



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA SALESIANA
UNIDAD DE POSGRADOS

MAESTRÍA EN MÉTODOS NUMÉRICOS PARA DISEÑO EN INGENIERÍA

Tesis previa a la obtención
del Grado de Magíster
en Métodos Numéricos
para Diseño en Ingeniería

**MODELACIÓN DE FLUJO TRANSITORIO
EN UN CANAL TRAPEZOIDAL
POR EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS**

Autores:

Boris Fernando Mejía Regalado.

Marcelo Santiago Tamayo Mora.

Dirigido por:

Edgar Paúl Álvarez Lloret.

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA SALESIANA

UNIDAD DE POSGRADOS

MAESTRÍA EN MÉTODOS NUMÉRICOS PARA DISEÑO EN INGENIERÍA

Autores:

Boris Fernando Mejía Regalado.

Marcelo Santiago Tamayo Mora.

Dirigido por:

Edgar Paúl Álvarez Lloret.

MODELACIÓN DE FLUJO TRANSITORIO EN UN CANAL TRAPEZOIDAL POR EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

El estudio del flujo de agua en canales abiertos ha sido abordado siempre de una manera simplista, esto se ha debido principalmente a la dificultad que plateaba la resolución de las ecuaciones y modelos matemáticos que conlleva un flujo en la realidad. Como es bien conocido las corrientes y flujos en la naturaleza son de carácter tridimensional con sus complejidades propias como es el caso de las vorticidades, saltos hidráulicos, variaciones de rugosidad, pendiente, sección, caudal, etc. Particularidades que se presentan a lo largo del tiempo y que influyen directamente en las condiciones hidráulicas del flujo. El advenimiento de las computadoras y el desarrollo del Método de los Elementos Finitos han permitido abordar el problema considerando las diferentes variables que presenta.

Las investigaciones realizadas hasta la actualidad, sobre los fenómenos de flujo transitorio, tienen un carácter matemático complejo que ha hecho que los Ingenieros Civiles se mantengan un poco alejados del tema, en contraste con esto, los software comerciales que se manejan actualmente para el análisis de los flujos y diseño de estructuras hidráulicas constituyen verdaderas cajas negras sobre las cuales no existe conocimiento alguno sobre su funcionamiento y calidad de resultados obtenidos.

Con la presente investigación se pretende dar una introducción al tema del análisis del flujo transitorio, enfocándose en el flujo a superficie libre en canales trapezoidales, que sirva como base para una serie de estudios posteriores relacionados con el tema.

**MODELACIÓN DE FLUJO TRANSITORIO
EN UN CANAL TRAPEZOIDAL POR EL
MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS**

MODELACIÓN DE FLUJO TRANSITORIO EN UN CANAL TRAPEZOIDAL POR EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

BORIS FERNANDO MEJÍA REGALADO

Ingeniero Civil

Egresado de la Maestría en Métodos Numéricos para Diseño en Ingeniería
Universidad Politécnica Salesiana

MARCELO SANTIAGO TAMAYO MORA

Ingeniero Civil

Egresado de la Maestría en Métodos Numéricos para Diseño en Ingeniería
Universidad Politécnica Salesiana

Dirigido por:

EDGAR PAÚL ALVAREZ LLORET

Ingeniero Mecánico

Master en Métodos Numéricos



Cuenca – Ecuador

MEJÍA REGALADO BORIS FERNANDO Y TAMAYO MORA MARCELO SANTIAGO

Modelación de flujo transitorio en un canal trapezoidal por El Método de los Elementos Finitos

Universidad Politécnica Salesiana, Cuenca – Ecuador, 2015

INGENIERIA CIVIL

Formato 170 x 240 mm

Páginas: 89

Breve reseña de los autores e información de contacto:

Autores:



Boris Fernando Mejía Regalado

Ingeniero Civil

Egresado de la Maestría en Métodos Numéricos para Diseño en Ingeniería

mejiaboris@yahoo.com



Marcelo Santiago Tamayo Mora

Ingeniero Civil

Egresado de la Maestría en Métodos Numéricos para Diseño en Ingeniería

marcelotamayomora@hotmail.com

Dirigido por:



Edgar Paúl Álvarez Lloret

Ingeniero Mecánico

Máster en Métodos Numéricos

alvarezlloret@hotmail.com

Todos los derechos reservados.

Queda prohibida, salvo excepción prevista en la Ley, cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública y transformación de esta obra para fines comerciales, sin contar con autorización del titular de propiedad intelectual. La infracción de los derechos mencionados puede ser constitutiva de delito contra la propiedad intelectual. Se permite la libre difusión de este texto con fines académicos o investigativos por cualquier medio, con la debida notificación al autor.

DERECHOS RESERVADOS

©2015 Universidad Politécnica Salesiana.

CUENCA - ECUADOR – SUDAMÉRICA

TAMAYO MORA MARCELO SANTIAGO

Modelación de flujo transitorio en un canal trapezoidal por El Método de los Elementos Finitos.

Edición y Producción:

Mejía Regalado Boris Fernando y Tamayo Mora Marcelo Santiago

Diseño de la portada:

Mejía Regalado Boris Fernando y Tamayo Mora Marcelo Santiago

IMPRESO EN ECUADOR - PRINTED IN ECUADOR

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE GENERAL	v
ÍNDICE DE FIGURAS	vi
ÍNDICE DE TABLAS	viii
LISTA DE SÍMBOLOS	ix
PREFACIO	xiii
PRÓLOGO	xv
AGRADECIMIENTO	xvii
CAPÍTULO 1	1
1.1 Antecedentes. Estado del Arte	3
1.2 Justificación	4
1.3 Objetivo General	4
1.4 Objetivos Específicos	4
CAPÍTULO 2	7
2.1 Introducción al Flujo Transitorio en Canales Abiertos	9
2.2 Ecuaciones fundamentales para flujo unidimensional no permanente gradualmente variado en canales	11
2.2.1 Ecuación del Balance de Masa o Ecuación de la Continuidad	11
2.2.2 Ecuación del Balance de la Cantidad de Movimiento	17
CAPÍTULO 3	27
3.1 Introducción	29
3.2 El Método de los Elementos Finitos en problemas de Flujo Transitorio	29
3.2.1 Ecuaciones fundamentales para Flujo en Régimen Transitorio.	31
3.2.2 Condiciones de contorno	33
3.2.3 Mallado y discretización	33
3.3 El Método de los Incrementos Finitos en problemas de Flujo Transitorio	35
3.3.1 Condiciones de contorno	37
CAPÍTULO 4	39
4.1 Ejemplo de flujo transitorio analizado en un canal trapezoidal por el Método de los Incrementos Finitos	41
4.1.1 Datos iniciales	42
4.2 Ejemplo de flujo transitorio analizado en un canal trapezoidal por el Método de los Elementos Finitos.	46
4.2.1 Simulación 1: Flujo en canal principal y secundario (río)	47
4.2.2 Simulación 2: Flujo en canal principal y vertedero de regulación de niveles y caudales en canal secundario (río)	53
CAPÍTULO 5	59
5.1 Comparación de resultados	61
CAPÍTULO 6	65
6.1 CONCLUSIONES	67
6.2 RECOMENDACIONES	67
ANEXOS	69
BIBLIOGRAFÍA	89

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura No. 1 Volumen de Control Diferencial en un Canal con Flujo Transitorio.	13
Figura No. 2 Aplicación del Principio del Balance de la Cantidad de Movimiento a un Volumen de Control de un Canal.	21
Figura No. 3 Flujo bidimensional real en un cauce de un río a través de una pila de un puente.	30
Figura No. 4 Simulación computacional del flujo en un cauce natural.	31
Figura No. 5 Discretización y mallado para el análisis del flujo alrededor de un ala de avión.	34
Figura No. 6 Mallado móvil para el análisis del flujo en un tubo Venturi.	34
Figura No. 7 Esquema de discretización y análisis de flujo transitorio en un canal prismático por el Método de los Incrementos Finitos.	35
Figura No. 8 Flujo transitorio en un canal trapezoidal que descarga en una corriente natural.	41
Figura No. 9 Sección transversal del canal trapezoidal del problema a analizar.	42
Figura No. 10 Calados del agua en las diferentes abscisas del canal.	44
Figura No. 11 Variación de los calados del agua en las diferentes abscisas del canal con el tiempo t	46
Figura No. 12 Geometría del problema.	47
Figura No. 13 Mallado.	47
Figura No. 14 Definir superficies de contorno.	48
Figura No. 15 Variación del calado del canal con las crecidas.	49
Figura No. 16 Postproceso: Resultados mediante la utilización de planos auxiliares.	50
Figura No. 17 Postproceso: Resultados mediante la utilización de iso-superficies.	51
Figura No. 18 Postproceso: Resultados mediante la renderización de volúmenes.	51
Figura No. 19 Postproceso: Resultados numéricos en regiones determinadas.	52
Figura No. 20 Postproceso: Resultados con líneas de corriente y volúmenes de fluido. Presencia de turbulencia.	52
Figura No. 21 Postproceso: Resultados con iso-superficies. Presencia de turbulencia.	53
Figura No. 22 Geometría para segunda simulación.	53
Figura No. 23 Mallado, con refinado malla en la descarga del canal principal.	54
Figura No. 24 Definición de superficies de contorno.	54
Figura No. 25 Variación del calado con las crecidas.	55
Figura No. 26 Postproceso: Resultados mediante la utilización de planos auxiliares.	56
Figura No. 27 Postproceso: Líneas de flujo con sus respectivas velocidades.	56
Figura No. 28 Postproceso: Resultados mediante la utilización de iso-superficies.	57
Figura No. 29 Comparación de resultados de simulaciones de la crecida 1.	57
Figura No. 30 Comparación de resultados de simulaciones de la crecida 2.	58
Figura No. 31 Comparación de resultados de ambos métodos en flujo estacionario.	62
Figura No. 32 Comparación de resultados de ambos métodos en flujo transitorio $t=4$ s.	62

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura No. 33 <i>Comparación de resultados de ambos métodos en flujo transitorio $t=7$ s.</i>	63
Figura No. 34 <i>Comparación de resultados de ambos métodos en flujo transitorio $t=7$ s.</i>	63
Figura No. 35 <i>Grilla Espacio – Temporal del Esquema de Preissmann.</i>	71

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla No. 1 <i>Perfil y parámetros de Flujo en el canal para el tiempo $t=0$.</i>	43
Tabla No. 2 <i>Limnigrama de alturas en la descarga del canal.</i>	44
Tabla No. 3 <i>Resultados obtenidos aplicando el Método de los Incrementos Finitos.</i> ..	45
Tabla No. 4 <i>Resultados obtenidos de la modelación.</i>	49
Tabla No. 5 <i>Resultados obtenidos de la modelación.</i>	55
Tabla No. 6 <i>Comparación de los resultados obtenidos según los Método de Incrementos Finitos y Elementos Finitos</i>	61

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathcal{A}	propiedad cualquiera del flujo.
A	área de la sección transversal de un volumen de control, área mojada.
\underline{b}	vector de fuerzas máxicas.
C	coeficiente de Chézy.
dp	diferencial de presión.
dS, dA	diferencial de superficie.
dt	diferencial de tiempo.
dV	diferencial de volumen.
dx	diferencial de longitud.
F	vector de fuerzas.
F_p	fuerza de presión.
F_R	fuerza de rozamiento viscoso en las paredes del canal.
g	aceleración de la gravedad.
h	profundidad del flujo.
h_g	profundidad del centro de gravedad de una sección transversal.
L	longitud del volumen de control.
M_V	cantidad de masa contenida en el volumen V .
\underline{n}	vector unitario normal a la superficie de contorno de un volumen o medio continuo.
n	coeficiente de rugosidad de Manning.
p	presión termodinámica, campo de presiones.
P	perímetro mojado.
P	función que define a un fluido barotrópico.
Q	caudal.
q	caudal de entrada o salida al volumen de control por unidad de longitud.
R	radio hidráulico.
S_0	pendiente del fondo del canal.
S_f	pendiente de la línea de energía.
t	coordenada temporal.
\underline{t}	vector de tensiones actuantes sobre el contorno del volumen de control.
T	ancho de la superficie libre.
\underline{t}_R	vector de tensiones por rozamiento.
\underline{v}	campo de velocidades.

v	<i>velocidad media del flujo.</i>
V	<i>volumen de control.</i>
$v_{nentrada}$	<i>velocidad normal de entrada de flujo al volumen de control.</i>
$v_{nsalida}$	<i>velocidad normal de salida de flujo del volumen de control.</i>
W	<i>peso del volumen de control.</i>
\underline{x}	<i>vector posición.</i>
y	<i>altura o calado de flujo.</i>
\forall	<i>operador para todo.</i>
∂	<i>operador diferencial o derivada parcial.</i>
\bullet	<i>producto escalar.</i>
χ	<i>potencial de velocidades.</i>
Δ	<i>diferencia finita, operador laplaciano.</i>
ϕ	<i>potencial de fuerzas másicas.</i>
∇	<i>divergencia.</i>
θ	<i>ángulo de inclinación del canal.</i>
ρ	<i>densidad</i>
$\underline{\underline{\sigma}}$	<i>matriz de tensiones o tensor de tensiones en notación ingenieril.</i>
τ_R	<i>esfuerzo cortante promedio.</i>
Ψ	<i>cantidad de la propiedad A por unidad de masa.</i>
$\underline{\underline{1}}$	<i>tensor unidad.</i>
2ω	<i>vector vorticidad.</i>

DEDICATORIA

A mi esposa Lorena, por su apoyo incondicional y por haberme regalado lo más valioso de mi vida que son mis hijos.

A mis hijas Gaby y Luciana, por darme esa alegría todos los días.

A mi hijo David, que desde el cielo guía mis pasos.

Boris.

A mis padres que gracias a su esfuerzo, apoyo y amor incondicional en cada instante de mi vida hicieron posible mi educación y forjaron mi porvenir.

A mis familiares y amigos que siempre estuvieron presentes en los momentos más difíciles de mi existencia.

Marcelo.

PREFACIO

El estudio del flujo de agua en canales abiertos ha sido abordado siempre de una manera simplista, esto se ha debido principalmente a la dificultad que planteaba la resolución de las ecuaciones y modelos matemáticos que conlleva un flujo en la realidad. Como es bien conocido las corrientes y flujos en la naturaleza son de carácter tridimensional con sus complejidades propias como es el caso de las vorticidades, saltos hidráulicos, variaciones de rugosidad, pendiente, sección, caudal, etc. Particularidades que se presentan a lo largo del tiempo y que influyen directamente en las condiciones hidráulicas del flujo. El advenimiento de las computadoras y el desarrollo del Método de los Elementos Finitos han permitido abordar el problema considerando las diferentes variables que presenta.

Las investigaciones realizadas hasta la actualidad, sobre los fenómenos de flujo transitorio, tienen un carácter matemático complejo que ha hecho que los Ingenieros Civiles se mantengan un poco alejados del tema, en contraste con esto, los software comerciales que se manejan actualmente para el análisis de los flujos y diseño de estructuras hidráulicas constituyen verdaderas cajas negras sobre las cuales no existe conocimiento alguno sobre su funcionamiento y calidad de resultados obtenidos.

PRÓLOGO

El presente manuscrito trata de la modelación numérica de un flujo transitorio en un canal trapezoidal, mediante el Método de los Elementos Finitos contrastado con el Método de los Incrementos Finitos o Diferencias Finitas.

El objetivo principal del presente estudio es establecer un modelo matemático adecuado que permita simular todos los fenómenos físicos que influyen en un problema transitorio de flujo de fluidos a superficie libre, concretamente el flujo de agua en un canal abierto tipo trapezoidal.

Una vez establecidos los resultados de ambos métodos numéricos se contrastan las soluciones obtenidas de forma que nos permitan ver las potencialidades y debilidades de cada uno de ellos.

La formulación matemática que se ha utilizado permite concatenar las ecuaciones fundamentales de la Mecánica de Medios Continuos con el caso particular del flujo de fluidos a superficie libre, obteniéndose las Ecuaciones Hidráulicas tan conocidas para los Canales Abiertos.

Finalmente con la presente investigación se pretende dar una contribución al campo de la Mecánica de Fluidos que sea la base y el punto de partida para futuras investigaciones en la rama de la Hidráulica Ingenieril.

AGRADECIMIENTO

A Dios por ser nuestra fortaleza, esperanza y refugio.

A los señores Ing. Paúl Álvarez Lloret M.Sc Director de la Tesis y Profesor de las Cátedras de Elementos Finitos y Transmisión de Calor, Ing. Esteban Samaniego Ph.D., profesor de las Cátedras de Mecánica de Medios Continuos y Leyes de Materiales, Ing. Olena Neidiuk M.Sc, Directora de la Maestría, por todo el respaldo, el conocimiento y la amistad que nos brindaron.

CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN

1.1 Antecedentes. Estado del Arte

El estudio del flujo en canales comenzó hace varios milenios atrás, en la antigua Mesopotamia, con los canales de riego que permitían el abastecimiento de agua para el cultivo. En el año 1000 AC los romanos perfeccionaron la técnica para el diseño y construcción de canales y acueductos que permitían abastecer del líquido vital a las principales ciudades del imperio, aunque los conocimientos de estas épocas eran puramente empíricos permitieron una adecuada comprensión del transporte y abastecimiento de agua mediante cauces y estructuras artificiales.

A inicios del siglo XVIII, durante las primeras décadas de los años 1700, el ingeniero hidráulico Antoine de Chézy, desarrolló los primeros modelos matemáticos que permitían aproximar el comportamiento del flujo en canales abiertos.

A mediados el siglo XIX, el ingeniero hidráulico Henri-Émile Bazin, prosiguió con el estudio de Chézy, estableciendo un mejor modelo matemático para la descripción del flujo a superficie libre en un canal así como el comportamiento hidráulico de algunas estructuras como vertederos y compuertas.

Paralelamente a Bazin, el ingeniero hidráulico Robert Manning, desarrollo su propia ecuación para predecir el flujo de canales hacia finales del siglo XIX, para ello comparó y evaluó siete de las mejores y más conocidas fórmulas de la época: Du Buat (1786), Eytelwein (1814), Weisbach (1845), St. Venant (1851), Neville (1860), Darcy – Bazin (1865) y Ganguillet – Kutter (1869).

Entre finales del siglo XVIII e inicios del siglo XX, los físicos Claude Louis Marie Henri Navier y George Gabriel Stokes, desarrollaron las formas diferenciales de las ecuaciones fundamentales para la Dinámica de Fluidos, que son las que se utilizan hasta la actualidad.

De forma paralela a Navier y Stokes el científico Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant desarrolló las ecuaciones dinámicas para flujo 1D, las cuales pueden deducirse a partir de las Ecuaciones Fundamentales de Navier-Stokes.

Ven Te Chow, a mediados del siglo XX, desarrolló algunos métodos y mejoró notablemente los modelos matemáticos para el diseño de canales y diversas estructuras hidráulicas.

Con el advenimiento de las computadoras y el desarrollo del Método de las Diferencias Finitas (1941) y el Método de los Elementos Finitos (1956), se pudo realizar análisis e hipótesis más complejas considerando flujos transitorios y tridimensionales que en épocas anteriores hubieran sido imposibles de resolver.

En los últimos años la utilización del Método de los Elementos Finitos ha permitido analizar casos muy complejos de flujos, tanto compresibles como incompresibles. Esto ha hecho posible el diseño de transbordadores, submarinos, trenes bala, torpedos, vehículos de carrera, etc., supliendo cada vez más la construcción de modelos a escala o prototipos y sus respectivas pruebas en túneles de viento e instalaciones afines.

1.2 Justificación

El diseño adecuado de canales y estructuras hidráulicas es de fundamental importancia para el abastecimiento de agua potable y el tratamiento de agua residuales, debido principalmente a la necesidad básica que representa este tipo de obras en la vida del ser humano.

Las obras de abastecimiento de agua potable son de carácter fundamental, pues se puede carecer de muchas otras necesidades como energía, vivienda, vestido, etc., pero del agua no, debido a que es de primordial necesidad para sostener la vida del ser humano en la actualidad.

En cuanto a las estructuras para tratamiento de aguas residuales en los últimos años se han convertido en el pilar de las sociedades modernas, pues para evitar la contaminación de los cursos naturales de agua, los cuales sirven para el abastecimiento de agua, es necesaria la depuración de las aguas residuales.

En general, el estudio de los cursos naturales de agua, represas, acueductos, canales y diferentes estructuras requiere de una modelación muy acorde a la realidad pues la no abundancia de recursos naturales y económicos en nuestro medio hace primordial que los estudios y diseños sean óptimos de forma que dichos recursos sean aprovechados al máximo

1.3 Objetivo General

Modelar el comportamiento hidráulico de un flujo transitorio en un canal trapezoidal, contrastando los datos obtenidos con el método completo o método de incrementos finitos, considerando además la influencia de las simplificaciones asumidas por este método para el análisis de este fenómeno.

1.4 Objetivos Específicos

Los principales fines a los que se pretende alcanzar con la presente investigación son:

- Establecer los parámetros necesarios como condiciones de contorno, condiciones iniciales, geometrías y demás características necesarias para modelar el flujo a superficie libre de carácter transitorio en un canal trapezoidal.
- Contrastar y comparar el grado de influencia de las simplificaciones hidráulicas que siempre se han considerado dentro del estudio y diseño de los canales abiertos y de las estructuras hidráulicas, y su influencia en la modelación de los flujos a superficie libre en canales por el Método de los Elementos Finitos.

CAPÍTULO 2
FLUJO TRANSITORIO EN CANALES
ABIERTOS

2.1 Introducción al Flujo Transitorio en Canales Abiertos

El flujo no permanente o transitorio es la forma más común de flujo encontrado en la naturaleza, para caso de los canales abiertos naturales y artificiales, la variabilidad de la condiciones del flujo del agua es notoria, debido a la presencia de diversos fenómenos que alteran dichas condiciones, entre estos fenómenos, los cuales pueden ser naturales o causados por el hombre, están:

- Escorrentía Superficial, la lluvia provoca un aumento de caudal en el canal tanto en el espacio como en el tiempo.
- Fenómenos de Infiltración, la infiltración produce una disminución progresiva del caudal que conduce el canal, esto es de especial atención cuando se presentan suelos altamente porosos y en extensiones grandes del canal, en donde las pérdidas pueden ser significativas. Generalmente la infiltración se produce en todo tipo de canales tanto naturales como artificiales, pero es más palpable para el caso de cursos naturales de agua como ríos, quebradas, etc., o en canales artificiales en tierra o en suelos poco consolidados.
- Deslizamientos, los derrumbes de material sólido pueden provocar el taponamiento del flujo en el canal y causar el embalsamiento del agua, lo cual a su vez genera una onda traslacional hacia aguas arriba del embalse que altera los niveles o calados del agua en el canal y por ende el caudal transportado.
- Manipulación de Estructuras de Control, la apertura o cierre de compuertas, esclusas, aliviaderos, orificios, etc., alteran visiblemente el flujo, pues dichas estructuras regulan considerablemente los calados y los caudales del agua en los canales.

