x(1 - x^2 + 3x^3)$

$y' = (1 - x^2 + 3x^3)(-10x^4) + (1 - 2x^5)(-2x + 9x^2)$

$y' = -10x^4 + 10x^6 - 30x^7 - 2x + 9x^2 + 4x^6 - 18x^7$

$$y' = -48x^7 + 14x^6 - 10x^4 + 9x^2 - 2x$$

21. $y = \dfrac{5x-4}{2x^3-1}$

$$y' = \frac{(2x^3-1)D_x(5x-4)-(5x-4)D_x(2x^3-1)}{(2x^3-1)^2}$$

$$y' = \frac{(2x^3-1)(5)-(5x-4)(6x^2)}{(2x^3-1)^2}$$

$$y' = \frac{10x^3-5-30x^3+24x^2}{(2x^3-1)^2}$$

$$y' = \frac{-20x^3+24x^2-5}{(2x^3-1)^2}$$

22. $y = \dfrac{x^3-1}{x-3}$

$$y' = \frac{(x-3)D_x(x^3-1)-(x^3-1)D_x(x-3)}{(x-3)^2}$$

$$y' = \frac{(x-3)(3x^2)-(x^3-1)(1)}{(x-3)^2}$$

$$y' = \frac{3x^3-9x^2-x^3+1}{(x-3)^2}$$

$$y' = \frac{2x^3-9x^2+1}{(x-3)^2}$$

23. $y = \dfrac{4-x^4}{1-x^2}$

$$y' = \frac{(1-x^2)D_x(4-x^4)-(4-x^4)D_x(1-x^2)}{(1-x^2)^2}$$

$$y' = \frac{(1-x^2)(-4x^3)-(4-x^4)(-2x)}{(1-x^2)^2}$$

$$y' = \frac{-4x^3+4x^5+8x-2x^5}{(1-x^2)^2}$$

$$y' = \frac{2x^5-4x^3+8x}{(1-x^2)^2}$$

$$y' = \frac{2x(x^4-2x^2+4)}{(1-x^2)^2}$$

24. $y = \dfrac{x^3+x^2}{3x+5}$

$$y' = \frac{(3x+5)D_x(x^3+x^2)-(x^3+x^2)D_x(3x+5)}{(3x+5)^2}$$

$$y' = \frac{(3x+5)(3x^2+2x)-(x^3+x^2)(3)}{(3x+5)^2}$$

$$y' = \frac{9x^3+21x^2+10x-3x^3-3x^2}{(3x+5)^2}$$

$$y' = \frac{6x^3+18x^2+10x}{(3x+5)^2}$$

$$y' = \frac{2x(3x^2+9x+5)}{(3x+5)^2}$$

25. $y = \dfrac{x^2-x+1}{x^3-1}$

$$y' = \frac{(x^3-1)D_x(x^2-x+1)-(x^2-x+1)D_x(x^3-1)}{(x^3-1)^2}$$

$$y' = \frac{(x^3-1)(2x-1)-(x^2-x+1)(3x^2)}{(x^3-1)^2}$$

$$y' = \frac{2x^4-x^3-2x+1-3x^4+3x^3-3x^2}{(x^3-1)^2}$$

$$y' = \frac{-x^4+2x^3-3x^2-2x+1}{(x^3-1)^2}$$

Nota: Sea $y = f(x)$, la primera derivada de y también se denota por $y' = f'(x) = D_x f(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$, a este tipo de nomenclatura se conoce como notación de Leibniz.

```
%MATLAB
%DERIVADAS DE FUNCIONES ALGEBRAICAS
%Hallar la primera derivada dy/dx de las siguientes
funciones:
clc
syms x

%1. y=8
D1=diff(8,x,1)

%2. y=10x
D2=diff(10*x,x,1)

%3. y=20x-5
D3=diff(20*x-5,x,1)

%4. y= x+25x
D4=diff(x+25*x,x,1)
```

```
%5. y= x^2
D5=diff(x^2,x,1)

 %6. y= 4x^4+x^3
D6=diff(4*x^4+x^3,x,1)

%7. y= 6x^(-3)
D7=diff(6*x^(-3),x,1)

%8. y= pi/x
D8=diff(pi/x,x,1)

%9. y= 3/x^3 + x^(-2)
D9=diff(3/x^3 + x^(-2),x,1)

%10. y= 1/5x + 2x
D10=diff(1/(5*x) + 2*x,x,1)

%11. y= 2x^2 * 7x^5
D11=diff((2*x^2)*(7*x^5),x,1)

 %12. y= (x^2+2)*(x^3+1)
D12=diff((x^2+2)*(x^3+1),x,1);
D12=simplify(D12)    %simplifica la respuesta

%13. y= (2x+1)^2
D13=diff((2*x+1)^2,x,1)

%14. y= (x-1)/(x+1)
D14=diff((x-1)/(x+1),x,1);
D14=simplify(D14)    %simplifica la respuesta

%15. y= 2/(x^2+5)
D15=diff(2/(x^2+5),x,1)

 %16. y= (x+1)*(x-4)
D16=diff((x+1)*(x-4),x,1)

 %17. y= (x^3-2x)*(3x-1)
D17=diff((x^3-2*x)*(3*x-1),x,1);
```

```
D17=simplify(D17)     %simplifica la respuesta

%18. y= (5x+6)*(x-8x^2)
D18=diff((5*x+6)*(x-8*x^2),x,1);
D18=simplify(D18)     %simplifica la respuesta

%19. y= (2-x^2)*(x-9)
D19=diff((2-x^2)*(x-9),x,1);
D19=simplify(D19)     %simplifica la respuesta

%20. y= (1-x^2+3x^3)*(1-2x^5)
D20=diff((1-x^2+3*x^3)*(1-2*x^5),x,1);
D20=expand(D20)     % expande la respuesta
pretty(D20)

%21. y= (5x-4)/(2x^3-1)
D21=diff((5*x-4)/(2*x^3-1),x,1);
D21=simplify(D21)     %simplifica la respuesta
pretty(D21)

%22. y= (x^3-1)/(x-3)
D22=diff((x^3-1)/(x-3),x,1);
D22=simplify(D22)     %simplifica la respuesta
pretty(D22)

%23. y= (4-x^4)/(1-x^2)
D23=diff((4-x^4)/(1-x^2),x,1);
D23=simplify(D23)     %simplifica la respuesta
pretty(D23)

%24. y= (x^3+x^2)/(3x+5)
D24=diff((x^3+x^2)/(3*x+5),x,1);
D24=simplify(D24)     %simplifica la respuesta
pretty(D24)

 %25. y= (x^2-x+1)/(x^3-1)
D25=diff((x^2-x+1)/(x^3-1),x,1);
D25=simplify(D25)     %simplifica la respuesta
pretty(D25)
```