El flujo no permanente en canales generalmente está relacionado con ondas traslacionales, las cuales son ondas gravitacionales que se propagan en un canal abierto provocando un desplazamiento significativo de las partículas del agua en una dirección paralela al flujo.

Para propósitos de análisis, el flujo no permanente en canales abiertos suele clasificarse en dos tipos: el flujo no permanente gradualmente variado y el flujo no permanente rápidamente variado.

El flujo no permanente gradualmente variado se caracteriza por presentar una curvatura del perfil de onda suave y un cambio gradual de la profundidad del agua. La componente vertical de la aceleración de las partículas del agua es insignificante comparada con la aceleración total, por lo que puede despreciarse para el caso de un

análisis. Este tipo de flujo se presenta en las ondas de creciente y en las debidas a la operación lenta de estructuras de control.

En el caso del flujo no permanente rápidamente variado, la curvatura del perfil de onda es muy grande, a tal punto que puede volverse virtualmente discontinua. La componente vertical de la aceleración es de consideración y desempeña un papel preponderante en la forma del perfil del agua. Algunos ejemplos de flujo no permanente rápidamente variado son las oleadas provocadas por la operación rápida de estructuras de control, colapsos de diques, etc.

Actualmente es conocido el interés de la Hidráulica en establecer modelos físicos que permitan resolver los problemas transitorios de forma rápida, eficiente y precisa. A lo largo de la historia del desarrollo de la Hidráulica se han planteado modelos empíricos y numéricos que han permitido establecer el comportamiento de los transitorios hidráulicos. La principal barrera que existía en el pasado era la imposibilidad de resolver las ecuaciones diferenciales parciales que resultaban de la aplicación de los principios físicos fundamentales de la mecánica, sin embargo con la aparición de los métodos numéricos y el advenimiento de los computadores estos problemas han sido superados.

En el campo de la Mecánica de Fluidos el principal método numérico empleado es el Método de Incrementos Finitos, actualmente el Método de los Elementos Finitos y el Método de los Volúmenes Finitos están en pleno auge en el campo de los fluidos y su aplicación esta poco a poco ganando un espacio importante a nivel mundial. Cabe recalcar que en el análisis de flujos bidimensionales y tridimensionales el Método de los Elementos Finitos y el Método de los Volúmenes Finitos resultan más apropiados pues se ajustan de mejor forma a todo tipo de geometrías. Para flujos unidimensionales donde la geometría no sea predominante en el problema y se requiera únicamente el conocimiento de unos pocos parámetros del flujo en algunos puntos de interés es recomendable la aplicación del Método de Incrementos Finitos por la simplicidad de su aplicación.

El presente manuscrito se centrará en el análisis del flujo no permanente gradualmente variado, el cual es de mucho interés en el diseño de estructuras hidráulicas como bocatomas de agua, represas, canales, etc., donde permanentemente se requiere un análisis de los caudales de operación, los cuales son generalmente captados de cursos naturales de agua, mismos que se caracterizan por una variabilidad marcada en las condiciones de circulación del flujo. Particularmente analizaremos el caso de flujo unidimensional no permanente gradualmente variado para el caso de un canal trapezoidal con un aporte lateral de caudal. Para la resolución de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el flujo unidimensional no permanente gradualmente variado, en el caso descrito anteriormente, se empleará el Método de los Incrementos Finitos por su versatilidad de aplicación, al tratarse de un caso singular de flujo unidimensional.

2.2 Ecuaciones fundamentales para flujo unidimensional no permanente gradualmente variado en canales

Las hipótesis a asumir se indican a continuación:

- 1) El agua se considerará como un fluido barotrópico perfecto e incompresible.
- 2) El flujo se asumirá unidimensional e irrotacional, pues generalmente para el caso de canales, las líneas de corriente están bien definidas y las partículas de agua siguen trayectorias paralelas al eje longitudinal del canal, en cuanto a la presencia de vórtices estos se despreciarán, pues en la realidad las vorticidades en el flujo a superficie libre se presentan de forma localizada en desniveles o saltos del fondo del canal, a la salida de compuertas o vertederos, etc., en donde el flujo es altamente turbulento. En la extensión propia del canal, fuera de las estructuras de control, generalmente el flujo es subcrítico y cercano a laminar.
- 3) Las variaciones del nivel del agua se considerarán graduales, de forma que no se tomarán en cuenta las aceleraciones verticales debidas a frentes de onda denominados también oleajes, los cuales son transiciones bruscas en el perfil de flujo, debidas a la manipulación brusca de estructuras de control como rejillas, compuertas, la presencia de derrumbes, etc.
- 4) Para el estudio de la Hidráulica de Canales con flujo transitorio se utilizará una descripción espacial o descripción Euleriana, pues para el caso de fluidos es más conveniente el estudio de la evolución de sus propiedades físicas en volúmenes de control fijos en el espacio.
- 5) Las únicas fuerzas másicas que actúan sobre el flujo serán las gravitatorias, supuestas constantes en el espacio y en el tiempo.

Para establecer las ecuaciones que gobiernan el flujo transitorio en canales partiremos de los Postulados de Conservación Balance sobre los cuales se fundamenta la Mecánica de Medios Continuos, en particular emplearemos los Principios de Conservación de la Masa y de la Cantidad de Movimiento.

2.2.1 Ecuación del Balance de Masa o Ecuación de la Continuidad

Para un medio continuo la ecuación de conservación de la masa en forma local espacial está dada por (Oliver, 2002, p.135):

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho(\nabla \cdot \underline{v}) = 0 \quad (2.1)$$

donde:

$\rho = \rho(p)$, la densidad del medio continuo. (Ecuación Cinética de Estado).

$\underline{v} = \underline{v}(\underline{x}, t)$, el campo de velocidades del medio continuo.

p , presión termodinámica.

\underline{x} , vector posición.

t , coordenada temporal.

Utilizando la expresión para la derivada material de la descripción espacial de una propiedad $\left(\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \underline{v} \cdot (\nabla\rho) \right)$ (Oliver, 2002, p.133) y substituyendo en (2.1) tendríamos:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \underline{v} \cdot (\nabla\rho) + \rho(\nabla \cdot \underline{v}) = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\underline{v}) = 0 \quad (2.2)$$

Si integramos la expresión (2.2) dentro de un volumen de control fijo en el espacio, obtenemos la siguiente forma integral para el principio del balance de masa o ecuación de la continuidad (Jović, 2013, p.415):

$$\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t} dV + \int_V \nabla \cdot (\rho\underline{v}) dV = 0 \quad (2.3)$$

Aplicando el concepto de derivada local de una integral de volumen, y el teorema de la divergencia, al primer y segundo términos de la expresión (2.3), respectivamente, obtenemos lo siguiente:

Derivada Local de una integral de volumen (Oliver, 2002, p.130):

$$\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t} dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV \quad (2.4)$$

Teorema de la divergencia (Oliver, 2002, p.137):

$$\int_V \nabla \cdot (\rho\underline{v}) dV = \int_{\partial V} \rho(\underline{v} \cdot \underline{n}) dS \quad (2.5)$$

Reemplazando las expresiones (2.4) y (2.5) en la ecuación (2.3), tendríamos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_{\partial V} \rho(\underline{v} \cdot \underline{n}) dS = 0 \quad (2.6)$$

La integral del primer término de la expresión (2.6), $\int_V \rho dV$, representa la cantidad de masa contenida en el volumen de control en un instante cualquiera de tiempo t , es decir:

$$M_V(t) = \int_V \rho dV \quad (2.7)$$

Cabe indicar que el volumen de control puede estar vacío, con una determinada cantidad de materia o completamente lleno.

Si sustituimos la relación (2.7) en la expresión (2.6) obtenemos lo siguiente:

$$\frac{\partial M_V}{\partial t} + \int_{\partial V} \rho(\underline{v} \cdot \underline{n}) dS = 0 \quad (2.8)$$

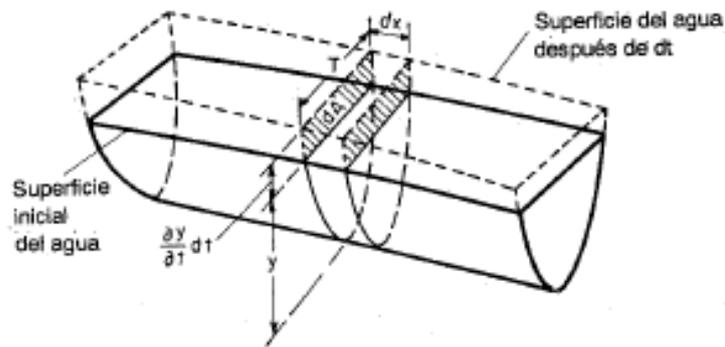


Figura No. 1 Volumen de Control Diferencial en un Canal con Flujo Transitorio.
Fuente: Chow, 2006.

Ahora si consideramos como volumen de control un volumen diferencial de dimensiones $dV = A dx$, como puede verse en la Figura No. 1, la cantidad de masa contenida en dicho volumen diferencial en un instante de tiempo t cualquiera, sería:

$$M_{dV}(t) = \rho A dx \quad (2.9)$$

siendo:

$M_{dV}(t)$, la masa contenida en el volumen de control diferencial en un instante cualquiera t .

$A = A(x, t)$, porción de la sección transversal del volumen de control diferencial que contiene fluido, en el caso de un canal esta sección representa el área mojada del flujo. dx , diferencial de longitud del canal.

Sustituyendo la expresión (2.9) en la ecuación (2.8) y considerando un volumen de control diferencial dV , tendríamos lo siguiente:

$$\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} dx + \int_{\partial dV} \rho(\underline{v} \cdot \underline{n}) dS = 0 \quad (2.10)$$

El segundo término de (2.10) representa los flujos másicos a través del contorno ∂dV , al cual se le denominada también superficie de control del volumen de control diferencial dV . Como puede verse en el segundo término de la expresión (2.10), al existir un producto punto en el integrando, la integral $\int_{\partial dV} \rho(\underline{v} \cdot \underline{n}) dS$ será positiva

cuando $\underline{v}(x, t)$ y \underline{n} tengan el mismo sentido, y negativa cuando sean de sentidos opuestos. Tanto $\underline{v}(x, t)$ como \underline{n} tienen el mismo sentido cuando el flujo de masa sale del volumen de control, de forma que $\int_{\partial dV} \rho(\underline{v} \cdot \underline{n}) dS > 0$, para las entradas de masa al

volumen de control $\underline{v}(x, t)$ y \underline{n} son de sentido contrario y por tanto $\int_{\partial dV} \rho(\underline{v} \cdot \underline{n}) dS < 0$.

Asumiendo flujo unidimensional e incompresible, la integral $\int_{\partial dV} \rho(\underline{v} \cdot \underline{n}) dS$, se puede evaluar de la siguiente manera:

Flujo Másico de Entrada:

$$\int_{\partial dV \text{ entrada}} \rho(\underline{v} \cdot \underline{n}) dS = -\rho \int_A (\underline{v}_{\text{entrada}} \cdot \underline{n}_{\text{entrada}}) dA = -\rho \int_A v_{n \text{ entrada}} dA = -\rho v A = -\rho Q \quad (2.11)$$

Flujo Másico de Salida:

$$\int_{\partial V \text{ salida}} \rho(\underline{v} \cdot \underline{n}) dS = \rho \int_A (\underline{v}_{\text{salida}} \cdot \underline{n}_{\text{salida}}) dA = \rho \int_A v_{n \text{ salida}} dA = \quad (2.12)$$

$$\rho v A + \rho \frac{\partial(vA)}{\partial x} dx = \rho Q + \rho \frac{\partial Q}{\partial x} dx$$

donde:

$v_{n \text{ entrada}}$, velocidad normal a la superficie de control transversal de entrada del flujo al volumen de control.

$v_{n \text{ salida}}$, velocidad normal a la superficie de control transversal de salida del flujo del volumen de control.

v , velocidad media del flujo en la superficie de control de entrada al volumen de control, viene expresada por (Chow, 2006, p.29):

$$v = \frac{\int_A v_{n \text{ entrada}} dA}{A} \quad (2.13)$$

$A = A(\underline{x}, t)$, porción de la superficie de control transversal del volumen de control diferencial que contiene fluido, para un instante cualquiera de tiempo t , esta coincide con las superficies de control transversales tanto de entrada como de salida del volumen de control, al ser este un volumen diferencial.

Q , caudal de entrada al volumen de control, se expresa mediante (Chow, 2006, p.5):

$$Q = vA \quad (2.14)$$

En la ecuación (2.12) el caudal de salida $\int_A v_{n \text{ salida}} dA$ se ha expresado en función del caudal de entrada de la siguiente manera:

$$\int_A v_{n \text{ salida}} dA = \int_A v_{n \text{ entrada}} dA + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_A v_{n \text{ entrada}} dA \right) dx \quad (2.15)$$

$$\int_A v_{n \text{ salida}} dA = vA + \frac{\partial(vA)}{\partial x} dx$$

Basándonos en las expresiones (2.11) y (2.12), la integral $\int_{\partial V} \rho(\underline{v} \cdot \underline{n}) dS$, valdría:

$$\int_{\partial V} \rho(\underline{v} \cdot \underline{n}) dS = \rho Q + \rho \frac{\partial Q}{\partial x} dx - \rho Q = \rho \frac{\partial Q}{\partial x} dx \quad (2.16)$$

Si existiera una extracción o un aporte de un caudal q por unidad de longitud, de o hacia el canal, respectivamente, se deberá considerar de la misma forma que para el caudal másico, es decir que para el caso de una extracción de caudal, q sería positivo pues sale del volumen de control, cuando se trata de un aporte de caudal, q sería negativo pues dicho caudal entra al volumen de control. Teniendo presente esto, la expresión (2.16) se puede escribir de la siguiente manera:

$$\int_{\partial V} \rho(\underline{v} \cdot \underline{n}) dS = \rho \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \rho q dx \quad (2.17)$$

siendo:

q , caudal por unidad de longitud, negativo cuando entra al volumen de control y positivo cuando sale del mismo.

Si reemplazamos la expresión (2.17), en la ecuación (2.10) se tiene que:

$$\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} dx + \rho \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \rho q dx = \rho \frac{\partial A}{\partial t} dx + \rho \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \rho q dx = 0 \quad (2.18)$$

Si dividimos toda la expresión (2.18) para ρdx se obtiene finalmente lo siguiente:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} + q = 0 \quad (2.19)$$

La expresión (2.19) constituye una forma diferencial de la ecuación de la continuidad para flujo no permanente en canales abiertos cuando existe un aporte o una extracción de caudal por unidad de longitud.

2.2.2 Ecuación del Balance de la Cantidad de Movimiento

La forma global del principio del balance de la cantidad de movimiento para un medio continuo viene dada por la siguiente expresión (Oliver, 2002, p.142):

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \underline{v} dV = \int_V \rho \underline{b} dV + \int_{\partial V} \underline{t} dS \quad (2.20)$$

donde:

$\rho = \rho(p)$, la densidad del medio continuo en función de la presión p . (Ecuación Cinética de Estado).

$\underline{v} = \underline{v}(\underline{x}, t)$, el campo de velocidades del medio continuo.

\underline{b} , vector de fuerzas másicas.

\underline{x} , vector posición.

\underline{t} , vector de tensiones actuantes sobre el contorno ∂V del medio continuo.

V , volumen material del medio continuo, en el análisis posterior se le considerará como fijo, es decir como un volumen de control.

dS , diferencial de área del contorno del medio continuo.

t , el tiempo.

Si aplicamos el Lema de Reynolds al término de la izquierda de la igualdad de la expresión (2.20), obtenemos lo siguiente (Oliver, 2002, p.136):

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \underline{v} dV = \int_V \rho \frac{d\underline{v}}{dt} dV \quad (2.21)$$

Utilizando el Teorema del Transporte de Reynolds, para el caso en que la propiedad a considerar sea la cantidad de movimiento, tendríamos (Oliver, 2002, p.137):

Teorema del Transporte de Reynolds:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \psi dV = \int_V \rho \frac{d\psi}{dt} dV - \int_{\partial V} \rho \psi (\underline{v} \cdot \underline{n}) dS \quad (2.22)$$

$\psi =$ cantidad de la propiedad A por unidad de masa

Si $Q(t) = \int_{V_t=V} \rho \underline{v} dV$ es la *cantidad de la cantidad de movimiento en el instante t*,

entonces la *cantidad de la cantidad de movimiento por unidad de masa ψ* sería \underline{v} .

Según esto el Teorema de Reynolds, para el caso en que la propiedad \mathcal{A} considerada sea la cantidad de movimiento, tendría la forma siguiente:

$$\int_V \rho \frac{d\underline{v}}{dt} dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \underline{v} dV + \int_{\partial V} \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{n}) dS \quad (2.23)$$

Despejando el primer término del lado derecho de la igualdad de la ecuación (2.23) se tiene que (Jović, 2013, p.418):

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \underline{v} dV = \int_V \rho \frac{d\underline{v}}{dt} dV - \int_{\partial V} \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{n}) dS \quad (2.24)$$

Sustituyendo las expresiones (2.21) y (2.24) en la ecuación(2.20), se obtiene la expresión siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \underline{v} dV + \int_{\partial V} \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{n}) dS = \int_V \rho \underline{b} dV + \int_{\partial V} \underline{t} dS \quad (2.25)$$

Al igual que para el caso del principio de conservación de la masa si consideramos un volumen de control diferencial de dimensiones $dV = A dx$, es decir de longitud dx y sección transversal $A = A(\underline{x}, t)$, la expresión (2.25) se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{dV} \rho \underline{v} dV + \int_{\partial dV} \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{n}) dS &= \int_{dV} \rho \underline{b} dV + \int_{\partial dV} \underline{t} dS \\ \text{Si consideramos que : } \int_{dV} \rho \underline{v} dV &= \rho v A dx \\ \text{y } \int_{dV} \rho \underline{b} dV &= \rho \underline{b} A dx, \text{ entonces} \\ \frac{\partial(\rho v A)}{\partial t} dx + \int_{\partial dV} \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{n}) dS &= \rho \underline{b} A dx + \int_{\partial dV} \underline{t} dS \\ \frac{\partial(\rho Q)}{\partial t} dx + \int_{\partial dV} \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{n}) dS &= \rho \underline{b} A dx + \int_{\partial dV} \underline{t} dS \end{aligned} \quad (2.26)$$

siendo:

v , velocidad media del flujo en la entrada al volumen de control, se expresada mediante:

$$v = \frac{\int_A \underline{v} dA}{A} \quad (2.27)$$

Q , caudal de entrada al volumen de control, se define como:

$$Q = vA \quad (2.28)$$

La segunda integral del lado izquierdo de la igualdad de la expresión (2.25) representa los flujos de cantidad de movimiento a través de la superficie de control. De la misma forma que para el flujo másico, al existir un producto punto dentro del integrando,

$\int_{\partial dV} \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{n}) dS$ será positiva cuando $\underline{v}(\underline{x}, t)$ y \underline{n} tengan el mismo sentido y negativa

cuando sean de sentidos opuestos. Cuando el flujo de cantidad de movimiento sale del volumen de control, $\underline{v}(\underline{x}, t)$ y \underline{n} tienen el mismo sentido, de forma que

$\int_{\partial dV} \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{n}) dS > 0$, para el caso de flujos de entrada de cantidad de movimiento al

volumen de control, $\underline{v}(\underline{x}, t)$ y \underline{n} son de sentido contrario y por tanto

$\int_{\partial dV} \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{n}) dS < 0$.

Para flujo unidimensional e incompresible, y considerando un volumen de control diferencial de longitud dx y sección transversal A , la integral $\int_{\partial dV} \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{n}) dS$, se

puede calcular así:

Flujo de Cantidad de Movimiento de Entrada:

$$\begin{aligned} \int_{\partial dV \text{ entrada}} \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{n}) dS &= - \int_A \rho \underline{v}_{\text{entrada}} (\underline{v}_{\text{entrada}} \cdot \underline{n}_{\text{entrada}}) dA = \\ &= - \int_A \rho \underline{v}_{\text{entrada}} (v_{n \text{ entrada}} dA) = -\rho v (vA) = -\rho v Q \end{aligned} \quad (2.29)$$

Flujo de Cantidad de Movimiento de Salida:

$$\int_{\partial V \text{ salida}} \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{n}) dS = \int_A \rho \underline{v}_{\text{salida}} (\underline{v}_{\text{salida}} \cdot \underline{n}_{\text{salida}}) dA = \int_A \rho \underline{v}_{\text{salida}} v_{n \text{ salida}} dA = \quad (2.30)$$

$$\rho v(vA) + \rho \frac{\partial(vvA)}{\partial x} dx = \rho vQ + \rho \frac{\partial(vQ)}{\partial x} dx = \rho vQ + \rho \frac{\partial vQ}{\partial x} dx$$

Las variables $v_{n \text{ entrada}}$, $v_{n \text{ salida}}$, v , A y Q , se definen de la misma forma que para el caso de la ecuaciones (2.11) y(2.12).

Al igual que para el caso del flujo másico, en la ecuación (2.30), el caudal de cantidad de movimiento de salida $\int_A \rho \underline{v}_{\text{salida}} v_{n \text{ salida}} dA$ se ha expresado en función del caudal de cantidad de movimiento de entrada de la siguiente manera:

$$\int_A \rho \underline{v}_{\text{salida}} v_{n \text{ salida}} dA = \int_A \rho \underline{v}_{\text{entrada}} (v_{n \text{ entrada}} dA) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_A \rho \underline{v}_{\text{entrada}} (v_{n \text{ entrada}} dA) \right) dx \quad (2.31)$$

$$\int_A \rho \underline{v}_{\text{salida}} v_{n \text{ salida}} dA = \rho v(vA) + \rho \frac{\partial(vvA)}{\partial x} dx$$

En base a las expresiones (2.29) y (2.30), la integral $\int_{\partial V} \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{n}) dS$, sería igual a:

$$\int_{\partial V} \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{n}) dS = \int_{\partial V \text{ salida}} \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{n}) dS + \int_{\partial V \text{ entrada}} \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{n}) dS \quad (2.32)$$

$$\int_{\partial V} \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{n}) dS = \rho vQ + \rho \frac{\partial vQ}{\partial x} dx - \rho vQ = \rho \frac{\partial vQ}{\partial x} dx = \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) dx$$

De la hipótesis flujo unidimensional, el vector de fuerzas másicas para el caso de un canal de pendiente suave sería:

$$\underline{b} = [b_x] = [g \text{ Sen } \theta] \approx [g \text{ Tan } \theta] \approx [g S_0] \quad (2.33)$$

en donde:

g , aceleración de la gravedad.

θ , ángulo de inclinación del canal.

S_0 , pendiente del fondo del canal.

Cabe recalcar que la componente vertical del vector de fuerzas másicas no se ha considerado, pues el flujo se ha asumido como unidimensional, la componente vertical $b_y = g \cos \theta$, solo genera reacciones normales en las paredes del canal debidas al peso del fluido contenido en el volumen de control. Las componentes del peso de un volumen de control en las direcciones paralela al eje longitudinal del canal y vertical se muestran en la Figura No. 2, a continuación:

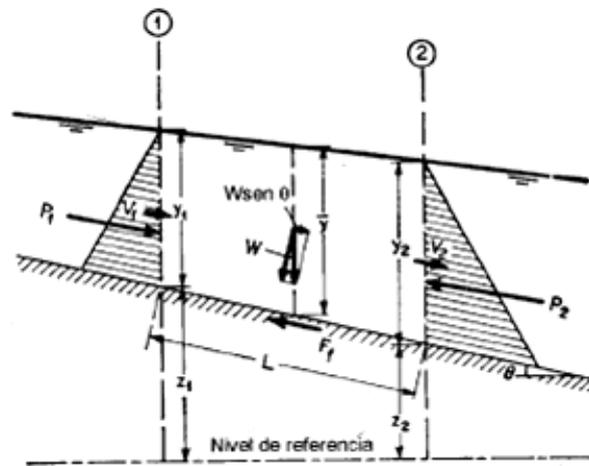


Figura No. 2 Aplicación del Principio del Balance de la Cantidad de Movimiento a un Volumen de Control de un Canal.

Fuente: Chow, 2006.

Para determinar el vector de fuerzas de superficie $\int_{\partial V} \underline{t} dS$, aplicadas al volumen de control diferencial dV , consideraremos la hipótesis de que el agua es un fluido perfecto, según esto el tensor de tensiones tendría la forma siguiente (Oliver, 2002, p.285):

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{1}} \quad (2.34)$$

Aplicando el Teorema de Cauchy (Oliver, 2002, pp. 83-95), para encontrar el vector de tensiones \underline{t} , tomando en cuenta lo expuesto en la expresión (2.34), tenemos:

$$\underline{t} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = -p \underline{\underline{1}} \cdot \underline{n} = -p \underline{n} \quad (2.35)$$

En base a lo determinado en la expresión (2.35), el vector de fuerzas superficiales sería:

$$\int_{\partial dV} \underline{t} dS = \int_{\partial dV} - p \underline{n} dS \quad (2.36)$$

La expresión del lado derecho de la igualdad de la relación (2.36), representa las fuerzas de presión aplicadas al volumen de control en su contorno. Como podemos ver, al poseer la integral $\int_{\partial dV} - p \underline{n} dS$, el vector normal \underline{n} dentro del integrando, esta

será positiva cuando \underline{n} sea de sentido opuesto al asumido para la variable de posición x , y negativa cuando tengan el mismo sentido.

Para el caso de canales abiertos, la integral $\int_{\partial dV} - p \underline{n} dS$, se puede evaluar considerando una distribución hidrostática de presiones, hecho que es cierto para la mayoría de flujos a superficie libre donde no existen aceleraciones transversales, como en curvas cerradas, donde aparece una componente adicional de aceleración en el flujo, la aceleración centrífuga.

Si consideramos una distribución hidrostática de presiones, para un instante de tiempo t determinado, $p = \rho gh$ (presión a la profundidad h).

Si evaluamos la integral $\int_{\partial dV} - p \underline{n} dS$, en las superficies de control a la entrada y salida del volumen de control tendríamos:

Fuerza de Presión a la Entrada:

$$\int_{\partial dV \text{ entrada}} - p \underline{n} dS = \int_A \rho gh dA \quad (2.37)$$

Para el caso de flujo incompresible, la expresión (2.37) tendría la forma siguiente:

$$\int_{\partial dV \text{ entrada}} - p \underline{n} dS = \rho g \int_A h dA \quad (2.38)$$

Recordando que la profundidad del centro de gravedad h_g de la sección mojada de un

canal es igual a $h_g = \frac{\int hdA}{A}$, podemos escribir la expresión (2.38) de la siguiente manera:

Fuerza de Presión a la Entrada:

$$\int_{\partial V \text{ entrada}} -p \underline{n} dS = \int_A \rho g h dA = \rho g \int_A h dA = \rho g h_g A \quad (2.39)$$

Para la salida el signo de la integral $\int_{\partial V} -p \underline{n} dS$, sería negativo, al igual que para casos anteriores podemos expresar la fuerza de presión a la salida de la siguiente manera:

Fuerza de Presión a la Salida:

$$\int_{\partial V \text{ salida}} -p \underline{n} dS = -\rho g h_g A - \frac{\partial(\rho g h_g A)}{\partial x} dx \quad (2.40)$$

Finalmente la integral $\int_{\partial V} -p \underline{n} dS$, sobre el contorno de volumen de control, valdría:

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} -p \underline{n} dS &= \int_{\partial V \text{ entrada}} -p \underline{n} dS + \int_{\partial V \text{ salida}} -p \underline{n} dS \\ \int_{\partial V} -p \underline{n} dS &= \rho g h_g A - \rho g h_g A - \frac{\partial(\rho g h_g A)}{\partial x} dx = -\frac{\partial(\rho g h_g A)}{\partial x} dx \end{aligned} \quad (2.41)$$

La expresión (2.41) permite evaluar las fuerzas superficiales, sobre el contorno del volumen de control, producto de la presión del agua en el canal, sin embargo para considerar el efecto de la fricción del agua con las paredes del canal, es preciso añadir al término $\int_{\partial V} -p \underline{n} dS$ de $\int_{\partial V} \underline{t} dS$, la fuerza debida al efecto del rozamiento, a la cual

llamaremos $F_R = \int_{\Gamma \sigma} \underline{t}_R dS$, siendo \underline{t}_R el vector de tensiones producidas por la fricción.

El vector de tensiones para el caso de fricción por rozamiento, se expresa mediante:

$$\underline{t}_R = t_{Rx} = [\rho g R S_f] \quad (2.42)$$

siendo:

R , radio hidráulico de la sección del canal igual a $\frac{A}{P}$.

A , área mojada de la sección del canal.

P , perímetro mojado de la sección del canal.

S_f , pendiente de la línea de energía, esta se evalúa mediante la ecuación de Manning:

$$S_f = \frac{Q^2 n^2 P^{\frac{4}{3}}}{A^{\frac{10}{3}}} = \frac{v^2}{C^2 R} \quad (2.43)$$

En la expresión anterior las variables R , A y P se definen de la misma forma que para la ecuación (2.42), Q es el caudal, v la velocidad, C el coeficiente de Chézy y n el coeficiente de rugosidad de Manning, estos últimos son parámetros experimentales y depende del tipo de material del que se componen las paredes del canal.

La expresión (2.42) se obtiene a partir del equilibrio de las fuerzas, en la dirección de x , que actúan sobre un volumen de control ubicado en un canal sujeto a un régimen uniforme de flujo, como puede verse en la Figura No. 2:

$$\sum F_x = 0$$
$$Fp_1 - Fp_2 + W \text{Sen} \theta - F_R = 0 \quad (2.44)$$

Donde:

Fp_1 , fuerza de presión del agua en la superficie de control 1 del volumen de control.

Fp_2 , fuerza de presión del agua en la superficie de control 2 del volumen de control.

W , peso del volumen de control.

θ , ángulo de inclinación del canal.

F_R , fuerza de rozamiento del agua con las paredes del canal.

Para flujo uniforme los calados y_1 y y_2 (Ver Figura No. 2), son iguales, de forma que:

$$Fp_1 = Fp_2 \quad (2.45)$$

En base a la relación (2.45), la ecuación (2.45) se reduce a lo siguiente:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ W \text{Sen } \theta &= F_R \end{aligned} \quad (2.46)$$

El peso del volumen de control W , según la Figura No. 2, valdría:

$$W = \rho g A L \quad (2.47)$$

Si suponemos que la fricción del agua con las paredes del canal produce un esfuerzo cortante promedio τ_R , debido al rozamiento, la fuerza F_R , valdría:

$$F_R = \tau_R P L \quad (2.48)$$

Reemplazando las relaciones (2.47) y (2.48) en la ecuación (2.46), se tiene que:

$$\rho g A L \text{Sen } \theta = \tau_R P L \quad (2.49)$$

Despejando τ_R de la expresión (2.49), para el caso de un canal de pendiente suave, tenemos:

$$\tau_R = \rho g \frac{A}{P} \text{Sen } \theta = \rho g R \text{Sen } \theta \approx \rho g R \text{Tan } \theta \approx \rho g R S_0 \quad (2.50)$$

Para poder utilizar la expresión (2.50) cuando el régimen de flujo no sea uniforme, como es en el caso actual de estudio, se recomienda utilizar en lugar de la pendiente del canal S_0 , la pendiente de la línea de energía S_f , la cual considera las pérdidas de energía para el caso de transiciones graduales del perfil, de esta forma el esfuerzo cortante en un canal con régimen no permanente se puede evaluar de la siguiente manera:

$$\tau_R = \rho g R S_f \quad (2.51)$$

En base a lo expuesto anteriormente, la fuerza de rozamiento $\int_{\Gamma\sigma} \underline{t}_R dS$, producto de la fricción del agua con las paredes del canal, sería:

$$\int_{\Gamma\sigma} \underline{t}_R dS = \int_{\Gamma\sigma} -\rho g R S_f dS = -\rho g R S_f \int_{\Gamma\sigma} dS \quad (2.52)$$

signo (-) debido a que F_R es opuesta a la dirección del flujo.

Para el caso de un volumen de control diferencial de longitud dx y sección transversal A , y ya que el esfuerzo cortante se desarrolla en el contorno lateral del mismo, es decir en las paredes del canal, tendríamos que $\int_{\Gamma\sigma} dS = P dx$, en base a esto la expresión (2.52) se puede escribir como:

$$\int_{\Gamma\sigma} \underline{t}_R dS = \int_{\Gamma\sigma} -\rho g R S_f dS = -\rho g R S_f \int_{\Gamma\sigma} dS = -\rho g \frac{A}{P} S_f P dx = -\rho g A S_f dx \quad (2.53)$$

Reemplazando las expresiones (2.32), (2.33), (2.41) y (2.53) en la ecuación (2.26), finalmente obtenemos:

$$\frac{\partial(\rho Q)}{\partial t} dx + \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) dx = \rho g S_0 A dx - \frac{\partial(\rho g h_g A)}{\partial x} dx - \rho g A S_f dx \quad (2.54)$$

Dividiendo toda la ecuación (2.54) para $\rho g dx$, y reordenando términos, tendríamos:

$$\frac{1}{g} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{gA} + h_g A \right) - A(S_0 - S_f) = 0 \quad (2.55)$$

A las expresiones (2.19) y (2.55) se les conoce como las *Ecuaciones de Saint – Venant*.

Las expresiones anteriores nos permiten resolver el problema transitorio para ciertas geometrías de flujo, sin embargo para cauces naturales o para el caso de secciones de forma irregular o compuesta, su aplicación es casi nula debido a la complejidad matemática que se presenta para su resolución.

CAPÍTULO 3
MÉTODOS PARA RESOLUCIÓN DEL
PROBLEMA DE FLUJO TRANSITORIO

CAPÍTULO 3: MÉTODOS PARA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE FLUJO TRANSITORIO

3.1 Introducción

Para la resolución del Problema Transitorio de Flujo de Fluidos existen algunos Métodos Numéricos que permiten solventar los análisis no permanentes de flujo. Entre los principales están el Método de Diferencias Finitas, Incrementos Finitos y el Método de los Elementos Finitos.

Los dos primeros métodos antes mencionados funcionan muy bien para el caso de geometrías regulares de flujo, como es el caso de canales abiertos, compuertas, vertederos, etc. Sin embargo para el caso de geometrías irregulares como es el caso de cauces naturales o estructuras hidráulicas de formas diversas, la aplicación de dichos métodos es muy difícil y conlleva a resultados erróneos o simplemente no se pueden utilizar.

3.2 El Método de los Elementos Finitos en problemas de Flujo Transitorio

El Método de los Elementos Finitos (MEF), en contraste con el Método de las Diferencias Finitas o Incrementos Finitos, se ha convertido en la actualidad en la técnica más utilizada para la resolución de problemas de mucha complejidad ya sea esta matemática o geométrica, principalmente por la potencialidad que presenta para adaptarse a diversas geometrías de flujo, a más de la simplificación que permite para el análisis y resolución de las ecuaciones hidráulicas que gobiernan este tipo de fenómenos.

La ventaja principal del método de los elementos finitos es que al considerar todas las variables que intervienen en el flujo de un canal, el análisis de los problemas es mucho más real pues considera dentro del flujo los diferentes campos de velocidades, presiones, niveles, etc., y su variabilidad con el tiempo, a más que permite incluir análisis de turbulencia y flujos convectivos. En la Figura No. 3 a continuación, se observa el flujo real del agua debajo de un puente, las zonas de turbulencia, sedimentación y socavación del lecho.

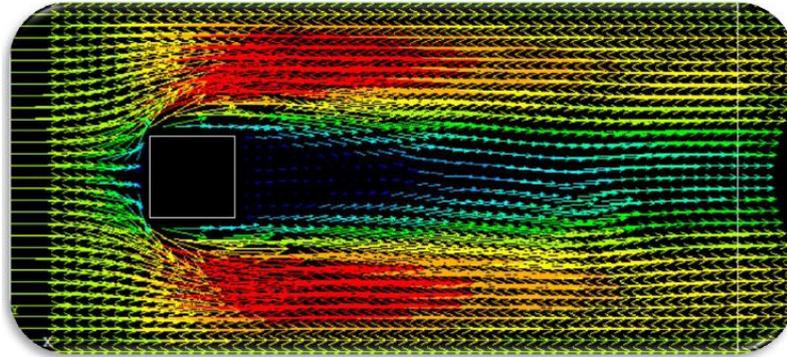


Figura No. 3 *Flujo bidimensional real en un cauce de un río a través de una pila de un puente.*
Fuente: Autores.

En la mayoría de los diseños hidráulicos para obras de gran envergadura se procura construir prototipos de las diferentes estructuras hidráulicas para poner a prueba su desempeño hidráulico, sin embargo su gran costo y la dificultad de producir las condiciones de flujo necesarias constituyen un problema que hace muy dificultoso la toma de decisiones sobre la elección de un determinado modelo para su posterior ejecución.

En los actuales momentos los ensayos experimentales con prototipos están siendo sustituidos cada vez más por la simulación numérica, la cual proporciona una forma más rápida y menos costosa de evaluar conceptos y detalles del diseño de las estructuras. Como método numérico para la simulación se emplea el Método de los Elementos Finitos, pues constituye el método más difundido en los últimos años.

Como mencionamos en párrafos anteriores una de las ventajas fundamentales del Método de los Elementos Finitos es que se adapta a cualquier geometría de flujo por lo que es especialmente útil para el análisis de flujos en ríos y cauces naturales, así como para estructuras de control de caudales, tránsito de avenidas, sedimentadores, floculadores, canales etc., que presentan formas y contornos de diversa índole. Como podemos observar en la Figura No. 4, la modelación de flujos bi y tridimensionales para cualquier geometría es completamente realizable con el Método de los Elementos Finitos.

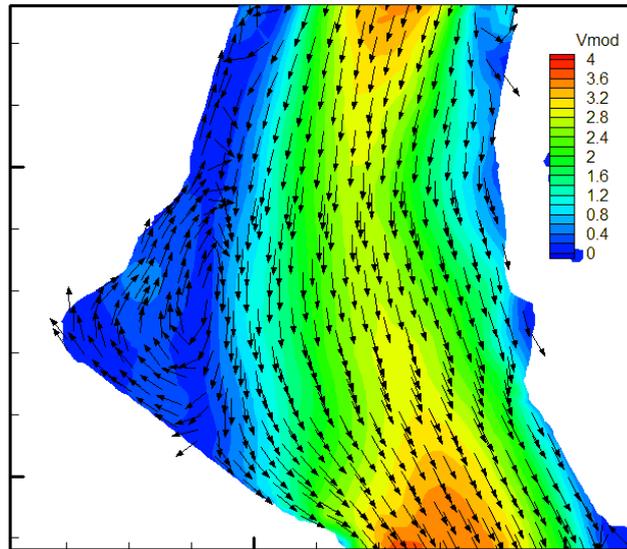


Figura No. 4 Simulación computacional del flujo en un cauce natural.
Fuente: Autores.

3.2.1 Ecuaciones fundamentales para Flujo en Régimen Transitorio.

Para la solución del problema de flujo transitorio en canales abiertos por el MEF, se utilizarán de las ecuaciones fundamentales de la Mecánica de Medios Continuos, como son la Ecuación de la Conservación de la Masa dada por la expresión (2.1) y la Ecuación de la Conservación de la Cantidad de Movimiento Lineal definida por la relación (2.20) (Zienkiewicz, 2005, pp. 5-10).

Como punto de partida emplearemos la ecuación de balance de la cantidad de movimiento en descripción espacial, la cual viene dada por:

$$-\nabla \left[P + \phi + \frac{1}{2} v^2 \right] = \frac{\partial v}{\partial t} + 2\omega \times v \quad (3.1)$$

donde:

$P = P(\underline{x}, t) = \hat{P}(p(\underline{x}, t)) = \int_0^p \frac{1}{\rho(\bar{p})} d\bar{p}$ = función que define a un fluido barotrópico.

$\rho = \rho(\bar{p})$, la densidad del medio continuo en función de la presión \bar{p} . (Ecuación Cinética de Estado).

$\phi = \phi(x, t)$, potencial de fuerza másicas.

$\underline{v} = \underline{v}(\underline{x}, t)$, el campo de velocidades del medio continuo.

\underline{x} , vector posición.

$p(\underline{x}, t)$ =campo de presiones.

\bar{p} =presión.

t , coordenada temporal.

2ω = vector vorticidad.

Ya que en el caso de canales abiertos con flujo transitorio gradualmente variado no se consideran los vórtices por flujo turbulento, es decir $2\omega = \underline{0}$ la expresión (3.1) se reduce a:

$$\nabla \left[P + \phi + \frac{1}{2} v^2 \right] + \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = \underline{0} \quad (3.2)$$

Ya que el flujo es irrotacional podemos definir una función escalar, llamada potencial de velocidades $\chi(\underline{x}, t)$ que cumple:

$$\underline{v}(\underline{x}, t) = \nabla \chi(\underline{x}, t) \quad (3.3)$$

Si reemplazamos la relación (3.3) en la ecuación (3.2), e integramos obtenemos lo siguiente:

$$P + \phi + \frac{1}{2} v^2 + \frac{\partial \chi}{\partial t} = \varphi(t) \quad (3.4)$$

Asumiendo un potencial de velocidades modificado $\bar{\chi}(\underline{x}, t) = \chi(\underline{x}, t) - \int_0^t \varphi(t) dt$, la expresión (3.4), se transforma en:

$$P + \phi + \frac{1}{2} (\nabla \bar{\chi})^2 + \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial t} = 0 \quad \forall x, \forall t \quad (3.5)$$

Siguiendo el mismo criterio que para la relación (3.4), la ecuación de la continuidad definida en la expresión (2.1), se escribiría como:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \underline{v} = \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot (\nabla \bar{\chi}) = \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla^2 \bar{\chi} = 0 \quad (3.6)$$

Si a las expresiones (3.5) y (3.6), adjuntamos la ecuación cinética de estado $\rho = \rho(\bar{p})$, se obtiene un sistema de tres ecuaciones escalares con tres incógnitas $p(\underline{x}, t)$, $\rho(\underline{x}, t)$ y $\bar{\chi}(\underline{x}, t)$, que puede ser integrado en el dominio del volumen de control (Zienkiewicz, 2005, pp. 50-73).

Calculado el potencial $\bar{\chi}(\underline{x}, t)$, el campo de velocidades vendría dado por:

$$\underline{v}(\underline{x}, t) = \nabla \bar{\chi}(\underline{x}, t) \quad (3.7)$$

3.2.2 Condiciones de contorno

La potencialidad del MEF también se nota en la facilidad y flexibilidad que presenta para las condiciones de contorno en problemas de flujo transitorio, de forma que podemos partir de condiciones iniciales ya sean estas de flujo o velocidad, o de presión o calado. Además podemos añadir condiciones de presión, entrada y salida de flujo en la superficie de contorno.

3.2.3 Mallado y discretización

Para la aplicación del MEF en problemas de fluidos es recomendable la utilización de elementos triangulares pues dichos elementos se adaptan mucho mejor a las geometrías complejas. El número de nodos a utilizar por elementos dependerá de la complejidad del análisis y principalmente de la exactitud de los resultados esperados, Cabe indicar que es recomendable la utilización de elementos finitos triangulares de 4 nodos para problemas de fluidos pues mejora el balance de las ecuaciones fundamentales del flujo de fluidos en problemas transitorios dentro de las geometrías consideradas.

El tamaño de los elementos a discretizar también dependerá del tipo de fenómeno a estudiar, así para análisis de capa límite se reducirán los elementos cerca de esta y progresivamente aumentaran de tamaño a medida que nos alejamos del flujo laminar de contacto en una superficie.