Derivadas de funciones trigonométricas

Reglas para derivar funciones trigonométricas.

Tabla 4.2 Reglas generales de derivación de funciones trigonométricas

1. $D_x Sen(x) = Cos(x)$

2. $D_x Cos(x) = -Sen(x)$

3. $D_x Tan(x) = Sec^2(x)$

4. $D_x Cot(x) = -Csc^2(x)$

5. $D_x Sec(x) = Sec(x) \bullet Tan(x)$

6. $D_x Csc(x) = -Csc(x) \bullet Cot(x)$

Ejemplos:

1. $y = Cos(2x)$

$$u = 2x \rightarrow D_x u = 2$$

$$y = Cos(u) \rightarrow D_u y = -Sen(u)$$

$$D_x y = D_x u \bullet D_u y = \frac{du}{dx} \bullet \frac{dy}{du} - 2Sen(2x)$$

2. $y = Sen(4x) \bullet \left[-Cos(6x) \right]$

$$y' = Cos(4x) \bullet (4) - \left[-Sen(6x) \right] \bullet (6)$$

$$y' = 4Cos(4x) + 6Sen(6x)$$

3. $y = Sen^4(x) + Cos^4(x)$

$$Sen^4(x) \Rightarrow \begin{Bmatrix} u = Sen(x) \rightarrow D_x u = Cos(x) \\ y = u^4 \rightarrow D_u y = 4u^3 \end{Bmatrix}$$

$$Cos^4(x) \Rightarrow \begin{Bmatrix} u = Cos(x) \rightarrow D_x u = -Sen(x) \\ y = u^4 \rightarrow D_u y = 4u^3 \end{Bmatrix}$$

$$D_x y = 4Sen^3(x) \bullet Cos(x) - 4Cos^3(x) \bullet Sen(x)$$

4. $y = Sen^2(3x)$

$$y = [Sen(3x)]^2$$

$$u = Sen(3x) \rightarrow D_x u = 3Cos(3x)$$

$$y = u^2 \rightarrow D_u y = 2u$$

$$D_x y = 2Sen(3x) \bullet 3Cos(3x)$$

$$D_x y = 6Sen(3x)Cos(3x)$$

5. $y = Tan^4(5x)$

$$y = [Tan(5x)]^4$$

$$u = Tan(5x) \rightarrow D_x u = 5Sec^2(5x)$$

$$y = u^4 \rightarrow D_u y = 4u^3$$

$$D_x y = 4Tan^3(5x) \bullet 5Sec^2(5x)$$

$$D_x y = 20Tan^3(5x)Sec^2(5x)$$

6. $y = Sen(3x) \bullet Cos(2x)$

$y' = Sen(3x)D_x Cos(2x) + Cos(2x)D_x Sen(3x)$

$y' = Sen(3x) \bullet -Sen(2x)(2) + Cos(2x) \bullet Cos(3x)(3)$

$y' = -2Sen(3x)Sen(2x) + 3Cos(2x)Cos(3x)$

7. $y = x^2 \bullet Tan(x)$

$y' = x^2 D_x Tan(x) + Tan(x)D_x x^2$

$y' = x^2 \bullet Sec^2(x) + Tan(x) \bullet 2x$

$y' = x^2 Sec^2(x) + (2x)Tan(x)$

8. $y = Sen\left[Cos(x^3)\right]$

$u = Cos(x^3) \rightarrow D_x u = -3x^2 Sen(x^3)$

$y = Sen(u) \rightarrow D_u y = Cos(u)$

$D_x y = -3x^2 Sen(x^3) \bullet Cos(u)$

$D_x y = -3x^2 Sen(x^3) Cos\left[Cos(x^3)\right]$

9. $y = Tan\left(\dfrac{4x^2}{x+1}\right)$

$$u = \left(\frac{4x^2}{x+1}\right)$$

$y = Tan(u) \rightarrow D_u y = Sec^2(u)$

$$D_x u = \frac{(x+1)D_x 4x^2 - 4x^2 D_x(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$D_x u = \frac{(x+1)(8x) - 4x^2(1)}{(x+1)^2}$$

$$D_x u = \frac{8x^2 + 8x - 4x^2}{(x+1)^2}$$

$$D_x u = \frac{4x^2 + 8x}{(x+1)^2}$$

$$D_x u = \frac{4x(x+2)}{(x+1)^2}$$

$$D_x y = Sec^2(u) \bullet \frac{4x(x+2)}{(x+1)^2}$$

$$D_x y = Sec^2\left(\frac{4x^2}{x+1}\right)\left[\frac{4x(x+2)}{(x+1)^2}\right]$$

10. $y = \dfrac{Sen(x)}{x^2 - 1}$

$$y' = \frac{(x^2-1)D_x Sen(x) - Sen(x)D_x(x^2-1)}{(x^2-1)^2}$$

$$y' = \frac{(x^2-1)D_x Sen(x) - Sen(x)D_x(x^2-1)}{(x^2-1)^2}$$

$$y' = \frac{x^2Cos(x) - Cos(x) - 2xSen(x)}{(x^2-1)^2}$$

```
%MATLAB
%DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS
%Hallar la primera derivada dy/dx de las siguientes
funciones:
clc
syms x
```

```
%1. y=cos(2x)
D1=diff(cos(2*x),x,1)

%2. y=sen(4x)- cos(6x)
D2=diff(sin(4*x)- cos(6*x),x,1);
pretty(D2)

%3. y=(sen(x))^4- (cos(x))^4
D3=diff((sin(x))^4-(cos(x))^4,x,1);
pretty(D3)

%4. y= (sen(3x))^2
D4=diff((sin(3*x))^2,x,1)

%5. y= (tan(5x))^4
D5=diff((tan(5*x))^4,x,1)
D5=simplify(D5)

%6. y= sen(3x)*cos(2x)
D6=diff(sin(3*x)*cos(2*x),x,1)

%7. y= (x^2)*tan(x)
D7=diff((x^2)*tan(x),x,1)

%8. y= sen[cos(x^3)]
D8=diff(sin(cos(x^3)),x,1)
pretty(D8)

%9. y= tan[(4x^2)/(x+1)]
D9=diff(tan((4*x^2)/(x+1)),x,1);
D9=simplify(D9)
pretty(D9)

%10. y= sen(x)/(x^2-1)
D10=diff(sin(x)/(x^2-1),x,1);
D10=simplify(D10)
pretty(D10)
```

Derivadas de funciones trigonométricas inversas

Tabla 4.3 Reglas generales de derivación de funciones trigonométricas inversas

1. $D_x Sen^{-1}(u) = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \bullet D_x u$

2. $D_x Cos^{-1}(u) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \bullet D_x u$

3. $D_x Tan^{-1}(u) = \dfrac{1}{1+u^2} \bullet D_x u$

4. $D_x Cot^{-1}(u) = -\dfrac{1}{1+u^2} \bullet D_x u$

5. $D_x Sec^{-1}(u) = \dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \bullet D_x u$

6. $D_x Csc^{-1}(u) = -\dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \bullet D_x u$

Ejemplos:

1. $y = x \bullet Sen^{-1}(4x)$

$$y' = xD_x Sen^{-1}(4x) + Sen^{-1}(4x) D_x x$$

$$y' = x \bullet \frac{1}{\sqrt{1-(4x)^2}}(4) + Sen^{-1}(4x) \bullet (1)$$

$$y' = \frac{4x}{\sqrt{1-16x^2}} + Sen^{-1}(4x)$$

2. $y = x^2 \bullet Tan^{-1}(x)$

$$y' = x^2 D_x Tan^{-1}(x) + Tan^{-1}(x) D_x x^2$$

$$y' = x^2 \bullet \frac{1}{1+x^2} + Tan^{-1}(x) \bullet (2x)$$

$$y' = \frac{x^2}{1+x^2} + (2x) Tan^{-1}(x)$$

3. $y = Cos^{-1}(2x^3) + x$

$$y' = D_x Cos^{-1}(2x^3) + D_x x$$

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-(2x^3)^2}}(6x^2) + 1$$

$$y' = -\frac{6x^2}{\sqrt{1-4x^6}} + 1$$

4. $y = Sec^{-1}(2x) - 5Csc^{-1}(x)$

$$y' = D_x Sec^{-1}(2x) - 5 D_x Csc^{-1}(x)$$

$$y' = \frac{1}{2x\sqrt{(2x)^2-1}}(2) - 5\left(-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\right)$$