Para el caso de vertederos, compuertas y demás estructuras hidráulicas se procurará disminuir el tamaño de los elementos en lugares donde se presente la contracción súbita del flujo.

La Figura No. 5 y Figura No. 6, a continuación, nos ilustran la forma, tamaño y características del mallado para un correcto análisis del flujo de fluidos en varias condiciones:

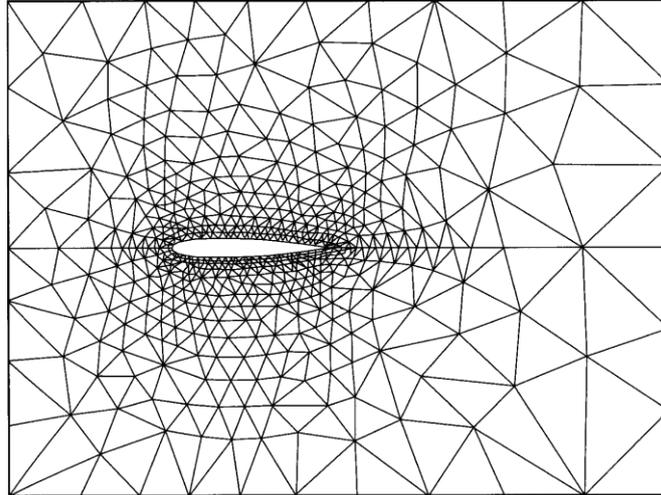


Figura No. 5 Discretización y mallado para el análisis del flujo alrededor de un ala de avión.
Fuente: Löhner, 2008.

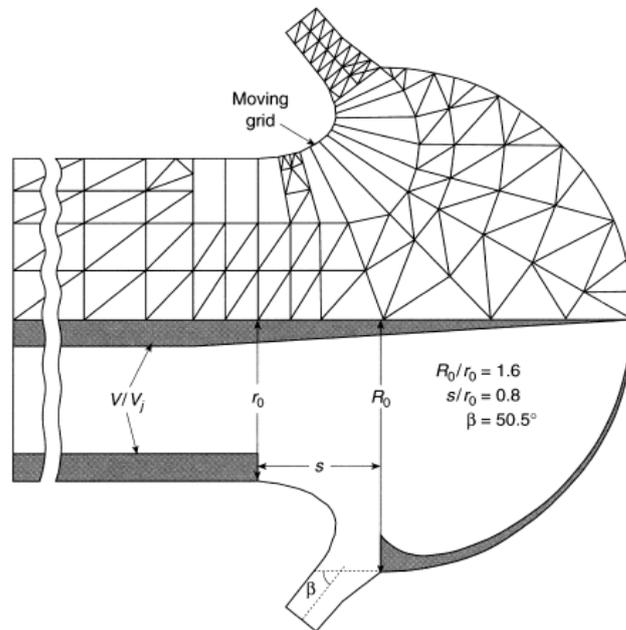


Figura No. 6 Mallado móvil para el análisis del flujo en un tubo Venturi.
Fuente: Löhner, 2008.

Como puede observarse en las figuras anteriores para un correcto análisis por el MEF, se ha procurado disminuir el tamaño de los elementos y aumentar su cantidad en los lugares cercanos a las estructuras que influyen considerablemente en el flujo. Así mismo puede notarse el uso combinado de elementos rectangulares y triangulares, además de mallas móviles para un análisis más exacto del flujo de fluidos en condiciones transitorias (Löhner, 2008, pp. 35-121).

3.3 El Método de los Incrementos Finitos en problemas de Flujo Transitorio

Las ecuaciones (2.19) y (2.55) permiten el análisis del flujo transitorio en un canal prismático, sin embargo la solución de dichas expresiones es extremadamente compleja, a tal punto que no existe una solución analítica exacta.

Debido a lo anterior se han desarrollado métodos aproximados que permiten encontrar una solución al problema transitorio, uno de los principales métodos numéricos es el Método de las Incrementos Finitos.

Para la aplicación de este método se divide al canal en tramos de longitud Δx y el tiempo se analiza en intervalos Δt , como puede observarse en la Figura No. 7 a continuación:

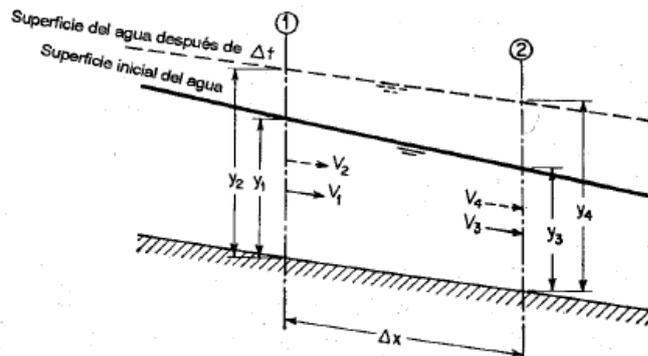


Figura No. 7 Esquema de discretización y análisis de flujo transitorio en un canal prismático por el Método de los Incrementos Finitos.

Fuente: Chow, 2006.

Se consideran las secciones transversales del canal aguas arriba y aguas abajo de forma que los subíndices 1 y 3, establecen los diferentes parámetros de flujo en el

tiempo t , a diferencia de los subíndices 2 y 4, que definen los parámetros de flujo en el tiempo $t + \Delta t$.

Las secciones transversales de flujo se definen de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} A &= \frac{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}{4} = \frac{\sum A}{4} \\ T &= \frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4}{4} = \frac{\sum T}{4} \\ R &= \frac{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}{4} = \frac{\sum R}{4} \\ v &= \frac{v_1 + v_2 + v_3 + v_4}{4} = \frac{\sum v}{4} \end{aligned} \tag{3.8}$$

siendo:

A = área promedio.

A_i = área de la sección i .

T = ancho de la superficie libre promedio.

T_i = ancho de la superficie libre de la sección i .

R = radio hidráulico promedio.

$R_i = \frac{A_i}{P_i}$ = radio hidráulico de la sección i .

P_i = perímetro mojado de la sección i .

v = velocidad media.

v_i = velocidad media de la sección i .

Si expresamos las derivadas parciales de las ecuaciones (2.19) y (2.55), tendríamos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial y}{\partial x} &= -\frac{y_1 + y_2 - y_3 - y_4}{2\Delta x} \\
 \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{v_1 + v_2 - v_3 - v_4}{2\Delta x} \\
 \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial(Av)}{\partial x} = -\frac{A_1v_1 + A_2v_2 - A_3v_3 - A_4v_4}{2\Delta x} \\
 \frac{\partial y}{\partial t} &= -\frac{y_1 - y_2 + y_3 - y_4}{2\Delta t} \\
 \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{v_1 - v_2 + v_3 - v_4}{2\Delta t}
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Si sustituimos las expresiones definidas en (3.8) y (3.9) en la relación (2.19), y resolviendo para v_4 , obtenemos:

$$v_4 = \frac{\Delta x \sum T \frac{(y_1 - y_2 + y_3 - y_4)}{4\Delta t} + A_1v_1 + A_2v_2 - A_3v_3 - q}{A_4} \tag{3.10}$$

Si utilizamos la ecuación (2.43) y las relaciones (3.8) y (3.9), reemplazándolas en la expresión (2.55), y simplificando tendríamos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 S_0 &= \frac{(\sum v)^2}{4C^2 \sum R} - \frac{y_1 + y_2 - y_3 - y_4}{2\Delta x} - \frac{\sum v(v_1 + v_2 - v_3 - v_4)}{8g\Delta x} - \\
 &\quad - \frac{v_1 - v_2 + v_3 - v_4}{2g\Delta t}
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

3.3.1 Condiciones de contorno

Para el análisis y solución de problemas transitorios en canales con el Método de los Incrementos Finitos se conocen las cantidades $y_1, A_1, v_1, y_2, A_2, v_2, y_3, A_3, v_3$, ya sea partiendo de las condiciones iniciales o de una iteración anterior. Las cantidades desconocidas son y_4 y v_4 , estas pueden encontrarse resolviendo simultáneamente las ecuaciones (3.10) y (3.11). Si procedemos de la misma manera con el resto de tramos Δx_i , se puede construir el perfil de flujo completo en el canal, así como la variación de la velocidad en las diferentes secciones.

CAPÍTULO 3: MÉTODOS PARA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE FLUJO TRANSITORIO

CAPÍTULO 4 EJEMPLOS DE ANÁLISIS

4.1 Ejemplo de flujo transitorio analizado en un canal trapezoidal por el Método de los Incrementos Finitos.

A manera de ejemplo de análisis para la aplicación del Método de los Incrementos Finitos contrastado con el Método de los Elementos Finitos descrito en el numeral 4.2, analizaremos el flujo transitorio en el canal trapezoidal de la Figura No. 8, el cual descarga a una corriente natural. En condiciones normales de flujo el caudal del canal ingresa libre al río, sin embargo al producirse una creciente en la corriente natural, el nivel y_r del río, con respecto al fondo, es variable con el tiempo, de forma que la altura de descarga del canal y_i , en el río, también cambia con el tiempo, de manera que las condiciones de flujo normales en el canal se ven alteradas por la profundidad de descarga.

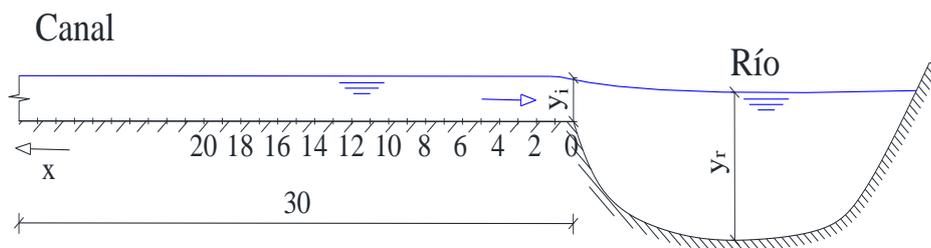


Figura No. 8 Flujo transitorio en un canal trapezoidal que descarga en una corriente natural.
Fuente: Autores.

Como mencionamos anteriormente, antes de comenzar la crecida súbita del caudal del río, el canal trapezoidal descarga de forma libre el flujo en el mismo, produciéndose en la sección $x = 0$, la altura crítica de flujo, de forma que el perfil inicial de flujo partiendo de la altura crítica en la descarga correspondería a las condiciones iniciales de calados o alturas en el canal. La variación temporal de la altura de descarga vendrá dada por el limnigrama de calados en la descarga del canal o el limnigrama de alturas del río, ambas en función del tiempo.

Los datos de la sección del canal se indican en la Figura No. 9 mostrada a continuación. Se ha considerado un canal de hormigón con una pendiente $S_0 = 0.001$, típica de los canales de régimen subcrítico, el coeficiente de rugosidad de Manning para hormigón se ha asumido en $n = 0.025$.

El problema a analizar es un problema cotidiano que permite establecer la altura de protección del canal de una descarga de alcantarillado proveniente de un divisor de

caudales de un colector marginal combinado. Una vez captadas las aguas lluvias y servidas de un sector, el colector conduce el agua a un derivador de caudal que separa las aguas lluvias de las residuales de forma que solamente lleguen las aguas servidas a los tratamientos convencionales de lagunas de oxigenación o humedales.

Generalmente estas las alturas de protección de los canales son sobreestimadas, y se construyen generalmente exagerando su dimensión, debido a que los análisis de flujo transitorio son difíciles de realizar pues conllevan cálculos complicados y a veces casi imposibles de efectuar.

El sobredimensionamiento de estas estructuras conlleva un incremento considerable de costos de ejecución de este tipo de obras hidráulicas.

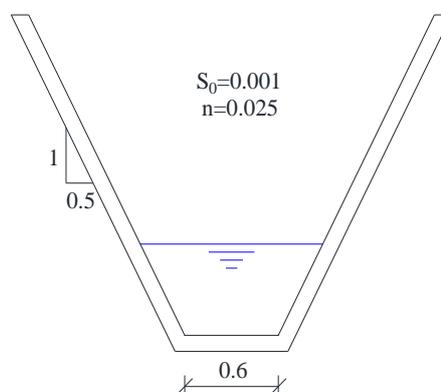


Figura No. 9 Sección transversal del canal trapezoidal del problema a analizar.
Fuente: Autores.

El presente análisis no solo es aplicable a este tipo de fenómenos también se pueden analizar casos como tránsito de crecientes en corrientes naturales, cálculos de remanso en canales naturales y artificiales, diseño de cunetas, colectores, divisores de caudal, estructuras de protección de obras hidráulicas, vertederos de exceso, y cualquier fenómeno de flujo en donde exista régimen transitorio.

Para el análisis de los diferentes tipos de estructuras y fenómenos antes mencionados se deberán modificar las ecuaciones (2.19) y (2.55), adaptándolas a cada caso en particular con sus propias hipótesis y simplificaciones.

4.1.1 Datos iniciales

Los datos iniciales para el canal serían:

$$Q_0 = 1.036 \text{ m}^3/\text{s} \quad (\text{Caudal})$$

$$S_0 = 0.001 \text{ m}/\text{m} \quad (\text{Pendiente Longitudinal})$$

$$n = 0.025 \quad (\text{Coeficiente de Manning})$$

$$b = 0.6 \text{ m} \quad (\text{Ancho del canal})$$

$$z = 0.5 \text{ m}/\text{m} \quad (\text{Talud de las paredes})$$

Para establecer el perfil inicial de flujo se resuelven las ecuaciones (2.19) y (2.55) sin considerar los términos temporales, partiendo de la altura crítica en la descarga ubicada en la abscisa $x = 0$, se obtiene lo siguiente:

Abscisa	Altura	Perímetro Mojado	Área	Velocidad
x	y	P	A	v
(m)	(m)	(m)	(m²)	(m/s)
0	0.5700	1.8746	0.5045	2.0537
1	0.6367	2.0238	0.5848	1.7717
2	0.6604	2.0767	0.6143	1.6864
3	0.6780	2.1161	0.6367	1.6272
4	0.6925	2.1485	0.6553	1.5810
5	0.7049	2.1763	0.6714	1.5430
6	0.7159	2.2008	0.6858	1.5106
7	0.7258	2.2230	0.6989	1.4824
8	0.7349	2.2432	0.7109	1.4573
9	0.7432	2.2618	0.7221	1.4347
10	0.7510	2.2792	0.7325	1.4142
11	0.7582	2.2955	0.7424	1.3955
12	0.7651	2.3107	0.7517	1.3782
13	0.7715	2.3252	0.7606	1.3622
14	0.7777	2.3389	0.7690	1.3472
15	0.7835	2.3520	0.7771	1.3332
16	0.7891	2.3645	0.7848	1.3201
17	0.7944	2.3764	0.7922	1.3077
18	0.7996	2.3879	0.7994	1.2960
19	0.8045	2.3989	0.8063	1.2849
20	0.8092	2.4095	0.8130	1.2743

Tabla No. 1 Perfil y parámetros de Flujo en el canal para el tiempo $t=0$.
Fuente: Autores.

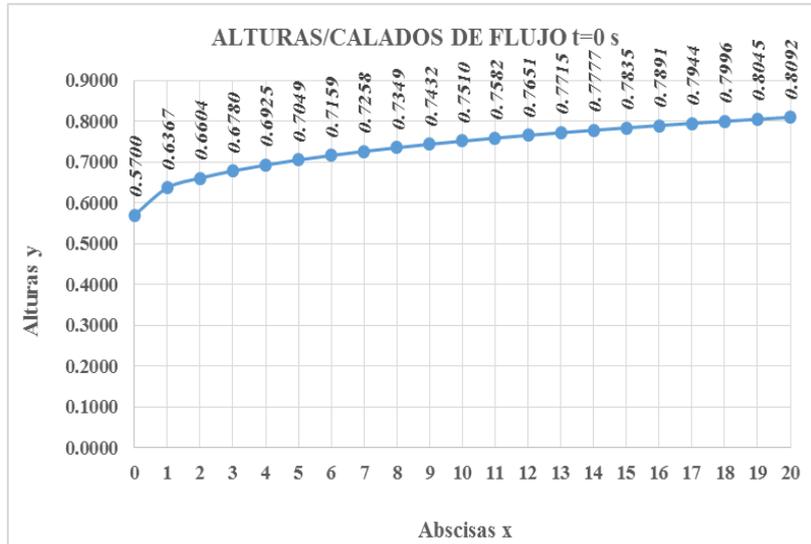


Figura No. 10 Calados del agua en las diferentes abscisas del canal.
Fuente: Autores.

Ahora para considerar la variación del calado en la descarga en función del tiempo asumiremos el siguiente limnigrama, típico para los primeros segundos de una crecida:

t	y (x=0)
(s)	(m)
0	0.5700
1	0.6000
2	0.6500
3	0.7000
4	0.7500
5	0.8000
6	0.8500
7	0.9000
8	1.0000
9	1.0500
10	1.0900

Tabla No. 2 Limnigrama de alturas en la descarga del canal.
Fuente: Autores.

Aplicando el Método de los Incrementos Finitos se obtiene lo siguiente:

x	CALADOS y (m)										
	Tiempo t (s)										
(m)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.5700	0.6000	0.6500	0.7000	0.7500	0.8000	0.8500	0.9000	1.0000	1.0500	1.0900
1	0.6367	0.6382	0.6211	0.6146	0.6628	0.7345	0.7976	0.8522	0.9164	1.0044	1.0612
2	0.6604	0.6570	0.6655	0.6551	0.6204	0.6510	0.7486	0.8272	0.8871	0.9719	1.0533
3	0.6780	0.6785	0.6695	0.6812	0.6934	0.6388	0.6407	0.7719	0.8643	0.9346	1.0334
4	0.6925	0.6914	0.6951	0.6789	0.6863	0.7307	0.6589	0.6279	0.8100	0.9100	0.9954
5	0.7049	0.7045	0.7011	0.7120	0.6872	0.6851	0.7665	0.6689	0.5999	0.8629	0.9667
6	0.7159	0.7153	0.7152	0.7079	0.7298	0.6931	0.6821	0.8008	0.6627	0.4919	0.9500
7	0.7258	0.7253	0.7239	0.7261	0.7125	0.7475	0.6906	0.6780	0.8332	0.7864	0.7643
8	0.7349	0.7343	0.7334	0.7313	0.7382	0.7165	0.7576	0.6705	0.7236	0.9193	0.7570
9	0.7432	0.7427	0.7417	0.7411	0.7374	0.7528	0.7209	0.7229	0.6352	0.7866	1.0052
10	0.7510	0.7505	0.7495	0.7485	0.7486	0.7424	0.7714	0.7195	0.6559	0.6294	1.0475
11	0.7582	0.7578	0.7568	0.7559	0.7549	0.7562	0.7474	0.7973	0.7235	0.6243	0.8510
12	0.7651	0.7646	0.7637	0.7628	0.7620	0.7607	0.7641	0.7561	0.8278	0.7186	0.6089
13	0.7715	0.7711	0.7702	0.7694	0.7685	0.7678	0.7661	0.7719	0.7731	0.8579	0.6836
14	0.7777	0.7772	0.7764	0.7755	0.7747	0.7739	0.7734	0.7710	0.7795	0.7989	0.8602
15	0.7835	0.7831	0.7823	0.7814	0.7806	0.7799	0.7791	0.7788	0.7757	0.7885	0.8217
16	0.7891	0.7887	0.7879	0.7871	0.7863	0.7855	0.7848	0.7841	0.7840	0.7803	0.8012
17	0.7944	0.7940	0.7932	0.7924	0.7917	0.7909	0.7902	0.7895	0.7888	0.7890	0.7857
18	0.7996	0.7992	0.7984	0.7976	0.7969	0.7961	0.7954	0.7948	0.7941	0.7934	0.7940
19	0.8045	0.8041	0.8033	0.8026	0.8019	0.8011	0.8004	0.7998	0.7991	0.7985	0.7978
20	0.8092	0.8089	0.8081	0.8074	0.8067	0.8060	0.8053	0.8046	0.8040	0.8033	0.8027

Tabla No. 3 Resultados obtenidos aplicando el Método de los Incrementos Finitos.
Fuente: Autores.

En la Figura No. 11, indicada a continuación, podemos notar la evolución de los perfiles del agua con el tiempo t . Además se puede apreciar el movimiento de la onda traslacional de agua a partir de la descarga hacia aguas arriba y la influencia de esta en el perfil de flujo.

Como puede verse a partir del $t = 2 s$, la onda comienza a viajar hacia aguas arriba y aumenta su amplitud según el incremento de calado en la descarga producto de la subida precipitada de caudal en el río.

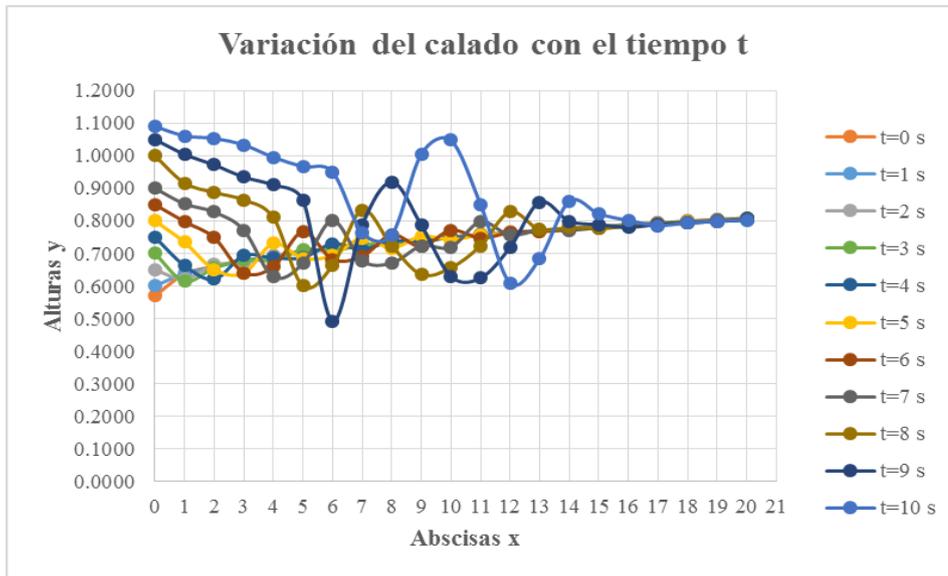


Figura No. 11 Variación de los calados del agua en las diferentes abscisas del canal con el tiempo t .
Fuente: Autores.