$$y' = \frac{1}{x\sqrt{4x^2-1}} + \frac{5}{x\sqrt{x^2-1}}$$

5. $y = Sen^{-1}\left[Sen(2x)\right]$

$$u = Sen(2x) \rightarrow D_x u = 2Cos(2x)$$

$$D_x Sen^{-1}(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \bullet D_x u$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(Sen2x)^2}} \bullet 2Cos(2x)$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-Sen^2(2x)}} \bullet 2Cos(2x)$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{Cos^2(2x)}} \bullet 2Cos(2x)$$

$$y' = \frac{1}{Cos(2x)} \bullet 2Cos(2x)$$

$$y' = 2$$

```
%MATLAB
%DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS
%Hallar la primera derivada dy/dx de las siguientes
funciones:
clc
syms x

%1. y=x*arcsin(4x)
D1=diff(x*asin(4*x),x,1)
pretty(D1)

%2. y=(x^2)*arctan(x)
D2=diff((x^2)*atan(x),x,1)
pretty(D2)

%3. y= arccos(2x^3)+x
D3=diff(acos(2*x^3)+x,x,1)
pretty(D3)

%4. y= arcsec(2x)-5arccsc(x)
D4=diff(asec(2*x)-5*acsc(x),x,1)
pretty(D4)
```

```
%5. y= arcsen(sen(2x))
D5=diff(asin(sin(2*x)),x,1)
%D5=simplify(D5)
pretty(D5)

%6. y= sen(3x)*cos(2x)
D6=diff(sin(3*x)*cos(2*x),x,1)

%7. y= (x^2)*tan(x)
D7=diff((x^2)*tan(x),x,1)

%8. y= sen[cos(x^3)]
D8=diff(sin(cos(x^3)),x,1)
pretty(D8)

%9. y= tan[(4x^2)/(x+1)]
D9=diff(tan((4*x^2)/(x+1)),x,1);
D9=simplify(D9)
pretty(D9)

%10. y= sen(x)/(x^2-1)
D10=diff(sin(x)/(x^2-1),x,1);
D10=simplify(D10)
pretty(D10)
```

Derivada de una función compuesta.

Regla de la cadena

Si la función g es diferenciable en x y la función f es diferenciable en g(x), entonces la función compuesta $f \circ g$ es diferenciable en x, y:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \; g'(x)$$

Ejemplos:

1. $y = \left(4x^3 + 1\right)^2$

Observe que y es la función compuesta $f \circ g$, donde $f = x^2$ y $g(x) = 4x^3 + 1$

Como $f'(x) = 2x$ y $g'(x) = 12x^2$, se tiene que:

$y' = (f \circ g)'(x) = f'(g(x))\ \ g'(x) = 2(4x^3+1) * 12x^2 = 24x^2\,(4x^3+1)$

2. $y = sen(2x)$

Si se consideran $f(x)$=sen x y $g(x)=2x$, entonces $f'(x)$=cos x y $g'(x)=2$
$y^\wedge' = (f \circ g)'(x) = f'(g(x))\ g'(x) = \cos(2x)*2 = 2\cos(2x)$

3. $y = \left[\cos(x)\right]^{-1} = \arccos(x)$

Si se consideran $f(x)=x^{-1}$ y $g(x)$=cos x , entonces $f'(x) = -x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ y $g'(x)$=-sen x

$y' = (f \circ g)'(x) = f'(g(x))\ g'(x) = \frac{1}{(\cos x)^2} * -\text{sen } x = \frac{1}{(\cos x)^2}$

4. $y = \left(\frac{2}{x-1}\right)^5$

Si se consideran $f(x)=x^5$ y $g(x) = \frac{2}{x-1}$, entonces $f'(x)=5x^4$ y $g'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2}$

$y' = (f \circ g)'(x) = f'(g(x))\ \ g'(x) = 5\left(\frac{2}{(x-1)}\right)^4 * \frac{-2}{(x-1)} = \frac{-160}{(x-1)^6}$

5. $y = \left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)^4$

Si se consideran $f(x)=x^4$ y $g(x) = \frac{2x+1}{3x-1}$, entonces $f'(x)=4x^3$ y g' $\frac{(3x-1)2-(2x+1)3}{(3x-1)^2}$

$y' = (f \circ g)'(x) = f'(g(x))\ \ g'(x) = 4\left(\frac{2x+1}{3x-1}\right) * \frac{-5}{(3x-1)^2} = \frac{-20(2x+1)^3}{(3x-1)^5}$

6. $y = \tan(3t^2 + 2t)$

Si se consideran $f(x)$ = tan x y $g(x)$= 3t²+2t, entonces $f'(x) = sec^2\, x$ y $g'(x) = 6t + 2$

$y' = (f \circ g)'(x) = f'(g(x))\ g'(x) = \sec^2(3t^2+2t)*(6t+2) = 2(3t+1)\ sec^2\,(3t^2+2t)$

Usando la notación de Leibniz para la derivada, la regla de la cadena podría enunciarse como sigue:

Si y *es una función de* u *, es decir,* $y = f(u)$ *y* $\frac{dy}{du}$ *existe, y si* u *es una función de* x *, definida por* $u = g(x)$ *y* $\frac{du}{dx}$ *existe entonces* $\frac{dy}{dx}$ *está dado por:*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx}$$

7. $\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$

Si se consideran $y(u)$ = sen u y $u(x)$ = cos x, entonces $\frac{dy}{du}$ = *cos u* y $\frac{dy}{du}$ = *-sen x*

y'= $\frac{dy}{du} * \frac{dy}{du}$ = *cos*(*u*)* (*-sen x*)=*cos*(*cos*(*x*))* (*-sen x*)=*-sen x*[*cos*(*cosx*)]

8. $y = \sec^4(2x^2)$

Si se consideran $w(x) = v^4$, $v(x) = sec\ u$ y $u(x) = 2x^2$

Entonces $\frac{dw}{dv} = 4v^3$, $\frac{dv}{du} = \sec(u)\tan(u)$ y $\frac{du}{dx} = 4x$

Derivación implícita

$$y' = \frac{dw}{dv}\frac{dv}{du}\frac{du}{dx} = 4v^3 * \sec(u)\tan(u) * 4x = 4(\sec(2x^2))^3 * \sec(2x^2)\tan(2x^2) * 4x$$

$$y' = 16xsec^4(2x^2)\tan(2x^2)$$

Sea $f(x) = 3x^2 + 5x + 1$, se puede observar que la función está definida explícitamente, debido a que *y* se ha despejado como una función de *x*. Sin embargo, no todas las funciones pueden ser definidas explícitamente, es decir, no siempre es factible despejar algebraicamente *y* en función de *x*; por ejemplo:

$$x^6 - 2x = 3y^6 + y^5 - y^2$$

Se puede determinar la derivada $\frac{dy}{dx}$, para lo cual se derivan ambos lados de la ecuación. La derivada de los términos de la izquierda se determinar fácilmente. Por medio de la regla de la cadena se determina la derivada de los términos de la derecha.

$$D_x(x^6 - 2x) = D_x(3y^6 + y^5 - y^2)$$

$$6x^5 - 2 = 18y^5 * \frac{dy}{dx} + 5y^4 * \frac{dy}{dx} - 2y * \frac{dy}{dx}$$

Al despejar $\frac{dy}{dx}$ se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x^5 - 2}{18y^5 + 5y^4 - 2y}$$

Observe que al emplear la derivación implícita se ha obtenido una expresión para $\frac{dy}{dx}$ que contiene a las variables *x* y *y*.

Ejemplos:

Utilice la derivación implícita para determinar la pendiente de la recta tangente a la curva $x^3 + y^3 = 9$ en el punto (1,2). Encuentre una ecuación de la recta tangente.

Solución:

Al derivar implícitamente con respecto a x se obtiene:

$$3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2}{y^2}$$

En el punto (1,2), $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{4}$ La ecuación de la recta tangente es $y - 2 = -\frac{1}{4}(x - 1)$

9. Dada $x\cos y + y\cos x - 1 = 0$, calcule $\frac{dy}{dx}$

Al derivar implícitamente con respecto a x se tiene:

$$1 * \cos y + x * (-sen\, y)\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} * \cos x + y * (-sen\, x) = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(\cos x - xsen\, y) = ysen\, x - \cos y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y.sen\, x - \cos y}{\cos x - x.sen\, y}$$

1. Dado que $4x^2+9y^2 = 36$ determine $\frac{d^2y}{d^2x}$

Al derivar implícitamente con respecto a x se tiene:

$$8x + 18y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4x}{9y}$$

Para calcular $\frac{d^2y}{d^2x}$ se obtiene la derivada de un cociente teniéndose en mente que y es una función de x:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{9y(-4) - (-4y)(9 * \frac{dy}{dx})}{81y^2}$$

Si se sustituye el valor de $\frac{dy}{dx}$ en esta ecuación se tiene:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-36y - (-4y)(9 * \frac{-4x}{9y})}{81y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-36y^2 - 16x^2}{81y^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-4(9y^2 + 4x^2)}{81y^3}$$

Pero como $4x^2 + 9y^2 = 36$ entonces:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-4(36)}{81y^3} = -\frac{16}{9y^3}$$

Derivadas de orden superior

Si una función es diferenciable, entonces su derivada *f'* (*f* prima) se llama en ocasiones primera derivada de *f*. Si la función *f´* es diferenciable, entonces la derivada de *f'* se denomina segunda derivada de *f* y se denota por *f´´* (*f dos prima*). De la misma manera, la derivada de f´´ se denomina la tercera derivada de f *y* se denota por *f´´´* (*f tres prima*).

La n-esima derivada de la función f, donde n es un entero mayor que 1 se denota por $f^{(n)}$

Ejemplo:

1. Encuentre todas las derivadas de la función definida por:

$$f(x) = 8x^4 + 5x^3 - x^2 + 7$$

$$f'(x) = 32x^3 + 15x^2 - 2x$$

$$f''(x) = 96x^2 + 30x - 2$$

$$f'''(x) = 192x + 30$$

$$f^4(x) = 192$$

$$f^{(5)}(x) = 0$$

Se considera que no existe una mayor complejidad en derivar sucesivamente una expresión, si el lector está interesado podría ampliar esta temática usando cualquiera de las fuentes citadas en la bibliografía

Capítulo 5

Aplicaciones de la derivada

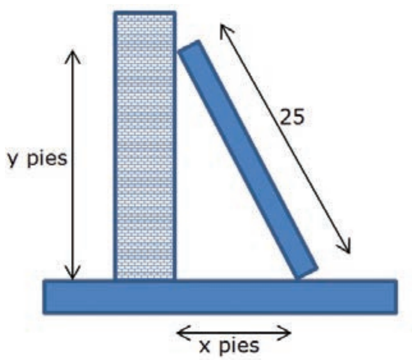
Tasas de variación relacionadas

En aplicaciones del mundo real que implican tasas de variación relacionadas, las variables tienen una relación específica para valores de t, donde t es una medida del tiempo. En general esta relación se expresa mediante una ecuación, la cual representa un modelo matemático.

Ejemplos:

1. Una escalera de 25 pies de longitud está apoyada contra una pared vertical. La base de la escalera se desliza horizontalmente alejándose de la pared a 3 pie/s. Suponga que se desea determinar qué tan rápido se desliza hacia abajo la parte superior de la escalera sobre la pared cuando su base se encuentra a 15 pies de la pared.

Figura 5.1 Escalera del ejemplo 1, sección 5.1



Datos:

S=25 ;dx/dt= 3 pie/s ; x=15 pies ; dy/dt=?

La ecuación que relaciona las variables es: $x^2 + y^2 = 25^2$

Derivando implícitamente con respecto a t: $2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$

Despejando dy/dt: $\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$

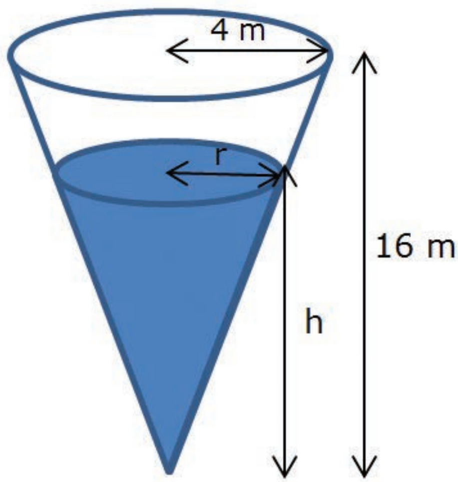
Cuando x=15 pies el valor de y es: $y = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$

Reemplazando los datos: $\frac{dy}{dt} = -\frac{15}{20} * (3) = -\frac{9}{4}$

El signo menos indica que "y" decrece conforme "t" aumenta.

2. Cierta cantidad de agua fluye a una tasa de 2 m^3/min hacia el interior de un depósito cuya forma es la de un cono invertido de 16 m de altura y 4 m de radio. ¿Qué tan rápido sube el nivel del agua cuando esta ha alcanzado 5 m de profundidad?

Figura 5.2 Depósito en forma cónica del ejemplo 2, sección 5.1



Datos:

$$\frac{dV}{dt} = 2 \ ; H = 16 \ ; R = 4 \ ; h = 5 \quad \frac{dh}{dt} = ?$$

En cualquier tiempo el volumen del agua puede expresarse como el volumen de un cono $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Sin embargo, necesitamos una expresión que dependa solamente de h y no de r, por lo que expresamos r en términos de h usando semejanza de triángulos en la figura 5.2.

$$\frac{r}{h} = \frac{4}{16} \quad \rightarrow \quad r = \frac{1}{4}h$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación del volumen:

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{4}h\right)^2 h \ = \ \frac{1}{48}\pi h^3$$

Derivando esta expresión con respecto a t:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{16}\pi h^2 \frac{dh}{dt}$$

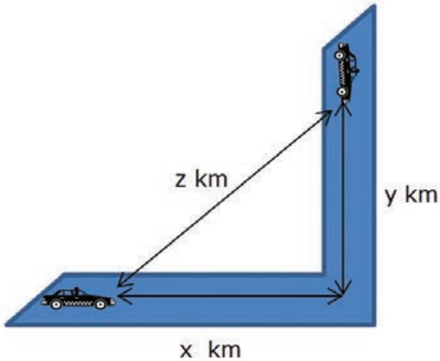
Remplazando los datos, despejando y evaluando en h=5 m:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{32}{\pi h^2} = \frac{32}{25\pi} \approx 0.4074\frac{m}{min} = 40.74\ cm/min$$

El nivel de agua sube a una tasa de 40.74 cm/min cuando el agua ha alcanzado una profundidad de 5 m.

1. Dos automóviles, uno va hacia el este a una tasa de 90 km/h, y el otro hacia el sur a 60 km/h se dirigen a la intersección de dos carreteras, ¿a qué tasa se están aproximando uno al otro en el instante en que los automóviles están a 0.2 km y 0.15 km respectivamente de la intersección?