A partir de la Tabla No. 3 y de la Figura No. 11, también podemos notar que las ondas traslacionales se disipan aguas arriba y prácticamente se eliminan en las proximidades del calado uniforme a una distancia mayor a los 20 m, medidos a partir de la descarga.

4.2 Ejemplo de flujo transitorio analizado en un canal trapecoidal por el Método de los Elementos Finitos.

Para la comparación de resultados se utilizará un software computacional que emplea el Método de los Elementos finitos. Se realizarán dos simulaciones, la primera considerará el flujo del canal con todas las influencias que el río ejerce sobre el mismo, no solo en el calado, sino también considerando el cambio de dirección del flujo, transferencia de momento y turbulencias. La segunda simulación se realizará considerando un vertedero en el río que regule los niveles de crecida, y permita reducir al mínimo la influencia de la velocidad, turbulencia y demás fenómenos propios del flujo en condiciones naturales, esto con el objetivo de contrastar resultados entre ambos métodos numéricos, pues como se mencionó en el numeral 4.1, el Método de los Incrementos Finitos solamente considera la variación de calados y caudales, más no el influjo del resto de parámetros anteriormente descritos.

4.2.1 Simulación 1: Flujo en canal principal y secundario (río)

Como primer paso definiremos la geometría del problema establecido en el numeral 4.1. Utilizaremos un canal principal del cual vamos a estudiar sus calados; y un canal secundario (río) el cual servirá para establecer las crecidas y analizar el canal principal. Se utilizará un modelo tridimensional pues esto nos permite analizar un canal trapezoidal con todos sus particularidades. (Ver Figura No. 12).

Seguidamente procedemos al mallado, para lo cual utilizaremos elementos tetraédricos con tamaño máximo de 0.25 m. Realizaremos un refinado de la malla a la salida del canal principal con un tamaño máximo del elemento de 0.05 m. Esta distribución nos da un número de 28953 nodos y 151784 elementos. (Figura No. 13).

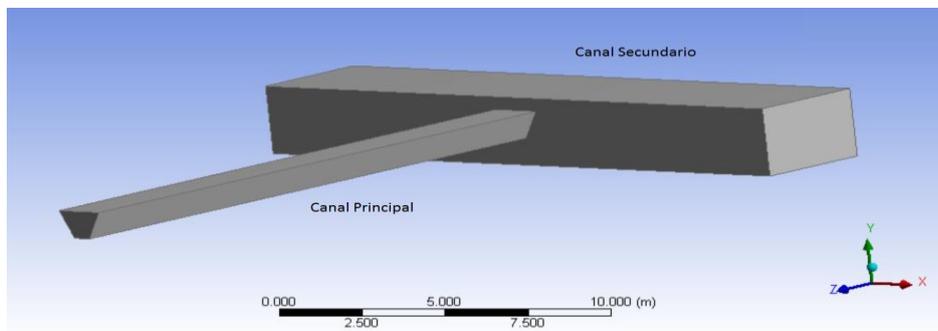


Figura No. 12 Geometría del problema.
Fuente: Autores.

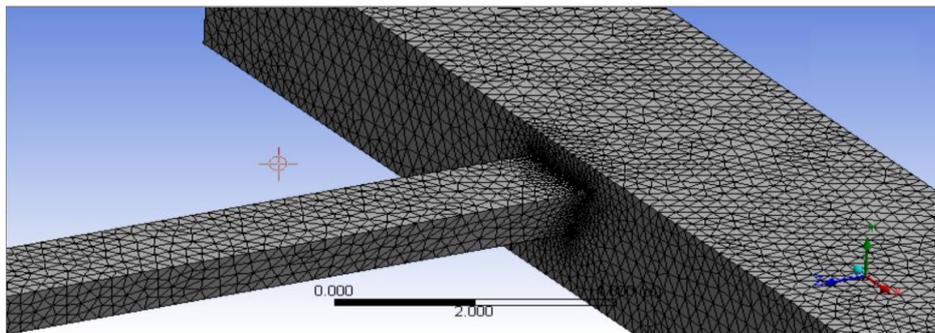


Figura No. 13 Mallado.
Fuente: Autores.

Definimos las superficies de entrada que en este caso son dos: INLET1 para el canal principal e INLET2 para el canal secundario. La superficie de salida: OUTLET y las superficies libres: AMBIENT.

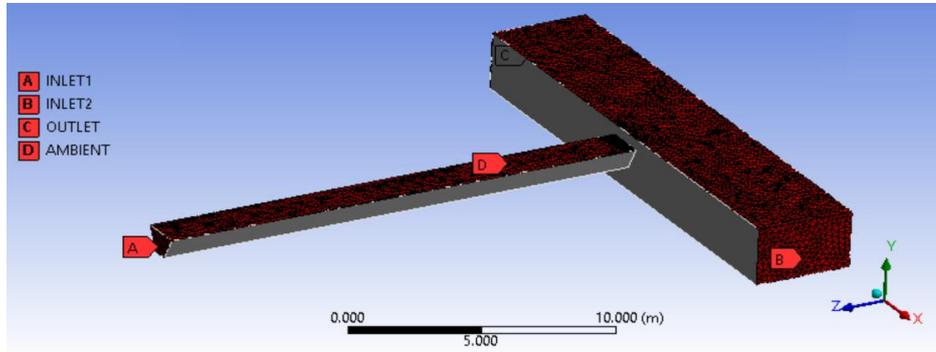


Figura No. 14 Definir superficies de contorno.
Fuente: Autores.

Seguidamente ingresamos las características físicas del modelo, como son flujo transitorio, modelo multifase con volumen de fluido, viscosidad k-epsilon, definición de los fluidos que en este caso son aire y agua y materiales del canal que es hormigón. Definimos en sentido del eje en que actúa la gravedad y la interacción del agua y aire.

Establecemos las condiciones de contorno en las distintas superficies:

- INLET1: Condiciones de velocidad y fracción de aire en el ingreso=0.
- INLET2: Condiciones de velocidad y fracción de aire en el ingreso=0.
- OUTLET: Fracción de aire en el ingreso=1.
- AMBIET: Fracción de aire en el ingreso=1.

Realizamos la modelación con las diferentes crecidas, obteniendo los siguientes resultados de los perfiles ya estabilizados:

x	Variación del calado con las crecidas			
	Modelación			
(m)	Régimen estacionario	Crecida 1	Crecida 2	Crecida 3
0.0	0.564	0.744	0.936	1.216
0.5	0.643	0.700	0.782	0.985
1.0	0.688	0.706	0.730	0.839
1.5	0.690	0.696	0.704	0.744
2.0	0.705	0.701	0.709	0.729
3.0	0.713	0.712	0.719	0.721
4.0	0.720	0.725	0.722	0.723

5.0	0.732	0.732	0.732	0.732
6.0	0.730	0.731	0.731	0.730
7.0	0.757	0.764	0.761	0.764
8.0	0.740	0.738	0.744	0.745
9.0	0.767	0.770	0.773	0.771
10.0	0.776	0.778	0.780	0.773

Tabla No. 4 Resultados obtenidos de la modelación.

Fuente: Autores.

Se establece curvas ya estabilizadas debido a las condiciones reales en las que se estable las crecidas que son simuladas por el software y que serán tomadas como valores comparativos con el método de las diferencias finitas.

Los valores anteriores son mostrados en la figura siguiente, en la cual se puede observar que únicamente en los primeros metros se produce una variación en el perfil del canal.

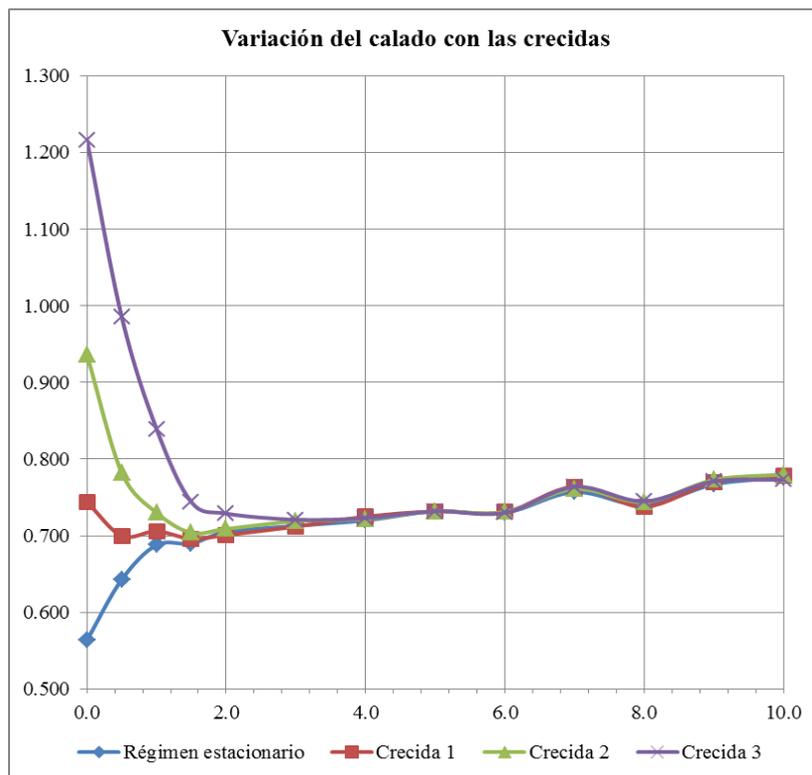


Figura No. 15 Variación del calado del canal con las crecidas.

Fuente: Autores.

En este caso vemos que los valores se aproximan desde una distancia de 3 m medida desde la descarga del canal principal, siendo su desviación estándar promedio de 0.002 m.

El coste computacional en las simulaciones es muy alto, pues se deben realizar varias corridas para calibrar el sistema y cotejar resultados ya sea con experimentación, mediciones realizadas en campo o con otros métodos numéricos.

A continuación se muestran varias instancias del cálculo y postproceso de los resultados obtenidos:

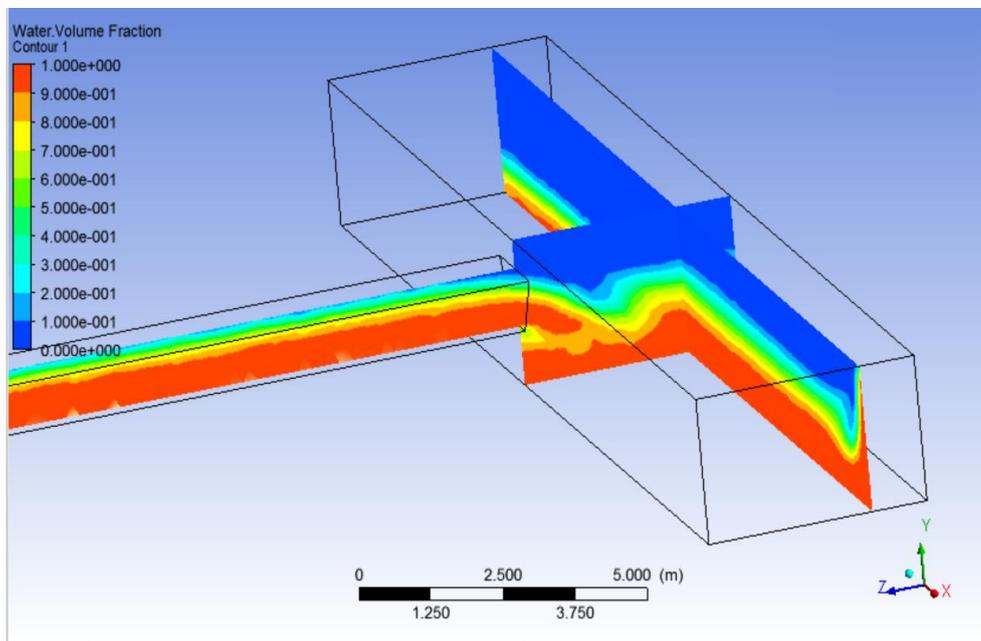


Figura No. 16 Postproceso: Resultados mediante la utilización de planos auxiliares.
Fuente: Autores.

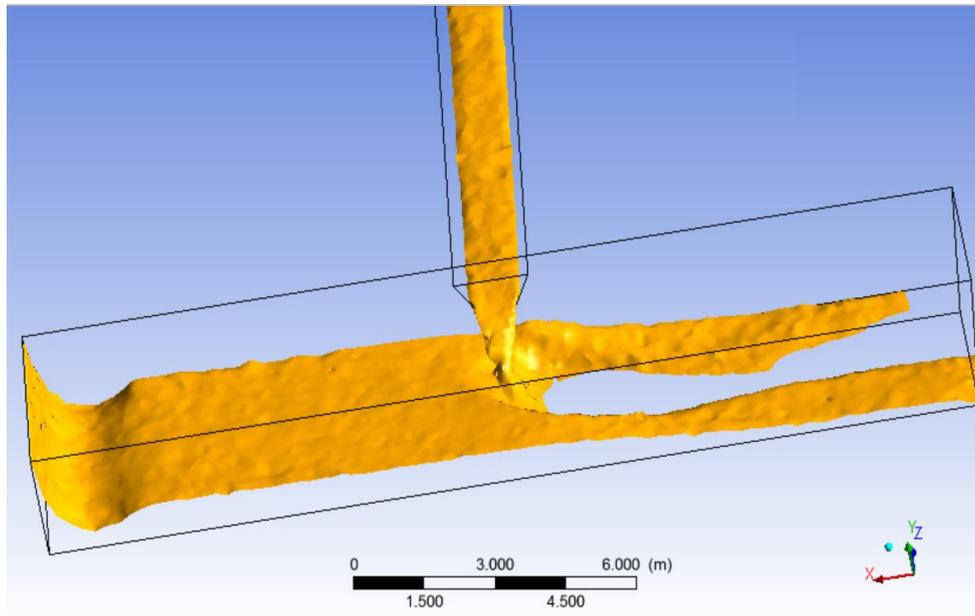


Figura No. 17 Postproceso: Resultados mediante la utilización de iso-superficies.
Fuente: Autores.

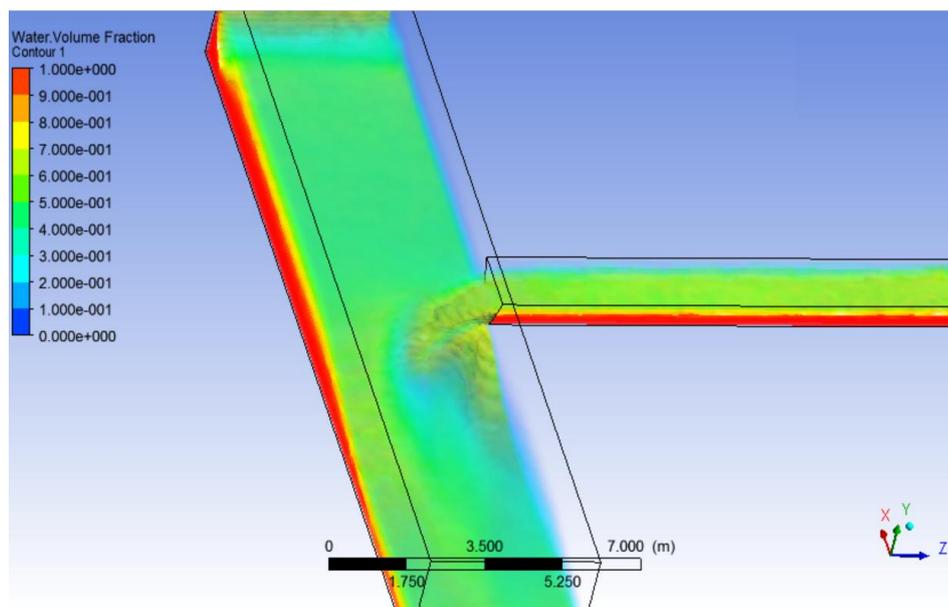


Figura No. 18 Postproceso: Resultados mediante la renderización de volúmenes.
Fuente: Autores.

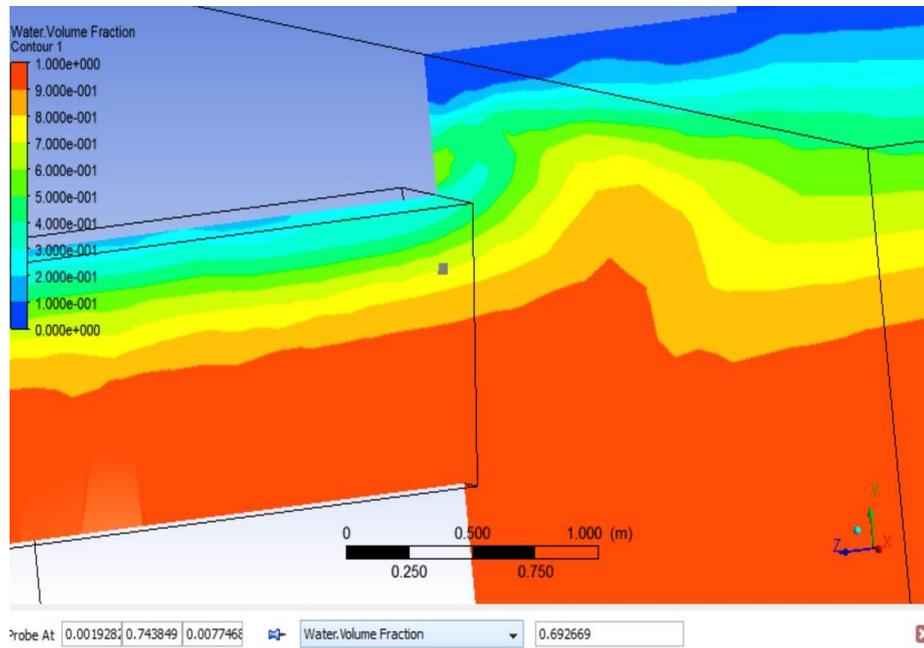


Figura No. 19 Postproceso: Resultados numéricos en regiones determinadas.
Fuente: Autores.

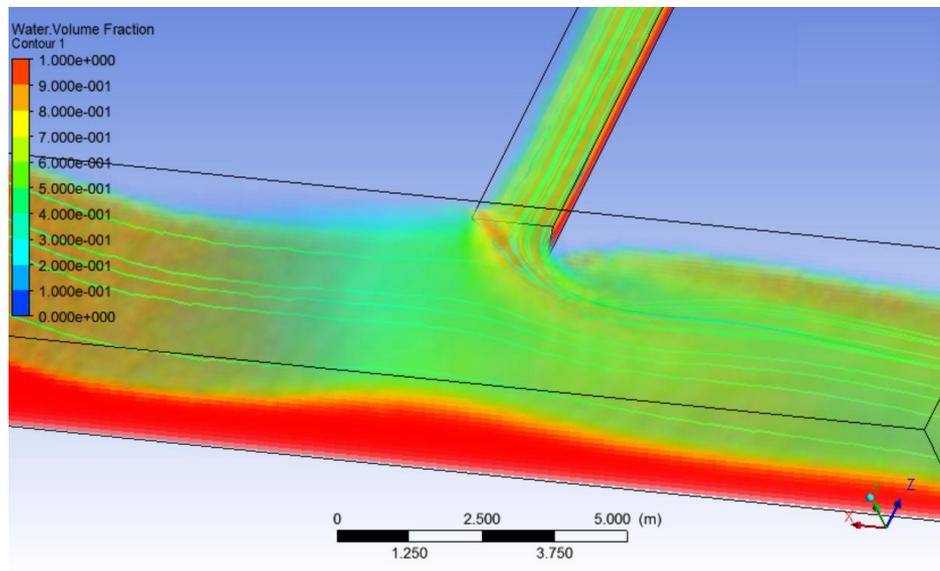


Figura No. 20 Postproceso: Resultados con líneas de corriente y volúmenes de fluido. Presencia de turbulencia.
Fuente: Autores.

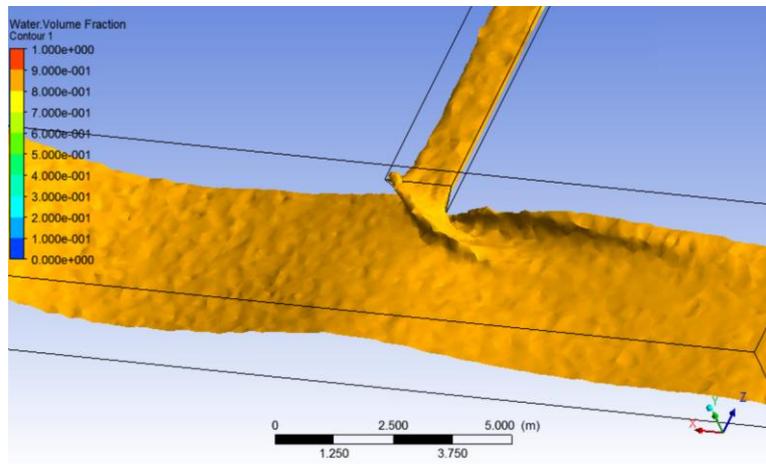


Figura No. 21 Postproceso: Resultados con iso-superficies. Presencia de turbulencia.
Fuente: Autores.

4.2.2 Simulación 2: Flujo en canal principal y vertedero de regulación de niveles y caudales en canal secundario (río)

Realizaremos una nueva simulación del problema para comprobación de resultados utilizando un vertedero como control de nivel en el canal secundario, para de esta manera minimizar la influencia de la velocidad del canal secundario sobre en canal principal.

La geometría del problema planteado sería la siguiente:

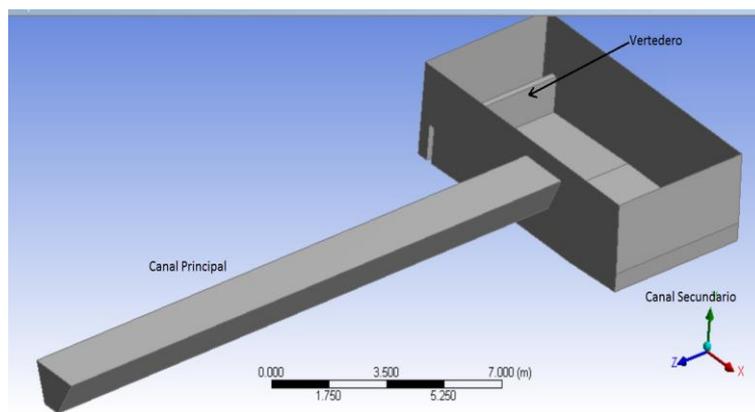


Figura No. 22 Geometría para segunda simulación.
Fuente: Autores.