Figura 5.3 Automóviles del ejemplo 3, sección 5.1



Datos:

$$\frac{dx}{dt} = -90\,; \frac{dy}{dt} = -60\ ; x = 0.2$$

$$y = 0.5; \quad \frac{dz}{dt} = ?$$

La relación entre las variables es: $z^2 = x^2 + y^2$

Al derivar con respecto a t: $2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}}{z}$$

Cuando x = 0.2 y y = 0.15 se tiene que z=0.25. Reemplazando los datos:

$$\frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dt}} = \frac{0.2(-90) + 0.15(-60)}{0.25}$$

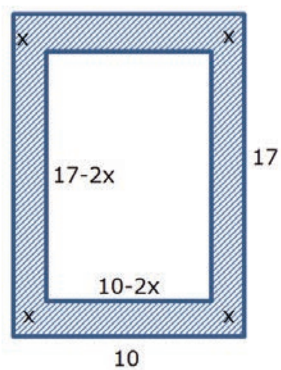
En el instante en cuestión, lo carros se aproximan uno al otro a una tasa de 108 km/h.

Máximos y mínimos

Ejemplos:

1. Un fabricante de cajas de cartón quiere elaborar cajas abiertas a partir de trozos rectangulares con dimensiones de 10 x 17 pulg cortando cuadrados en las cuatro esquinas y doblando los lados hacia arriba. Se desea determinar la longitud del lado de los cuadrados que se deben cortar de modo que la caja tenga el mayor volumen posible.

Figura 5.4 Caja de cartón del ejemplo 1, sección 5.2



Si x es la longitud de los lados de los cuadrados, el volumen de la caja es:

$$V(x) = x(10 - 2x)(17 - 2x)$$

$$V(x) = 170x - 54x^2 + 4x^3$$

Para obtener los números críticos se calcula V'(x) y se determinan los valores de x para los que V´(x)=0.

$$V'(x) = 170 - 108x + 12x^2 = 0$$

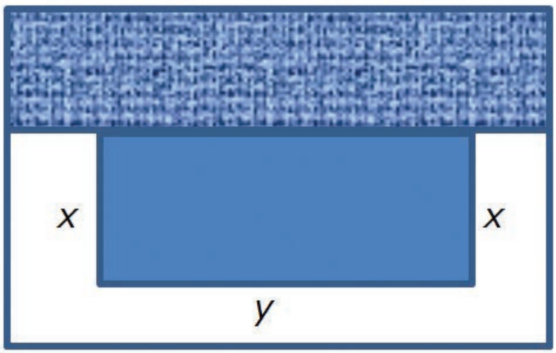
De donde se obtiene $x = 6.97$ y $x = 2.03$, de modo que el único valor crítico de V es 2.03 ya que x no puede ser superior a 5, por lo tanto:

$$V(2.03) = 156.03\, pulg^3$$

Que es el volumen máximo cuando $x = 2.03\, pulg$.

1. Un terreno rectangular se encuentra a la orilla de un río y se desea delimitar de modo que no se utilice cerca a lo largo de la orilla. Si el material para la cerca de los lados cuesta \$12 por pie colocado y \$18 por pie colocado para el lado paralelo al río. Determine las dimensiones del terreno de mayor área posible que pueda limitarse con \$5400 de cerca.

Figura 5.5 Terreno rectangular del ejemplo 2, sección 5.2



Dadas las dimensiones de la figura el área es:
$A = x.y$
La ecuación que establece el costo de la cerca es:

$$12x + 12x + 18y = 5400$$

A fin de expresar el área en términos de
Una sola variable despejamos y en la última ecuación y la sustituimos en la ecuación del área:

$$A(x) = x\left(300 - \frac{4}{3}x\right) = 300x - \frac{4}{3}x^2$$

Igualamos a cero la derivada de esta expresión para hallar los puntos críticos:

$$A'(x) = 300 - \frac{8}{3}x = 0$$

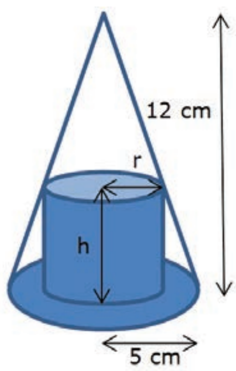
$$x = \frac{900}{8} = 112.5 \text{ pies}$$

Y por consiguiente y = 150 pies

Por lo tanto, el terreno de mayor área posible que se puede cercar con $5400 de cerca tiene un área de 16 875 pie2, cuando la longitud del lado paralelo al río mide 150 pies y la longitud de cada lado no paralelo al río es de 112.5 pies.

2. Estime las dimensiones del cilindro circular recto de mayor volumen que pueda inscribirse en un cono circular recto cuyo radio mide 5 cm y su altura es de 12 cm.

Figura 5.6 Cilindro circular recto inscrito en el cono circular del ejemplo 3, sección 5.2



Volumen del cilindro: $V=\pi r^2 h$

A fin de expresar *v* en términos de solamente una variable se necesita otra ecuación que contenga a r y h la que obtenemos de los triángulos semejantes de la figura 5.6.

$$\frac{12-h}{r}=\frac{12}{5}$$

$$h=\frac{60-12r}{5}$$

Sustituimos esta expresión en la fórmula del volumen, derivamos e igualamos a cero la derivada.

$$V(r)=\frac{12}{5}\pi(5r^2-r^3)$$

$$V'(r)=\frac{12}{5}\pi(10r-3r^2)=0$$

$$r(10-3r)=0$$

$$r=\frac{10}{3}\approx 3.33\ldots$$

Por lo tanto, cuando $r=\frac{10}{3}$, $h=4$ *y el volumen del cilindro es:*

$$V\left(\frac{10}{3}\right)=\frac{400\pi}{9}\approx 139.63\ cm^3$$

Regla de l'hopital

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones diferenciables y $g'(x)\neq 0$ suponga que:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$lim_{x \to a} f(x) = 0 \qquad y \qquad lim_{x \to a} g(x) = 0$$

$$lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \qquad y \qquad lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ejemplos:

1. Encuentre $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = \frac{\ln 1}{1 - 1} = \frac{0}{0} \quad \text{Indeterminación}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{d}{dx}(\ln x)}{\frac{d}{dx}(x - 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x} = 1$$

2. Encuentre $\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{Indeterminación}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{d}{dx}(e^x)}{\frac{d}{dx}(x^2)} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2x} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{Indeterminación}$$

Aplicamos nuevamente la regla:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}(e^x)}{\frac{d}{dx}(x^2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x} = \frac{\infty}{\infty}$$

3. Encuentre $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \frac{\infty}{\infty} \text{ Indeterminación}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}(\ln x)}{\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{3}}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{x}} = 0$$

4. Encuentre $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \frac{0-0}{0} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}(\tan x - x)}{\frac{d}{dx}(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación}$$

Aplicamos nuevamente la regla:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}(\sec^2 x - 1)}{\frac{d}{dx}(3x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sec^2 x \tan x}{6x} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación}$$

Y aplicamos la regla por tercera vez:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sec^2 x \tan x}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}(2\sec^2 x \tan x)}{\frac{d}{dx}(6x)} = \lim_{x\to 0} \frac{4\sec^2 x \tan^2 x + 2\sec^4 x}{6} = \frac{1}{3}$$

Bibliografía

Aguilar Márquez, A. (2010). *Geometría, Trigonometría y Geometría Analítica*. México: Pearson.

_____ (2011). *Cálculo diferencial e integral*. México: Pearson.

Colección Goñi (2003). *Geometría teoría y práctica*. Lima: Editorial Ingeniería.

Dennis, Z. (2010). *Cálculo de una variable, trascendentes tempranas*. Boston: McGraw-Hill.

Garza Olvera, B. (2011). *Geometría analítica*. México: Pearson.

Gilat, Amos (2010). MATLAB: *An Introduction with Applications*. United States: Wiley.

Grossman, S. y Flores, J. J. (2012). *Álgebra lineal*. México: McGraw-Hill.

Jiménez, R. (2012). *Matemáticas III. Geometría analítica, enfoque por competencias*. México: Pearson.

_____ (2012). *Matemáticas III. Geometría analítica, enfoque por competencias.* México: Pearson.

Martínez, M. Á. (1996). *Matemáticas III*. México: McGraw-Hill.

_____ (1997). *Matemáticas IV*. México: McGraw-Hill.

Mora, W. y Figueroa, G. (2009). *Cálculo superior. Teoría y ejemplos. Revista digital de Matemática, Educación e Internet*. Costa Rica.

Purcell, Varberg, Rigdon (2007). *Cálculo*. México: Pearson.

Stewart, J. (2014). *Cálculo de una variable*. Boston: Cengage Learning.

Swokowski, E.W. (2009). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. México: Cengage Learning Editores S.A.

Thomas (2006). *Cálculo de una variable*. México: Pearson.

Vera Lázaro, A. (2013). *Cálculo diferencial con Matlab*. MACRO.

Este libro tiene el propósito de fortalecer el aprendizaje del cálculo de una variable en los estudiantes universitarios de los primeros niveles de las carreras de Ingenierías y afines; también contribuye a la difusión de las matemáticas utilizando un lenguaje sencillo y fácil de interpretar por los lectores. Se hace igualmente uso de las tecnologías de información y comunicación a través de una potente herramienta de simulación matemática como lo es Matlab, lo cual permite al lector contrastar los resultados, e innovar su proceso de enseñanza- aprendizaje.

El texto está dividido en 5 capítulos, su contenido a grandes rasgos es el siguiente: en el capítulo 1 se abarcan temas de Geometría Analítica en el plano, en donde se estudian las secciones cónicas y las rectas. El capítulo 2 analiza las funciones de una variable real, entre las principales está la función cuadrática, y la función valor absoluto, entre otras. El capítulo 3 trata sobre el límite de una función, así como sus principales teoremas y propiedades. En el capítulo 4 se estudia la derivada y sus propiedades, para finalizar en el capítulo 5 se realizan aplicaciones de las derivadas resolviendo ejercicios de optimización usando máximos y mínimos.

ABYA YALA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA SALESIANA

ECUADOR
SALESIANOS DON BOSCO

ISBN: 978-9978-10-232-9
9 789978 102329