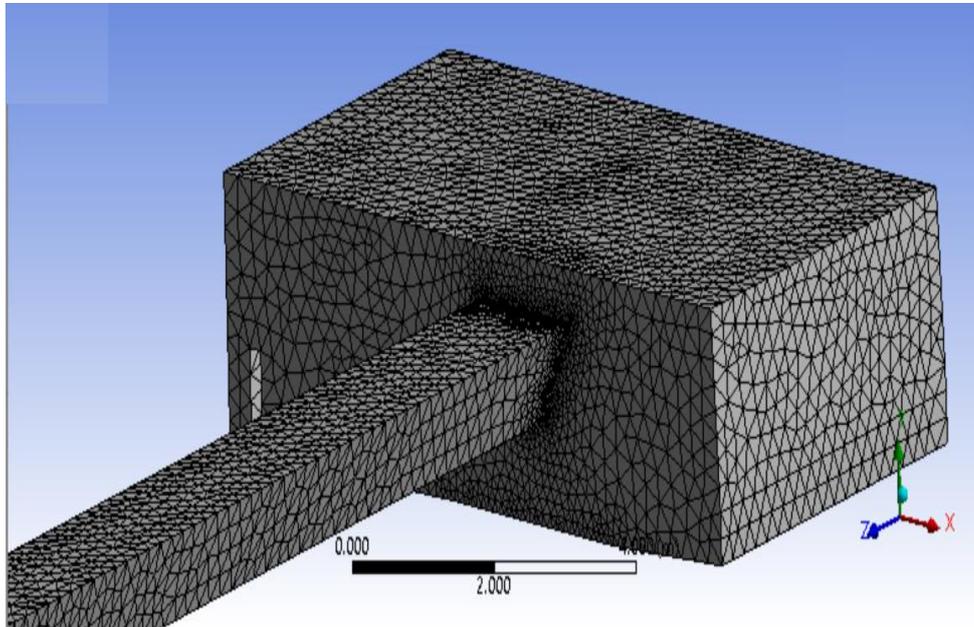


Figura No. 23 Mallado, con refinado malla en la descarga del canal principal.
Fuente: Autores.

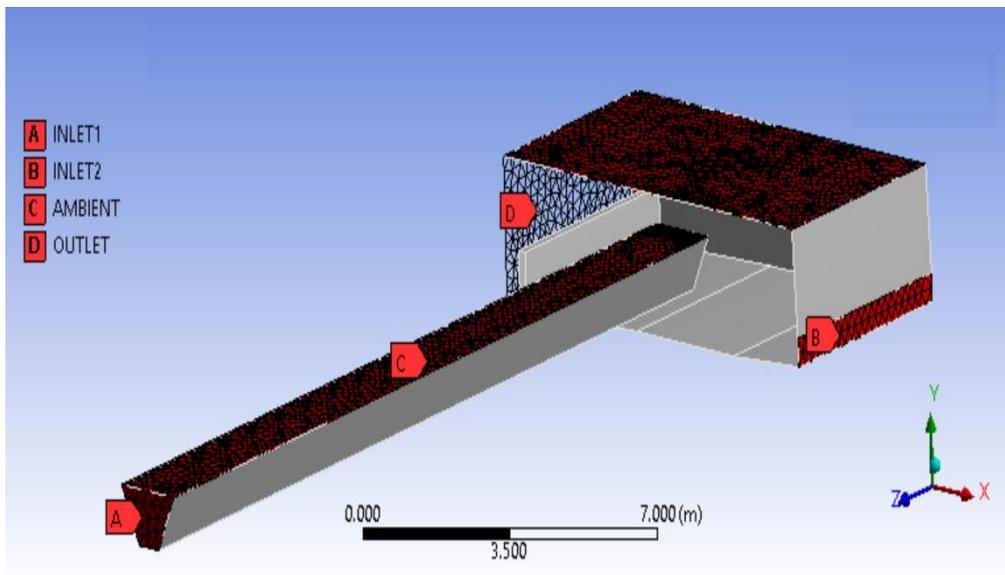


Figura No. 24 Definición de superficies de contorno.
Fuente: Autores.

Los resultados obtenidos con esta modelación se resumen en la siguiente tabla:

x	Variación del calado con las crecidas		
	Modelación		
(m)	Régimen estacionario	Crecida 1	Crecida 2
0.0	0.564	0.746	0.940
0.5	0.643	0.705	0.783
1.0	0.688	0.687	0.735
1.5	0.690	0.659	0.706
2.0	0.705	0.682	0.700
3.0	0.713	0.695	0.725
4.0	0.720	0.711	0.720
5.0	0.732	0.709	0.720
6.0	0.730	0.744	0.727
7.0	0.757	0.743	0.736
8.0	0.740	0.765	0.748
9.0	0.767	0.749	0.760
10.0	0.776	0.811	0.791

Tabla No. 5 Resultados obtenidos de la modelación.
Fuente: Autores.

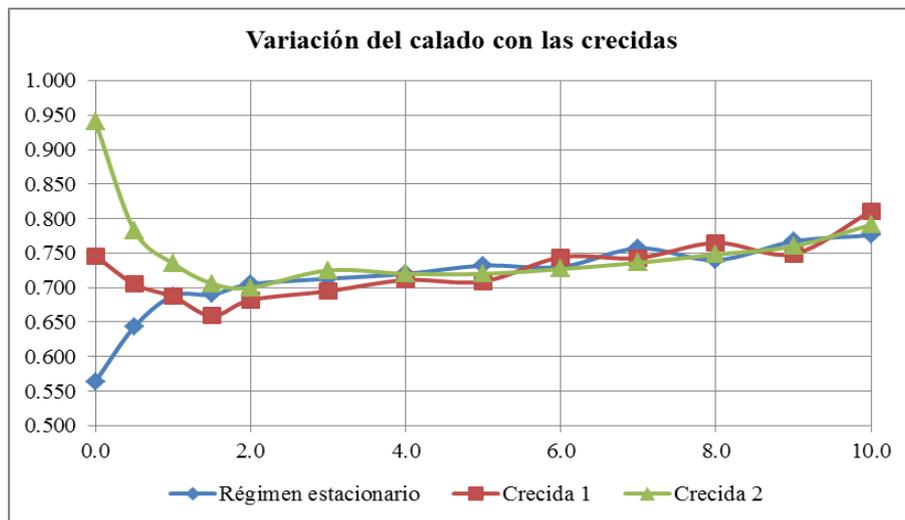


Figura No. 25 Variación del calado con las crecidas.
Fuente: Autores.

Es este caso vemos que los valores se aproximan desde una distancia de 3 m medida desde la descarga del canal principal, siendo su desviación estándar promedio de 0.011 m. Mostraremos a continuación como parte del postproceso, resultados gráficos que nos ayudan a visualizar y conceptualizar de mejor manera el problema.

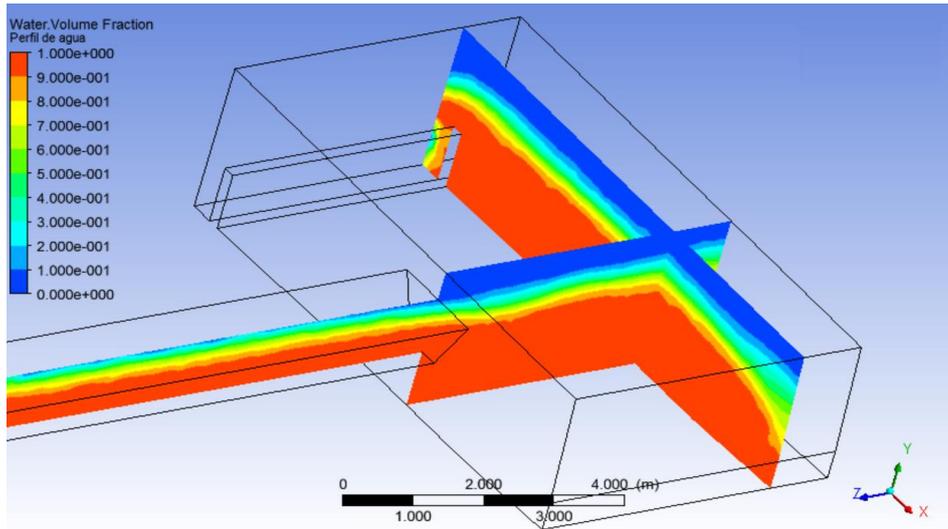


Figura No. 26 Postproceso: Resultados mediante la utilización de planos auxiliares.
Fuente: Autores.

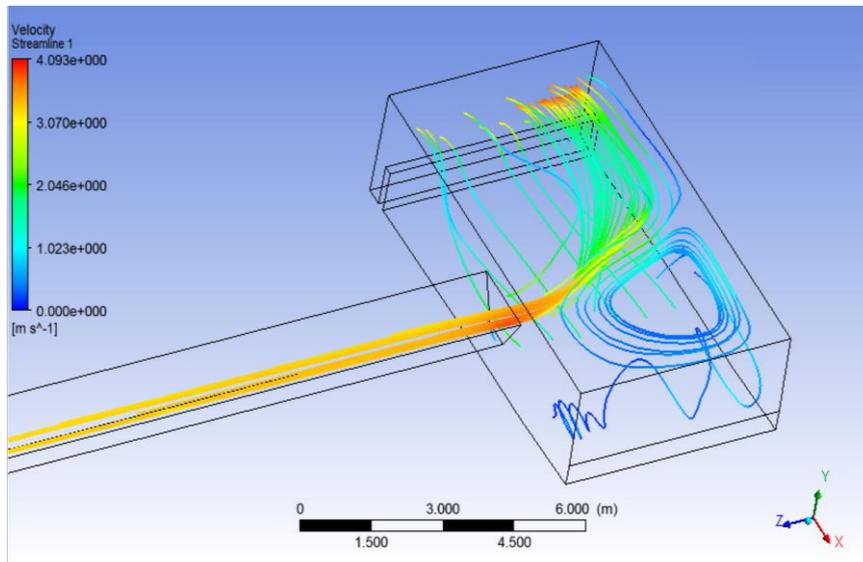


Figura No. 27 Postproceso: Líneas de flujo con sus respectivas velocidades.
Fuente: Autores.

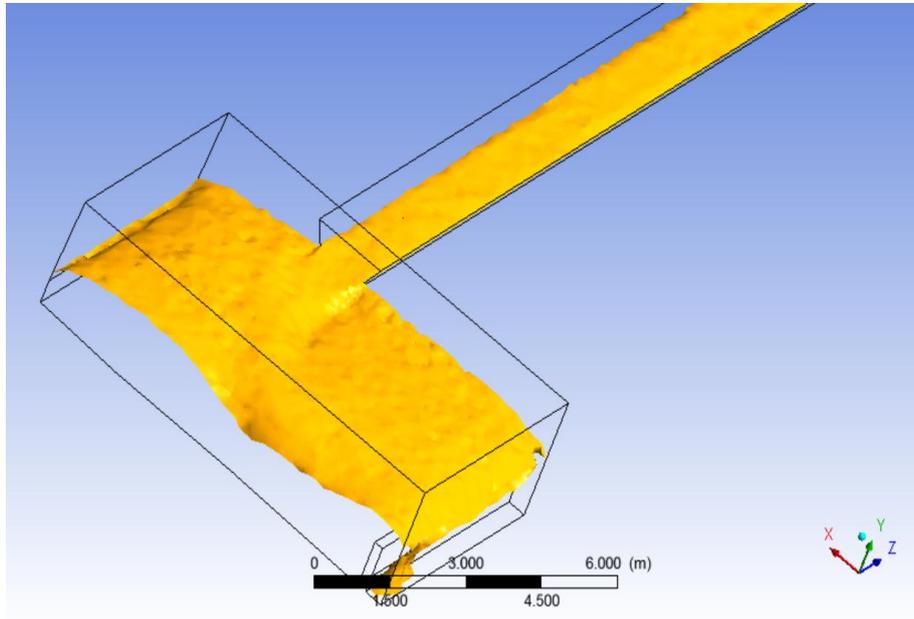


Figura No. 28 Postproceso: Resultados mediante la utilización de iso-superficies.
Fuente: Autores.

Ahora realizaremos una comparación de los calados obtenidos para las dos simulaciones con la ayuda de las siguientes figuras:

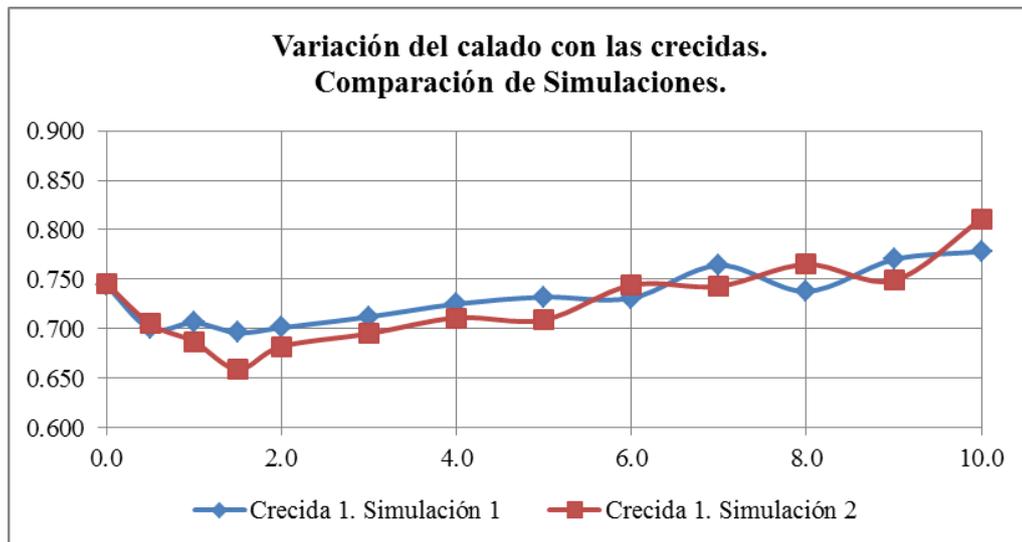


Figura No. 29 Comparación de resultados de simulaciones de la crecida 1.
Fuente: Autores.

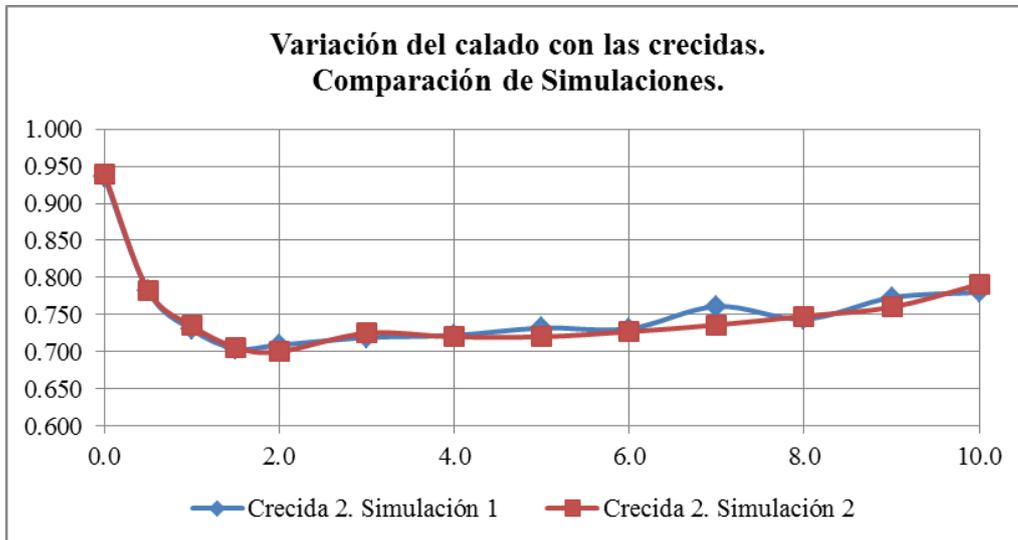


Figura No. 30 Comparación de resultados de simulaciones de la crecida 2.
Fuente: Autores.

De las figuras anteriores podemos indicar que sus valores tienen desviaciones estándar promedio de 0.014 m y 0.005 m para las crecidas 1 y 2 respectivamente.

CAPÍTULO 5

ANÁLISIS DE RESULTADOS

5.1 Comparación de resultados

En la Tabla No. 6, mostrada a continuación, se puede observar que los resultados obtenidos para los calados, según cada método aplicado, son muy similares, sin embargo es de resaltar que el Método de los Elementos Finitos refina los resultados de mejor manera entre iteraciones, a más que considera todas las variables del flujo en tres dimensiones.

x (m)	CALADOS y (m)							
	Régimen Estacionario		Crecida 1 t=4 s		Crecida 2 t=7 s		Crecida 2 t=10 s	
	Incre. Fini.	MEF	Incre. Fini.	MEF	Incre. Fini.	MEF	Incre. Fini.	MEF
0.0	0.5700	0.5640	0.7500	0.7440	0.9000	0.9360	1.0900	1.2160
0.5	0.6367	0.6430	0.6628	0.7000	0.8522	0.7820	1.0612	0.9850
1.0	0.6604	0.6880	0.6204	0.7060	0.8272	0.7300	1.0533	0.8390
1.5	0.6780	0.6900	0.6934	0.6960	0.7719	0.7040	1.0334	0.7440
2.0	0.6925	0.7050	0.6863	0.7010	0.6279	0.7090	0.9954	0.7290
3.0	0.7049	0.7130	0.6872	0.7120	0.6689	0.7190	0.9667	0.7210
4.0	0.7159	0.7200	0.7298	0.7250	0.8008	0.7220	0.9500	0.7230
5.0	0.7258	0.7320	0.7125	0.7320	0.6780	0.7320	0.7643	0.7320
6.0	0.7349	0.7300	0.7382	0.7310	0.6705	0.7310	0.7570	0.7300
7.0	0.7432	0.7570	0.7374	0.7640	0.7229	0.7610	1.0052	0.7640
8.0	0.7510	0.7400	0.7486	0.7378	0.7195	0.7440	1.0475	0.7450
9.0	0.7582	0.7670	0.7549	0.7700	0.7973	0.7730	0.8510	0.7710
10.0	0.7651	0.7760	0.7620	0.7780	0.7561	0.7800	0.6089	0.7730

Tabla No. 6 Comparación de los resultados obtenidos según los Método de Incrementos Finitos y Elementos Finitos

Fuente: Autores.

En la Figura No. 31, Figura No. 32, Figura No. 33 y Figura No. 34, podemos ver que la aproximación de la solución según cada método es muy parecida, sin embargo luego del tiempo $t = 7 s$, los resultados obtenidos por el Método de los Incrementos Finitos, presentan ya una variación considerable respecto del Método de los Elementos Finitos, debido a la acumulación del error que conlleva la aproximación de las ecuaciones (2.19) y (2.55), mediante diferencias finitas, esto debido principalmente al carácter no lineal de dichas ecuaciones.

Cabe indicar que a pesar de la variación de las soluciones, el Método de los Incrementos Finitos constituye una muy buena aproximación, que puede ser mejorada calibrando el modelo con experimentación sobre todo en las iteraciones de las soluciones y en la aproximación con diferencias finitas. Es de aclarar también que como es conocido en el campo de la Hidráulica, dentro de la Ingeniería Civil, todos

los modelos matemáticos son calibrados y validados con experimentación, inclusive el Método de los Elementos Finitos, a pesar de su gran potencialidad.

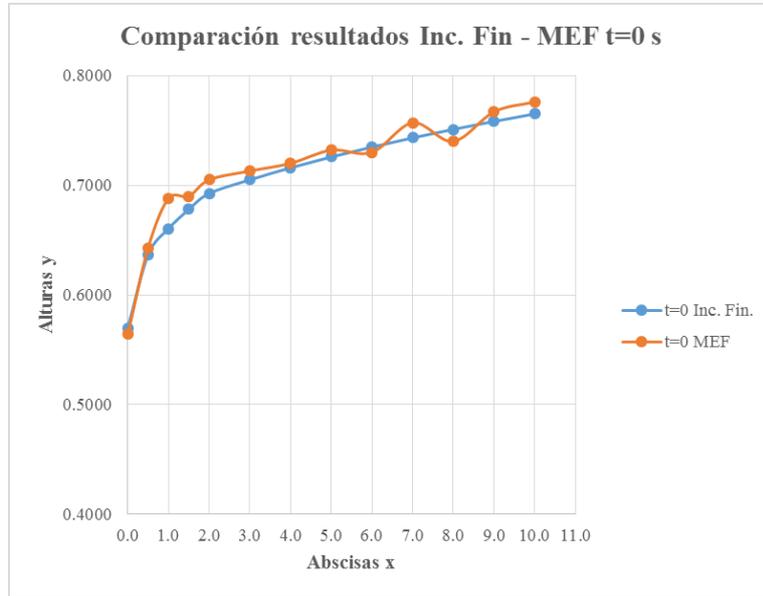


Figura No. 31 Comparación de resultados de ambos métodos en flujo estacionario.
Fuente: Autores.

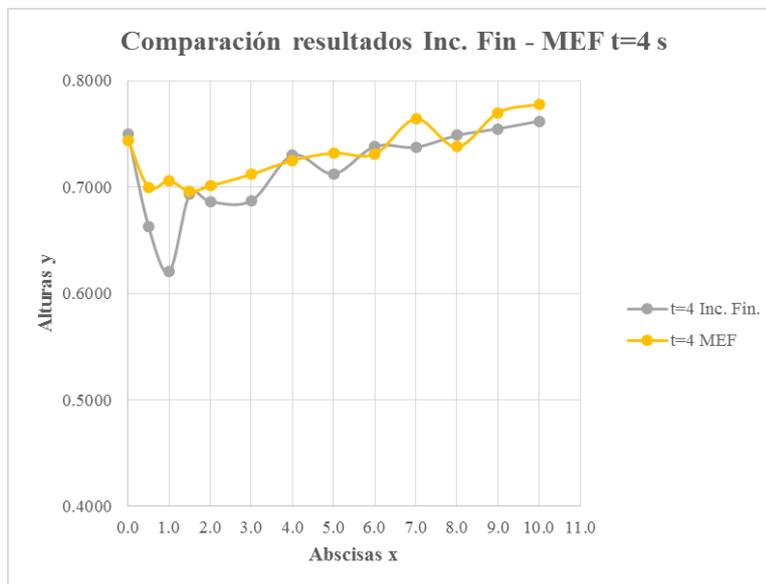


Figura No. 32 Comparación de resultados de ambos métodos en flujo transitorio $t=4$ s.
Fuente: Autores.

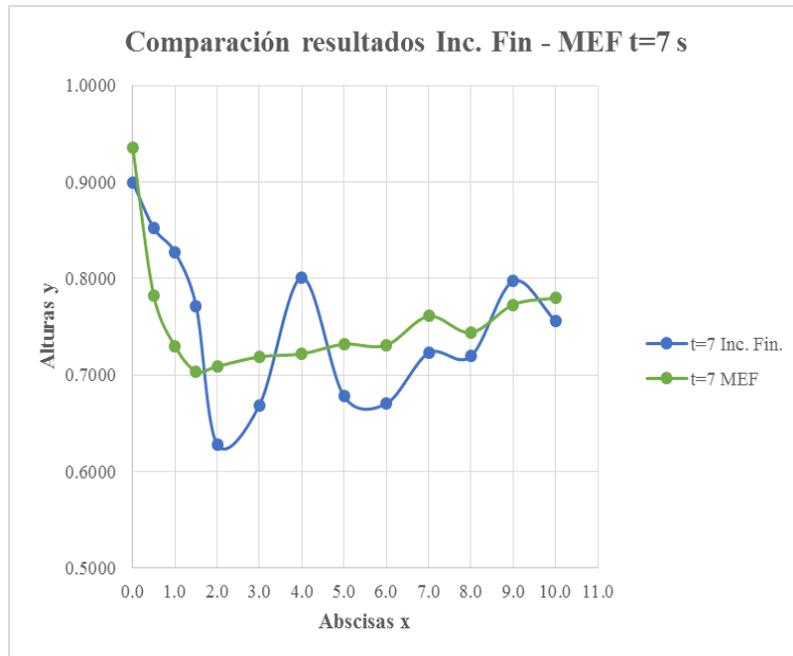


Figura No. 33 Comparación de resultados de ambos métodos en flujo transitorio $t=7$ s.
Fuente: Autores.

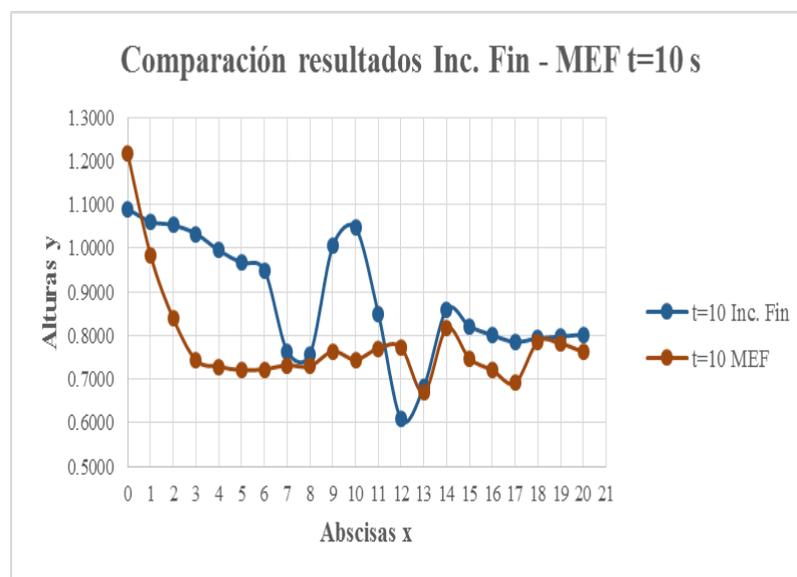


Figura No. 34 Comparación de resultados de ambos métodos en flujo transitorio $t=7$ s.
Fuente: Autores.

Básicamente la calibración de los modelos en lo referente al campo de la Hidráulica, se centra en la determinación de los coeficientes de Chézy, Manning y las pérdidas que se generan en el flujo debido a los cambios de trayectoria de las líneas de corriente, contracción de las venas de flujo, la influencia de la superficie libre, las vorticidades, resaltos hidráulicos, cavitación y demás fenómenos que se presentan en la realidad.

A pesar de lo expuesto anteriormente se pueden ajustar los resultados obtenidos con los Métodos de los Incrementos Finitos y Elementos Finitos, mediante curvas de aproximación que permitan determinar la altura de seguridad del canal de descarga.

A simple vista y basándonos en la crecida de mayor magnitud mostrada en la Figura No. 34, podemos concluir que la altura de seguridad en el canal cerca de la descarga debe ser de 1.2 m y reducirse progresivamente hasta 0.90 m aguas abajo.

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

6.1 CONCLUSIONES

- El nivel de seguridad estructural e hidráulico en un canal trapezoidal obtenido a partir de un análisis transitorio de flujo es mucho mayor al calculado a partir de un análisis simplificado utilizando el método de incrementos finitos de la hidráulica tradicional.
- La economía en el diseño de los elementos hidráulicos es notoria debido a que con un análisis transitorio es posible diseñar los canales abiertos y las estructuras afines basándonos en criterios muy aproximados a la realidad.
- Los métodos de análisis por incrementos finitos y elementos finitos deberán ser calibrados y probados experimentalmente a pesar de sus potencialidades, debido a la complejidad de las ecuaciones no lineales que rigen los fenómenos transitorios.
- Las simplificaciones realizadas para aproximar el comportamiento real de un flujo transitorio, influyen de manera considerable en los resultados obtenidos en especial en métodos iterativos de aproximación diferencial.

6.2 RECOMENDACIONES

- Considerar como un requisito indispensable para los diseños hidráulicos de canales abiertos la realización de un análisis transitorio, debido a todas las ventajas que proporciona.
- Impartir una introducción al tema en los cursos de pregrado que incentive a los ingenieros, en especial en el campo de la ingeniería civil, a desarrollar los cálculos y diseños hidráulicos en base a un análisis transitorio y por el MEF.
- Incentivar continuamente la investigación científica en este campo, generando políticas de cooperación entre las universidades y las entidades públicas y privadas, que permita un beneficio común, pues la importancia de este campo es muy notoria no solamente en el campo de la construcción de obras hidráulicas, sino también en la industria y manufactura de productos.

ANEXOS

A.1 Método de Preissmann para la Resolución de Problemas de Flujo Transitorio

Para la resolución de las ecuaciones que gobiernan el flujo no permanente gradualmente variado existen numerosos métodos numéricos, los cuales proporcionan soluciones aproximadas al problema. Uno de los métodos más utilizados en la resolución de las ecuaciones de flujo no permanente, es el Esquema de Diferencias Finitas Implícito de Preissmann. Esta técnica permite que el modelo utilice segmentos de diferentes longitudes y un esquema que va desde centrado hasta totalmente adelantado en el tiempo. Los métodos de solución implícitos son muy utilizados en hidráulica, debido a su estabilidad y a que permiten la elección arbitraria de los tamaños de la malla, lo cual es muy ventajoso en el caso de una malla de diferencias finitas.

Como se puede observar en la Figura No. 35, el esquema de Preissmann considera un sistema de grilla espacio – temporal, que define regiones dentro de las cuales las ecuaciones de flujo no permanente son resueltas. Las derivadas espacial y temporal del valor funcional, f , el cual puede representar cualquier variable dependiente, por ejemplo velocidad, caudal, nivel de agua, etc., se discretizan de la siguiente manera:

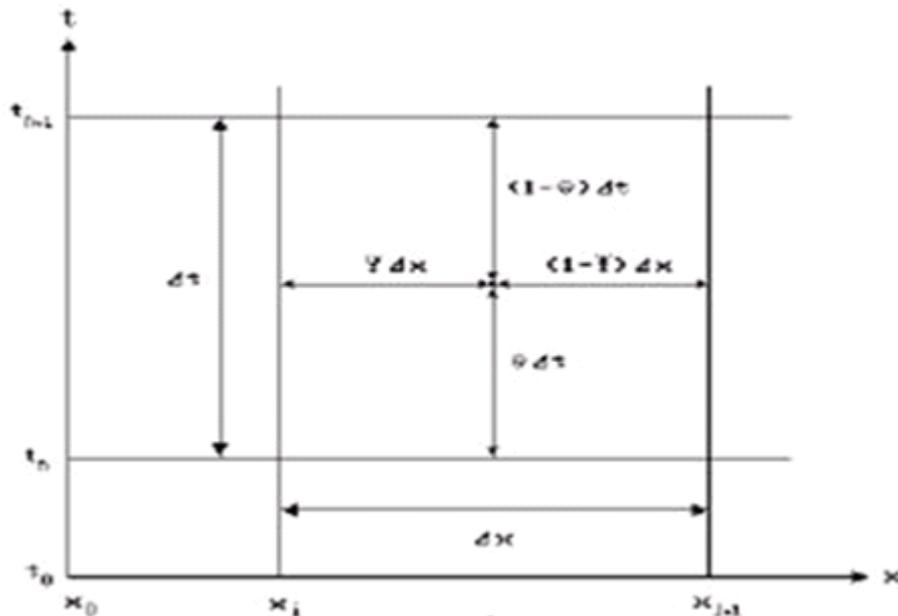


Figura No. 35 Grilla Espacio – Temporal del Esquema de Preissmann.

Fuente: Autores.

Derivada Espacial:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{1}{\Delta x} [\theta(f_{i+1}^{n+1} - f_i^{n+1}) + (1-\theta)(f_{i+1}^n - f_i^n)] \quad (\text{A. 1})$$

Derivada Temporal:

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{1}{\Delta t} [(1-\phi)(f_{i+1}^{n+1} - f_{i+1}^n) + \phi(f_i^{n+1} - f_i^n)] \quad (\text{A. 2})$$

$$\Delta t = \Delta t_1 = \Delta t_2 = \dots = \Delta t_n$$

Siendo:

f , el valor funcional.

ϕ , factor de peso para el espacio.

θ , factor de peso para el tiempo.

n , índice para el tiempo.

i , índice para el espacio.

Los parámetros θ y ϕ son factores de ponderación utilizados para indicar la posición temporal y espacial, respectivamente, dentro del incremento de distancia Δx_i e incremento de tiempo Δt_n , en los cuales la derivada y las funciones serán evaluadas.

Generalmente para los valores de θ y ϕ , se considera lo siguiente:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \phi \leq 1 \\ 0.5 &\leq \theta \leq 1 \end{aligned} \quad (\text{A. 3})$$

Si asumimos que $\phi = 1/2$, se produce una derivada temporal en la posición espacial $i + 1/2$. De la misma forma, cuando consideramos $\theta = 1/2$ la derivada espacial está centrada en la dirección temporal $n + 1/2$.

El error inherente al método es del orden del cuadrado del diferencial de mayor magnitud considerado. Se ha llegado a determinar que para valores de $\theta > 1/2$ se introducen errores adicionales de truncamiento que producen disipación numérica. Las derivadas temporales normalmente son calculadas con $\phi = 1/2$, aunque otros valores pueden ser ventajosos cuando se utilizan segmentos de longitudes desiguales.

En base a las expresiones (A. 1) y (A. 2), la función f , se puede escribir como:

$$f(x,t) = \phi \cdot [\theta \cdot f_i^{n+1} + (1-\theta) \cdot f_i^n] + (1-\phi) \cdot [\theta \cdot f_{i+1}^{n+1} + (1-\theta) \cdot f_{i+1}^n] \quad (\text{A. 4})$$

La expresión (A. 4) permite ponderar el valor de f , dentro de la región mostrada en la Figura No. 35, en función de los valores extremos f_i^n , f_{i+1}^n , f_i^{n+1} y f_{i+1}^{n+1} , que limitan dicha región.

A.1.1 Discretización de la Ecuación del Balance de Masa o Ecuación de la Continuidad

En la ecuación (2.19), q es el caudal lateral por unidad de longitud que sale o entra al volumen de control. Si consideramos un volumen de control diferencial de longitud Δx y sección transversal A , entonces el caudal lateral total G , que ingresa o se descarga del volumen de control diferencial, sería:

$$G = q\Delta x \quad (\text{A. 5})$$

El valor de q se calcula en la mitad de cada celda, para ello se considera $\phi = 1/2$ en la expresión (A. 4).

Basándonos en las expresiones (A. 1), (A. 2) y (A. 4), la ecuación (2.19), del principio del balance de masa, a la cual llamaremos por C , según el esquema de diferencias finitas de Preissmann, tendría la forma siguiente:

$$C = \left[\begin{aligned} &\theta \cdot \left(Q_{i+1}^{n+1} - Q_i^{n+1} + \frac{G_i^{n+1} + G_{i+1}^{n+1}}{2} \right) + \\ &(1-\theta) \cdot \left(Q_{i+1}^n - Q_i^n + \frac{G_i^n + G_{i+1}^n}{2} \right) \end{aligned} \right] \cdot \Delta t + \\ + \left[(1-\phi) \cdot (A_{i+1}^{n+1} - A_{i+1}^n) + \phi \cdot (A_i^{n+1} - A_i^n) \right] \cdot \Delta x = 0 \quad (\text{A. 6})$$

en donde:

Ecuación de la Continuidad:

$$(\text{A. 7})$$

$$C \approx \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} + q = 0$$

Derivada Espacial del Caudal:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \approx \frac{1}{\Delta x} \left[\theta \cdot (Q_{i+1}^{n+1} - Q_i^{n+1}) + (1-\theta) \cdot (Q_{i+1}^n - Q_i^n) \right] \quad (\text{A. 8})$$

Derivada Temporal del Área:

$$\frac{\partial A}{\partial t} \approx \frac{1}{\Delta t} \left[(1-\phi) \cdot (A_{i+1}^{n+1} - A_{i+1}^n) + \phi \cdot (A_i^{n+1} - A_i^n) \right] \quad (\text{A. 9})$$

Caudal Lateral de Entrada por Unidad de Longitud:

$$q\left(i + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right) \approx \frac{1}{2} \left[\theta \cdot q_i^{n+1} + (1-\theta) \cdot q_i^n \right] + \frac{1}{2} \left[\theta \cdot q_{i+1}^{n+1} + (1-\theta) \cdot q_{i+1}^n \right] \quad (\text{A. 10})$$

Caudal Lateral de Entrada Total:

$$\begin{aligned} G\left(i + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right) &\approx q\left(i + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta x \\ G\left(i + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right) &\approx \frac{1}{2} \left[\theta \cdot q_i^{n+1} + (1-\theta) \cdot q_i^n \right] \cdot \Delta x + \\ &\quad \frac{1}{2} \left[\theta \cdot q_{i+1}^{n+1} + (1-\theta) \cdot q_{i+1}^n \right] \cdot \Delta x \\ G\left(i + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right) &\approx \frac{1}{2} \left[\theta \cdot G_i^{n+1} + (1-\theta) \cdot G_i^n \right] + \frac{1}{2} \left[\theta \cdot G_{i+1}^{n+1} + (1-\theta) \cdot G_{i+1}^n \right] \end{aligned} \quad (\text{A. 11})$$

Según las expresiones (A. 10) y (A. 11) el caudal q por unidad de longitud, en el centro de la celda, se puede expresar mediante

$$\begin{aligned}
 q\left(i + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right) &\approx \frac{G\left(i + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right)}{\Delta x} \\
 q\left(i + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right) &\approx \frac{1}{2\Delta x} \left[\theta \cdot G_i^{n+1} + (1-\theta) \cdot G_i^n \right] + \\
 &\quad \frac{1}{2\Delta x} \left[\theta \cdot G_{i+1}^{n+1} + (1-\theta) \cdot G_{i+1}^n \right]
 \end{aligned} \tag{A. 12}$$

Si reemplazamos las expresiones (A. 8), (A. 9) y (A. 12), en la ecuación (A. 7) y operamos, se obtiene la expresión (A. 6) descrita anteriormente.

A.1.2 Discretización de la Ecuación del Balance de la Cantidad de Movimiento

Para efectos de cálculo, se definen las siguientes variables, en la expresión (2.55):

$$H = h_g A \tag{A. 13}$$

$$D = AS_f = \frac{Q^2 n^2 P^{\frac{4}{3}}}{A^{\frac{7}{3}}} \tag{A. 14}$$

A partir de las expresiones (A. 13) y (A. 14) la ecuación (2.55), tendría la siguiente forma:

$$\frac{1}{g} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{gA} + H \right) - AS_0 + D = 0 \tag{A. 15}$$

Procediendo de igual forma que para el caso de la discretización de la ecuación de la continuidad, en base a las expresiones (A. 1), (A. 2) y (A. 4), la ecuación (A. 15), correspondiente al principio del balance de la cantidad de movimiento, la misma denominaremos como M , según el esquema de diferencias finitas de Preissmann, se expresa mediante

$$\begin{aligned}
M = & \left[(1-\phi) \cdot (Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i+1}^n) + \phi \cdot (Q_i^{n+1} - Q_i^n) \right] \cdot \frac{\Delta x}{g} + \\
& + \left\{ \begin{aligned} & \theta \cdot \left(H_{i+1}^{n+1} + \frac{(Q_{i+1}^{n+1})^2}{gA_{i+1}^{n+1}} - H_i^{n+1} - \frac{(Q_i^{n+1})^2}{gA_i^{n+1}} \right) + \\ & (1-\theta) \cdot \left(H_{i+1}^n + \frac{(Q_{i+1}^n)^2}{gA_{i+1}^n} - H_i^n - \frac{(Q_i^n)^2}{gA_i^n} \right) \end{aligned} \right\} \cdot \Delta t - \\
& - \left\{ \begin{aligned} & \phi \cdot [\theta \cdot A_i^{n+1} + (1-\theta) \cdot A_i^n] + \\ & (1-\phi) \cdot [\theta \cdot A_{i+1}^{n+1} + (1-\theta) \cdot A_{i+1}^n] \end{aligned} \right\} \cdot (S_0 \Delta x \Delta t) + \\
& + \left\{ \begin{aligned} & \phi \cdot [\theta \cdot D_i^{n+1} + (1-\theta) \cdot D_i^n] \\ & + (1-\phi) \cdot [\theta \cdot D_{i+1}^{n+1} + (1-\theta) \cdot D_{i+1}^n] \end{aligned} \right\} \cdot (\Delta x \Delta t) = 0
\end{aligned} \tag{A. 16}$$

siendo:

Ecuación de la Cantidad de Movimiento:

$$M \approx \frac{1}{g} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{gA} + H \right) - AS_0 + D = 0 \tag{A. 17}$$

Derivada Temporal del Caudal:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} \approx \frac{1}{\Delta t} \left[(1-\phi) \cdot (Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i+1}^n) + \phi \cdot (Q_i^{n+1} - Q_i^n) \right] \tag{A. 18}$$

Derivada Espacial de la Variable H:

$$\frac{\partial H}{\partial x} \approx \frac{1}{\Delta x} \left[\theta \cdot (H_{i+1}^{n+1} - H_i^{n+1}) + (1-\theta) \cdot (H_{i+1}^n - H_i^n) \right] \tag{A. 19}$$

Derivada Espacial de Q^2/gA :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{gA} \right) \approx \frac{1}{\Delta x} \left\{ \theta \cdot \left[\frac{(Q_{i+1}^{n+1})^2}{gA_{i+1}^{n+1}} - \frac{(Q_i^{n+1})^2}{gA_i^{n+1}} \right] + (1-\theta) \cdot \left[\frac{(Q_{i+1}^n)^2}{gA_{i+1}^n} - \frac{(Q_i^n)^2}{gA_i^n} \right] \right\} \tag{A. 20}$$

Área A:

$$\tag{A. 21}$$

$$A(x,t) = \phi \cdot [\theta \cdot A_i^{n+1} + (1-\theta) \cdot A_i^n] + (1-\phi) \cdot [\theta \cdot A_{i+1}^{n+1} + (1-\theta) \cdot A_{i+1}^n]$$

Variable D :

$$D(x,t) = \phi \cdot [\theta \cdot D_i^{n+1} + (1-\theta) \cdot D_i^n] + (1-\phi) \cdot [\theta \cdot D_{i+1}^{n+1} + (1-\theta) \cdot D_{i+1}^n] \quad (\text{A. 22})$$

Sustituyendo las expresiones (A. 18), (A. 19), (A. 20), (A. 21) y (A. 22) en la ecuación (A. 17), y operando, obtenemos la expresión (A. 16).

Las ecuaciones (A. 6) y (A. 16), se aplican para cada una de las celdas de la malla de diferencias finitas, y en cada uno de los tiempos considerados. Las expresiones obtenidas de la aplicación de (A. 6) y (A. 16), para cada una de las celdas de la malla, para un tiempo n cualquiera, forman un sistema no lineal de ecuaciones, que deben resolverse simultáneamente para cada tiempo. El sistema de ecuaciones obtenido es no lineal debido a la presencia de potencias cuadráticas y negativas, en los términos de caudal (Q_i^{n+1} y Q_{i+1}^{n+1}) y área (A_i^{n+1} y A_{i+1}^{n+1}), respectivamente, dentro de la expresión (A. 16), correspondiente a la forma discreta, en diferencias finitas, de la ecuación del principio de balance de la cantidad de movimiento.

En las ecuaciones (A. 6) y (A. 16), las incógnitas son: Q_i^{n+1} , Q_{i+1}^{n+1} , A_i^{n+1} y A_{i+1}^{n+1} . Los términos que tienen el superíndice n , se conocen, ya sea de las condiciones iniciales o de una solución del sistema de ecuaciones no lineal de *Saint – Venant*, en una línea de tiempo previa.

Si el número de nodos de la malla de diferencias finitas es N , el número de celdas donde se aplicarán las ecuaciones de continuidad y balance de la cantidad de movimiento, será $N-1$, de forma que dispondremos de $2N-2$ ecuaciones, para $2N$ incógnitas. Las 2 ecuaciones que faltan se obtienen de las condiciones de frontera de los nodos extremos de la malla.

A.2 Condiciones de frontera para las Ecuaciones de *Saint – Venant*

Para solucionar el modelo matemático de las ecuaciones de *Saint – Venant* se requiere de la formulación de condiciones de frontera en los puntos extremos del canal a considerar, durante todo el tiempo de simulación, para proveer el número suficiente de ecuaciones adicionales y satisfacer los requerimientos de la técnica de simulación.

Existen varias combinaciones para las condiciones de frontera externas, estas pueden consistir en descargas nulas al final del canal, un caudal o un nivel de agua conocido en función del tiempo, o una curva de calibración conocida. Cuando una condición de frontera se plantea en base a la variación del caudal con el tiempo, en un extremo cualquiera del canal, se cuenta entonces con un hidrograma de caudales, si en cambio la condición de frontera se formula con una curva de variación del nivel del agua con el tiempo, se tiene un limnigrama de calados o alturas del agua. En cuanto a las curvas de calibración, estas permiten calcular el caudal en función del nivel del agua, el cual al variar con el tiempo puede expresarse mediante un limnigrama, de forma que las curvas de calibración pueden constituirse de una combinación de hidrogramas y limnigramas.

A.3 Condiciones iniciales para las Ecuaciones de Saint - Venant

El cálculo hidrodinámico parte de las condiciones de flujo en el sistema para el tiempo $t = 0$. La forma de establecer las condiciones iniciales adecuadas es encontrar las condiciones de flujo en todos los nodos de la malla. Dichas condiciones se pueden obtener de datos medidos en la realidad o calculados mediante algún tipo de aproximación. Es razonable asumir como aproximación inicial una condición de flujo permanente en todos los nodos de la malla de diferencias finitas. Dependiendo del caso se puede considerar un estado de flujo permanente uniforme o gradualmente variado, por ejemplo cuando el canal sea muy extenso y de pendiente relativamente suave se puede asumir un flujo uniforme del agua, para el caso de tramos cortos del canal con pendientes fuertes o cambios graduales de pendiente, el flujo se puede considerar como permanente gradualmente variado.

A.4 Método de Solución de las Ecuaciones de Saint – Venant discretizadas en Diferencias Finitas según el esquema de Preissmann

Como se mencionó anteriormente, producto del proceso de discretización en diferencias finitas de las ecuaciones de *Saint – Venant*, según el esquema de Preissmann, considerando una malla de N nodos, se obtienen $2N$ ecuaciones que forman un sistema no lineal con $2N$ incógnitas. Para poder calcular las $2N$ incógnitas en un tiempo n cualesquiera, se utiliza el *Método de Newton – Raphson*, que consiste en un proceso de prueba y error, el cual se describe a continuación

A.5 Método de Newton – Raphson para la Solución de Sistemas de Ecuaciones No Lineales

Consideremos el sistema de ecuaciones no lineales siguiente:

$$\begin{aligned}
 f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= u_1 \\
 f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= u_2 \\
 f_3(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= u_3 \\
 &\vdots \\
 f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= u_n
 \end{aligned} \tag{A. 23}$$

Este sistema puede verse como una transformación de $R^n \rightarrow R^n$. Si estamos interesados en el comportamiento de esta transformación cerca del punto $(x_1', x_2', x_3', \dots, x_n')$, cuya imagen es el punto $(u_1', u_2', u_3', \dots, u_n')$, y si las dos funciones tienen derivadas parciales continuas, entonces podemos usar la diferencial del sistema para escribir un sistema de aproximaciones incrementales lineales válidas cerca del punto $(x_1', x_2', x_3', \dots, x_n')$ en cuestión:

$$\begin{aligned}
 u_1 - u_1' &\approx \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(x_1', x_2', x_3', \dots, x_n')(x_1 - x_1') + \frac{\partial}{\partial x_2} f_1(x_1', x_2', x_3', \dots, x_n')(x_2 - x_2') + \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial x_3} f_1(x_1', x_2', x_3', \dots, x_n')(x_3 - x_3') + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} f_1(x_1', x_2', x_3', \dots, x_n')(x_n - x_n') \\
 u_2 - u_2' &\approx \frac{\partial}{\partial x_1} f_2(x_1', x_2', x_3', \dots, x_n')(x_1 - x_1') + \frac{\partial}{\partial x_2} f_2(x_1', x_2', x_3', \dots, x_n')(x_2 - x_2') + \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial x_3} f_2(x_1', x_2', x_3', \dots, x_n')(x_3 - x_3') + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} f_2(x_1', x_2', x_3', \dots, x_n')(x_n - x_n') \\
 u_3 - u_3' &\approx \frac{\partial}{\partial x_1} f_3(x_1', x_2', x_3', \dots, x_n')(x_1 - x_1') + \frac{\partial}{\partial x_2} f_3(x_1', x_2', x_3', \dots, x_n')(x_2 - x_2') + \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial x_3} f_3(x_1', x_2', x_3', \dots, x_n')(x_3 - x_3') + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} f_3(x_1', x_2', x_3', \dots, x_n')(x_n - x_n') \\
 &\vdots \\
 u_n - u_n' &\approx \frac{\partial}{\partial x_1} f_n(x_1', x_2', x_3', \dots, x_n')(x_1 - x_1') + \frac{\partial}{\partial x_2} f_n(x_1', x_2', x_3', \dots, x_n')(x_2 - x_2') + \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial x_3} f_n(x_1', x_2', x_3', \dots, x_n')(x_3 - x_3') + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} f_n(x_1', x_2', x_3', \dots, x_n')(x_n - x_n')
 \end{aligned} \tag{A. 24}$$

El sistema (A. 24) es una aproximación lineal local que nos da una idea del efecto que pequeños cambios en las variables independientes producen en las variables

dependientes. Si usamos la matriz jacobiana $\underline{J}(x_1', x_2', x_3', \dots, x_n')$, la expresión (A. 24) se puede escribir como:

$$\begin{bmatrix} u_1 - u_1' \\ u_2 - u_2' \\ u_3 - u_3' \\ \vdots \\ u_5 - u_5' \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(\underline{x}') & \frac{\partial}{\partial x_2} f_1(\underline{x}') & \frac{\partial}{\partial x_3} f_1(\underline{x}') & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_1(\underline{x}') \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_2(\underline{x}') & \frac{\partial}{\partial x_2} f_2(\underline{x}') & \frac{\partial}{\partial x_3} f_2(\underline{x}') & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_2(\underline{x}') \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_3(\underline{x}') & \frac{\partial}{\partial x_2} f_3(\underline{x}') & \frac{\partial}{\partial x_3} f_3(\underline{x}') & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_3(\underline{x}') \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_n(\underline{x}') & \frac{\partial}{\partial x_2} f_n(\underline{x}') & \frac{\partial}{\partial x_3} f_n(\underline{x}') & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_n(\underline{x}') \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_1' \\ x_2 - x_2' \\ x_3 - x_3' \\ \vdots \\ x_n - x_n' \end{bmatrix} \quad (\text{A. 25})$$

siendo:

$$(\underline{x}') = (x_1', x_2', x_3', \dots, x_n') = \underline{X}'$$

Si escribimos el sistema (A. 23) como una función vectorial $\underline{U} = \underline{F}(\underline{X})$, entonces la matriz jacobiana $\underline{J}(x_1', x_2', x_3', \dots, x_n')$ es el análogo *n-dimensional* de la derivada, pues a partir de la expresión (A. 25), tendríamos:

$$\Delta \underline{F}(\underline{X}) \approx \underline{J}(x_1', x_2', x_3', \dots, x_n') \Delta \underline{X} \quad (\text{A. 26})$$

Ahora si hacemos que $(u_1, u_2, u_3, \dots, u_n) = (0, 0, 0, \dots, 0)$, en el sistema de ecuaciones no lineales (A. 23), este tendría la forma siguiente:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= 0 \\ f_3(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A. 27})$$

Suponiendo que $\underline{X}'' = (\underline{x}'') = (x_1'', x_2'', x_3'', \dots, x_n'')$ es una solución del sistema de ecuaciones lineales (A. 27), se tendría que:

$$\begin{aligned}
f_1(x_1'', x_2'', x_3'', \dots, x_n'') &= 0 \\
f_2(x_1'', x_2'', x_3'', \dots, x_n'') &= 0 \\
f_3(x_1'', x_2'', x_3'', \dots, x_n'') &= 0 \\
&\vdots \\
f_n(x_1'', x_2'', x_3'', \dots, x_n'') &= 0
\end{aligned} \tag{A. 28}$$

Si consideramos pequeños cambios de las funciones cerca de un punto inicial $\underline{X}' = (\underline{x}') = (x_1', x_2', x_3', \dots, x_n')$ muy próximo a la solución $\underline{X}'' = (\underline{x}'') = (x_1'', x_2'', x_3'', \dots, x_n'')$, podemos expresar dichos cambios de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\Delta u_1 &= u_1 - u_1' \quad , \quad \Delta x_1 = x_1 - x_1' \\
\Delta u_2 &= u_2 - u_2' \quad , \quad \Delta x_2 = x_2 - x_2' \\
\Delta u_3 &= u_3 - u_3' \quad , \quad \Delta x_3 = x_3 - x_3' \\
&\vdots \quad , \quad \vdots \\
\Delta u_n &= u_n - u_n' \quad , \quad \Delta x_n = x_n - x_n'
\end{aligned} \tag{A. 29}$$

Asumiendo que $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = (x_1'', x_2'', x_3'', \dots, x_n'')$, en la expresión (A. 23) y usando los resultados obtenidos en las expresiones (A. 28) y (A. 29), los cambios en las variables dependientes serían:

$$\begin{aligned}
\Delta u_1 &= u_1 - u_1' = f_1(\underline{x}'') - f_1(\underline{x}') = 0 - f_1(\underline{x}') \\
\Delta u_2 &= u_2 - u_2' = f_2(\underline{x}'') - f_2(\underline{x}') = 0 - f_2(\underline{x}') \\
\Delta u_3 &= u_3 - u_3' = f_3(\underline{x}'') - f_3(\underline{x}') = 0 - f_3(\underline{x}') \\
&\vdots = \vdots = \vdots = \vdots \\
\Delta u_n &= u_n - u_n' = f_n(\underline{x}'') - f_n(\underline{x}') = 0 - f_n(\underline{x}')
\end{aligned} \tag{A. 30}$$

donde:

$$\begin{aligned}
(\underline{x}') &= \underline{X}' = (x_1', x_2', x_3', \dots, x_n') \\
(\underline{x}'') &= \underline{X}'' = (x_1'', x_2'', x_3'', \dots, x_n'')
\end{aligned}$$

En base a las expresiones (A. 25), (A. 29) y (A. 30), podemos deducir lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(\underline{x}') & \frac{\partial}{\partial x_2} f_1(\underline{x}') & \frac{\partial}{\partial x_3} f_1(\underline{x}') & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_1(\underline{x}') \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_2(\underline{x}') & \frac{\partial}{\partial x_2} f_2(\underline{x}') & \frac{\partial}{\partial x_3} f_2(\underline{x}') & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_2(\underline{x}') \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_3(\underline{x}') & \frac{\partial}{\partial x_2} f_3(\underline{x}') & \frac{\partial}{\partial x_3} f_3(\underline{x}') & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_3(\underline{x}') \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_n(\underline{x}') & \frac{\partial}{\partial x_2} f_n(\underline{x}') & \frac{\partial}{\partial x_3} f_n(\underline{x}') & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_n(\underline{x}') \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix} \approx - \begin{bmatrix} f_1(\underline{x}') \\ f_2(\underline{x}') \\ f_3(\underline{x}') \\ \vdots \\ f_n(\underline{x}') \end{bmatrix} \\
 & \underline{\underline{J}}(\underline{x}') \Delta \underline{\underline{X}} = -\underline{\underline{F}}(\underline{x}')
 \end{aligned} \tag{A. 31}$$

Si la matriz jacobiana $\underline{\underline{J}}(\underline{x}')$ que aparece en la expresión (A. 31) es invertible, entonces podemos despejar $\Delta \underline{\underline{X}}$ de manera que:

$$\Delta \underline{\underline{X}} \approx -\underline{\underline{J}}(\underline{x}')^{-1} \underline{\underline{F}}(\underline{x}') \tag{A. 32}$$

Esto nos proporciona la siguiente aproximación de $\underline{\underline{X}}$ a la solución $\underline{\underline{X}}'' = (\underline{x}'') = (x_1'', x_2'', x_3'', \dots, x_n'')$, si denominamos a dicha aproximación como $\underline{\underline{X}}''_i$, entonces se tendría que

$$\underline{\underline{X}}''_i = \underline{\underline{X}}' + \Delta \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{X}}' - \underline{\underline{J}}(\underline{x}')^{-1} \underline{\underline{F}}(\underline{x}') \tag{A. 33}$$

Generalizando lo anterior podemos escribir la aproximación i -ésima a la solución mediante la siguiente expresión:

$$\underline{\underline{X}}_i = \underline{\underline{X}}_{i-1} + \Delta \underline{\underline{X}}_{i-1} = \underline{\underline{X}}_{i-1} - \underline{\underline{J}}(\underline{\underline{X}}_{i-1})^{-1} \underline{\underline{F}}(\underline{\underline{X}}_{i-1}) \tag{A. 34}$$

Según lo descrito, en los párrafos anteriores, podemos ver que el proceso de resolución de un sistema de ecuaciones no lineal, mediante la aplicación del *Método de Newton – Raphson*, es de carácter iterativo. Este método de prueba y error se realiza hasta que dos soluciones, obtenidas en iteraciones sucesivas, sean prácticamente iguales entre sí. Como criterio para determinar si dos soluciones son muy próximas entre sí, se puede emplear la norma $\|\cdot\|_1$, la cual permite calcular la distancia entre dos puntos $\underline{\underline{X}}$ e $\underline{\underline{Y}}$ en R^n , dicha norma se define de la siguiente manera:

$$\|\underline{X} - \underline{Y}\| = \sum_{j=1}^n |x_j - y_j| \quad (\text{A. 35})$$

El criterio para la convergencia de la solución se puede establecer mediante una tolerancia tol , la cual se puede comparar con la norma $\|\cdot\|_1$, descrita anteriormente, de forma que se encontraría una solución aceptable cuando la norma $\|\cdot\|_1$, aplicada a dos soluciones, obtenidas en iteraciones sucesivas, cumpla con lo siguiente: $\|\underline{X}_i - \underline{X}_{i-1}\| \leq tol$.

El *Método de Newton – Raphson* utilizado en la resolución de sistemas no lineales de ecuaciones, generalmente converge a la solución cuando las no linealidades presentes en las ecuaciones son de carácter simple, como es el caso de potencias enteras por ejemplo. La principal dificultad del *Método de Newton – Raphson* radica en encontrar las derivadas parciales de cada una de las ecuaciones del sistema, respecto de cada incógnita.

A continuación procederemos a encontrar las derivadas parciales de las ecuaciones de *Saint – Venant*, discretizadas en diferencias finitas, según el esquema de Preissmann, respecto de las incógnitas Q_i^{n+1} , Q_{i+1}^{n+1} , A_i^{n+1} y A_{i+1}^{n+1} .

A.6 Derivadas parciales de las Ecuaciones de Saint – Venant Discretizadas en Diferencias según el Esquema De Preissmann respecto de Q_i^{n+1} , Q_{i+1}^{n+1} , A_i^{n+1} y A_{i+1}^{n+1}

Derivadas parciales de la Ecuación del Balance de Masa discretizada según el Esquema de Preissmann respecto a Q_i^{n+1} , Q_{i+1}^{n+1} , A_i^{n+1} y A_{i+1}^{n+1}

Derivando la expresión (A. 6) respecto de Q_i^{n+1} , Q_{i+1}^{n+1} , A_i^{n+1} y A_{i+1}^{n+1} , tendríamos:

Derivada parcial de C respecto a Q_i^{n+1} :

$$\frac{\partial C}{\partial Q_i^{n+1}} = -\theta \cdot \Delta t \quad (\text{A. 36})$$

Derivada parcial de C respecto a Q_{i+1}^{n+1} :

$$\frac{\partial C}{\partial Q_{i+1}^{n+1}} = \theta \cdot \Delta t \quad (\text{A. 37})$$

Derivada parcial de C respecto a A_i^{n+1} :

$$\frac{\partial C}{\partial A_i^{n+1}} = \frac{\theta \cdot \Delta t}{2} \frac{\partial G_i^{n+1}}{\partial A_i^{n+1}} + \phi \cdot \Delta x \quad (\text{A. 38})$$

Derivada parcial de C respecto a A_i^{n+1} :

$$\frac{\partial C}{\partial A_i^{n+1}} = \frac{\theta \cdot \Delta t}{2} \frac{\partial G_i^{n+1}}{\partial A_i^{n+1}} + \phi \cdot \Delta x \quad (\text{A. 39})$$

Derivada parcial de C respecto a A_{i+1}^{n+1} :

$$\frac{\partial C}{\partial A_{i+1}^{n+1}} = (1 - \phi) \cdot \Delta x + \frac{\theta \cdot \Delta t}{2} \frac{\partial G_{i+1}^{n+1}}{\partial A_{i+1}^{n+1}} \quad (\text{A. 40})$$

Las derivadas parciales del caudal lateral total G , de entrada al canal o de salida del mismo, respecto al área, dependen del tipo de estructura hidráulica que permite el ingreso o descarga de caudal, según sea el caso. Entre las principales estructuras hidráulicas de ingreso o descarga de caudal podemos mencionar a los vertederos laterales, compuertas laterales, orificios, sifones, etc.

Cuando el calado del agua en el canal tiene influencia directa sobre el caudal entregado o descargado por la estructura hidráulica considerada, las derivadas parciales de G , respecto al área, existen y son no nulas. Si el caudal que ingresa o descarga la estructura hidráulica no se ve afectado por el nivel de agua en el canal, entonces las derivadas parciales de G , respecto del área, son iguales a cero. Cabe indicar que para la simulación planteada más adelante se considerará que el caudal de entrada al canal no se ve influenciado por el nivel de agua en el mismo, esta situación se presenta comúnmente para el caso de vertederos laterales que descargan libremente un caudal a un canal, como es el caso de vertederos de exceso laterales, que eliminan los picos de caudal que entran a las bocatomas durante las avenidas o crecidas en ríos o en canales.

Derivadas parciales de La Ecuación del Balance de la Cantidad de Movimiento discretizada según el Esquema de Preissmann respecto a Q_i^{n+1} , Q_{i+1}^{n+1} , A_i^{n+1} y A_{i+1}^{n+1}

Derivando la expresión (A. 16) respecto de Q_i^{n+1} , Q_{i+1}^{n+1} , A_i^{n+1} y A_{i+1}^{n+1} , tendríamos:

Derivada parcial de M respecto a Q_i^{n+1} :

$$\frac{\partial M}{\partial Q_i^{n+1}} = \frac{\phi \cdot \Delta x}{g} - \frac{2\theta \cdot \Delta t}{g} \frac{Q_i^{n+1}}{A_i^{n+1}} + (2\theta \cdot \phi) \frac{D_i^{n+1}}{Q_i^{n+1}} \Delta x \Delta t \quad (\text{A. 41})$$

Derivada parcial de M respecto a Q_{i+1}^{n+1} :

$$\frac{\partial M}{\partial Q_{i+1}^{n+1}} = \frac{(1-\phi) \cdot \Delta x}{g} + \frac{2\theta \cdot \Delta t}{g} \frac{Q_{i+1}^{n+1}}{A_{i+1}^{n+1}} + 2\theta \cdot (1-\phi) \frac{D_{i+1}^{n+1}}{Q_{i+1}^{n+1}} \Delta x \Delta t \quad (\text{A. 42})$$

Derivada parcial de M respecto a A_i^{n+1} :

$$\frac{\partial M}{\partial A_i^{n+1}} = \theta \cdot \Delta t \left[-\frac{\partial H_i^{n+1}}{\partial A_i^{n+1}} + \frac{(Q_i^{n+1})^2}{g(A_i^{n+1})^2} + \phi \cdot \Delta x \left(\frac{\partial D_i^{n+1}}{\partial A_i^{n+1}} - S_0 \right) \right] \quad (\text{A. 43})$$

Derivada parcial de M respecto a A_{i+1}^{n+1} :

$$\frac{\partial M}{\partial A_{i+1}^{n+1}} = \theta \cdot \Delta t \left[\frac{\partial H_{i+1}^{n+1}}{\partial A_{i+1}^{n+1}} - \frac{(Q_{i+1}^{n+1})^2}{g(A_{i+1}^{n+1})^2} + (1-\phi) \cdot \Delta x \left(\frac{\partial D_{i+1}^{n+1}}{\partial A_{i+1}^{n+1}} - S_0 \right) \right] \quad (\text{A. 44})$$

Las derivadas parciales de H y D , con respecto al área, dependen de la forma de la sección transversal del canal

A.7 Ensamblaje del Sistema de Ecuaciones

cualquiera. El proceso iterativo se repite hasta encontrar una solución muy próxima a su inmediatamente anterior. Una vez encontrada la solución se pasa al siguiente tiempo de análisis y el proceso se lleva nuevamente a cabo, todo esto de forma sucesiva hasta completar el lapso o intervalo de tiempo dentro del cual se realizará el análisis del flujo gradualmente variado no permanente

BIBLIOGRAFÍA

CHOW, V., “Hidráulica de Canales Abiertos”, Segunda Edición, Editorial McGraw Hill, Santa Fe de Bogotá, Colombia, 2006.

JOVIĆ, V., “Analysis and Modelling of Non-Steady Flow in Pipe and Channel Network”, Primera Edición, Editorial John Wiley & Sons, Inglaterra, Chichester, 2013.

LÖHNER, R., “Applied Computational Fluid”, Segunda Edición, Editorial John Wiley & Sons, Chichester, 2008.

OLIVER, X., & AGELET DE SARACIBAR, C. (2002). *Mecánica de Medios Continuos para Ingenieros* (2da. Edición). España, Barcelona: Editorial de la Universidad Politécnica de Catalunya.

ZIENKIEWICZ, O. C, TAYLOR, R. L., y Nithiarasu, P., “The Finite Element Method for Fluid Dynamics”, Sexta Edición, Editorial Elsevier, Inglaterra, Oxford, 2005.